MAC0466
TEORIA DOS JOGOS ALGORÍTMICA
PROVA 1

Renato Lui Geh
NUSP: 8536030

Exercício 2. No Jogo de Balanceamento de Carga, temos n tarefas, cada uma com um peso w_i, e m máquinas, cada uma com uma velocidade s_i. Cada jogador escolhe a máquina onde vai sua tarefa. Mostre que existe no máximo um equilíbrio de Nash totalmente misto para toda instância do Jogo de Balanceamento de Carga. *Dica:* Descreva as condições nas probabilidades p_i^j impostas por um equilíbrio de Nash totalmente misto na forma de um sistema de equações lineares e mostre que tal sistema tem uma única solução. Deduza daí que há no máximo um equilíbrio destes.

Resposta 2.

n tarefas, m máquinas

w_i: peso da tarefa i

s_i: velocidade da máquina i

Existe um equilíbrio $S^\star$ pelo Teorema de Nash, já que o jogo é finito. Queremos provar que $S^\star$ é único.

A carga de uma máquina é dada por

$$l_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{w_i x_i^j}{s_j}$$

onde x_i^j é uma variável aleatória e igual a 1 se i escolhe a máquina j e $x_i^j = 0$ caso contrário.

O custo esperado é

$$c_i^j = \frac{w_i + \sum_{\substack{k \neq i \\ k=1}}^{n} w_k p_k^j}{s_j}$$

de i escolher j.

Tirando a esperança de l_j:

$$\mathbb{E}[l_j] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{w_i x_i^j}{s_j}\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[\frac{w_i x_i^j}{s_j}\right] = \sum_i \mathbb{E}\left[\frac{w_i}{s_j}\right] \mathbb{E}[x_i^j] = \sum_i \mathbb{E}\left[\frac{w_i}{s_j}\right] p_i^j = \sum_{i=1}^{n} \frac{w_i}{s_j} p_i^j$$

O custo c_i^j então passa a ser:

$$c_i^j = \frac{w_i}{s_j} + \sum_{\substack{k \neq i \\ k=1}} \frac{w_k}{s_j} p_k^j = \frac{w_i}{s_j} + \mathbb{E}[l_j] - \frac{w_i}{s_j} p_i^j = \frac{w_i}{s_j}(1 - p_i^j) + \mathbb{E}[l_j] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (c_i^j - \mathbb{E}[l_j]) \frac{s_j}{w_i} = 1 - p_i^j \Rightarrow p_i^j = 1 - c_i^j \frac{s_j}{w_i} + \mathbb{E}[l_j] \frac{s_j}{w_i}$$

Portanto cada p_i^j é condicionado por:

$$p_i^j = 1 - c_i^j \frac{s_j}{w_i} + \sum_{k=1}^{n} \frac{w_k}{s_j} p_k^j \frac{s_j}{w_i} = 1 - c_i^j \frac{s_j}{w_i} + \sum_{k=1}^{n} \frac{w_k}{w_i} p_k^j$$

$$p_i^j = 1 - c_i^j \frac{s_j}{w_i} + p_i^j + \sum_{\substack{k \neq i \\ k=1}}^{n} \frac{w_k}{w_i} p_k^j \Rightarrow -1 + c_i^j \frac{s_j}{w_i} = \sum_{\substack{k \neq i \\ k=1}}^{n} p_k^j$$

Resultando no seguinte sistema:

$$\begin{cases} \sum_{\substack{k \neq i \\ k=1}}^{n} p_k^j = c_i^j \frac{s_j}{w_i} - 1 & 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \quad (\star) \\ \sum_{j=1}^{m} p_i^j = 1, & 1 \leq i \leq n \quad (\star\star) \end{cases}$$

Em $(\star)$ temos uma equação de $n-1$ variáveis se fixarmos i e j. No total, temos nm equações de $n-1$ variáveis. Em $(\star\star)$ temos uma equação de m variávels fixando i. Portanto temos no total um sistema de nm equações e nm variáveis. Como a matriz formada pelas equações é não-singular (já que $p_i^j > 0$), então existe apenas uma solução para o sistema, e portanto existe apenas um único equilibrio.

$\square$