Jogos de Anti-Coordenação e Colorações Estáveis em Grafos

Renato Lui Geh
NUSP:8536030

Introdução

Jogos de coordenação:

Classe de jogos em que jogadores jogam cooperativamente. Jogador i fazer a mesma ação que jogador j gera um benefício para ambos jogadores.

Exemplos:

- Batalha dos sexos (visto em aula)
- Caça ao cervo

Jogos de anti-coordenação:

Variante do jogo de coordenação em que jogador i escolher mesma ação que jogador j gera custo.

Exemplos:

- Mineração
- Habilidades de empregados
- Rotas de avião

Dois jogadores:

- Fácil
- Matriz de utilidade/custo

Mais de dois jogadores:

- Difícil
- Grafos

Jogo: $G = (V, E)$

$$\begin{aligned} v \in V : &\quad \text{jogador} \\ e \in E : &\quad \text{relação entre dois jogadores} \\ \{1, \ldots, k\} : &\quad \text{ações} \end{aligned}$$

Utilidade: número de vizinhos que têm ações diferentes
Equilíbrio: v não tem incentivo para mudar ação dados vizinhos

Parece com algo?

Jogo: $G = (V, E)$

$$\begin{aligned} v \in V &: \quad \text{jogador} \\ e \in E &: \quad \text{relação entre dois jogadores} \\ \{1, \ldots, k\} &: \quad \text{ações} \end{aligned}$$

Utilidade: número de vizinhos que têm ações diferentes
Equilíbrio: v não tem incentivo para mudar ação dados vizinhos

Parece com algo? **Coloração**

Objetivos:

1. Para $k \geq 2$, existe algoritmo polinomial para achar k-coloração estável num grafo não-direcionado.
2. PoA para k-coloração em grafos não-direcionado é $\Theta\left(\frac{k}{k-1}\right)$.
3. Para $k \geq 2$, descobrir se existe k-coloração estritamente estável num grafo não-direcionado é NP-difícil.

Existe generalização do 3 para digrafos, mas vou mostrar apenas para grafos não-direcionados. Vejam [KPR13] se estiverem curiosos.

Definições

Seja $G = (V, E)$ grafo não-direcionado.
Chamamos $c \in C = \{f | f : V \rightarrow \{1, \ldots, k\}\}$ de uma coloração.

Todos $v \in V$ escolhem cor simultaneamente. A utilidade de v é:

$$\mu_c(v) := \sum_{\{u,v\} \in E} 1_{\{c(u) \neq c(v)\}}$$

O bem-estar social de G dada uma coloração c é:

$$W(G, c) := \sum_{v \in V} \mu_c(v)$$

Uma coloração c é **estável** se nenhum vértice v pode aumentar $\mu_c(v)$ mudando $c(v)$.

Uma coloração c é **estritamente estável** se para todo $v \in V$, toda $c' \in C$, $c' \neq c$ temos que $\mu_c(v) > \mu_{c'}(v)$. Senão, c é **não-estrita**.

O PoA de G é:

$$\text{PoA}(G) := \frac{\max_{c' \in C} W(G, c')}{\min_{c \in Q} W(G, c)}$$

onde Q é o conjunto de colorações estáveis.

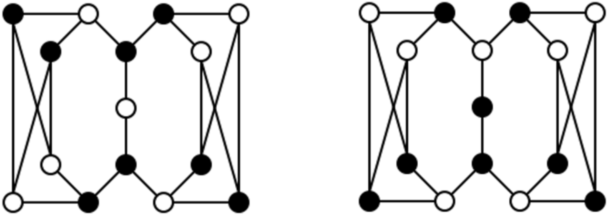

Figura: O grafo da esquerda é estritamente estável e tem $W(G, c) = 40$, enquanto que o da direita é não-estrito com $W(G, c') = 42$.
Fonte: [KPR13]

Colorações estáveis

Proposição 1.

Para todo $k \geq 2$*, todo grafo finito* $G = (V, E)$ *admite uma* k*-coloração estável. Tal* k*-coloração estável pode ser encontrada em tempo polinomial.*

Demonstração (Proposição 1)

Primeiro chamaremos:

$$\begin{aligned} c: &\quad \text{coloração} \\ \phi(c): &\quad \text{número de arestas coloridas apropriadamente} \end{aligned}$$

Note que $0 \leq \phi(c) \leq |E|$. Vamos primeiro mostrar que $W(G, c) = 2\phi(c)$.

Fixa $v \in V$.

$$n_v: \quad \text{número de cores diferentes em } v$$

$$\phi(c) = \sum_{e \in E} 1_{\{e \text{ apropriado}\}}$$

Se e é apropriado ($c(u) \neq c(v)$), então contamos e duas vezes: (u, v) e (v, u).

Somando todas as arestas apropriadas para todo v:

$$\sum_{v \in V} \sum_{e=\{u,v\} \in E} 1_{\{e \text{ apropriado}\}} = \sum_{v \in V} n_v = 2\phi(c)$$

Mas n_v é exatamente $\mu_c(v)$.

$$\sum_{v \in V} n_v = 2\phi(c) = \sum_{v \in V} \mu_c(v) = W(G, c)$$

Note que $\phi(c)$ é uma função potencial exata, então esse é um jogo de potencial.

Dada uma coloração c, um vértice v está *infeliz* se v tem mais vizinhos com mesma cor que v do que diferentes.

Para acharmos uma k-coloração estável em G fazemos:

Enquanto existe algum vértice v infeliz, mude $c(v)$ para algum $c'(v)$ tal que

$$c'(v) = \underset{m \in \{1,\ldots,k\}}{\arg\min} \sum_{u \in N(v)} 1_{\{c(u)=m\}},$$

onde $N(v)$ são os vizinhos de v.

Se v é vértice infeliz, então mudar para $c'(v)$ vai sempre aumentar ϕ. Aumentar ϕ aumenta $W(G, c)$, pois $W(G, c) = 2\phi$.

Como a cada iteração pelo menos uma aresta vai ser colorida apropriadamente aumentando ϕ, então depois de no máximo $|E|$ iterações, nenhum $v \in V$ estará infeliz.

Se nenhum vértice está infeliz, então nenhum vértice terá incentivo para mudar. Então a coloração é estável.

$\square$

Proposição 2.

O preço da anarquia de uma k-coloração de um jogo de anti-coordenação é $\Theta\left(\frac{k}{k-1}\right)$.

Demonstração (Proposição 2)

Primeiro mostramos um bound superior:

Princípio da casa dos pombos (PCP): $n = l \cdot m + 1$ objetos distribuídos em m conjuntos, então pelo menos um conjunto terá pelo menos $l + 1$ objetos.

Pelo PCP, todo vértice v pode sempre alcançar $\frac{k-1}{k} \cdot \deg(v)$ usando o algoritmo da Proposição 1. Supondo que todos alcançam tal máximo, então:

$$\mathrm{PoA}(G) = \frac{\max_{c' \in C} W(G, c')}{\min_{c \in Q} W(G, c)} = \frac{\sum_{v \in V} \deg(v)}{\sum_{v \in V} \frac{k-1}{k} \cdot \deg(v)} = \frac{k}{k-1}$$

Para acharmos bound inferior, tome $G = (V, E)$ a junção de dois grafos completos K_k^1 e K_k^2 tal que

$$V(K_k^1) = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\},$$
$$V(K_k^2) = \{v_{k+1}, v_{k+2}, \ldots, v_{2k}\},$$

$v_i \in V$, e junte K_k^1 com K_k^2 por arestas $\{v_i, v_{i+k}\}$ para todo k.

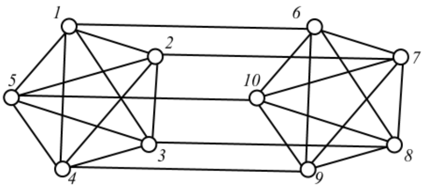

Figura: Com $k = 5$ temos o grafo G construído pela junção dos dois grafos completos K_5^1 e K_5^2. [KPR13]

Considere a seguinte coloração: para todo par de vértice $\{v_i, v_{i+k}\}$, $c(v_i) = c(v_{i+k}) = i$. A coloração c é **mínima** e **estável**. Então

$$\mu_c(v) = k - 1,$$

$$W(G, c) = \sum_{v \in V} \mu_c(v) = \sum_{j=1}^{|V|=2k} k - 1 = 2k(k-1).$$

- **Estável:** Todo vértice tem $k-1$ cores diferentes em seus vizinhos. Cada clique K_k precisa de pelo menos k cores, senão não é estável.
- **Mínima:** Única possível aresta não apropriadamente colorida é $\{v_i, v_{i+k}\}$.

Tome outra coloração c' tal que para cada par $\{v_i, v_{i+k}\}$, $c(v_i) = i$ e $c(v_{i+k}) = i + 1$. A coloração c' é **máxima**, e temos

$$
\begin{aligned}
\mu_c(v) &= k, \\
W(G, c) &= \sum_{v \in V} \mu_c(v) = \sum_{j=1}^{|V|=2k} k = 2k^2.
\end{aligned}
$$

- **Estável:** Como é máxima, é estável.
- **Máxima:** Cada vértice tem k vizinhos de cores diferentes e $\mu_c(v) = \deg(v) = k$.

Então coloração c é máxima e c' mínima e estável. Portanto

$$\text{PoA} = \frac{\max_{c' \in C} W(G, c')}{\min_{c \in Q} W(G, c)} = \frac{2k^2}{2k(k-1)} = \frac{k}{k-1}.$$

Então PoA $= \Theta\left(\frac{k}{k-1}\right)$.

$\square$

Colorações estritamente estáveis

Teorema 1.
Para todo $k \geq 2$, o problema de se determinar se o grafo não-direcionado G tem uma k-coloração estritamente estável é NP-completo.

O problema está em NP: dada um certificado de coloração c, para todo $v \in V$, verifique se para todo $c'(v) = i, i \in \{1, \ldots, k\}$, temos que $\mu_{c'}(v) < \mu_c(v)$.

Vamos dividir em dois casos: $k \geq 3$ e $k = 2$.

Reduções:

- **Caso 1:** $(k \geq 3)$ k-coloração clássica
- **Caso 2:** $(k = 2)$ 3-SAT

Caso 1: $k \geq 3$

Objetivo:

Transformar G em um grafo G' em que achar equilíbrio estrito equivale a achar k-coloração clássica.

Construção de G'

Vamos construir grafo G' a partir de G. Copie G em G'. Para toda aresta $e = \{u, v\} \in E(G')$, crie grafo H_e, onde H_e é um grafo completo K_{k-2}.

Para todo $w \in V(H_e)$, crie arestas $e'_1 = \{u, w\}$ e $e'_2 = \{v, w\}$ de forma a criar um clique K_k com $H_e \cup \{u, v\}$.

Se existe vértice isolado $v \in V(G)$ (i.e. $\deg(v) \leq 1$), crie uma cópia de K_{k-1} e adicione arestas $\{v, w\}$, $w \in K_{k-1}$, em G'.

Vamos mostrar que uma k-coloração clássica em G' equivale a uma k-coloração clássica em G, e que tal coloração equivale a um equilíbrio estrito em G.

Colorindo G'

Fixe uma k-coloração apropriada φ de G. Aplique ϕ em todo vértice $v \in G'$ que veio de G.

Para toda aresta $e = \{u, v\} \in E(G')$, colore H_e com as $k - 2$ cores diferentes de u e v. Agora o clique K_k de u e v está em equilíbrio estrito e também é uma coloração apropriada.

Para vértices isolados, é suficiente colorir K_{k-1} com as $k - 1$ cores restantes diferentes da cor do vértice isolado.

Objetivo:

Transformar G em um grafo G' em que **achar equilíbrio estrito equivale a achar k-coloração clássica.**

($\Longleftarrow$) Tal coloração é um equilíbrio estrito, já que para todo vértice $v \in V(G')$, v é adjacente às $k-1$ outras cores. Mudar a cor de v implica em $c(v) = v(w)$, $w \in V(H_e)$, o que diminui $\mu_c(v)$.

($\Longrightarrow$) Suponha que existe equilíbrio estrito c com k cores em G'. Então nenhuma aresta $e = \{u, v\}$ que veio originalmente de G pode ser monocromática $(c(u) = c(v))$. Por que?

Suponha $e = \{u, v\}$ monocromática. Então $c(u) = c(v)$. Existem $k - 1$ cores a serem distribuídas em H_e. Suponha que escolhemos vértices $w \in E(H_e)$ de forma a colorir H_e apropriadamente. Sobra uma cor j não usada no clique K_k. Mas então u tem incentivo para mudar $c(u) = j$ a fim de aumentar $\mu_c(u)$. Portanto não é equilíbrio. Contradição.

Portanto, como e não é monocromática, então c é uma k-coloração clássica apropriada.

Disso temos que **equilíbrio estrito equivale a k-coloração clássica**, e portanto redução acaba para $k \geq 2$.

Caso 1: $k = 3$

Objetivo:

Mostrar que uma k-coloração estritamente estável em G equivale a achar uma valoração verdadeira de uma fórmula em 3-CNF.

Passos:

1. Tomar 3-CNF $\varphi = C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_k$;
2. Criar grafos C_i que representam as conjunções $\hat{C}_i$;
3. Mostrar que C_i está em equilíbrio estrito se e somente se $\hat{C}_i$ é satisfatível (Lema 1);
4. Juntar todos C_i em G mantendo consistência entre literais;
5. Mostrar que G está em equilíbrio estrito se e somente se φ é satisfatível.

Referências I

Jeremy Kun, Brian Powers e Lev Reyzin. "Anti-Coordination Games and Stable Graph Colorings". Em: *SAGT Symposium on Algorithmic Game Theory* (2013).