# Jogos de Anti-Coordenação e Colorações Estáveis em Grafos

Renato Lui Geh
NUSP:8536030

# Introdução

### Jogos de coordenação:

Classe de jogos em que jogadores jogam cooperativamente. Jogador $i$ fazer a mesma ação que jogador $j$ gera um benefício para ambos jogadores.

### Exemplos:

- Batalha dos sexos (visto em aula)
- Caça ao cervo

## Jogos de anti-coordenação:

Variante do jogo de coordenação em que jogador $i$ escolher mesma ação que jogador $j$ gera custo.

## Exemplos:

- Mineração
- Habilidades de empregados
- Rotas de avião

Dois jogadores:

- Fácil
- Matriz de utilidade/custo

Mais de dois jogadores:

- Difícil
- Grafos

**Jogo:** $G = (V, E)$

$$\begin{aligned} v \in V : &\quad \text{jogador} \\ e \in E : &\quad \text{relação entre dois jogadores} \\ \{1, \ldots, k\} : &\quad \text{ações} \end{aligned}$$

**Utilidade:** número de vizinhos que têm ações diferentes
**Equilíbrio:** $v$ não tem incentivo para mudar ação dados vizinhos

Parece com algo?

**Jogo:** $G = (V, E)$

$$\begin{aligned} v \in V : &\quad \text{jogador} \\ e \in E : &\quad \text{relação entre dois jogadores} \\ \{1, \ldots, k\} : &\quad \text{ações} \end{aligned}$$

**Utilidade:** número de vizinhos que têm ações diferentes
**Equilíbrio:** $v$ não tem incentivo para mudar ação dados vizinhos

Parece com algo? **Coloração**

# Objetivos:

1. Para $k \geq 2$, existe algoritmo polinomial para achar $k$-coloração estável num grafo não-direcionado.
2. PoA para $k$-coloração em grafos não-direcionado é $\Theta\left(\frac{k}{k-1}\right)$.
3. Para $k \geq 2$, descobrir se existe $k$-coloração estritamente estável num grafo não-direcionado é NP-difícil.

Existe generalização do 3 para digrafos, mas vou mostrar apenas para grafos não-direcionados. Vejam [KPR13] se estiverem curiosos.

# Definições

Seja $G = (V, E)$ grafo não-direcionado.
Chamamos $c \in C = \{f | f : V \to \{1, \ldots, k\}\}$ de uma coloração.

Todos $v \in V$ escolhem cor simultaneamente. A utilidade de $v$ é:

$$\mu_c(v) := \sum_{\{u,v\} \in E} 1_{\{c(u) \neq c(v)\}}$$

O bem-estar social de $G$ dada uma coloração $c$ é:

$$W(G, c) := \sum_{v \in V} \mu_c(v)$$

Uma coloração $c$ é **estável** se nenhum vértice $v$ pode aumentar $\mu_c(v)$ mudando $c(v)$.

Uma coloração $c$ é **estritamente estável** se para todo $v \in V$, toda $c' \in C$, $c' \neq c$ temos que $\mu_c(v) > \mu_{c'}(v)$. Senão, $c$ é **não-estrita**.

O PoA de $G$ é:

$$\mathrm{PoA}(G) := \frac{\max_{c' \in C} W(G, c')}{\min_{c \in Q} W(G, c)}$$

onde $Q$ é o conjunto de colorações estáveis.

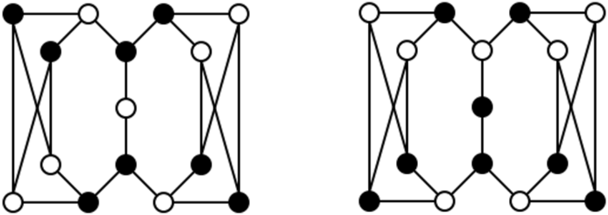

Figura 1: O grafo da esquerda é estritamente estável e tem $W(G, c) = 40$, enquanto que o da direita é não-estrito com $W(G, c') = 42$. Fonte: [KPR13]

# Colorações estáveis

**Proposição 1.**

*Para todo* $k \geq 2$*, todo grafo finito* $G = (V, E)$ *admite uma* $k$*-coloração estável. Tal* $k$*-coloração estável pode ser encontrada em tempo polinomial.*

# Demonstração (Proposição 1)

Primeiro chamaremos:

$$
\begin{aligned}
c: &\quad \text{coloração} \\
\phi(c): &\quad \text{número de arestas coloridas apropriadamente}
\end{aligned}
$$

Note que $0 \leq \phi(c) \leq |E|$. Vamos primeiro mostrar que $W(G, c) = 2\phi(c)$.

Fixa $v \in V$.

$$
\begin{aligned}
n_v: &\quad \text{número de cores diferentes em } v \\
\phi(c) &= \sum_{e \in E} 1_{\{e \text{ apropriado}\}}
\end{aligned}
$$

Se $e$ é apropriado ($c(u) \neq c(v)$), então contamos $e$ duas vezes: $(u, v)$ e $(v, u)$.

Somando todas as arestas apropriadas para todo $v$:

$$\sum_{v \in V} \sum_{e=\{u,v\} \in E} 1_{\{e \text{ apropriado}\}} = \sum_{v \in V} n_v = 2\phi(c)$$

Mas $n_v$ é exatamente $\mu_c(v)$.

$$\sum_{v \in V} n_v = 2\phi(c) = \sum_{v \in V} \mu_c(v) = W(G, c)$$

Note que $\phi(c)$ é uma função potencial exata, então esse é um jogo de potencial.

Dada uma coloração $c$, um vértice $v$ está *infeliz* se $v$ tem mais vizinhos com mesma cor que $v$ do que diferentes.

Para acharmos uma $k$-coloração estável em $G$ fazemos:

Enquanto existe algum vértice $v$ infeliz, mude $c(v)$ para algum $c'(v)$ tal que

$$c'(v) = \underset{m \in \{1,\ldots,k\}}{\arg\min} \sum_{u \in N(v)} 1_{\{c(u)=m\}},$$

onde $N(v)$ são os vizinhos de $v$.

Se $v$ é vértice infeliz, então mudar para $c'(v)$ vai sempre aumentar $\phi$. Aumentar $\phi$ aumenta $W(G, c)$, pois $W(G, c) = 2\phi$.

Como a cada iteração pelo menos uma aresta vai ser colorida apropriadamente aumentando $\phi$, então depois de no máximo $|E|$ iterações, nenhum $v \in V$ estará infeliz.

Se nenhum vértice está infeliz, então nenhum vértice terá incentivo para mudar. Então a coloração é estável.

$\square$

**Problema!**

(contra-exemplo na lousa)

**Proposição 2.**

*O preço da anarquia de uma $k$-coloração de um jogo de anti-coordenação é* $\Theta\left(\frac{k}{k-1}\right)$.

# Demonstração (Proposição 2)

Primeiro mostramos um bound superior:

**Princípio da casa dos pombos (PCP):** $n = l \cdot m + 1$ objetos distribuídos em $m$ conjuntos, então pelo menos um conjunto terá pelo menos $l + 1$ objetos.

Pelo PCP, todo vértice $v$ pode sempre alcançar $\frac{k-1}{k} \cdot \deg(v)$ usando o algoritmo da Proposição 1. Supondo que todos alcançam tal máximo, então:

$$\mathrm{PoA}(G) = \frac{\max_{c' \in C} W(G, c')}{\min_{c \in Q} W(G, c)} = \frac{\sum_{v \in V} \deg(v)}{\sum_{v \in V} \frac{k-1}{k} \cdot \deg(v)} = \frac{k}{k-1}$$

Para acharmos bound inferior, tome $G = (V, E)$ a junção de dois grafos completos $K_k^1$ e $K_k^2$ tal que

$$V(K_k^1) = \{v_1, v_2, \dots, v_k\},$$
$$V(K_k^2) = \{v_{k+1}, v_{k+2}, \dots, v_{2k}\},$$

$v_i \in V$, e junte $K_k^1$ com $K_k^2$ por arestas $\{v_i, v_{i+k}\}$ para todo $k$.

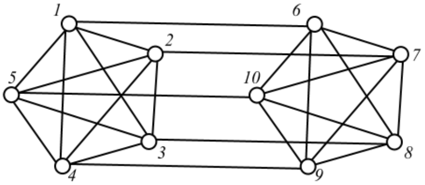


Figura 2: Com $k = 5$ temos o grafo $G$ construído pela junção dos dois grafos completos $K_5^1$ e $K_5^2$. [KPR13]

Considere a seguinte coloração: para todo par de vértice $\{v_i, v_{i+k}\}$, $c(v_i) = c(v_{i+k}) = i$. A coloração $c$ é **mínima** e **estável**. Então

$$\mu_c(v) = k - 1,$$

$$W(G, c) = \sum_{v \in V} \mu_c(v) = \sum_{j=1}^{|V|=2k} k - 1 = 2k(k-1).$$

- **Estável:** Todo vértice tem $k - 1$ cores diferentes em seus vizinhos. Cada clique $K_k$ precisa de pelo menos $k$ cores, senão não é estável.
- **Mínima:** Única possível aresta não apropriadamente colorida é $\{v_i, v_{i+k}\}$.

Tome outra coloração $c'$ tal que para cada par $\{v_i, v_{i+k}\}$, $c(v_i) = i$ e $c(v_{i+k}) = i + 1$. A coloração $c'$ é **máxima**, e temos

$$\mu_c(v) = k,$$

$$W(G, c) = \sum_{v \in V} \mu_c(v) = \sum_{j=1}^{|V|=2k} k = 2k^2.$$

- **Estável:** Como é máxima, é estável.
- **Máxima:** Cada vértice tem $k$ vizinhos de cores diferentes e $\mu_c(v) = \deg(v) = k$.

Então coloração $c$ é máxima e $c'$ mínima e estável. Portanto

$$\text{PoA} = \frac{\max_{c' \in C} W(G, c')}{\min_{c \in Q} W(G, c)} = \frac{2k^2}{2k(k-1)} = \frac{k}{k-1}.$$

Então $\text{PoA} = \Theta\left(\frac{k}{k-1}\right)$.

$\square$

# Colorações estritamente estáveis

**Teorema 1.**
*Para todo $k \geq 2$, o problema de se determinar se o grafo não-direcionado $G$ tem uma $k$-coloração estritamente estável é NP-completo.*

**O problema está em NP:** dado um certificado de coloração $c$, para todo $v \in V$, verifique se para todo $c'(v) = i, i \in \{1, \ldots, k\}$, temos que $\mu_{c'}(v) < \mu_c(v)$.

Vamos dividir em dois casos: $k \geq 3$ e $k = 2$.

**Reduções:**

- **Caso 1:** ($k \geq 3$) k-coloração clássica
- **Caso 2:** ($k = 2$) 3-SAT

## **Caso 1:** $k \geq 3$

Objetivo:

Transformar $G$ em um grafo $G'$ em que achar equilíbrio estrito equivale a achar $k$-coloração clássica.

### Construção de $G'$

Vamos construir grafo $G'$ a partir de $G$. Copie $G$ em $G'$. Para toda aresta $e = \{u, v\} \in E(G')$, crie grafo $H_e$, onde $H_e$ é um grafo completo $K_{k-2}$.

Para todo $w \in V(H_e)$, crie arestas $e_1' = \{u, w\}$ e $e_2' = \{v, w\}$ de forma a criar um clique $K_k$ com $H_e \cup \{u, v\}$.

Se existe vértice isolado $v \in V(G)$ (i.e. $\deg(v) \leq 1$), crie uma cópia de $K_{k-1}$ e adicione arestas $\{v, w\}$, $w \in K_{k-1}$, em $G'$.

Vamos mostrar que uma $k$-coloração clássica em $G'$ equivale a uma $k$-coloração clássica em $G$, e que tal coloração equivale a um equilíbrio estrito em $G$.

## Colorindo $G'$

Fixe uma $k$-coloração apropriada $\varphi$ de $G$. Aplique $\varphi$ em todo vértice $v \in G'$ que veio de $G$.

Para toda aresta $e = \{u, v\} \in E(G')$, colore $H_e$ com as $k - 2$ cores diferentes de $u$ e $v$. Agora o clique $K_k$ de $u$ e $v$ está em equilíbrio estrito e também é uma coloração apropriada.

Para vértices isolados, é suficiente colorir $K_{k-1}$ com as $k - 1$ cores restantes diferentes da cor do vértice isolado.

Objetivo:

Transformar $G$ em um grafo $G'$ em que **achar equilíbrio estrito equivale a achar k-coloração clássica.**

$(\Longleftarrow)$ Tal coloração é um equilíbrio estrito, já que para todo vértice $v \in V(G')$, $v$ é adjacente às $k-1$ outras cores. Mudar a cor de $v$ implica em $c(v) = v(w)$, $w \in V(H_e)$, o que diminui $\mu_c(v)$.

$(\Longrightarrow)$ Suponha que existe equilíbrio estrito $c$ com $k$ cores em $G'$. Então nenhuma aresta $e = \{u, v\}$ que veio originalmente de $G$ pode ser monocromática $(c(u) = c(v))$. Por que?

Suponha $e = \{u, v\}$ monocromática. Então $c(u) = c(v)$. Existem $k - 1$ cores a serem distribuídas em $H_e$. Suponha que escolhemos vértices $w \in E(H_e)$ de forma a colorir $H_e$ apropriadamente. Sobra uma cor $j$ não usada no clique $K_k$. Mas então $u$ tem incentivo para mudar $c(u) = j$ a fim de aumentar $\mu_c(u)$. Portanto não é equilíbrio. Contradição.

Portanto, como $e$ não é monocromática, então $c$ é uma $k$-coloração clássica apropriada.

Disso temos que **equilíbrio estrito equivale a k-coloração clássica**, e portanto redução acaba para $k \geq 2$.

**Caso 2:** $k = 2$

Objetivo:

Mostrar que uma $k$-coloração estritamente estável em $G$ equivale a achar uma valoração verdadeira de uma 3-CNF.

**Passos:**

1. Tomar 3-CNF $\varphi = \hat{C}_1 \wedge \hat{C}_2 \wedge \cdots \wedge \hat{C}_k$;
2. Criar grafos $C_i$ que representam as conjunções $\hat{C}_i$;
3. Mostrar que $C_i$ está em equilíbrio estrito se e somente se $\hat{C}_i$ é satisfatível (Lema 1);
4. Juntar todos $C_i$ em $G$ mantendo consistência entre literais;
5. Mostrar que $G$ está em equilíbrio estrito se e somente se $\varphi$ é satisfatível.

1.

Tome $\varphi = \hat{C}_1 \wedge \hat{C}_2 \wedge \cdots \wedge \hat{C}_k$ uma 3-CNF. Queremos construir o grafo $G$ a partir das cláusulas disjuntivas. Para isso vamos construir os "pedaços" $C_i$ de $G$ de modo que $C_i$ corresponda a $\hat{C}_i$.

2.

Vamos chamar de cláusulas *gadget* os "pedaços" $C_i$. Os vértices extremos de $C_i$ representam os literais de $\hat{C}_i$. Na Figura 3, temos a cláusula $\hat{C} = (x \vee y \vee \overline{z})$.

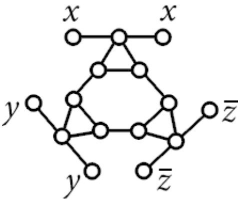


Figura 3: Cláusula $\hat{C} = (x \vee y \vee \overline{z})$ representada pela cláusula *gadget* $C$. Literais são pares de vértices e um literal ser satisfatível corresponde ao par ser monocromático.

Vamos mostrar que se um literal é satisfatível, então o par de vértices representado em $C$ é monocromático. Vamos chamar este par de literal *gadget*.

3.

**Lema 1.**

*Qualquer 2-coloração estritamente estável de uma cláusula gadget tem um literal gadget monocromático. Além disso, qualquer coloração dos literal gadgets de uma cláusula gadget que inclue um literal gadget monocromático implica na cláusula gadget estar em equilíbrio estrito.*

# Demonstração (Lema 1)

Primeiro mostraremos que **toda coloração em que existe um literal gadget é um equilíbrio estrito**. A Figura 4 enumera todas as possíveis colorações em que existe pelo menos um literal *gadget* monocromático.

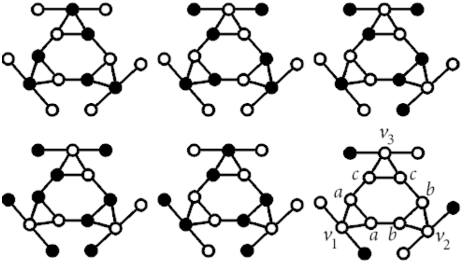


Figura 4: As cinco primeiras cláusulas *gadget* tem algum literal *gadget* monocromático. Em todos temos um equilíbrio estrito. Estas cinco cláusulas *gadget* enumeram todas possíveis colorações com pelo menos um literal *gadget* monocromático. A sexta imagem mostra o caso em que os literais *gadget* não são monocromáticos.

Agora falta mostrar que **se não existe algum literal gadget monocromático na coloração, então ela não é estrita**.

Suponha que exista uma coloração $c$ estritamente estável e todos literais *gadget* são multicromáticos.

(desenho na lousa)

Chame $v_1$, $v_2$ e $v_3$ os vértices entre os literais. Chame $v_i^1, v_i^2$ os vizinhos de $v_i$ que não são literais. Então $c(v_i^1) = c(v_i^2) \neq c(v_i)$, senão $v_i$ não está em equilíbrio. Independentemente de $c(v_i)$, deve existir algum par $c(v_i^j) = c(v_p^q)$ com maior número de vizinhos iguais do que diferentes. Portanto $v_i^j$ e $v_p^q$ têm incentivo para mudar, e portanto $c$ não é equilíbrio.

$\square$

Voltando para o Teorema 1. Mostramos passos 1, 2 e 3. Vamos agora mostrar o passo 4:

**Passo 4:**
Juntar todos $C_i$ em $G$ mantendo consistência entre literais.

I. Se uma cláusula *gadget* $C_i$ tem o literal *gadget* $x$ como monocromático, então devemos garantir que, para todo $C_j$, $i \neq j$, se o literal *gadget* $x$ também aparecer em $C_j$, então ele deve ser monocromático. Da mesma forma, se $x$ não for monocromático, ele deve ser não monocromático em todas outras cláusulas.

II. Para $\overline{x}$, se $\overline{x}$ aparecer monocromático em uma cláusula $C_i$, então ele deve aparecer não monocromático em $C_j$, e vice versa.

Para I, vamos construir um **literal gadget de persistência**:

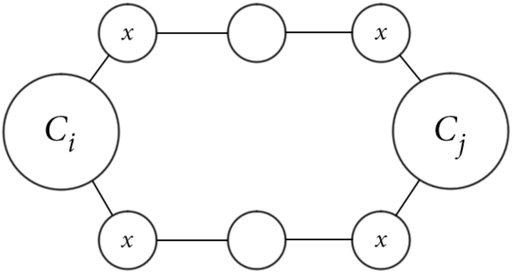


Figura 5: Em um literal *gadget* de persistência, os vértices denotados por $x$ na esquerda fazem parte do literal *gadget* de $C_i$, e o mesmo ocorre na direita para $C_j$. Os dois vértices centrais garantem que $x$ seja consistente em $C_i$ e $C_j$.

Para II, vamos construir um **literal gadget de negação**:

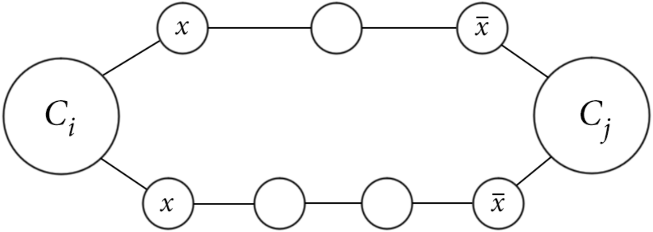


Figura 6: Num literal *gadget* de negação, os dois vértices inferiores garantem que as cores de $x$ e $\overline{x}$ sejam diferentes. Deste jeito, as duas cláusulas sempre terão colorações diferentes em $x$ e $\overline{x}$.

5.

Se $\varphi$ é satisfatível, então todo $\hat{C}_i$ deve ser satisfatível. Pelo Lema 1, $C_i$ é satisfatível se existe ao menos um literal monocromático, ou seja, tal literal é satisfatível. Ainda pelo Lema 1, se existe um literal monocromático, então $C_i$ está em equilíbrio estrito.

Os literais *gadget* de persistência e negação garantem consistência e portanto $\phi$ é satisfatível se e somente se é uma coloração estritamente estável.

Como construir todos os *gadgets* é polinomial, então temos uma redução polinomial de 3-SAT.

$\square$

# Grafos direcionados

- Vértice mudar sua cor não necessariamente melhora bem-estar social;
- Equilíbrio puro pode não existir;
- NP-difícil para colorações estritas e não-estritas;

Generalização do Teorema 1 para grafos direcionados:

**Para** $k = 2$**:** redução do *balanced unfriendly partition problem*,

**Para** $k \geq 3$**:** redução do caso de $k = 2$.

# Referências I


Jeremy Kun, Brian Powers e Lev Reyzin.
"Anti-Coordination Games and Stable Graph Colorings". Em: *SAGT Symposium on Algorithmic Game Theory* (2013).