Curs 2

A. Orientarea relativă a sistemelor de referință

Fie sistemele de referință carteziene: $P\left(Ox'_1x'_2x'_3\right)$, cu baza de versori $\left[\vec{i}'_1, \vec{i}'_2, \vec{i}'_3\right]$, și $E\left(Ox_1x_2x_3\right)$, cu baza de versori $\left[\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3\right]$. Admitem, ceea ce este totdeauna posibil, că la începutul oricărei deplasări geometrice relative a reperelor P și E există relația: $\vec{i}'_1 = \vec{i}_1$, $\vec{i}'_2 = \vec{i}_2$, $\vec{i}'_3 = \vec{i}_3$, axele celor două sisteme fiind, deci, paralele și la fel orientate, situație geometrică pe care o vom nota prin PAP (paralelism a priori).

1. Rotația

Fie axa Δ, de versor $\vec{u}$, solidară cu E și fie $\left(\vec{u}, \Phi\right)$ o rotație de unghi Φ a lui P în jurul lui Δ. Se acceptă situația PAP. Fie $\vec{v}$ un vector solidar cu P, în situația de la începutul rotației, și fie $\vec{w}$ vectorul în care trece $\vec{v}$ după consumarea rotației $\left(\vec{u}, \Phi\right)$. Există corelația:

$$\vec{w} = \vec{v}\cos\Phi - \vec{v}\times\vec{u}\sin\Phi + \langle\vec{v}\,\vec{u}\rangle\,\vec{u}\,(1-\cos\Phi). \tag{1}$$

Demonstrație: Fie $\left[\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right]$ o bază de versori ortogonală solidară cu $P \cdot \left(\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{u}\right)$.

După rotația $\left(\vec{u}, \Phi\right)$ aceasta trece în $\left[\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\right]$, cu:

$$\vec{e}'_1 = \vec{e}_1\cos\Phi + \vec{e}_2\sin\Phi;\quad \vec{e}'_2 = -\vec{e}_1\sin\Phi + \vec{e}_2\cos\Phi;\quad \vec{e}'_3 = \vec{u}.$$

Fie: $\vec{v} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \lambda_3\vec{u}$; $\vec{w} = \lambda_1\vec{e}'_1 + \lambda_2\vec{e}'_2 + \lambda_3\vec{u}$.

Evident că: $\vec{w} = \left(\lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2\right)\cos\Phi + \left(\lambda_1\vec{e}_2 - \lambda_2\vec{e}_1\right)\sin\Phi + \lambda_3\vec{u}$,

care cu: $\vec{v}\times\vec{u} = -\lambda_1\vec{e}_2 + \lambda_2\vec{e}_1$ și $\lambda_3 = \langle\vec{v}\,\vec{u}\rangle$ duce la (1).

Fie $[S]$ $\left(S_{ij},\ i,j = 1,2,3\right)$ matricea ortogonală proprie de schimbare de bază de la E la P:

$$\left\{\vec{i}'\right\} = [S]\left\{\vec{i}\right\}. \tag{2}$$

Evident, $[S] = [I]$ în situația PAP. După consumarea rotației $\left(\vec{u}, \Phi\right)$ elementele matricei $[S]$ sunt:

$$S_{ij} = \delta_{ij}\cos\Phi - \left(\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}u_k\right)\sin\Phi + u_iu_j(1-\cos\Phi), \tag{3}$$

unde: $\delta_{ij} = \begin{cases} 1; \ i = j; \\ 0; i \neq j; \end{cases}$ este simbolul Kronecker;

$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} 1; & \text{dacă } (i,j,k) \text{ este o permutare pară} \\ -1; & \text{dacă } (i,j,k) \text{ este o permutare impară} \\ 0; & \text{dacă doi indici sunt egali;} \end{cases}$$

sunt simbolurile Ricci; $\vec{u} = \sum_{k=1}^{3} u_k \vec{i}_k$.

Relaţia (3) se obţine punând în (1): $\vec{v} = \vec{i}_j$, $\vec{w} = \vec{i}_j{}'$ şi ţinând cont că $\left(\vec{i}_i, \vec{i}_j, \vec{u}\right) = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} u_k$.

Concret:

$$\begin{gathered} S_{11} = \cos\Phi + u_1^2(1-\cos\Phi)\,;\; S_{21} = u_1 u_2(1-\cos\Phi) - u_3 \sin\Phi\,; \\ S_{31} = u_1 u_3(1-\cos\Phi) + u_2 \sin\Phi\,; \\ S_{12} = u_1 u_2(1-\cos\Phi) + u_3 \sin\Phi\,;\; S_{22} = \cos\Phi + u_2^2(1-\cos\Phi)\,; \\ S_{32} = u_2 u_3(1-\cos\Phi) - u_1 \sin\Phi\,; \\ S_{13} = u_1 u_3(1-\cos\Phi) - u_2 \sin\Phi\,;\; S_{23} = u_2 u_3(1-\cos\Phi) + u_1 \sin\Phi\,; \\ S_{33} = \cos\Phi + u_3^2(1-\cos\Phi)\,. \end{gathered} \tag{4}$$

Dintre cele 9 mărimi S_{ij}, numai 3 sunt distincte, datorită ortogonalităţii matricei $[S]$. Considerând şi relaţia $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1$ se obţin 4 ecuaţii cu necunoscutele u_1, u_2, u_3, Φ.

Din (4) se obţine:

$$\begin{gathered} \cos\Phi = \frac{1}{2}(S_{11} + S_{22} + S_{33}); \quad u_1 = \frac{S_{23} - S_{32}}{2\sin\Phi}; \\ u_2 = \frac{S_{31} - S_{13}}{2\sin\Phi}; \qquad u_3 = \frac{S_{12} - S_{21}}{2\sin\Phi}. \end{gathered} \tag{5}$$

În aplicaţii, este uneori util, să se exprime elementele matricei $[S]$ în funcţie de alţi parametri decât u_1, u_2, u_3, Φ, ceea ce se va face în continuare.

Rotaţia descrisă cu parametrii Euler.

Se introduce vectorul Euler prin

$$\vec{\varepsilon} = \vec{u} \sin\left(\frac{\Phi}{2}\right), \tag{6}$$

cu componentele în E date de:

$$\varepsilon_1 = u_1 \sin\left(\frac{\Phi}{2}\right);\; \varepsilon_2 = u_2 \sin\left(\frac{\Phi}{2}\right);\; \varepsilon_3 = u_3 \sin\left(\frac{\Phi}{2}\right). \tag{7}$$

Notând

$$\varepsilon_4 = \cos\left(\frac{\Phi}{2}\right), \tag{8}$$

se obţin parametrii Euler asociaţi rotaţiei, între ei existând relaţia evidentă:

$$\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \varepsilon_4^2 = 1\,. \tag{9}$$

Din (6) rezultă versorul axei de rotaţie:

$$\vec{u} = \frac{\vec{\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2}} = \frac{\varepsilon_1 \vec{I_1} + \varepsilon_2 \vec{I_2} + \varepsilon_3 \vec{I_3}}{\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2}}. \tag{10}$$

Elementele matricei de rotație $[S]$ se pot exprima exclusiv în funcție de parametrii Euler (teorema de rotație a lui Euler).

În adevăr, din (4), cu $\cos\Phi = -1 + 2\varepsilon_4^2$ şi $u_1 = \frac{\varepsilon_1}{\left|\sin\left(\frac{\Phi}{2}\right)\right|}$ se obține, ținând cont şi de (9):

$$\begin{gathered} S_{11} = 1 - 2\varepsilon_2^2 - 2\varepsilon_3^2;\ S_{21} = 2(\varepsilon_1\varepsilon_2 - \varepsilon_3\varepsilon_4);\ S_{31} = 2(\varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_4); \\ S_{12} = 2(\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_3\varepsilon_4);\ S_{22} = 1 - 2\varepsilon_3^2 - 2\varepsilon_1^2;\ S_{32} = 2(\varepsilon_2\varepsilon_3 - \varepsilon_1\varepsilon_4); \\ S_{13} = 2(\varepsilon_1\varepsilon_3 - \varepsilon_2\varepsilon_4);\ S_{23} = 2(\varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_1\varepsilon_4);\ S_{33} = 1 - 2\varepsilon_1^2 - 2\varepsilon_2^2. \end{gathered} \tag{11}$$

Reciproc:

$$\begin{gathered} \varepsilon_1 = \frac{1}{4\varepsilon_4}(S_{23} - S_{32});\ \varepsilon_2 = \frac{1}{4\varepsilon_4}(S_{31} - S_{13});\ \varepsilon_3 = \frac{1}{4\varepsilon_4}(S_{21} - S_{12}); \\ \varepsilon_4 = \frac{1}{2}\sqrt{1 + S_{11} + S_{22} + S_{33}}. \end{gathered} \tag{12}$$

Cu vectorul Euler $\vec{\varepsilon}$, pentru relația (1) se poate da următoarea formă:

$$\vec{w} = \vec{v} + 2 \cdot \left[\left(\vec{\varepsilon} \times \vec{v}\right)\varepsilon_4 + \vec{\varepsilon} \times \left(\vec{\varepsilon} \times \vec{v}\right)\right]. \tag{13}$$

În adevăr, relația (1) se scrie sub forma:

$$\begin{aligned} \vec{w} &= \vec{v}\cos\Phi + \left(\vec{u} \times \vec{v}\right)\sin\Phi + \left[\vec{u} \times \left(\vec{u} \times \vec{v}\right)\right](1 - \cos\Phi) + \vec{v}(1 - \cos\Phi) = \\ &= \vec{v} + \left(\vec{u} \times \vec{v}\right) \cdot 2\sin\left(\frac{\Phi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\Phi}{2}\right) + \left[\vec{u} \times \left(\vec{u} \times \vec{v}\right)\right](1 - \cos\Phi) = \vec{v} + \\ &+ \frac{1}{\sin\left(\frac{\Phi}{2}\right)}\left(\vec{\varepsilon} \times \vec{v}\right) \cdot 2\sin\left(\frac{\Phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\Phi}{2}\right) + \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\Phi}{2}\right)} \cdot \left[\vec{\varepsilon} \times \left(\vec{\varepsilon} \times \vec{v}\right)\right](1 - \cos\Phi), \end{aligned}$$

adică (13), dacă se ține cont de (8).

2.Rotația descrisă cu parametrii Rodrigues.

Se introduce vectorul Rodrigues prin:

$$\vec{\rho} = \vec{u}\,\mathrm{tg}\left(\frac{\Phi}{2}\right) = \frac{\vec{\varepsilon}}{\varepsilon_4}, \tag{14}$$

parametrii Rodrigues fiind componentele ρ_1, ρ_2, ρ_3 ale acestui vector în baza $\left[\vec{I_1}, \vec{I_2}, \vec{I_3}\right]$.

Notând:

$$\lambda = 1 + \rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2, \tag{15}$$

se exprimă elementar S_{ij} prin parametrii Rodrigues:

$$S_{11} = \frac{1}{\lambda}\left(1 + \rho_1^2 - \rho_2^2 - \rho_3^2\right);\quad S_{21} = \frac{2}{\lambda}(\rho_1\rho_2 - \rho_3);\ S_{31} = \frac{2}{\lambda}(\rho_1\rho_3 + \rho_2);$$

$$S_{12} = \frac{2}{\lambda}\left(\rho_1\rho_2 + \rho_3\right); \qquad S_{22} = \frac{1}{\lambda}\left(1 + \rho_2^2 - \rho_3^2 - \rho_1^2\right);$$

$$S_{32} = \frac{2}{\lambda}\left(\rho_2\rho_3 - \rho_1\right); \qquad S_{13} = \frac{2}{\lambda}\left(\rho_1\rho_3 - \rho_2\right); \tag{16}$$

$$S_{23} = \frac{2}{\lambda}\left(\rho_2\rho_3 + \rho_1\right); \qquad S_{33} = \frac{1}{\lambda}\left(1 + \rho_3^2 - \rho_1^2 - \rho_2^2\right)$$

şi, reciproc:

$$\rho_1 = \frac{S_{23} - S_{32}}{1 + S_{11} + S_{22} + S_{33}}; \; \rho_2 = \frac{S_{31} - S_{13}}{1 + S_{11} + S_{22} + S_{33}};$$

$$\rho_3 = \frac{S_{12} - S_{21}}{1 + S_{11} + S_{22} + S_{33}}. \tag{17}$$

Din (13) şi (14) rezultă:

$$\vec{v} - \vec{w} = \left(\vec{v} + \vec{w}\right) \times \vec{\rho}. \tag{18}$$

În consecinţă, dacă $\vec{v}_1$ şi $\vec{v}_2$ sunt vectori de componente constante în P, după rotaţia $\left(\vec{u}, \Phi\right)$, ei trecând în $\vec{w}_1$ şi $\vec{w}_2$, cu condiţia PAP îndeplinită, atunci

$$\vec{\rho} = \frac{\left(\vec{v}_1 - \vec{w}_1\right) \times \left(\vec{v}_2 - \vec{w}_2\right)}{<\left(\vec{v}_1 + \vec{w}_1\right) \cdot \left(\vec{v}_2 + \vec{w}_2\right)>}. \tag{19}$$

3. Rotaţii succesive

Fie reperele carteziene P şi E, condiţia PAP fiind îndeplinită.

Fie şirul de rotaţii succesive ale reperului P:

Rotaţia R_1, cu unghiul Φ_1, în jurul axei Δ_1, de versor $\vec{u}^1 = u_1^1 \vec{i}_1^0 + u_2^1 \vec{i}_2^0 + u_3^1 \vec{i}_3^0$, unde $\vec{i}_k^0 = \vec{I}_k$. Fie $\left[\vec{i}_1^1, \vec{i}_2^1, \vec{i}_3^1\right]$ baza asociată lui P, la finele rotaţiei $\left(\vec{u}_1^1, \Phi_1\right)$. Matricea de schimbare de bază $\left[S_{10}\right]$ se determină cu (4), (11) sau (16), având:

$$\left\{\vec{i}_1^1 \,|\, \vec{i}_2^1 \,|\, \vec{i}_3^1\right\}^T = [S]\left\{\vec{i}_1^0 \,|\, \vec{i}_2^0 \,|\, \vec{i}_3^0\right\}^T. \tag{20}$$

Rotaţia R_2, cu unghiul Φ_2, în jurul axei Δ_2, de versor $\vec{u}^2 = u_{10}^2 \vec{i}_1 + u_{20}^2 \vec{i}_2 + u_{30}^2 \vec{i}_3$. Componentele u_k^2 ale lui $\vec{u}^2$ în baza $\left[\vec{i}_1^1, \vec{i}_2^1, \vec{i}_3^1\right]$ se obţin din relaţia:

$$\left\{u_1^2, u_2^2, u_3^2\right\}^T = \left[S_{10}\right]\left\{u_{10}^2, u_{20}^2, u_{30}^2\right\}^T.$$

Fie $\left[\vec{i}_1^{\,2}, \vec{i}_2^{\,2}, \vec{i}_3^{\,2}\right]$ baza asociată lui P la finele rotației $\left(\vec{u}^{\,2}, \Phi_2\right)$ şi fie $[S_{21}]$ matricea de schimbare de bază asociată rotației R_2. Se poate scrie:

$$\left\{\vec{i}_1^{\,2} \,|\, \vec{i}_2^{\,2} \,|\, \vec{i}_3^{\,2}\right\}^T = [S_{21}]\left\{\vec{i}_1^{\,1} \,|\, \vec{i}_2^{\,1} \,|\, \vec{i}_3^{\,1}\right\}^T \text{, adică}$$

$$\left\{\vec{i}_1^{\,2} \,|\, \vec{i}_2^{\,2} \,|\, \vec{i}_3^{\,2}\right\}^T = [S_{21}][S_{10}]\left\{\vec{i}_1^{\,0} \,|\, \vec{i}_2^{\,0} \,|\, \vec{i}_3^{\,0}\right\}^T, \tag{21}$$

sau încă

$$\left\{\vec{i}_1^{\,2} \,|\, \vec{i}_2^{\,2} \,|\, \vec{i}_3^{\,2}\right\}^T = [S_{20}]\left\{\vec{i}_1^{\,0} \,|\, \vec{i}_2^{\,0} \,|\, \vec{i}_3^{\,0}\right\}^T, \tag{22}$$

cu $[S_{20}] = [S_{21}][S_{10}]$.

După n notații, baza $\left\{\vec{i}_1^{\,n} \,|\, \vec{i}_2^{\,n} \,|\, \vec{i}_3^{\,n}\right\}^T$ asociată lui P, la finele rotației R_n, va fi dată de:

$$\left\{\vec{i}_1^{\,n} \,|\, \vec{i}_2^{\,n} \,|\, \vec{i}_3^{\,n}\right\}^T = [S_{n0}]\left\{\vec{i}_1^{\,0} \,|\, \vec{i}_2^{\,0} \,|\, \vec{i}_3^{\,0}\right\}^T, \tag{23}$$

unde

$$[S_{n0}] = [S_{n,n-1}][S_{n-1,n-2}]\ldots[S_{21}][S_{10}]. \tag{24}$$

Se poate stabili elementar câte o corelație între parametrii Euler şi Rodrigues asociați unor rotații succesive. Astfel, dacă rotației R_1 i se asociază vectorul Euler $\vec{\varepsilon}_{10}$ şi ε_4^{10}, iar rotației R_2 i se asociază vectorul Euler $\vec{\varepsilon}_{21}$ şi ε_4^{21}, atunci compunerii (succesiunii) celor două rotații i se asociază:

$$\vec{\varepsilon}_{20} = \vec{\varepsilon}_{10}\,\varepsilon_4^{21} + \vec{\varepsilon}_{21}\,\varepsilon_4^{10} + \vec{\varepsilon}_{21} \times \vec{\varepsilon}_{10};$$

$$\varepsilon_4^{20} = \varepsilon_4^{21}\varepsilon_4^{10} - \vec{\varepsilon}_{10} \cdot \vec{\varepsilon}_{21}. \tag{25}$$

Fie $\vec{\rho}_{10}$ şi $\vec{\rho}_{21}$ vectorii Rodrigues asociați rotațiilor succesive R_1 şi R_2. Un vector $\vec{v}$, de componente constante în P, trece, față de E, succesiv în $\vec{v}'$ şi $\vec{v}''$. Scriind (18) succesiv pentru R_1 şi R_2 şi eliminând pe $\vec{v}'$ se obține elementar:

$$\vec{\rho}_{20} = \frac{\vec{\rho}_{10} + \vec{\rho}_{21} + \vec{\rho}_{21} \times \vec{\rho}_{10}}{1 - \vec{\rho}_{21} \cdot \vec{\rho}_{10}}. \tag{26}$$

B. Sisteme de coordonate curbilinii

S-a văzut că poziția unui punct A față de sistemul de referință $Ox_1x_2x_3$ este dată de coordonatele proiecțiilor acestui punct pe cele trei axe ce definesc reperul. Aceste coordonate, notate x_1, x_2, x_3 se numesc *coordonate carteziene*, iar vectorul

$$\vec{OA} = \vec{r} = \left\{\vec{i}\right\}^t \{r\} = \left\{\vec{i}\right\}^t \{x_1; x_2; x_3\}^t$$

se numeşte vector de poziție al punctului A față de punctul O, origine a sistemului de referință.

În general poziția punctului A față de punctul O poate fi dată prin trei parametri care pot fi distanțe sau unghiuri, numite *coordonate curbilinii*.

Fie un sistem de coordonate curbilinii q_1, q_2, q_3 cu ajutorul căruia vectorul de poziție $\vec{r}$ al unui punct se exprimă prin:

$$\vec{r} = \vec{r}(q_1; q_2; q_3) \tag{27}$$

Prin urmare între coordonatele carteziene şi cele curbilinii se poate stabili o corespondență biunivocă de tipul:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(q_1; q_2; q_3) \\ x_2 &= x_2(q_1; q_2; q_3) \\ x_3 &= x_3(q_1; q_2; q_3) \end{aligned} \tag{28}$$

Dacă se fixează q_2 şi q_3 şi se modifică q_1 se obține o *curbă de coordonate* C_{q_1}, care trece prin punctul A, care corespunde situației (q_1 = variabil; q_2 = ct; q_3 = ct).

La fel se obțin curbele C_{q_2} (q_1 = ct; q_2 = variabil; q_3 = ct) şi C_{q_3} (q_1 = ct; q_2 = ct; q_3 = variabil) (figura 1).

Vectorii:

$$\vec{e}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i};\ i = \overline{1,3} \tag{29}$$

sunt tangenți la curbele de coordonate C_{q_i}, $i = \overline{1,3}$ şi formează o bază deoarece:

$$\frac{D(x_1; x_2; x_3)}{D(q_1; q_2; q_3)} \neq 0 \tag{30}$$

relațiile (28) stabilind o corespondență biunivocă.

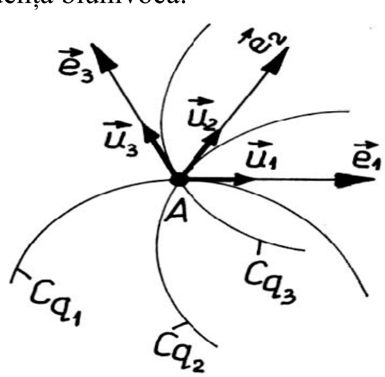

Figura 1

În figura 1 s-au reprezentat şi versorii direcțiilor definite de vectorii $\vec{e}_i$:

$$\vec{u}_i = \frac{\vec{e}_i}{\left|\vec{e}_i\right|}, \quad i = \overline{1,3} \tag{31}$$

Cele mai utilizate sisteme de coordonate curbilinii sunt: sistemul de coordonate *cilindrice* (figura 2)

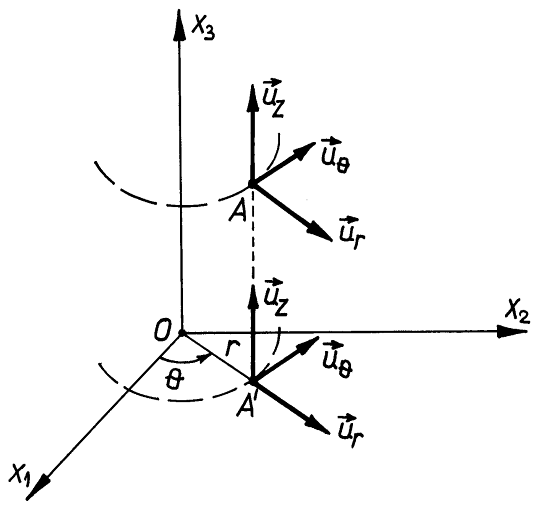

Figura 2

şi sistemul de coordonate *sferice* (figura 3).

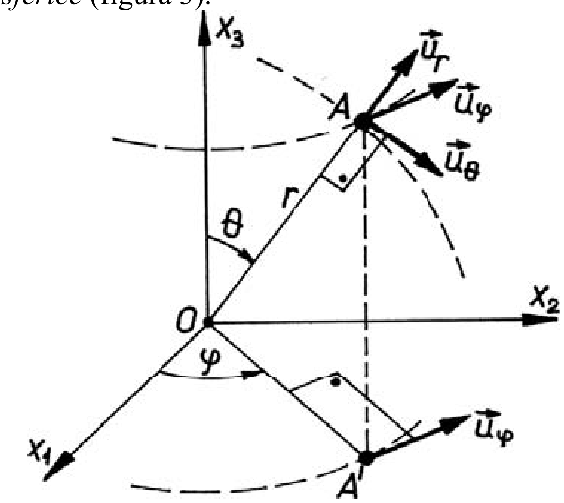

Figura 3

a) Sistemul de coordonate cilindrice: Fie A' proiecția punctului A în planul Ox_1x_2. Coordonatele cilindrice ale punctului A sunt:

- r = distanța dintre punctele O şi A': $r = |OA'|$
- θ = unghiul dintre dreptele $O\,A'$ şi Ox_1
- z = cota pe axa x_3 a punctului A (mărimea segmentului AA', cu semn).

Relațiile între coordonatele carteziene şi cele cilindrice sunt:

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cdot \cos\theta \\ x_2 &= r \cdot \sin\theta \\ x_3 &= z \end{aligned} \tag{32}$$

Vectorii tangenți la curbele de coordonate sunt:

$$\vec{e_1} = \vec{e_r} = \cos\theta\,\vec{i_1} + \sin\theta\,\vec{i_2}$$
$$\vec{e_2} = \vec{e_\theta} = -r\sin\theta\,\vec{i_1} + r\cos\theta\,\vec{i_2} \tag{33}$$
$$\vec{e_3} = \vec{e_z} = \vec{i_3}\ .$$

Versorii atașați vor fi:

$$\vec{u_1} = \vec{u_r} = \cos\theta\,\vec{i_1} + \sin\theta\,\vec{i_2}$$
$$\vec{u_2} = \vec{u_\theta} = -\sin\theta\,\vec{i_1} + \cos\theta\,\vec{i_2} \tag{34}$$
$$\vec{u_3} = \vec{u_z} = \vec{i_3}\ .$$

b) Sistemul de coordonate sferice: Fie A' proiecția punctului A în planul Ox_1x_2. Coordonatele sferice ale punctului A sunt:

- r = distanța dintre punctele O şi A: $r = |OA|$ **(distanța radială)**;
- θ = unghiul dintre dreptele OA şi Ox_3 **(unghiul zenit);**
- φ = unghiul dintre dreptele OA' şi Ox_1 **(unghiul azimut)**.

Relațiile între coordonatele carteziene şi cele sferice sunt:

$$x_1 = r\sin\theta\cos\varphi$$
$$x_2 = r\sin\theta\sin\varphi \tag{35}$$
$$x_3 = r\cos\theta$$

Vectorii tangenți la curbele de coordonate sunt:

$$\vec{e_1} = \vec{e_r} = \sin\theta\cos\varphi\,\vec{i_1} + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{i_2} + \cos\theta\,\vec{i_3}$$
$$\vec{e_2} = \vec{e_\theta} = r\cos\theta\cos\varphi\,\vec{i_1} + r\cos\theta\sin\varphi\,\vec{i_2} - r\sin\theta\,\vec{i_3} \tag{36}$$
$$\vec{e_3} = \vec{e_\varphi} = -r\sin\theta\sin\varphi\,\vec{i_1} + r\sin\theta\cos\varphi\,\vec{i_2}\ .$$

Versorii atașați sistemului de coordonate sferice sunt:

$$\vec{u_1} = \vec{u_r} = \sin\theta\cos\varphi\,\vec{i_1} + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{i_2} + \cos\theta\,\vec{i_3}$$
$$\vec{u_2} = \vec{u_\theta} = \cos\theta\cos\varphi\,\vec{i_1} + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{i_2} - \sin\theta\,\vec{i_3} \tag{37}$$
$$\vec{u_3} = \vec{u_\varphi} = -\sin\varphi\,\vec{i_1} + \cos\varphi\,\vec{i_2}\ .$$

Pentru fiecare dintre aceste baze de vectori se pot calcula bazele reciproce. Astfel:
-*pentru sistemul de coordonate cilindrice*.
Se calculează:

$$\left(\vec{e_1};\vec{e_2};\vec{e_3}\right) = \{e_1\}^t\left[e_2\right]\{e_3\} = r\,. \tag{38}$$

Baza reciprocă se calculează cu relațiile:

$$\vec{E_r} = \vec{E_1} = \frac{\vec{e_2}\times\vec{e_3}}{\left(\vec{e_1};\vec{e_2};\vec{e_3}\right)} = \frac{\vec{e_\theta}\times\vec{e_z}}{r} = \cos\theta\,\vec{i_1} + \sin\theta\,\vec{i_2}$$

$$\vec{E}_\theta = \vec{E}_2 = \frac{\vec{e}_3 \times \vec{e}_1}{\left(\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3\right)} = \frac{\vec{e}_z \times \vec{e}_r}{r} = -\frac{1}{r}\sin\theta\, \vec{i}_1 + \frac{1}{r}\cos\theta\, \vec{i}_2 \tag{39}$$

$$\vec{E}_z = \vec{E}_3 = \frac{\vec{e}_1 \times \vec{e}_2}{\left(\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3\right)} = \frac{\vec{e}_r \times \vec{e}_\theta}{r} = \vec{i}_3 .$$

-pentru sistemul de coordonate cilindrice.
se calculează:

$$\left(\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3\right) = \{e_1\}^t \left[e_2\right]\{e_3\} = r^2 \sin\theta . \tag{40}$$

Baza reciprocă este:

$$\vec{E}_r = \vec{E}_1 = \frac{\vec{e}_\theta \times \vec{e}_\varphi}{r^2 \sin\theta} = \sin\theta\cos\varphi\, \vec{i}_1 + \sin\theta\sin\varphi\, \vec{i}_2 + \cos\theta\, \vec{i}_3$$

$$\vec{E}_\theta = \vec{E}_2 = \frac{\vec{e}_\varphi \times \vec{e}_r}{r^2 \sin\theta} = \frac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi\, \vec{i}_1 + \frac{1}{r}\cos\theta\sin\varphi\, \vec{i}_2 - \frac{1}{r}\sin\theta\, \vec{i}_3$$

$$\vec{E}_\varphi = \vec{E}_3 = \frac{\vec{e}_r \times \vec{e}_\theta}{r^2 \sin\theta} = -\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\vec{i}_1 + \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\vec{i}_2 . \tag{41}$$

C. Componentele unui vector în coordonate curbilinii

S-a văzut că un vector $\vec{a}$ poate fi scris în coordonate carteziene sau matriceal. În coordonate curbilinii, cu baza de vectori $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, definită de (29), un vector oarecare $\vec{a}$ se va scrie asemănător, în mod unic, sub forma:

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^{3} a_i \vec{e}_i = \left\{\vec{e}\right\}^t \{a\} \tag{42}$$

unde numerele a_i, $i = \overline{1,3}$, componentele sale în această bază, se numesc “componentele contravariante” ale lui $\vec{a}$ în sistemul de coordonate curbilinii considerat.

Bazei de vectori $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ i se asociază baza reciprocă $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3$.

În această bază vectorul $\vec{a}$ se poate scrie:

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^{3} A_i \vec{E}_i = \left\{\vec{E}\right\}^t \{A\} \tag{43}$$

în care numerele E_i, $i = \overline{1,3}$, se numesc *componentele covariante* ale lui $\vec{a}$.

Componentele a_i sau A_i, $i = \overline{1,3}$, sunt:

$$a_i = \vec{a} \cdot \vec{E}_i,\ i = \overline{1,3}$$

$$A_i = \vec{a} \cdot \vec{e}_i,\ i = \overline{1,3}. \tag{44}$$

Pentru determinarea relației dintre matricea $\{a\}$ (a componentelor contravariante) şi matricea $\{A\}$ (a componentelor covariante) se ține cont că:

$$\vec{e}_i \cdot \vec{E}_j = \begin{cases} 1, & \text{daca } i = j \\ 0, & \text{daca } i \neq j \end{cases} \tag{45}$$

Din (42) şi (43) se poate scrie:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^{3} A_i \vec{E}_i \tag{46}$$

Înmulțind scalar în (46) cu $\vec{e}_j,\ j = \overline{1,3}$ se obține:

$$A_j = \sum_{i=1}^{3} a_i \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j,\ j = \overline{1,3} \tag{47}$$

Se fac notațiile:

$$g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j,\ i = \overline{1,3};\ j = \overline{1,3} \tag{48}$$

Funcțiile $g_{ij},\ i = \overline{1,3};\ j = \overline{1,3}$, definesc *metrica* în sistemul de coordonate curbilinii considerat şi (se va demonstra ulterior) constituie componentele unui tensor numit *tensor metric fundamental*, notat $\overset{\Rightarrow}{g}$. Acestui tensor i se ataşază matricea:

$$[g] = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} = \left\{\vec{e}\right\} \cdot \left\{\vec{e}\right\}^t \tag{49}$$

Componentele g_{ij} definite prin (48), se numesc componente covariante ale tensorului metric fundamental.

Se pot defini şI componentele contravariante cu relațiile:

$$g_{ij} = \vec{E}_i \cdot \vec{E}_j,\ i = \overline{1,3};\ j = \overline{1,3}\ g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j,\ i = \overline{1,3};\ j = \overline{1,3} \tag{50}$$

Matricea componentelor contravariante se calculează cu relația:

$$\left[g^*\right] = \left\{\vec{E}\right\} \cdot \left\{\vec{E}\right\}^t \tag{51}$$

Astfel, în cazul coordonatelor cilindrice, matricile $[g]$ *si* $[g^*]$, au forma:

$$[g] = \left\{\vec{e}\right\} \cdot \left\{\vec{e}\right\}^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{52}$$

$$[g^*] = \left\{\vec{E}\right\} \cdot \left\{\vec{E}\right\}^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{53}$$

In cazul coordonatelor sferice, aceleaşi matrice sunt:

$$[g]=\left\{\vec{e}\right\}\cdot\left\{\vec{e}\right\}^t=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & r^2 & 0\\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta\end{bmatrix} \tag{54}$$

$$[g^*]=\left\{\vec{E}\right\}\cdot\left\{\vec{E}\right\}^t=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{1}{r^2} & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\end{bmatrix}. \tag{55}$$

Este evidentă relația:

$$g_{ij}=g_{ji} \qquad i=\overline{1,3};\ j=\overline{1,3} \tag{56}$$

deci matricea $[g]$ este simetrică.

Folosindu-se componentele tensorului metric fundamental, relația (47) capătă forma:

$$A_j=\sum_{i=1}^{3} g_{ij}a_i\ ,\ j=\overline{1,3} \tag{57}$$

|inându-se cont de simetria matricei $[g]$, relațiile (57) se pot pune sub forma matriceală:

$$\{A\}=[g]\{a\} \tag{58}$$

care reprezintă relația căutată.

Cu această relație se poate determina legătura între cele două baze. Se poate scrie:

$$\vec{a}=\left\{\vec{E}\right\}^t\{A\}=\left\{\vec{E}\right\}^t[g]\{a\} \tag{59}$$

Comparând (59) cu (42) rezultă (ținând cont şi de simetria lui $[g]$):

$$\left\{\vec{e}\right\}=[g]\left\{\vec{E}\right\}. \tag{60}$$

Inmulțind la dreapta această relație cu $\left\{\vec{E}\right\}^{-1}$, se obține:

$$\left\{\vec{e}\right\}\left\{\vec{E}\right\}^{-1}=[g]\left\{\vec{E}\right\}\left\{\vec{E}\right\}^t.$$

Dacă se ține cont că $\left\{\vec{e}\right\}\left\{\vec{E}\right\}^t=[I]$. şi de relația (51), rezultă imediat că:

$$[g]^{-1}=[g^*] \tag{61}$$

D. Derivarea unui vector în coordonate curbilinii

În calculele ulterioare se vor întâlni derivate ale unor vectori într-un sistem de coordonate curbilinii. Pentru aceasta trebuie stabilit modul în care se derivează baza de vectori $\left\{\vec{e}\right\}$. Se poate scrie:

$$\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^{3} \Gamma_{ij}^{k} \vec{e}_k, \quad i=\overline{1,3};\ j=\overline{1,3} \tag{62}$$

în care coeficienții Γ_{ij}^{k} se numesc *simbolurile lui Christoffel de speța a doua*.

Relațiile precedente se pot scrie sub forma matriceală:

$$\frac{\partial}{\partial q_j}\left\{\vec{e}\right\}^t = \left\{\vec{e}\right\}^t \left[\Gamma^{(j)}\right], \quad j=\overline{1,3} \tag{63}$$

în care:

$$\left[\Gamma^{(j)}\right] = \begin{bmatrix} \Gamma_{1j}^{1} & \Gamma_{2j}^{1} & \Gamma_{3j}^{1} \\ \Gamma_{1j}^{2} & \Gamma_{2j}^{2} & \Gamma_{3j}^{2} \\ \Gamma_{1j}^{3} & \Gamma_{2j}^{3} & \Gamma_{3j}^{3} \end{bmatrix} \tag{64}$$

Matricea $\left[\Gamma^{(j)}\right]$ se calculează cu relația:

$$\left[\Gamma^{(j)}\right] = \left\{\vec{E}\right\} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial q_j}\left\{\vec{e}\right\}^t\right) \tag{65}$$

Deoarece $\dfrac{\partial \vec{e}_i}{\partial q_j} = \dfrac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_i \partial q_j} = \dfrac{\partial \vec{e}_j}{\partial q_i} = \sum\limits_{k=1}^{3} \Gamma_{ij}^{k} \vec{e}_k$ se poate scrie că:

$$\Gamma_{ij}^{k} = \Gamma_{ji}^{k} \tag{66}$$

Proiecțiile ortogonale ale vectorilor $\dfrac{\partial \vec{e}_i}{\partial q_j}$ pe axele bazei de vectori se obțin prin:

$$\left\{\vec{e}\right\} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial q_j}\left\{\vec{e}\right\}^t\right) = \left\{\vec{e}\right\}\left\{\vec{e}\right\}^t \left[\Gamma^{(j)}\right] = [g]\left[\Gamma^{(j)}\right] = \left[\Gamma_j\right], \ i=\overline{1,3} \tag{67}$$

în care s-a ținut cont de (49).

Componentele matricei:

$$\left[\Gamma_j\right] = \begin{bmatrix} \Gamma_{1,1j} & \Gamma_{1,2j} & \Gamma_{1,3j} \\ \Gamma_{2,1j} & \Gamma_{2,2j} & \Gamma_{2,3j} \\ \Gamma_{3,1j} & \Gamma_{3,2j} & \Gamma_{3,3j} \end{bmatrix}, \quad j=\overline{1,3} \tag{68}$$

se numesc *simbolurile lui Christoffel de speța întâi* şi se calculează cu relațiile:

$$\Gamma_{s,ij} = \vec{e}_s \cdot \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial q_j} \tag{69}$$

Este evident că: $\Gamma_{s,ij} = \Gamma_{s,ji}$.

Prin urmare:

$$\Gamma_{s,ij} = \frac{1}{2}\left(\Gamma_{s,ij} + \Gamma_{s,ji}\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{e}_s \cdot \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial q_j} + \vec{e}_s \cdot \frac{\partial \vec{e}_j}{\partial q_i}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\vec{e}_s \cdot \vec{e}_i\right) + \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\vec{e}_s \cdot \vec{e}_j\right) - \vec{e}_i \frac{\partial \vec{e}_s}{\partial q_j} - \vec{e}_j \frac{\partial \vec{e}_s}{\partial q_i}\right]$$

Dar $\frac{\partial \vec{e}_s}{\partial q_j} = \frac{\partial \vec{e}_j}{\partial q_s}$; $\frac{\partial \vec{e}_s}{\partial q_i} = \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial q_s}$, deci:

$$\Gamma_{s,ij} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\vec{e}_s \cdot \vec{e}_i\right) + \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\vec{e}_s \cdot \vec{e}_j\right) - \frac{\partial}{\partial q_s}\left(\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j\right)\right],$$

adică:

$$\Gamma_{s,ij} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{si}}{\partial q_j} + \frac{\partial g_{sj}}{\partial q_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q_s}\right] \tag{70}$$

Expresiile simbolurilor lui Christoffel de speța a doua se obțin prin inversarea relației (35):

$$\left[\Gamma^{(j)}\right] = [g]^{-1}\left[\Gamma_j\right]. \tag{71}$$

Detaliat acestea au forma:

$$\Gamma^i_{jk} = \sum_{s=1}^{3} \Gamma_{s,jk} \cdot g^k_{is}. \tag{72}$$