CURS 3

REDUCEREA SISTEMELOR DE VECTORI

În natură, asupra sistemelor mecanice acţionează diferite sisteme de vectori. Se pune problema stabilirii condiţiilor de echivalenţă între două sisteme de vectori astfel încât să aibă acelaşi efect mecanic, precum şi găsirea celui mai simplu sistem de vectori echivalent mecanic cu un sistem dat.

1. Momentul unui vector în raport cu un punct

Fie vectorul $\vec{a}$ cu punctul de aplicaţie A, de coordonate $\vec{a}\left(a_1, a_2, a_3\right)$. Momentul vectorului $\vec{a}$ faţă de un punct O este definit ca produsul vectorial al vectorilor $\vec{OA}$ şi $\vec{a}$:

$$\vec{M}_O\left(\vec{a}\right) = \vec{OA} \times \vec{a} \tag{1}$$

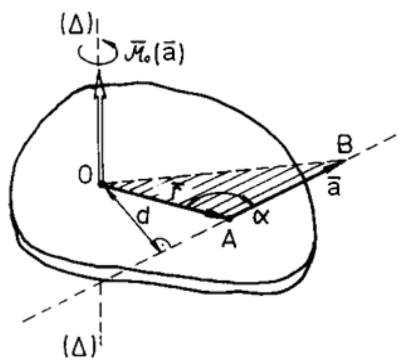

Figura 1

În concordanţă cu definiţiile produsului vectorial (a se vedea Figura 1), momentul unui vector în raport cu un punct $\vec{M}_0(\vec{a})$ este un vector perpendicular pe planul vectorilor $\vec{a}$ şi $\vec{OA}$ având mărimea egală cu aria triunghiului definit de cei doi vectori. Punctul O se numeşte *originea* sau *polul* momentului.

Dacă, fără a pierde generalitatea, O este originea unui sistem de referinţă faţă de care vectorul $\vec{OA}$ are coordonatele $\vec{OA}\left(x_1, x_2, x_3\right)$, unde x_1, x_2, x_3 sunt coordonatele punctului A faţă de sistemul de referinţă precizat) atunci (1), se poate scrie simbolic:

$$\vec{M}_O\left(\vec{a}\right) = \begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{i}_2 & \vec{i}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Conform relaţiei anterioare, matricea componentelor momentului $\vec{M}_O\left(\vec{a}\right)$ se va calcula cu:

$$\left\{M_O\left(\vec{a}\right)\right\} = \left[OA\right]\left\{a\right\} \tag{3}$$

Detaliat se obţine:

$$M_{O1} = x_2 a_3 - x_3 a_2 ; \quad M_{O2} = x_3 a_1 - x_1 a_3$$

$$M_{O3} = x_1 a_2 - x_2 a_1 \tag{4}$$

Momentul $\vec{M}_O\left(\vec{a}\right)$ are următoarele proprietăți:

1. $\vec{M}_O\left(\vec{a}\right)$ nu se modifică dacă vectorul $\vec{a}$ glisează pe suportul său (a se vedea Figura 2).

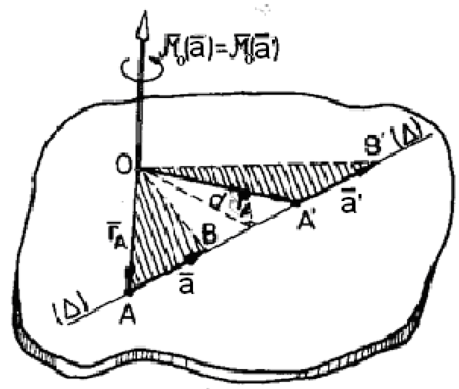

Figura 2

Întradevăr dacă A' este noul punct de aplicație al vectorului $\vec{a}$ atunci:

$$\vec{OA'} \times \vec{a} = \left(\vec{OA} + \vec{AA'}\right) \times \vec{a} = \vec{OA} \times \vec{a} + \vec{AA'} \times \vec{a} = \vec{OA} \times \vec{a},$$

deoarece $\vec{AA'} \times \vec{a} = \vec{0}$ (fiind vectori coliniari).

Dacă originea vectorului $\vec{a}$ nu se deplasează pe suportul său, atunci momentul acestui vector față de punctul O se va modifica deoarece produsul vectorial $\vec{AA'} \times \vec{a}$ nu va mai fi nul.

2. Momentul $\vec{M}_O\left(\vec{a}\right)$ este nul dacă vectorul $\vec{a}$ este nul, sau dacă suportul său trece prin punctul O. Acest lucru este evident deoarece $\left|\vec{M}_O\left(\vec{a}\right)\right| = \vec{0}$ dacă $\left|\vec{a}\right| = 0$, sau $\left|\vec{OA}\right| = 0$, sau $\sin\left(\vec{OA}; \vec{a}\right) = 0$, aceste ultime relații corespunzând cazului când dreapta definită de vectorul $\vec{a}$ trece prin O.

3. Formula de schimbare de pol: dacă se calculează momentul vectorului $\vec{a}$ față de alt pol $O' \neq O$, atunci:

$$\vec{M}_{O'}\left(\vec{a}\right) = \vec{O'A} \times \vec{a} = \left(\vec{OA} + \vec{O'O}\right) \times \vec{a} = \vec{M}_O\left(\vec{a}\right) + \vec{O'O} \times \vec{a}, \tag{5}$$

deci, momentul unui vector în raport cu pol O' este egal cu momentul vectorului $\vec{a}$ în raport cu O, la care se adaugă momentul în raport cu O' al aceluiași vector $\vec{a}$, considerat însă cu originea în O.

Se observă că dacă polii O' şi O generează o dreaptă paralelă cu dreapta suport a vectorului $\vec{a}$ ($\overrightarrow{OO'} \parallel \vec{a}$), vectorii momentele $\vec{M}_O\left(\vec{a}\right)$ şi $\vec{M}_{O'}\left(\vec{a}\right)$ sunt egale.

2. Momentul unui vector faţă de o axă

Fie o axă (Δ) de versor $\vec{u}$, iar O şi O' două puncte ale acestei drepte. Între momentele vectorului $\vec{a}$ (legat sau alunecător) faţă de punctele O şi O' există relaţia (5). Dacă înmulţim scalar relaţia (5) cu versorul $\vec{u}$ şi ţinem cont că produsul mixt $\left(\overrightarrow{O'O} \times \vec{a}, \vec{u}\right) = 0$ (volumul paralelipipedului construit pe reprezentanţii celor trei vectori este 0 deoarece vectorii sunt coplanari), atunci se obţine:

$$\left(\vec{M}_{O'}\left(\vec{a}\right), \vec{u}\right) = \left(\vec{M}_O\left(\vec{a}\right), \vec{u}\right). \tag{6}$$

Prin urmare, proiecţia pe axă a momentului unui vector $\vec{a}$ faţă de un pol O al axei are valoarea independentă de poziţia punctului O pe axă.

Această proprietate conduce la introducerea noţiunii de *moment al unui vector*, legat sau alunecător, *faţă de o axă*.

Prin *definiţie*, momentul unui vector $\vec{a}$ faţă de o axă (Δ), notat M_Δ, este egal cu proiecţia ortogonală pe această axă, a momentului lui $\vec{a}$ faţă de un punct oarecare O al ei (a se vedea Figura 3).

$$M_\Delta = \vec{M}_O\left(\vec{a}\right) \cdot \vec{u} \tag{7}$$

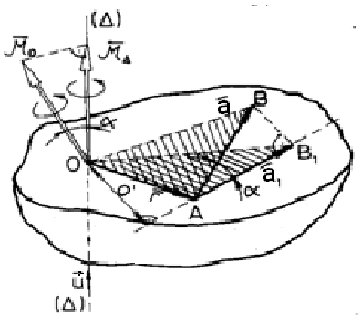

Figura 3

În conformitate cu definiţiile produselor scalar şi vectorial, valoarea absolută a momentului unui vector faţă de o axă oarecare este egală cu produsul dintre lungimea vectorului şi distanţa dintre suportul acestuia şi axa considerată, înmulţit cu sinusul unghiului dintre vector şi axă.

Analiza relaţiei (7), ţinând cont de definiţia (1) a lui $\vec{M}_O\left(\vec{a}\right)$, relevă faptul că M_Δ este nul dacă vectorul $\vec{a}$ este nul, sau dacă suportul său este coplanar cu axa (Δ).

3. Momentul reciproc a doi vectori

Se consideră vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ cu punctele de aplicaţie A şi B.

Se defineşte produsul reciproc al vectorilor $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ ca fiind produsul mixt:

$$m_R\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left(\vec{a},\vec{AB}\times\vec{b}\right). \tag{8}$$

Proprietăți.

1. Momentul reciproc a doi vectori este invariant atunci când cei doi vectori alunecă pe suporturile lor.

Demonstrație. Se consideră că vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ au alunecat pe suporturile lor până în punctele de aplicație A' şi B'. Pentru noua poziție, momentul reciproc este:

$$m'_R\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left(\vec{a},\vec{A'B'}\times\vec{b}\right)=\left(\vec{a},\left(\vec{A'B'}+\vec{AB}+\vec{BB'}\right)\times\vec{b}\right)=$$

$$=\left(\vec{a},\vec{AA'}\times\vec{b}\right)+\left(\vec{a},\vec{AB}\times\vec{b}\right)+\left(\vec{a},\vec{BB'}\times\vec{b}\right)=\left(\vec{a},\vec{AB}\times\vec{b}\right)=m'_R\left(\vec{a},\vec{b}\right)$$

S-a ținut cont de distributivitatea produsului vectorial față de adunare şi că:

$\left(\vec{a},\vec{AA'}\times\vec{b}\right)=0$ deoarece $\left(\vec{a}\parallel\vec{A'A}\right)$.

$\left(\vec{a},\vec{BB'}\times\vec{b}\right)=0$ deoarece $\left(\vec{b}\parallel\vec{BB'}\right)$.

2.

$$m_R\left(\vec{a},\vec{b}\right)=m_R\left(\vec{b},\vec{a}\right). \tag{9}$$

4. Torsorul unui sistem de vectori

Se consideră un sistem (S) de vectori legați sau alunecători $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n$, cu punctele de aplicație $A_1,A_2,...,A_n$.

Prin *definiție*, *torsorul de reducere* al sistemului de vectori (S), într-un punct O, este format din doi vectori şi anume:

- *rezultanta* sistemului de vectori:

$$\vec{R}=\sum_{i=1}^{n}\vec{a}_i \tag{10}$$

- *momentul rezultant* în punctul O al sistemului de vectori:

$$\vec{M}_O=\sum_{i=1}^{n}\vec{M}_O\left(\vec{a}_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\vec{OA}_i\times\vec{a}_i \tag{11}$$

Punctul O se numeşte *originea* sau *polul torsorului*.

Dacă O este originea unui sistem de referință atunci vectorii $\vec{OA}_i=\vec{r}_i$ vor avea ataşate matricele $\{r_i\}=\{x_{1i};x_{2i};x_{3i}\}^t$ care au componente chiar coordonatele punctelor A_i. Matricele coloană ataşate vectorilor ce compun torsorul de reducere al sistemului (S) se calculează cu relațiile:

$$\{R\}=\sum_{i=1}^{n}\{a_i\}\ . \tag{12}$$

$$\{M_O\} = \sum_{i=1}^{n} [r_i]\{a_i\} = -\sum_{i=1}^{n} [a_i]\{r_i\}. \tag{13}$$

Condiția necesară şi suficientă ca două sisteme de vectori să fie echivalente între ele este ca să aibă acelaşi torsor într-un punct oarecare din spațiu. În particular, condiția necesară şi suficientă ca un sistem de vectori alunecători să fie echivalent cu zero este ca torsorul său să fie nul într-un punct oarecare.

Observație. Torsorul de reducere reprezinta efectul mecanic exercitat de forta $\vec{a}$ (vectorul $\vec{a}$) (care actioneaza în A) asupra punctului O.

Proprietățile torsorului

1) Torsorul sistemului (S) nu se modifică dacă vectorii alunecă pe suportul lor.

2) *Relația de schimbare de pol*: dacă O' este alt punct diferit de O, torsorul de reducere în acest punct este format din rezultanta:

$$\vec{R}' = \sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i$$ şi

- momentul rezultant:

$$\vec{M}_{O'} = \sum_{i=1}^{n} \vec{O'A}_i \times \vec{a}_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{O'O} + \vec{OA}_i\right) \times \vec{a}_i = \vec{M}_O + \vec{O'O} \times \vec{R} =$$

$$\vec{M}_O - \vec{OO'} \times \vec{R}. \tag{14}$$

3) *Invarianții* sistemului de vectori. Se observă că rezultanta $\vec{R}$ nu depinde de punctul de reducere, deci este un invariant al torsorului. Un alt invariant se pune în evidență prin înmulțirea scalară cu $\vec{R}$ a relației (14). Se obține:

$$\left(\vec{M}_{O'}, \vec{R}\right) = \left(\vec{M}_O, \vec{R}\right) - \left(\vec{O'O} \times \vec{R}, \vec{R}\right) = \left(\vec{M}_O, \vec{R}\right).$$

Prin urmare produsul:

$$T = \left(\vec{M}_O, \vec{R}\right) \tag{2.15}$$

nu depinde nici el de punctul de reducere. T se numeşte *trinom invariant* sau *scalarul torsorului.*

Scalarul torsorului rezultant a "n" vectori alunecători este egal cu suma momentelor reciproce ale tuturor vectorilor luați doi cîâte doi.

4) Dacă $\vec{R} = \vec{0}$, conform relației de schimbare de pol (5), nici momentul rezultant nu depinde de pol, deci, pentru sistemele pentru care rezultanta este nulă, momentul rezultant poate fi considerat vector liber, fiind şi el invariant față de schimbarea polului.

Dacă polul se deplasează pe direcția rezultantei, momentul rezultant nu se schimbă.

5. Axa centrală a sistemului de vectori

Se consideră sistemul de vectori (S) care în originea O a unui sistem de referință are torsorul de reducere format din rezultanta $\vec{R}$, nenulă, şi momentul rezultant $\vec{M}_O$ care se calculează cu relațiile (10) şi (11).

Mulțimea punctelor P, din spațiu, pentru care rezultanta şi momentul rezultant sunt *coliniare* este o *dreaptă* numită *axa centrală* a sistemului de vectori.

Într-adevăr conform formulei (14):

$$\vec{M}_P = \vec{M}_O - \vec{r} \times \vec{R} \tag{16}$$

în care $\vec{r} = \vec{OP}$. Deoarece pentru punctul P, rezultanta $\vec{R}$ şi momentul rezultant $\vec{M}_P$ sunt coliniare se poate scrie:

$$\vec{R} \times \vec{M}_P = \vec{0} \tag{17}$$

Înlocuind (17) în (16) se poate scrie:

$$\vec{0} = \vec{R} \times \vec{M}_O - \left(\vec{R}\, x\, \vec{r}\, x\, \vec{R} \right) = \vec{R} \times \vec{M}_O - \left(\vec{R}, \vec{R} \right) \vec{r} + \left(\vec{R}, \vec{r} \right) \vec{R} \tag{18}$$

Din această relație se poate deduce expresia lui $\vec{r}$:

$$\vec{r} = \vec{r}_C + \lambda\, \vec{R} \tag{19}$$

în care:

$$\vec{r}_C = \frac{\vec{R} \times \vec{M}_0}{\left(\vec{R}, \vec{R} \right)};\ \lambda = \frac{\left(\vec{R}, \vec{r} \right)}{\left(\vec{R}, \vec{R} \right)} \tag{20}$$

Relația (19) este ecuația vectorială a unei drepte care trece prin punctul C având vectorul de poziție $\vec{r}_C$ şi este paralelă cu rezultanta $\vec{R}$.

Pentru a prezenta sub formă scalară ecuația axei centrale se scrie relația (16) sub formă matriceală:

$$\{M_P\} = \{M_O\} + [R]\{r\} \tag{21}$$

în care $\{M_O\} = \{M_{O1}; M_{O2}; M_{O3}\}^t$ este matricea coloană ataşată lui $\vec{M}_O$, $\{r\} = \{x_1; x_2; x_3\}^t$ este matricea coloană ataşată lui $\vec{r}$ iar: $[R] = \begin{bmatrix} 0 & -R_3 & R_2 \\ R_3 & 0 & -R_1 \\ -R_2 & R_1 & 0 \end{bmatrix}$ este matricea antisimetrică ataşată lui $\vec{R}$.

Deoarece $\vec{M}_P$ este paralel cu $\vec{R}$ se poate scrie:

$$\{M_O\} + [R]\{r\} = k \cdot \left\{ \vec{R} \right\} \tag{22}$$

care detaliat dă:

$$\begin{aligned} M_{O1} - R_3 x_2 + R_2 x_3 &= kR_1 \\ M_{O2} + R_3 x_1 - R_1 x_3 &= kR_2 \\ M_{O3} - R_2 x_1 + R_1 x_2 &= kR_3. \end{aligned} \tag{23}$$

Eliminând în (23) constanta k se obține ecuația axei centrale:

$$\frac{M_{O1} - R_3 x_2 + R_2 x_3}{R_1} = \frac{M_{O2} + R_3 x_1 - R_1 x_3}{R_2} = \frac{M_{O3} - R_2 x_1 + R_1 x_2}{R_3} \tag{2.24}$$

dată ca intersecție a două plane.

Momentul rezultant calculat în raport cu punctele situate pe axa centrală are valoare minimă şi se numeşte *momentul minimal*.

Demonstrație.

Reducând un sistem S de vectori față de un punct O din spațiu (care nu aparține axei centrale), se obține un torsor format din rezultanta $\vec{R}$ şi momentul rezultant $\vec{M}_O$. Fie α unghiul dintre direcțiile acestor elemente ale torsorului $\alpha = \sphericalangle\left(\vec{M}_O, \vec{R}\right)$.

Din relația (15) rezultă că: $T = \left(\vec{M}_O, \vec{R}\right) = \left(\vec{M}_P, \vec{R}\right)$,

unde P este un punct ce aparține axei centrale.

Din definiția produsului scalar, relația anterioară are forma: $\left|\vec{M}_O\right| \cos\alpha \left|\vec{R}\right| = \left|\vec{M}_P\right| \left|\vec{R}\right|$, de

unde rezultă că $\left|\vec{M}_O\right| \geq \left|\vec{M}_O\right| \cos\alpha = \left|\vec{M}_P\right|$.

Reducând un sistem S de vectori față de un punct O din spațiu (care nu aparține axei centrale), se obține un torsor format din rezultanta $\vec{R}$ şi momentul rezultant $\vec{M}_O$.

Fie α unghiul dintre direcțiile acestor elemente ale torsorului $\alpha = \sphericalangle\left(\vec{M}_O, \vec{R}\right)$.

Din relația (15) rezultă că: $T = \left(\vec{M}_O, \vec{R}\right) = \left(\vec{M}_P, \vec{R}\right)$, unde P este un punct ce aparține axei centrale.

Din definiția produsului scalar, relația anterioară are forma:

$\left|\vec{M}_O\right| \cos\alpha \left|\vec{R}\right| = \left|\vec{M}_P\right| \left|\vec{R}\right|$, de unde rezultă că $\left|\vec{M}_O\right| \geq \left|\vec{M}_O\right| \cos\alpha = \left|\vec{M}_P\right|$.

6. Cazurile de reducere ale unui sistem de vectori

După valorile care le au $\vec{R}$ şi $\vec{M}_O$ se pot distinge următoarele cazuri de reducere:

1) $\vec{R} = \vec{0}$; $\vec{M}_O = \vec{0}$, torsorul este nul în raport cu orice punct din spațiu.

2) $\vec{R} = \vec{0}$; $\vec{M}_O \neq \vec{0}$, torsorul se reduce la un moment, care este acelaşi în orice punct din spațiu.

3) $\vec{R} \neq \vec{0}$; $\vec{M}_O = \vec{0}$, torsorul se reduce la o rezultantă unică, axa centrală trece prin originea sistemului de referință.

4) $\vec{R} \neq \vec{0}$; $\vec{M}_O \neq \vec{0}$, în acest caz se disting două posibilități:

- $T = 0$, caz în care momentul rezultant este perpendicular pe rezultantă, torsorul se reduce pe axa centrală doar la rezultantă;

- $T \neq 0$, cei doi vectori nu sunt ortogonali. Se poate determina în acest caz distanța până la axa centrală, care este dată de relația:

$$d = \frac{\{M_O\}^t \{R\}}{\sqrt{\{R\}^t \{R\}}} \tag{25}$$

În continuare se prezintă câteva cazuri de sisteme de vectori particulare.

7. Sisteme de vectori concurenți

Fie un sistem de vectori aplicați într-un punct A și O un alt punct. Rezultanta sa se calculează cu relația (10) iar momentul rezultant într-un punct O va fi:

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{OA} \times \vec{a}_i = \vec{OA} \times \sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i = \vec{OA} \times \vec{R} \tag{26}$$

Prin urmare momentul rezultant al sistemului de vectori față de punctul O este egal cu momentul față de același punct al rezultantei sistemului de vectori. Aceasta este *teorema lui Varignon* și ea exprimă de fapt distributivitatea produsului vectorial față de adunare.

8. Sisteme de vectori coplanari

Se consideră un sistem pentru care toți suporții vectorilor se află în același plan. Pentru simplificare se alege sistemul de referință $Ox_1x_2x_3$ astfel încât planul Ox_1x_2 să coincidă cu planul vectorilor. Astfel matricile coloană atașate vectorilor vor avea forma $\{a_i\} = \{a_{1i}; a_{2i}; 0\}^t$.

Dacă se face reducerea sistemului de vectori în raport cu originea O, sistemul se reduce la un torsor ale cărui componente vectoriale vor avea matricele atașate:

$$\{R\} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_{1i}; \sum_{i=1}^{n} a_{2i}; 0 \right\}^t \tag{27}$$

$$\{M_O\} = \left\{ 0; 0; \sum_{i=1}^{n} \left(x_{1i} a_{2i} - x_{2i} a_{1i} \right) \right\}^t \tag{28}$$

Este evident că rezultanta sistemului are suportul său tot în planul Ox_1x_2 iar momentul rezultant este un vector perpendicular pe acest plan. Prin urmare trinomul invariant este nul și deci sistemul se poate reduce, în cazul $\vec{R} \neq \vec{0}$ și $\vec{M}_O \neq \vec{0}$, la o rezultantă unică ce nu trece prin origine. Suportul acestei rezultante se poate deduce din ecuația axei centrale:

$$x_3 = 0;\; x_1 R_2 - x_2 R_1 - M_{O3} = 0 \tag{29}$$

în care R_1, R_2 și M_{O3} se obțin din (27) și (28).

Torsorul de reducere în raport cu originea O poate prezenta următoarele situații:

1) $\vec{R} = \vec{0}$; $\vec{M}_O = \vec{0}$, torsorul este nul.

2) $\vec{R} \neq \vec{0}$; $\vec{M}_O = \vec{0}$, torsorul se reduce la o rezultantă unică care trece prin origine.

3) $\vec{R} = \vec{0}$; $\vec{M}_O \neq \vec{0}$, sistemul de vectori se reduce la un moment perpendicular pe planul vectorilor.

4) $\vec{R} \neq \vec{0}$; $\vec{M}_O \neq \vec{0}$, sistemul de vectori se reduce la o rezultantă unică al cărei suport este dat de ecuațiile (29) ale axei centrale.

9. Sisteme de vectori paraleli

Un sistem de vectori formează un sistem un sistem de vectori paraleli dacă toți au suportul paralel cu o direcție (Δ), caracterizată printr-un versor care are matricea ataşată $\{u\} = \{u_1; u_2; u_3\}^t$.

Un vector oarecare $\vec{a}_i$ se poate exprima sub forma:

$\vec{a}_i = a_i \cdot \vec{u}$ şi are matricea ataşată $\{a_i\} = a_i \{u\}$.

Sistemul de vectori se reduce în raport cu originea O la un torsor ale cărui componente vectoriale sunt:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \vec{u} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right) \vec{u} = R \cdot \vec{u} \tag{30}$$

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{OA} \times a_i \vec{u} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \vec{OA}_i \right) \times \vec{u} \tag{31}$$

Se observă că rezultanta este paralelă cu $\vec{u}$ iar momentul rezultant este perpendicular pe versorul $\vec{u}$, deci:

$$T = 0 \tag{32}$$

În cazul general în care $\vec{R} \neq \vec{0}$ şi $\vec{M}_O \neq \vec{0}$ sistemul se reduce la o rezultantă unică ce nu trece prin origine, al cărei suport este dat de expresia axei centrale.

S-a văzut că, axa centrală a sistemului de vectori trece printr-un punct fix C, al cărui vector de poziție este dat de relația (20). În acest caz $\vec{r}_C$ va avea expresia:

$$\vec{r}_C = \frac{1}{R^2} \left(\vec{R} \times \vec{M}_O \right) = \frac{1}{R^2} \left[R\, \vec{u} \times \left(\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \vec{OA}_i \right) \times \vec{u} \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{R^2} \cdot R \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \vec{OA}_i \right) \cdot \left(\vec{u} \cdot \vec{u} \right) - \frac{1}{R^2} \cdot \vec{u} \left[R\, \vec{u} \times \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \vec{OA}_i \right) \right] = \frac{1}{R} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \vec{OA}_i \right)$$

Deci, ținând cont de (30), se obține:

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i \vec{OA}_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i} \tag{33}$$

Acest punct fix C poartă numele de *centrul* sistemului de vectori paraleli, coordonatele sale se obțin proiectând vectorul $\vec{r}_C$ pe cele trei axe:

$$x_{1C}=\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i x_{1i}}{\sum_{i=1}^{n} a_i};\ x_{2C}=\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i x_{2i}}{\sum_{i=1}^{n} a_i};\ x_{3C}=\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i x_{3i}}{\sum_{i=1}^{n} a_i} \tag{34}$$

Centrul sistemului de vectori paraleli are următoarele proprietăți:

1) Se găseşte pe axa centrală.

2) Poziția centrului la un sistem de vectori paraleli nu depinde de direcția sistemului de vectori dată prin versorul $\vec{u}$. Aceasta înseamnă că dacă se consideră vectorii $\vec{a}_i$ drept vectori legați de punctele lor de aplicație, oricum s-ar schimba direcția versorului $\vec{u}$, centrul vectorilor paraleli rămâne acelaşi. (în relația (33), vectorul $\vec{r}_C$ nu depinde de $\vec{u}$).

3) Dacă mărimea vectorilor $\vec{a}_i$ este mărită sau micşorată de un număr de ori, poziția centrului sistemului de vectori paraleli rămâne aceeaşi. Această proprietate serveşte, după cum se va arăta, la simplificarea determinării centrului de masă în cazul corpurilor omogene:

$$\vec{r}_C=\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i \vec{OA}_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i}=\frac{\sum_{i=1}^{n} ka_i \vec{OA}_i}{\sum_{i=1}^{n} ka_i}=\vec{r}_{C'}.$$

4) Schimbarea sistemului de referință nu modifică poziția centrului sistemului de vectori paraleli. Dacă $O'x_1'x_2'x_3'$ este un alt sistem de referință atunci:

$$\vec{r}_C'=\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i \vec{O'A}_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i}=\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i\left(\vec{O'O}+\vec{OA}_i\right)}{\sum_{i=1}^{n} ka_i}=\vec{O'O}+\vec{r}_C. \tag{35}$$

Aceasta este chiar relația de trecere de la un reper la celălalt ceea ce denotă că poziția lui C, este neschimbată.

5) Dacă punctele de aplicație ale vectorilor paraleli se găsesc în interiorul unei suprafețe convexe $(\sum)$, atunci centrul sistemului de vectori paraleli se află în interiorul acestei suprafețe.

Demonstrație. Se alege sistemul de referință astfel încât planul (x_1 O x_2) să fie tangent la suprafața $(\sum)$.

În acest caz, toate coordonatele x_{3i} vor fi pozitive.

Din a treia relație (34), rezultă $x_{3C}\geq 0$.