Bitte hier tackern!

Schriftliche Hausarbeit

Matrikelnummer: 374333

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6
Punkte:						

Summe:

Eidesstattliche Erklärung

Mit der Abgabe dieser Hausarbeit erkläre ich an Eides statt gegenüber der Fakultät IV der Technischen Universität Berlin, dass die vorliegende, dieser Erklärung angefügte Hausarbeit selbstständig und nur unter Zuhilfenahme der erlaubten Quellen und Hilfsmittel angefertigt wurde. Alle Stellen der Arbeit, die anderen Werken dem Wortlaut oder dem Sinn nach entnommen wurden, sind kenntlich gemacht. Ich erkläre hiermit, dass mir bewusst ist, dass ausschließlich meine eigene Leistung gewertet wird. Ich reiche alle Lösungen in dieser Hausarbeit erstmals als Prüfungsleistung ein.

Aufgabe 1

(i) Eine Funktion ist injektiv, wenn auf jedes Element in der Zielmenge höchstens einmal abgebildet wird. Angenommen $f : A \to B$ ist eine injektive Abbildung mit $|A| > |B|$. Da der Definitionsbereich A mehr Elemente aufweist als die Zielmenge B, muss nach Schubfachprinzip mindestens ein $b \in B$ existieren, auf das mehr als einmal abgebildet wird. Dies ist ein Widerspruch zur Definition der Injektivität. Somit ist f nicht injektiv.

(ii) Sei $|f^{-1}(\{b\})| \leq k$ für alle $b \in B$ und $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} |A| = |f^{-1}(B) = |f^{-1}(\bigcup_{i=1}^{|B|}\{b_i\})| \\ &\leq \sum_{i=1}^{|B|} |f^{-1}(\{b_i\})| \\ &\leq k \cdot |B| \end{aligned}$$

Da $|A| \leq k \cdot |B|$ allerdings ein Widerspruch zur Aufgabenstellung ist, gibt es ein $b \in B$ mit $f^{-1}(\{b\}) \geq k + 1$.

(iii) **IA:**
Sei $|A| = 1$ und $A = \bigcup_{i=1}^{|A|} a_i$. Als Färbung verwenden wir $\{W, B\}$. Sei F die Menge der möglichen Färbungen. Dann gilt $|F_1| = |\{(a_1, W), (a_1, B)\}| = 2^1 = 2^{|A|}$.

IV:
Es existieren $2^{|A|}$ verschiedene 2-Färbungen für A mit $|A| = n$.

IB:
Es existieren $2^{|A|}$ verschiedene 2-Färbungen für A mit $|A| = n + 1$.

IS:
Nach Induktionsvoraussetzung existieren 2^n verschiedene 2-Färbungen für ein A mit $|A| = n$. Fügen wir nun ein Element a_{n+1} hinzu. Dann können wir diesem Element zwei Farben zuweisen. Also bilden wir das kartesische Produkt $F_n \times \{(a_{n+1}, B), (a_{n+1}, W)\}$. Dann gilt $|F_{n+1}| = 2 \cdot |F_n| = 2^{n+1}$.

(iv) Es gilt zu zeigen, dass es $2^{n+1} - 1$ Wörter der Länge höchstens n über dem Alphabet $\Sigma \in \{0, 1\}$ gibt.
Sei W_m die Menge aller Wörter der Länge m. Also ist $|W_m| = 2^m$, da jedes Element entweder 0 oder 1 ist. Sei W die Menge aller Wörter der Länge höchstens n. Es gilt $|W| = \bigcup_{m=0}^{n} W_m$, da die W_ms disjunkt sind. Dabei impliziert die unterschiedliche Länge, dass sie unterschiedlich sind. Deswegen gilt:

$$|W| = \bigcup_{m=0}^{n} W_m = \sum_{m=0}^{n} |W_m| = \sum_{m=0}^{n} 2^m = \frac{1-2^n}{1-2} = 2^n - 1$$

(v) Sei die Färbung definiert mit $\{W, B\}$ als Farben. Definiere die Abbildung $f : F \to W$, $a = a_1, ..., a_n \to f(a)$ mit $f(a)_j = B$, falls $a_j = 0$ und $f(a)_j = W$, falls $a_j = 1$. Die Umkehrabbildung $f^{-1} : W \to F$, $b = b_1, ..., b_n \to f^{-1}(b)$ mit $f(b)_j = 0$, falls $b_j = B$ und $f^{-1}(b)_j = 1$, falls $b_j = W$. Beide Abbildungen sind offensichtlich injektiv. Also existiert eine Bijektion zwischen F und B.

Aufgabe 2

(i) Wir geben einen Algorithmus an, um die größte unabhängige Menge bezüglich Kardinalität eines zusammenhängenden Graphen G zu bestimmen. Als Eingabe übergeben wir die hilfreiche Blockzerlegung des Graphen G. Da dies ein Baum ist und Bäume auch bipartite Graphen sind, betrachten wir für unseren Algorithmus die hilfreiche Blockzerlegung als bipartiten Graph. Es gilt $T = (A \bigcup B, E)$, wobei A die Menge der Schnittknoten ist und B die Menge der Blöcke.

Algorithm 1 Independent Set.

```
function CALCULATEIS(T = (A ⋃ B, E))
    S ← {}                                          ▷ result set
    for all v ∈ A do
        if v ∉ S then
            SubSolution ← PIS(v)        ▷ calculate max IS from two blocks adjacent to cut vertex v
            for all t ∈ SubSolution do              ▷ for each node in Sub max IS
                bool isNeighbour ← false
                for all s ∈ S do
                    if s ∈ N(t) then          ▷ If node t is not neighbour with an Element of S
                        isNeighbour ← true
                        break
                if isNeighbour == true then
                    continue
                else if t ∉ S then                  ▷ If node t is not already part of S
                  S = S ⋃ {t}
    return S
```

Die Funktion PIS (Procedure Independent Set) ist dabei wie folgt definiert:
$PIS = \max\{\mathrm{I}_1^A \bigcup I_2^A, I_1^A \bigcup I_2^B, I_1^B \bigcup I_2^A, I_1^B \bigcup I_2^B\}$
Die Definition der einzelnen Elemente der Funktion kann Großübung 5 entnommen werden.

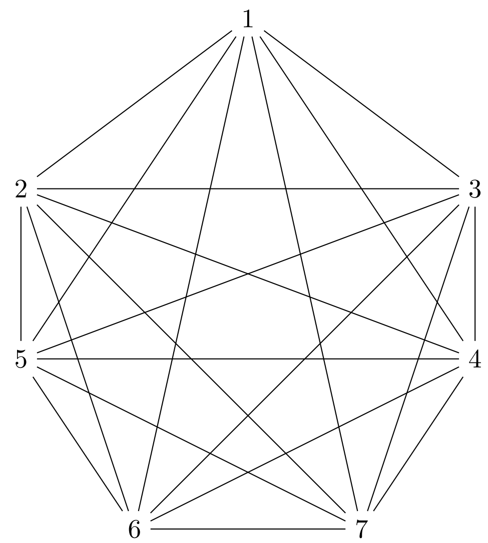
(ii)

(iii) Am Anfang wird der Algorithmus über alle Schnittknoten iterieren, d.h. $O(|A|) \subseteq O(|V(G)|)$. Die Funktion $PIS()$ hat eine Laufzeit von $O(2k)$, da sie über alle Knoten von 2 Blöcken iteriert. Anschließend wird über alle Knoten, die von PIS zurückgegeben werden, iteriert. Die nächste Iteration ist über alle derzeitigen Knoten der Ergebnismenge, wobei für diese $O(|V(G)|)$ gilt. Unter Berücksichtigung aller dieser Laufzeiten erhält man für den gesamten Algorithmus eine Laufzeit von $O(k \cdot |V(G)|^2)$.

Aufgabe 3

(i) Wir geben einen Beispielgraphen G an, der nicht 2-planarisierbar ist:

G :



Wir geben eine mögliche Menge S an, sodass $G - S$ planar ist. Sei $S = \{5, 6, 7\}$. Dann erhalten wir einen K_4 und nach Vorlesung ist ein K_4 planar.

(ii) Es gilt eine obere Schranke für die maximale Anzahl knotendisjunkter Kopien für einen Graphen G zu bestimmen, wobei G 5-planarisierbar ist.

Da die Kopien des K_5 in G kontendisjunkt sind und der K_5 nach Vorlesung minimal nicht-planar sind, gilt es bei jedem K_5 einen Knoten zu löschen, sodass G planar wird. Da G 5-planarisierbar ist, können nach Definition höchstens 5 Knoten gelöscht werden. Offensichtlich folgt daraus, dass G höchstens 5 knotendisjunkte Kopien des K_5 enthalten kann.

(iii) Es gilt eine obere Schranke für die maximale Anzahl knotendisjunkter Kopien des K_5 für einen Graphen G zu definieren, wobei G $b \in \mathbb{N}^+$ Blöcke enthält und alle Blöcke c-planarisierbar sind.

Jeder Block von G ist c-planarisierbar, was bedeutet, dass durch das Entfernen von höchstens c Knoten der Block planar wird. Der K_5 ist laut Vorlesung minimal nicht-planar, was bedeutet, dass durch das Entfernen eines Knotens dieser planar wird. Da wir die maximale Anzahl knotendisjunkter Kopien des K_5 betrachten, gilt es bei jedem K_5 eines Blockes einen Knoten zu löschen, sodass der Block planar wird. Offensichtlich folgt daraus, dass jeder Block höchstens c knotendisjunkte Kopien des K_5 entahlten kann. Da G $b \in \mathbb{N}^+$ Blöcke besitzt und jeder Block höchstens c knotendisjunkte K_5 enthält, liegt die obere Schranke bei $b \cdot c$.

(iv) **IA:**

Sei G ein beliebiger Graph, der aus lediglich einem Block B besteht. Dann ist offensichtlich, dass

$$\chi(G) = \max_{\substack{B \subseteq G \\ B \text{ Block von } G}} \chi(B).$$

gilt, da $V(G) = V(B)$.

IV:

Die Aussage

$$\chi(G) = \max_{\substack{B \subseteq G \\ B \text{ Block von } G}} \chi(B).$$

gilt für einen beliebigen Graphen G mit $|B| = n$.

IB:

Die Aussage

$$\chi(G) = \max_{\substack{B \subseteq G \\ B \text{ Block von } G}} \chi(B).$$

gilt für einen beliebigen Graphen G mit $|B| = n + 1$.

IS:

Die Blockzerlegung führt zu einem Baum. Dabei sei B_0 die Wurzel. Es gilt nun die einzelnen Blöcke wie folgt zu färben:

Beginnend bei B_0 werden wir zunächst diesen Block korrekt färben und temporär die Menge der gewählten Farben C wie folgt setzen $C = \{1, ..., \chi(B_0)\}$.Für die nachfolgenden Blöcke werden wir versuchen eine korrekte Färbung mit den vorhandenen Farben zu erreichen. Falls dies nicht möglich ist, aktualisieren wir C wie folgt:

$C = \{1, ..., \chi(B_i)\}$. Dabei ist B_i der Block, bei dem die bisherigen Farben nicht ausreichend waren. Des Weiteren ist zu beachten, dass bei jedem nachfolgenden Block bereits die Färbung eines Knotens gegeben ist, nämlich die des gemeinsamen Schnittknotens zu dem Vorgängerblock. Entsprechend der Induktionsvoraussetzung folgt, dass $\chi(G)$ nun gleich der maximalen Färbung eines Blockes ist. Wir fügen nun einen weiteren Block B_{n+1} hinzu. Dabei ist auch hier wieder zu beachten, dass die Färbung des Schnittknotens von B_{n+1} bereits vorgegeben ist. Falls die bisherigen $|C|$ Farben nicht ausreichen, um B_{n+1} korrekt zu färben, so aktualisieren wir die Farbmenge abermals, sodass gilt $C = \{1, ..., \chi(B_{n+1})\}$. Damit ist die Induktionsbehauptung gezeigt.

Aufgabe 4

(i) Es gilt einen Clutter $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ für eine Menge $X \coloneqq \{1,2,3,4\}$ anzugeben, sodass $|\mathcal{F}| = \binom{4}{2} = 6$. Dann sei $\mathcal{F} = \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\}$.

(ii) Gegeben sei eine endliche Menge X mit $|X| \coloneqq n$.

Ein Clutter ist definiert wie folgt:
Sei X eine endliche Menge mit $n \coloneqq X$. Wir nennen eine Menge $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein *Clutter*, wenn für alle $A, B \in \mathcal{F}$ gilt: Wenn $A \subseteq B$, dann $A = B$.

Laut Vorlesung 11 ist $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ ein poset, da $\subseteq$ eine partielle Ordnung auf $\mathcal{P}(X)$ darstellt. Entsprechend der Definition von Antiketten gilt dann in Bezug auf unser konkretes Poset:
Eine Antikette in $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ ist eine Menge $\mathcal{F} \subseteq X$, sodass für alle $A \neq B \in \mathcal{F}$ weder $A \subseteq B$ noch $B \subseteq A$ gilt.

An dieser Stelle wird deutlich, dass ein Clutter tatsächlich eine Antikette ist. Nun gilt es zu zeigen, dass $|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ bzw., dass innerhalb einer Potenzmenge die längste Antikette $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ Elemente besitzt.

Betrachten wir dazu zunächst den Aufbau einer Potenzmenge für eine beliebige Menge $X \coloneqq \{i_1, i_2, ..., i_n\}$ mit $|X| \coloneqq n$.

$$\mathcal{P}(X) \coloneqq \{\underbrace{\{i_1\}, ..., \{i_n\}}_{1-stellig}, \underbrace{\{i_1, i_2\}, ..., \{i_{n-1}, i_n\}}_{2-stellig}, ..., \underbrace{\{i_1, ..., i_n\}}_{n-stellig}, \underbrace{\varnothing}_{0-stellig}\}$$

Aus Tutorium 11, Aufgabe 2 (ii) wissen wir bereits, dass gilt $|\mathcal{P}_k(X)| \leq |\mathcal{P}_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(X)|$ für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ und $|X| \coloneqq n$. Daher wissen wir bereits, dass die Anzahl der $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$-stelligen Mengen innerhalb einer Potenzmenge die größte ist.
Nun zeigen wir, dass alle Mengen von k-stelligen Mengen in $\mathcal{P}(X)$ einen Clutter bilden.
Nach Vorlesung 2 ist der Binomialkoeffizent wie folgt definiert:
$\binom{n}{k} \coloneqq |\mathcal{P}_k(X)|$ für eine Menge X und ein $k \in \mathbb{N}$.
Da alle k-stelligen Mengen offensichtlich die selbe Kardinalität aufweisen, gilt:

$$\text{Für alle } A, B \in \mathcal{P}(X) \text{ gilt: Wenn } |A| = |B|, \text{ dann } A \nsubseteq B \text{ und } B \nsubseteq A.$$

Damit ist gezeigt, dass alle $\mathcal{P}_k(X)$ mit $k \in \{0, ..., n\}$ Clutter bilden. Abschlißend bleibt nur noch zu zeigen, dass kein größerer Clutter als $\mathcal{P}_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(X)$ existiert.
Nach Tutorium 11 Aufgabe 3(i) wissen wir bereits, dass jede maximale Kette bezüglich $\subseteq$ in $\mathcal{P}(X)$ genau $n+1$ Elemente enthält, wobei $|X| \coloneqq n$. Nach dem Satz von Dilworth kann $\mathcal{P}(X)$ in $n+1$ Antiketten zerlegt werden. Dies stellt die kleinste Antikettenzerlegung dar. Da wir bereits gezeigt haben, dass die Mengen der k-stelligen Mengen

alle Clutter bilden, wissen wir dass diese auch Antiketten sind. Es existieren allerdings genau $n+1$ k-stellige Mengen da gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Da wir nun wissen, dass die kleinste Antikettenzerlegung $n+1$ Antiketten enthält und da jede Antikette ein Clutter ist und da der Binomialkoeffizient über die Anazhl der k-stelligen Mengen in der Potenzmenge definiert ist, folgt daraus, dass $\mathcal{P}_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(X)$ mit $|\mathcal{P}_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(X)| := \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ tatsächlich die größte Antikette und damit auch das größte Clutter darstellt. Die Aussage $|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ gilt, da durch das Entfernen eines $A \in \mathcal{F}$ immer noch eine Antikette und damit auch ein Clutter vorliegt.

Aufgabe 5

(i) Es gilt zu zeigen, dass $\mathcal{B}(G)$ ein einfaches und waldartiges Clutter ist.
Wir zeigen zunächst, dass $\mathcal{B}(G)$ ein einfaches Clutter ist. $\mathcal{B}(G)$ ist ein einfaches Clutter, falls für alle $A, B \in \mathcal{B}(G)$ mit $A \neq B$ gilt $|A \cap B| \leq 1$ und $|A| \geq 2$.

Da G ein zusammenhängender Graph ist, existiert kein Block $B \subseteq G$ mit $|V(B)| = 1$. Daraus folgt, dass für alle $A \in \mathcal{B}(G)$ gilt $|A| \geq 2$. Die Blöcke eines Graphen sind paarweise lediglich durch Schnittknoten miteinander verbunden. Darus folgt, dass zwei Blöcke höchstens einen gemeinsamen Knoten besitzen und zwar den Schnittknoten, der beide miteinander verbindet. Da in $\mathcal{B}(G)$ die Knotenmengen der einzelnen Blöcke gelistet werden, gilt:

$$\text{Für alle } A, B \in \mathcal{B}(G) \text{ mit } A \neq B\ |A \bigcap B| \leq 1.$$

Damit ist geziegt das $\mathcal{B}(G)$ ein einfaches Clutter ist.

Nun gilt es zu zeigen, dass $\mathcal{B}(G)$ ein waldartiges Clutter ist.

Betrachten wir den Blockgraphen $B(G)$ des Graphen G. Da G zusammenhängend ist, wissen wir nach Vorlesung 5, dass dieser ein Baum ist.
Angenommen es existiert eine Teilfamilie $W \in \mathcal{B}(G)$, für die gilt:

Für alle $A, B \in W$ mit $A \neq B$ existieren mindestens zwei $a_1, a_2 \in A$, sodass $A \bigcap B = \{a_1, a_2\}$. Also betrachten wir den Fall, dass alle Blöcke mit mindestens zwei Schnittknoten verbunden sind. Dann gilt für jeden Knoten im Blockgraphen $N_G(v) \geq 2$ mit $v \in V(G)$. Daraus folgt, dass $\delta(B(G)) \geq 2$. Da die Menge $\mathcal{B}(G)$ allerdings endlich ist, da $\mathcal{B}(G) \subseteq \mathcal{P}(V(G))$ und $\mathcal{P}(V(G))$ auch endlich ist, ist dies ein Widerspruch zu folgendem Lemma aus Vorlesung 4:
Jeder endliche Baum T hat Minimalgrad $\delta(T) \leq 1$.
Da wir bereits gezeigt haben, dass $\mathcal{B}(G)$ einfach ist, wissen wir ebenfalls, dass für alle Blöcke $A, B \in \mathcal{B}(G)$ mit $A \neq B$ gilt $|A \bigcap B| \leq 1$. Also ist $\mathcal{B}(G)$ auch waldartig.

(ii) Es gilt zu zeigen, dass für jedes einfache und waldartige Clutter $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine echte 2-Färbung existiert.

IA:
Sei $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein einfaches und waldartiges Clutter mit $|\mathcal{F}| = 1$. Da bereits gegeben ist, dass $\mathcal{F}$ einfach ist, wissen wir, dass für $A \in \mathcal{F}$ gilt $|A| \geq 2$. Also existiert eine echte 2-Färbung.

IV:
Für ein einfaches und waldartiges Clutter $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit $|\mathcal{F}| = n$ existiert eine echte 2-Färbung.

IB:
Für ein einfaches und waldartiges Clutter $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit $|\mathcal{F}| = n + 1$ existiert eine echte 2-Färbung.

IS:
Betrachten wir $|\mathcal{F} \setminus \{A\}| = n$. Da $\mathcal{F}$ waldartig ist wissen wir, dass ein Element $a \in A$ existiert, sodass für alle $B \in \mathcal{F}$. gilt: Wenn $A \cap B \neq \varnothing$, dann $A \cap B = \{a\}$. Aus der Induktionsvoraussetzung wissen wir bereits, dass für ein $\mathcal{F}$ mit $|\mathcal{F}| = n$ eine echte 2-Färbung existiert. Da $\mathcal{F}$ einfach ist, wissen wir, dass $|A \cap B| \leq 1$ für alle $B \in \mathcal{F}$. Daraus folgt, dass A höchstens ein Element gemeinsam hat mit allen anderen Mengen B, nämlich das Element a. Betrachen wir nun $|\mathcal{F} \cap A| = n + 1$. Da a wie bereits gezeigt das einzige gemeinsame Element ist und für ein $\mathcal{F}$ mit $|\mathcal{F}| = n$ nach Induktionsvoraussetzung bereits eine echte 2-Färbung existiert, ist die Färbung für $a \in A$ bereits vorgegeben. Für alle anderen $b \in A$ gilt, dass diese lediglich in A enthalten sind. Deswegen können diese beliebig gefärbt werden. Daraus folgt, dass auch für ein $\mathcal{F}$ mit $|\mathcal{F}| = n + 1$ eine echte 2-Färbung existiert uns somit wurde die Induktionsbehauptung gezeigt.