Tópico de la Especialidad: Robótica

Clase 5: Fundamentos de la Cinemática del Robot

Profesor: René Torres

Universidad de Santiago de Chile
Carrera: Ingeniería Civil en Mecatrónica
e-mail: rene.torres.a@usach.cl

24 de septiembre de 2023

Cinemática del robot

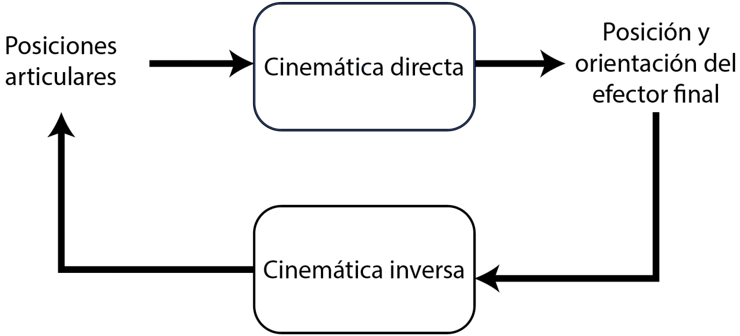
¿Qué es?

La cinemática de un robot es el estudio de los movimientos de un robot. En un análisis cinemático la posición, velocidad y aceleración de cada uno de los elementos del robot son calculados sin considerar las fuerzas que causan el movimiento. La relación entre el movimiento y las fuerzas asociadas son estudiadas en la dinámica de robots.

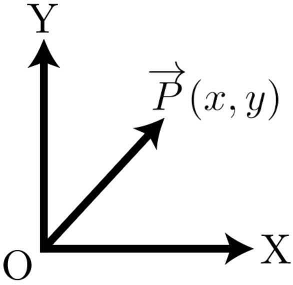
Cinemática del robot

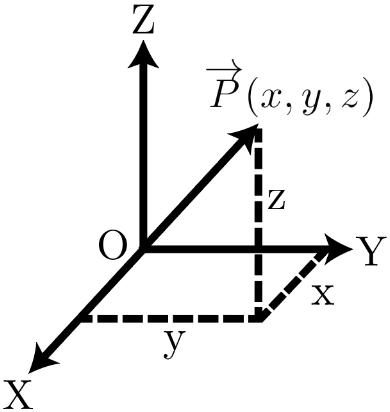
¿Qué es?

La cinemática de un robot es el estudio de los movimientos de un robot. En un análisis cinemático la posición, velocidad y aceleración de cada uno de los elementos del robot son calculados sin considerar las fuerzas que causan el movimiento. La relación entre el movimiento y las fuerzas asociadas son estudiadas en la dinámica de robots.

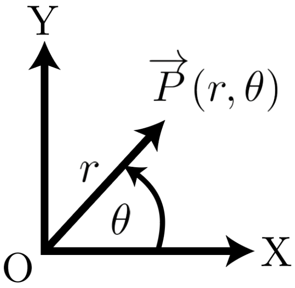


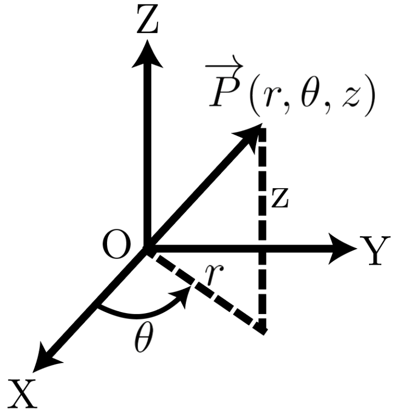
Sistema cartesiano



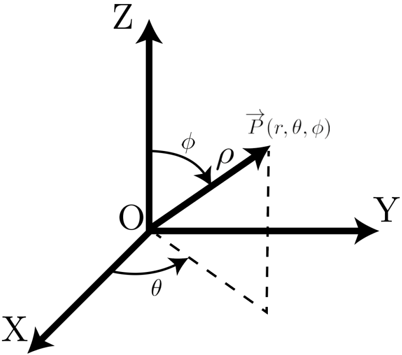


Coordenadas polares y cilíndricas

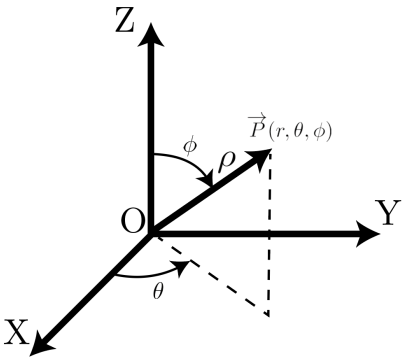




Coordenadas esfericas



Coordenadas esfericas



$$z = \rho cos(\phi)$$

$$x = \rho sin(\phi) cos(\theta)$$

$$y = \rho sin(\phi) sin(\theta)$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

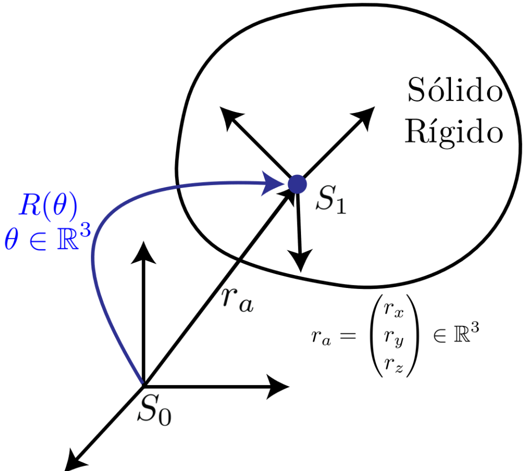
$$tan(\theta) = \frac{y}{x}$$

$$cos(\phi) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$sin(\phi) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Representación de la orientación

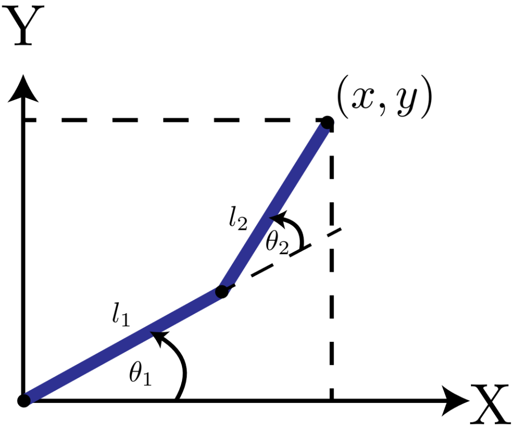
Un punto queda totalmente definido en el espacio a través de los datos de sus posición. Para un sólido rígido no basta con definir la posición, además se debe definir cuál es su orientación respecto de un sistema de referencia.



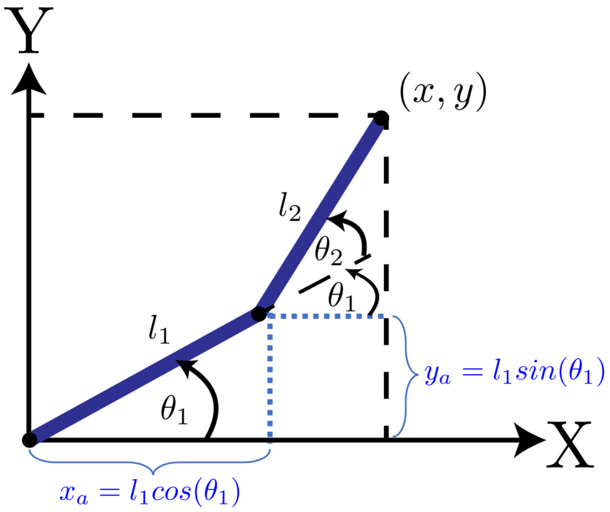
Cinemática directa caso plano

Tarea

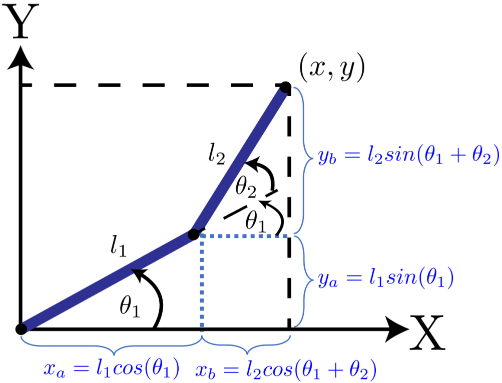
Determinar la posición final (x, y) a partir de los datos conocidos $(\theta_1, \theta_2, l_1, l2)$



Cinemática directa caso plano

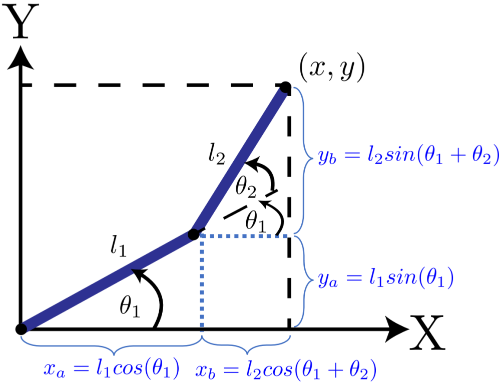


Cinemática directa caso plano



$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

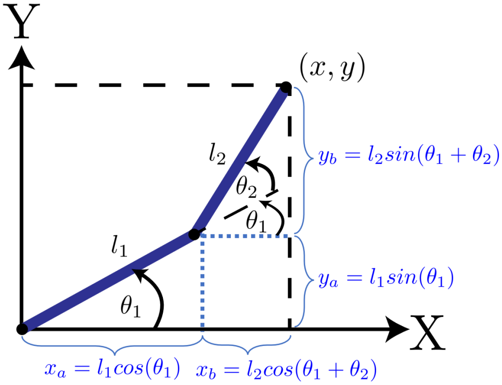
Cinemática directa caso plano



$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$x = x_a + x_b$$

$$y = y_a + y_b$$



$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$x = x_a + x_b$$

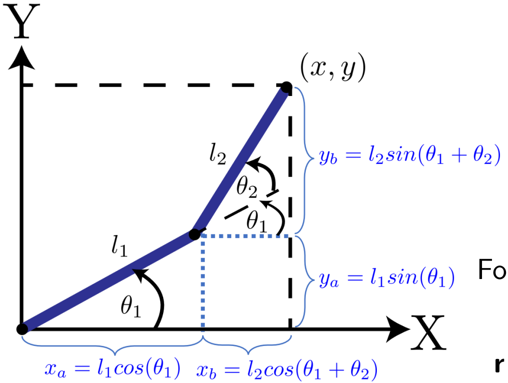
$$y = y_a + y_b$$

$$x = l_1 cos(\theta_1) + l_2 cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$y = l_1 sin(\theta_1) + l_2 sin(\theta_1 + \theta_2)$$

$$\theta = \theta_1 + \theta_2$$

Cinemática directa caso plano



$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$x = x_a + x_b$$

$$y = y_a + y_b$$

$$x = l_1 cos(\theta_1) + l_2 cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$y = l_1 sin(\theta_1) + l_2 sin(\theta_1 + \theta_2)$$

$$\theta = \theta_1 + \theta_2$$

Forma vectorial:

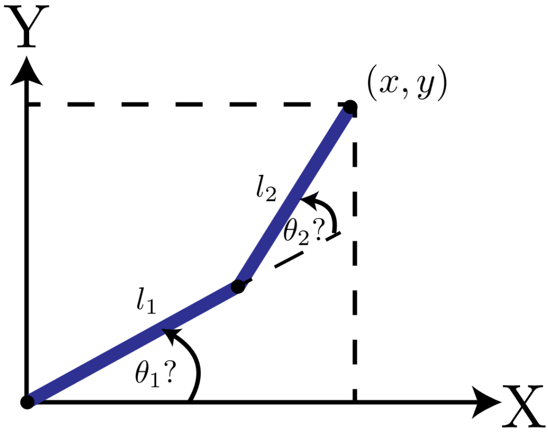
$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} l_1 cos(\theta_1) + l_2 cos(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 sin(\theta_1) + l_2 sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \theta_1 + \theta_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3, \ \mathbf{r} = f(\mathbf{q})$$

Cinemática inversa caso plano

Tarea

Determinar el vector $\mathbf{q} = (\theta_1, \theta_2)$ a partir de la posición (x, y)



Cinemática inversa caso plano

Usando Ley de cosenos

$$l = l_1^2 + l_2^2 - 2l_1l_2cos(\pi - \theta_2)$$

$$x^2 + y^2 = l_1^2 + l_2^2 - 2l_1l_2cos(\pi - \theta_2)$$

$$x^2 + y^2 = l_1^2 + l_2^2 - 2l_1l_2cos(\theta_2)$$

$$cos(\theta_2) = \frac{x^2 + y^2 - (l_1^2 + l_2^2)}{2l_1l_2}$$

Usando identidad trigonométrica

$$sin^2(\theta_2) + cos^2(\theta_2) = 1$$

$$sin(\theta_2) = \pm\sqrt{1 - cos^2(\theta_2)}$$

Cinemática inversa caso plano

$$q_2 = atan\left(\frac{\pm\sqrt{1 - cos(\theta_2)^2}}{\frac{x^2+y^2-(l_1^2+l_2^2)}{2l_1l_2}}\right)$$

$$q_2 = atan\left(\frac{\pm\sqrt{1 - \left(\frac{x^2+y^2-(l_1^2+l_2^2)}{2l_1l_2}\right)^2}}{\frac{x^2+y^2-(l_1^2+l_2^2)}{2l_1l_2}}\right)$$

$$atan \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

$$q_2 = atan2\left(\pm\sqrt{1 - \left(\frac{x^2+y^2-(l_1^2+l_2^2)}{2l_1l_2}\right)^2}, \frac{x^2+y^2-(l_1^2+l_2^2)}{2l_1l_2}\right)$$

$$atan2 \in [-\pi, \pi]$$

Cinemática inversa caso plano

Para q_1

$$q_1 = \alpha - \beta$$

$$q_1 = atan2(y, x) - atan2(l_2 s_2, l_1 + l_2 c_2)$$

Donde

$$c_2 = \frac{x^2 + y^2 - (l_1^2 + l_2^2)}{2 l_1 l_2}$$

$$s_2 = \pm\sqrt{1 - c_2}$$

Finalmente (Resumen)

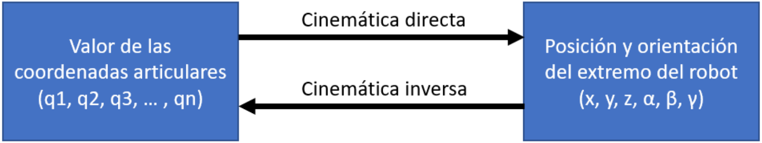
$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} atan2(y, x) - atan2(l_2 s_2, l_1 + l_2 c_2) \\ atan2(s_2, c_2) \end{pmatrix}$$

Función Arcotangente de 2 parámetros

$$\operatorname{atan2}(y,x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{if } x > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{if } x < 0 \text{ and } y \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & \text{if } x < 0 \text{ and } y < 0 \\ +\frac{\pi}{2} & \text{if } x = 0 \text{ and } y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{if } x = 0 \text{ and } y < 0 \\ \text{undefined} & \text{if } x = 0 \text{ and } y = 0 \end{cases}$$

Dados los ángulos de las articulaciones $q = [q_1, q_2, q_3, ..., q_n] \in \mathbb{R}$, obtener la posición y orientación del extremo del robot o efector $p = [x, y, z, \alpha, \beta, \gamma] \in \mathbb{R}^6$.

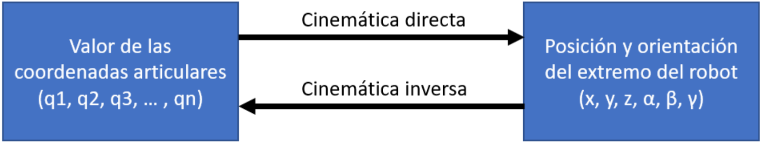
$$\mathbf{q} \rightarrow f(q) \rightarrow \mathbf{p}$$



¿Existirá una función $f^{-1}(q)$ que relacione la posición de las articulaciones con la posición del efector final?

Dados los ángulos de las articulaciones $q = [q_1, q_2, q_3, ..., q_n] \in \mathbb{R}$, obtener la posición y orientación del extremo del robot o efector $p = [x, y, z, \alpha, \beta, \gamma] \in \mathbb{R}^6$.

$$\mathbf{q} \rightarrow f(q) \rightarrow \mathbf{p}$$



¿Existirá una función $f^{-1}(q)$ que relacione la posición de las articulaciones con la posición del efector final?

La respuesta es que en general NO. Por lo tanto, la cinemática inversa no siempre es posible de resolver de forma analítica.

Cinemática directa

1. Métodos Geométricos
   - Análisis geométrico (Transformaciones Homogéneas)
   - Producto de Exponenciales (PoE)
2. Métodos Sistemáticos
   - Denavit-Hartenberg (DH)
   - Khalil-Kleinfinger
   - Hayati-Roberts

Matrices de Transformaciones Homogéneas

Las transformaciones homogéneas son una forma de representar las rotaciones y traslaciones en el espacio. Se utilizan para representar la posición y orientación de un cuerpo rígido en el espacio.

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} R & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Matrices de Rotación Homogéneas

Rotación en el eje x

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\theta) & -sin(\theta) & 0 \\ 0 & sin(\theta) & cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotación en el eje y

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} cos(\theta) & 0 & sin(\theta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -sin(\theta) & 0 & cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotación en el eje z

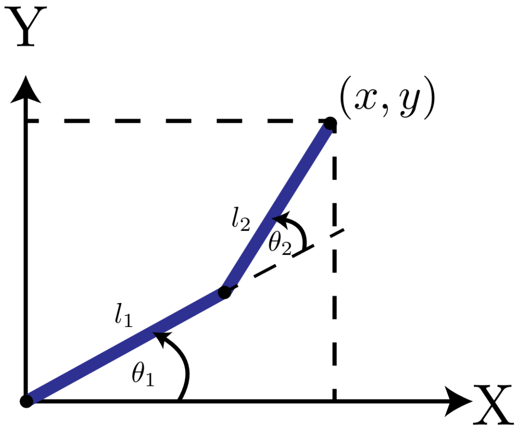
$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) & 0 & 0 \\ sin(\theta) & cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cinemática Inversa

1. Soluciones analíticas
    - Soluciones geométricas
    - Soluciones Algebraicas
    - Soluciones por transformaciones inversas
    - Desacople Cinemático (Método de Pieper)
2. Soluciones numéricas
    - Método de Newton-Raphson
    - Método del Gradiente *Gradient Descent*
    - Método *Cyclic Coordinate Descent*
3. Cálculo numérico del Jacobiano

Ejemplo

Obtener la cinemática directa usando matrices de transformaciones homogéneas



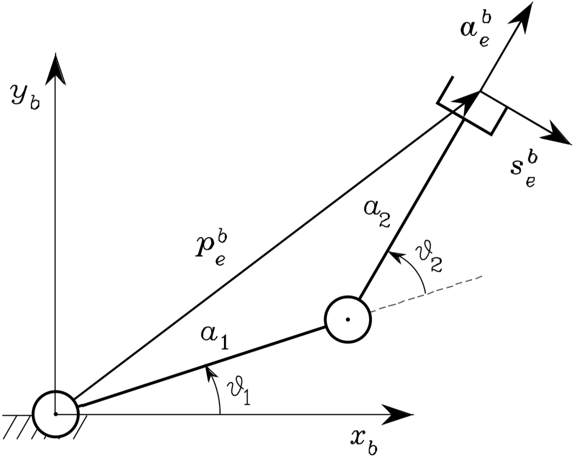
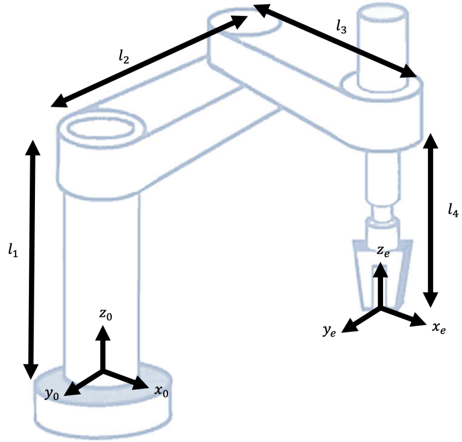


Fig. 2.14. Two-link planar arm

$$T_3^b(q) = \begin{bmatrix} 0 & s_{12} & c_{12} & a_1c_1 + a_2c_{12} \\ 0 & -c_{12} & s_{12} & a_1s_1 + a_2s_{12} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tarea

Obtener la cinemática directa del robot SCARA



Tarea SCARA

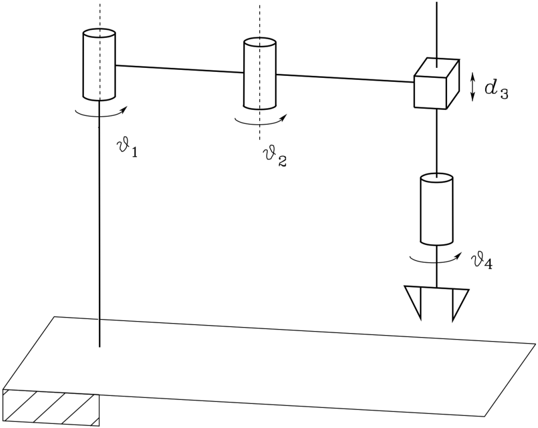


Fig. 2.36. SCARA manipulator

Motivación

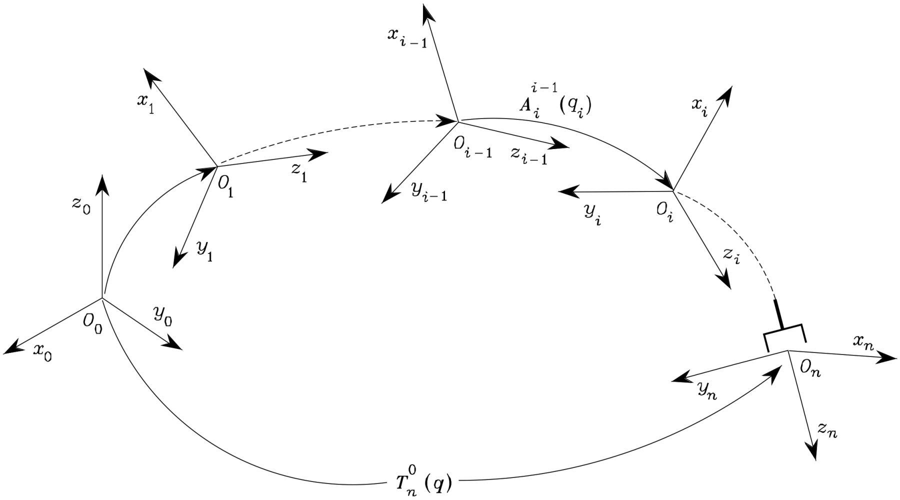


Fig. 2.15. Coordinate transformations in an open kinematic chain

Denavit-headartenberg

El método de Denavit-Hartenberg es un método para asignar sistemas de coordenadas a los eslabones de un robot manipulador. El método fue inventado por Jacques Denavit y Richard S. Hartenberg y publicado en 1955.

Pasos del método

1. Asignar sistemas de referencias
2. Asignar parámetros de DH
3. Obtener las matrices de transformación homogéneas
4. Obtener la matriz de transformación homogénea final

1. Asignar sistemas de referencia

- Enumerar y señalar los ejes de movimiento de cada articulación de 1 a n, desde la base hasta el efectos final.
- Asignar el sistema 0 a la base, con el eje z_0 a lo largo del eje de movimiento de la articulación 1 (origen arbitrario). El eje x_0 es arbitrario, el eje y_0 completa el sistema según la regla de la mano derecha.
- Alinear z_i con el eje de movimiento de la articulación $i+1$.
- Origen del sistema i en la intersección de z_i y z_{i-1}, o en la intersección de z_i con la normal común entre z_i y z_{i-1}. Si z_i y z_{i-1} son paralelos, escoger arbitrariamente alguna normal.
- Asignar x_i en la dirección de $z_{i-1} x z_i$. Si z_{i-1} y z_i son paralelos, asignar x_i a lo largo de la normal común entre z_{i-1} y z_i.
- Asignar el eje y_i para completar el sistema coordenado según la regla de la mano derecha.
- Asignar el sistema del efector final n, x_n debe ser ortogonal a z_{i-1} e interceptarlo. Normalmente z_n en la misma dirección de z_{n-1} apuntando hacia afuera del robot, y_n completa el sistema.

2. Asignar parámetros

- θ_i : ángulo de rotación del eje x_{i-1} al eje x_i alrededor del eje z_{i-1}. Es la variable articular, si la articulación i es de revolución i es de revolución.
- d_i: desplazamiento de la articulación, distancia del origen del sistema $i-1$ a la intersección del eje z_{i-1} con el eje x_i a lo largo del eje z_{i-1}. Es la variable articular si la articulación i es prismática.
- a_i: longitud del eslabón, distancia entre la intersección entre el eje z_{i-1} y el eje x_i hacia el origen del sistema i a lo largo del eje x_i.
- α_i: ángulo de giro del eslabón, ángulo de rotación del eje z_{i-1} al eje z_i alrededor del eje x_i.

3. y 4. Matriz de transformación homogénea, Denavit-Hartenberg

$$T_{i-1}^{i} = rot_z(\theta_i) Trasl_z(d_i) trasl_x(a_i) Rot_x(\alpha_i)$$

Matriz de transformación

$$A_{i-1}^{i} = \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i} c_{\alpha_i} & s_{\theta_i} s_{\alpha_i} & a_i c_{\theta_i} \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i} c_{\alpha_i} & -c_{\theta_i} s_{\alpha_i} & a_i s_{\theta_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Finalmente la cinemática directa queda:

$$^{0}T_n = \left(^{0}T_1\right)\left(^{1}T_2\right)\cdots\left(^{n-2}T_{n-1}\right)\left(^{n-1}T_n\right)$$

Tabla de parámetros DH

i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1				
2				
3				
4				

Cuadro: Ejemplo de tabla de parámetros DH

Cinemática Inversa - Método de Newton

Podemos plantear el problema de la cinemática inversa como un problema de optimización. Dado un vector de posiciones p_d, encontrar el vector de coordenadas articulares q que minimice la función de costo.

$$\mathbf{p}_0 = f_d(q_0)$$

$$\mathbf{p}_1 = f_d(q_0 + \delta q)$$

$$\mathbf{p}_1 \approx \mathbf{p}_0 + \frac{\partial f_d}{\partial q} \Delta p$$

$$\mathbf{p}_1 \approx \mathbf{p}_0 + J_q(q_0)(p_1 - p_0)$$

$$\mathbf{q}_1 = q_0 + J_q^{-1}(q_0) \Delta p$$

$$\mathbf{q}_1 \approx q_0 + J_q^{\dagger}(q_0) \Delta p$$

Algoritmo

1. Calcular $p_k = f_d(q_k)$
2. Obtener el error $\Delta p = p^* - p_k$
3. Actualizar $q_{k+1} = q_k + J_q^{\dagger}(q_k)\Delta p$
4. Repetir hasta que el error sea menor a un valor de tolerancia $\|\Delta p\| < \epsilon_p$

Inversa de Moore-Penrose

Recordar que el Jacobiano es:

$$J = \frac{\partial f}{\partial q} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \frac{\partial f_1}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial q_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q_1} & \frac{\partial f_2}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial q_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial q_1} & \frac{\partial f_m}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial q_n} \end{bmatrix}$$

$$A^\dagger = (A^T A)^{-1} A^T$$

Cálculo numérico del Jacobiano

Jacobiano

$$J(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_x}{\partial q_1} & \frac{\partial f_x}{\partial q_2} \\ \\ \frac{\partial f_y}{\partial q_1} & \frac{\partial f_y}{\partial q_2} \end{bmatrix}$$

Derivadas parciales

$$\frac{\partial f_x}{\partial q_1} = \frac{f_x(q_1 + \Delta q_1, q_2) - f_x(q_1, q_2)}{\Delta q_1}$$

$$\frac{\partial f_x}{\partial q_2} = \frac{f_x(q_1, q_2 + \Delta q_2) - f_x(q_1, q_2)}{\Delta q_2}$$

$$\frac{\partial f_y}{\partial q_1} = \frac{f_y(q_1 + \Delta q_1, q_2) - f_y(q_1, q_2)}{\Delta q_1}$$

$$\frac{\partial f_y}{\partial q_2} = \frac{f_y(q_1, q_2 + \Delta q_2) - f_y(q_1, q_2)}{\Delta q_2}$$

Cinemática Inversa Método el Gradiente

Cinemática Directa: $x_d = f(q)$ o $x_d - f(q) = 0$

Se define la función error:

$$g(q) = \frac{1}{2}\left\|x_d - f(q)\right\|^2$$

Objetivo: minimizar la función error

$$min\ g(q)$$

Método del Gradiente

$$q_{k+1} = q_k - \alpha \nabla g(q_k)$$

$$q_{k+1} = q_k - \alpha J^T(q_k)(x_d - f(q_k))$$

Cálculo numérico del Jacobiano

Ventajas

Se usa cuando calcular manualmente el Jacobiano se vuelve tedioso

Se asume un Δq_1 y Δq_2 pequeño
Es necesario contar con la función de la cinemática directa