# PROJ

Ronan Le Prat, Aurélien Arnoux

November 2025

## 1 Problème statique

On introduit les notations suivantes :

- pour tout $ij \in V^2$ avec $i \neq j$, on pose $x_{ij} = 1$ si les deux sommets sont dans la même partie de la partition, $x_{ij} = 0$ sinon.
- pour tout $i \in V$, pour tout $k \in K$, $y_{ik} = 1$ si le sommet i appartient à la partie k, $y_{ik} = 0$ sinon

Avec les variables introduites dans l'énoncé, on peut modéliser le problème statique par le probllème suivant :

$$
\begin{aligned}
\underset{x_{ij},\, y_{ik}}{\text{minimize}} \quad & \sum_{ij \in V^2, i<j} l_{ij} x_{ij} && \text{(1a)}\\
\text{subject to} \quad & \sum_{i=1}^{n} y_{ik} w_i \leq B, \forall 1 \leq k \leq K, && \text{(1b)}\\
& \sum_{k=1}^{n} y_{ik} w_i \geq 1, \forall i \in V, && \text{(1c)}\\
& x_{ij} \geq y_{ik} + y_{jk} - 1, \forall i \neq j \in V^2, && \text{(1d)}\\
& x_{ij} \geq 0, \forall i \neq j \in V^2, && \text{(1e)}\\
& y_{ik} \in \{0, 1\}, \forall 1 \leq k \leq K, \forall i \in V && \text{(1f)}
\end{aligned}
$$

## 2 Modélisation robuste

$$
\begin{aligned}
\underset{x}{\text{minimize}} \quad & max_{l^1_{ij} \in U^1} \sum_{1 \leq i < j \leq n} l^1_{ij} x_{ij} && && \text{(2a)}\\
\text{subject to} \quad & \sum_{i=1}^{n} w^2_i y_{ik} \leq B && , \forall k = 1 \dots K, \forall w^2_i \in U^2, && \text{(2b)}\\
& \sum_{k=1}^{K} y_{ik} \geq 1 && , \forall k = 1 \dots K, && \text{(2c)}\\
& x_{ij} \geq y_{ik} + y_{jk} - 1, && \forall i \neq j \in V^2, \forall k = 1 \dots K, && \text{(2d)}\\
& x_{ij} \geq 0 && , \forall i \neq j \in V^2, && \text{(2e)}\\
& x_{ij} \in \mathbb{R} && , \forall i \neq j \in V^2, && \text{(2f)}\\
& y_{ik} \in \{0, 1\} && , \forall i \in V, \forall k = 1 \dots K && \text{(2g)}
\end{aligned}
$$

## 3 Résolution par les plans coupants

Pour que la robustesse apparaisse dans les contraintes et non plus dans l'objectif, on peut reformuler le problème comme de la manière suivante :

$$
\begin{aligned}
\underset{x,y,z}{\text{minimize}} \quad & z && \text{(3a)}\\
\text{subject to} \quad & \forall l^1_{ij} \in U^1, \sum_{1\le i<j\le n} l^1_{ij} x_{ij} \le z, && \text{(3b)}\\
& \sum_{i=1}^{n} w^2_i y_{ik} \le B \quad ,\forall k = 1 \dots K, \forall w^2_i \in U^2, && \text{(3c)}\\
& \sum_{k=1}^{K} y_{ik} \ge 1 \quad ,\forall k = 1 \dots K, && \text{(3d)}\\
& x_{ij} \ge y_{ik} + y_{jk} - 1, \forall i \ne j \in V^2, \forall k = 1 \dots K, && \text{(3e)}\\
& x_{ij} \ge 0 \quad ,\forall i \ne j \in V^2, && \text{(3f)}\\
& x_{ij} \in \mathbb{R} \quad ,\forall i \ne j \in V^2, && \text{(3g)}\\
& y_{ik} \in \{0,1\} \quad ,\forall i \in V, \forall k = 1 \dots K && \text{(3h)}
\end{aligned}
$$

Pour les ensembles initiaux $\mathcal{U}^*_1$ et $\mathcal{U}^*_2$ du problème maître, on peut commencer par prendre des singletons. On ordonne les paires de sommets par ordre lexicographiques. Notons $i_0, j_0 = max_{i<j} 3(ni+j) \le L$. Soit $\delta$ saturant un nombre maximal de coefficient, par exemple en posant :

- $\delta^1_{ij} = 3$ si $ij \le (i_0, j_0)$
- $\delta^1_{(i_0,j_0)+1} = L - 3(ni_0 + j_0)$
- $\delta^1_{ij} = 0$ sinon

On peut alors initialiser $\mathcal{U}^*_1 = \{\ (l_{ij} + \delta^1_{ij}(\hat{l}_i + \hat{l}_j)\ \}$.

De même en notant $v_0 = max_{v\in V} \sum_{i\le v} W_i \le W$ on initialise $\mathcal{U}^*_2 = \{(w_v(1+\delta^2_v)\}$ où w est défini par

- $w^2_v = W_i$ si $i \le v_0$
- $w^2_{v_0+1} = W - \sum_{i\le v_0} W_i$
- $w^2_v = 0$ sinon

Avec ces ensembles, le sous-problème à résoudre s'écrit :

$$
\begin{aligned}
\underset{x,y,z}{\text{minimize}} \quad & z && \text{(4a)}\\
\text{subject to} \quad & \forall (l^1_{ij}) = (l_{ij} + \delta^1_{ij}(\hat{l}_i + \hat{l}_i)) \in \mathcal{U}^*_1, \sum_{i<j} (l_{ij} + \delta^1_{ij}(\hat{l}_i + \hat{l}_i)) x_{ij} \le z, && \text{(4b)}\\
& \forall w^2 \in \mathcal{U}^*_2, \sum_{i=1}^{n} w^2_i y_{ik} \le B \quad ,\forall k = 1 \dots K, && \text{(4c)}\\
& \sum_{k=1}^{K} y_{ik} \ge 1 \quad ,\forall k = 1 \dots K, && \text{(4d)}\\
& x_{ij} \ge y_{ik} + y_{jk} - 1, \forall i \ne j \in V^2, \forall k = 1 \dots K, && \text{(4e)}\\
& x_{ij} \ge 0 \quad ,\forall i \ne j \in V^2, && \text{(4f)}\\
& x_{ij} \in \mathbb{R} \quad ,\forall i \ne j \in V^2, && \text{(4g)}\\
& y_{ik} \in \{0,1\} \quad ,\forall i \in V, \forall k = 1 \dots K && \text{(4h)}
\end{aligned}
$$

Le problème maître constitue une relaxation du problème initial. Une solution optimale $x^*, y^*, z^*, \delta^{1*}, \delta^{2*}$ du problème maître est une solution du problème initiale si et seulement si elle est admissible pour le problème intial, i.e si et seulement si

- $\forall l^1_{ij} \in U^1, \sum_{i,j=1,j>i}^n l^1_{ij} x^*_{ij} \leq z^*$
- $\forall (w^2_v) \in U^2, \sum_{i=1}^n w_v y^*_{ik} \leq B$

Dans le cas où une solution optimale du problème maître n'est pas admissible, au moins l'un des deux types de contraintes n'est pas vérifée. On peut respectivement trouver $\tilde{l}^1_{ij} \in U^1$ tel que $\sum_{i,j=1,j>i}^n l^1_{ij} x^*_{ij} > z^*$ ou $(\tilde{w}^2_v) \in U^2$ tel que$\sum_{i=1}^n w_v y^*_{ik} > B$

Dans l'un de ces deux cas, on ajoute respectivement les coupes :

- $\tilde{l}^1_{ij}, \sum_{i,j=1,j>i}^n \tilde{l}^1_{ij} x_{ij} \leq z$
- $\sum_{i=1}^n \tilde{w}_v y_{ik} \leq B$

Cela revient à ajouter $\tilde{l}^1_{ij}$ (respectivement $\tilde{w}^2_v$) à $\mathcal{U}^*_1$ (respectivement $\mathcal{U}^*_2$).

# 4 Résolution par dualisation

## 4.1 Reformulation pour $\delta^1_{ij}$

À partir de la formulation robuste initiale, on fait apparaître explicitement les variables $\delta^1_{ij}$ dans l'expression de $l^1_{ij}$. On isole ensuite les termes impliquant $\delta^1_{ij}$ afin de faire apparaître un sous problème interne de maximisation en $\delta^1_{ij}$ pour un $x$ donné.

$$
\begin{aligned}
\underset{x}{\text{minimize}} \quad & \sum_{i,j=1,j>i}^{n} l_{ij} x_{ij} + max_{\delta^1_{ij}} \sum_{i,j=1,j>i}^{n} \delta^1_{ij} (\hat{l}_i + \hat{l}_j) x_{ij} && \text{(5a)}\\
\text{subject to} \quad & \sum_{ij \in E} \delta^1_{ij} \leq L, && \text{(5b)}\\
& 0 \leq \delta^1_{ij} \leq 3 \qquad , \forall ij \in E, && \text{(5c)}\\
& \sum_{i=1}^{n} w^2_i y_{ik} \leq B \qquad , \forall k = 1 \dots K, \forall w^2_i \in U^2, && \text{(5d)}\\
& \sum_{k=1}^{K} y_{ik} \geq 1 \qquad , \forall k = 1 \dots K, && \text{(5e)}\\
& x_{ij} \geq y_{ik} + y_{jk} - 1, \forall i \neq j \in V^2, \forall k = 1 \dots K, && \text{(5f)}\\
& x_{ij} \geq 0 \qquad , \forall i \neq j \in V^2, && \text{(5g)}\\
& x_{ij}, \delta_{ij} \in \mathbb{R} \qquad , \forall i \neq j \in V^2, && \text{(5h)}\\
& y_{ik} \in \{0, 1\} \qquad , \forall i \in V, \forall k = 1 \dots K && \text{(5i)}
\end{aligned}
$$

## 4.2 Problème interne lié à $\delta^1_{ij}$

À partir de la formulation précédente, on dérive le sous-problème interne $(P)$ lié à $\delta^1_{ij}$.

$$
\begin{aligned}
\underset{\delta^1_{ij}}{\text{maximize}} \quad & \sum_{ij \in E} \delta^1_{ij} (\hat{l}_i + \hat{l}_j) x_{ij} && \text{(6a)}\\
\text{subject to} \quad & \sum_{ij \in E} \delta^1_{ij} \leq L, && \text{(6b)}\\
& \delta^1_{ij} \leq 3, \forall ij \in E, && \text{(6c)}\\
& \delta^1_{ij} \geq 0, \forall ij \in E && \text{(6d)}
\end{aligned}
$$

## 4.3 Problème dual pour $\delta^1_{ij}$

À partir de la formulation précédente, on obtient la formulation duale $(D)$ suivante, en introduisant les variables duales suivantes :

- $\Delta^1$ associée à la contrainte (6c)
- $\Delta^1_{ij}$ associées aux contraintes (6b)

$$\begin{aligned}
\underset{\Delta^1, \Delta^1_{ij}}{\text{minimize}} \quad & L\Delta^1 + \sum_{ij \in E} 3\Delta^1_{ij} && (7a)\\
\text{subject to} \quad & \Delta^1 + \Delta^1_{ij} \geq (\hat{l_i} + \hat{l_j})x_{ij}, \forall ij \in E, && (7b)\\
& \Delta^1 \geq 0, && (7c)\\
& \Delta^1_{ij} \geq 0 \qquad , \forall ij \in E && (7d)
\end{aligned}$$

## 4.4 Reformulation pour $\delta^2_i$

À partir de la formulation robuste initiale, on remplace les contraintes portant sur tous les $w^2_v \in U^2$ par une contrainte portant sur le maximum de $\sum_{i=1}^n w^2_v y_{ik}$, et ce pour toutes les partitions. On fait ensuite apparaître explicitement les variables $\delta^2_v$ dans l'expression de $w^2_v$. On isole ensuite les termes impliquant $\delta^2_v$ dans chacune des contraintes afin de faire apparaître des sous problèmes internes de maximisation en $\delta^2_v$ pour un $y$ donné.

$$\begin{aligned}
\underset{x}{\text{minimize}} \quad & max_{l^1_{ij} \in U^1} \sum_{i,j=1,j>i}^{n} l^1_{ij} x_{ij} && (8a)\\
\text{subject to} \quad & \sum_{v=1}^{n} w_v y_{vk} + max_{\delta^2_v} \sum_{v=1}^{n} w_v \delta^2_v y_{vk} \leq B \qquad , \forall k = 1 \dots K, && (8b)\\
& \sum_{v \in V} \delta^2_v \leq W, && (8c)\\
& 0 \leq \delta^2_v \leq W_v \qquad , \forall v \in V, && (8d)\\
& \sum_{k=1}^{K} y_{ik} \geq 1 \qquad , \forall i \in V, && (8e)\\
& x_{ij} \geq y_{ik} + y_{jk} - 1, \forall i \neq j \in V^2, \forall k = 1 \dots K, && (8f)\\
& x_{ij} \geq 0 \qquad , \forall i \neq j \in V^2, && (8g)\\
& x_{ij} \in \mathbb{R} \qquad , \forall i \neq j \in V^2, && (8h)\\
& y_{ik} \in \{0, 1\} \qquad , \forall i \in V, \forall k = 1 \dots K && (8i)
\end{aligned}$$

## 4.5 $K$ Problèmes internes liés à $\delta^2_i$

Pour tout $k = 1 \dots K$, on doit résoudre le problème $(P_k)$ suivant :

$$\begin{aligned}
\underset{\delta^2_v}{\text{maximize}} \quad & \sum_{v=1}^{n} w_v y_{vk} \delta^2_v && (9a)\\
\text{subject to} \quad & \sum_{v \in V} \delta^2_v \leq W, && (9b)\\
& \delta^2_v \leq W_v, \forall v \in V, && (9c)\\
& \delta^2_v \geq 0 \quad , \forall v \in V && (9d)
\end{aligned}$$

## 4.6 $K$ Problèmes duaux pour $\delta^2_i$

On obtient les formulations duales $(D_k)$ suivantes pour tout $k = 1 \dots K$ en introduisant les variables duales suivantes :

- $\Delta^2_k$ associées aux contraintes (9b)

- $\Delta^2_{v,k}$ associées aux contraintes (9c)

$$
\begin{aligned}
\underset{\Delta^2_k,\, \Delta^2_{v,k}}{\text{minimize}} \quad & W\Delta^2_k + \sum_{v\in V} W_v \Delta^2_{v,k} && \text{(10a)}\\
\text{subject to} \quad & \Delta^2_k + \Delta^2_{v,k} \geq w_v y_{vk}, \forall v \in V, && \text{(10b)}\\
& \Delta^2_v \geq 0, && \text{(10c)}\\
& \Delta^2_{v,k} \geq 0 \qquad , \forall v \in V && \text{(10d)}
\end{aligned}
$$

## 4.7 Reformulation PLNE par dualisation

Par dualité forte en Programmation Linéaire, les problèmes primaux et duaux dérivés ci-dessus ont la même valeur optimale. On obtient finalement la reformulation suivante, qui nous fournit une solution du problème initial.

C'est un PLNE a :

- $2\,|E|+2\,K\,|V|+K+1$ variables (les variables primales : $x_{ij}, y_{ik}$ et les variables duales $\Delta^1, \Delta^1_{ij}, \Delta^2_k, \Delta^2_{v,k}$), dont $K\,|V|$ variables binaires (les $y_{ik}$).
- $K\,(2+3|V|+|E|)+3|E|+|V|$ contraintes.

$$
\begin{aligned}
\underset{x_{ij},\, y_{vk},\, \Delta^1,\, \Delta^1_{ij},\, \Delta^2_k,\, \Delta^2_{v,k}}{\text{minimize}} \quad & L\Delta^1 + \sum_{ij\in E} 3\Delta^1_{ij} + \sum_{i,j=1,j>i}^{n} l_{ij}x_{ij} && && \text{(11a)}\\
\text{subject to} \quad & \Delta^1 + \Delta^1_{ij} \geq (\hat{l}_i + \hat{l}_j)x_{ij} && , \forall ij \in E, && \text{(11b)}\\
& \Delta^1 \geq 0, && && \text{(11c)}\\
& \Delta^1_{ij} \geq 0 && , \forall ij \in E, && \text{(11d)}\\
& \sum_{v=1}^{n} w_v y_{vk} + W\Delta^2_k + \sum_{v\in V} W_v \Delta^2_{v,k} \leq B && , \forall k = 1\ldots K, && \text{(11e)}\\
& \Delta^2_k + \Delta^2_{v,k} \geq w_v y_{vk} && , \forall v \in V, \forall k = 1\ldots K, && \text{(11f)}\\
& \Delta^2_k \geq 0 && , \forall k = 1\ldots K, && \text{(11g)}\\
& \Delta^2_{v,k} \geq 0 && , \forall v \in V, \forall k = 1\ldots K, && \text{(11h)}\\
& \sum_{k=1}^{K} y_{ik} \geq 1 && , \forall i \in V, && \text{(11i)}\\
& x_{ij} \geq y_{ik} + y_{jk} - 1, && \forall i \neq j \in V^2, \forall k = 1\ldots K, && \text{(11j)}\\
& x_{ij} \geq 0 && , \forall i \neq j \in V^2, && \text{(11k)}\\
& y_{ik} \in \{0,1\} && , \forall i \in V, \forall k = 1\ldots K && \text{(11l)}
\end{aligned}
$$