

# 利用改进的 Siddon 算法提升 CT 图像重建速度

肖 铮

(四川工商职业技术学院, 成都 611830)

**摘要:** 图像重建是电子计算机断层扫描技术的核心步骤。对于不完全投影时的图像重建, 应用较多的算法是代数重建算法和同时迭代算法。介绍了同时迭代算法的原理及其实现过程。为加快图像重建速度, 提出利用改进的 Siddon 算法计算射线与像素相交的长度和像素编号。实验结果表明, 将改进的 Siddon 算法用于计算系数矩阵, 可以整体提升图像重建速度。

**关键词:** 断层扫描; 图像重建; 同时迭代; Siddon 算法

中图分类号: TP301

文献标识码: A

文章编号: 1673-1980(2020)01-0081-04

DOI:10.19406/j.cnki.cqkxyxbzkb.2020.01.020

电子计算机断层扫描(CT)要将扫描获得的信息通过一定算法转换为数字矩阵, 再将数字矩阵中每个元素转化为像素, 按照矩阵排列得到 CT 图像。因此, 图像重建是 CT 技术的核心步骤。对于不完全投影时的图像重建, 目前应用较多的是代数重建算法和同时迭代算法。本次研究, 尝试将文献[1]中的改进 Siddon 算法用于计算系数矩阵, 以提高 SIRT 的图像重建速度。对同时迭代算法的实现, 主要通过计算一条射线穿过像素的编号及长度, 确定经过特定像素的所有射线编号, 在此基础上依据投影数据进行图像重建。

## 1 同时迭代算法的原理

代数重建算法(ART)的原理是用迭代法计算巨型线性方程组, 换言之, 就是用迭代求解方程组的方法来解决重建问题<sup>[2-3]</sup>。利用 ART, 可以在较少投影数据下重建出较精确的图像, 但计算量大, 并且重建结果易受一条投影线上的误差影响, 对计算机运行速率和内存要求高。同时迭代算法(SIRT)是在 ART 基础上提出的, 它对每个像素密度值进行迭代更新时综合了所有投影线的贡献, 旨在使重建图像

质量对测量误差及噪声不敏感, 提高稳定性, 防止一条投影线上的偏差对重建输出产生较大影响<sup>[4-7]</sup>。

SIRT 算法的迭代公式如式(1)。

$$x_i^{k+1} = x_i^k + \lambda^k (R^T P + R^T R x^k)$$

$$= x_i^k + \frac{\sum_j \frac{a_{ij}}{\sum_h a_{hj}} (b_j - \sum_h a_{hj} x_h^k)}{\sum_j a_{ij}} \quad (1)$$

式中:  $\lambda$  为松弛因子;  $h$  表示图像区域与第  $j$  条射线相交的像素个数;  $\sum_j a_{ij}$  表示所有投影线与像素  $i$  相交的长度和;  $(b_j - \sum_h a_{hj} x_h^k)$  的物理意义为  $j$  号射线的投影值误差;  $(a_{ij} / \sum_h a_{hj})$  的意义为第  $j$  条投影线与第  $i$  个像素相交长度占第  $j$  条射线与像素区域相交总长度的权重。

重建步骤如下:

(1) 对于其中每一条投影线, 由前一次迭代所得图像计算出投影值  $\sum_h a_{hj} x_h^k$ , 作为模拟投影值。

(2) 求得与实际投影值  $b_j$  之差, 得到  $(b_j - \sum_h a_{hj} x_h^k)$ 。

(3) 在步骤(2)的基础上, 按照权重

收稿日期: 2019-11-03

基金项目: 四川省高等教育人才培养质量和教学改革项目“基于人工智能的个性化教育人才培养模式的构建和研究”(JG2018-1168); 教育部科技发展中心产学研创新基金项目“基于大数据和人工智能的个性化教育关键技术研究”(2018A03007); 中国轻工业联合会教育工作分会 2019 年课题“基于人工智能技术的技能创新平台研究与实践”(QGJY2019020); 四川工商职业技术学院教育教学类课题“‘智能+’时代教育人才培养模式的构建和研究”(2019JY04)

作者简介: 肖铮(1983—), 男, 硕士, 副教授, 研究方向为图形图像识别、机器学习。

( $a_{ij}/\sum_h a_{hj}$ ) 对所有投影射线进行修正求和。

(4) 进行反投影, 得到像素  $x_i^k$  的更新值。

(5) 利用 
$$\frac{\sum_j \frac{a_{ij}}{\sum_h a_{hj}} (b_j - \sum_h a_{hj} x_h^k)}{\sum_j a_{ij}},$$
 修正  $i$

的像素值。

SIRT 算法在进行迭代运算时, 重建模型中的每个像素的每一次迭代的更新值, 都是在所有投影线的基础上运算得到的。该更新值按照贡献因子即权重进行加权平均运算, 最后通过核心的反投影算法得到。

## 2 改进的 Siddon 算法

原来的 Siddon 算法由于在计算过程中频繁使用式(2), 限制了它的计算速度。Filip Jacobs 提出了改进的 Siddon 算法, 对一条射线的计算仅使用一次式(2), 且不需要为不同射线单独分配存储空间, 因此加快了计算速度。

$$\begin{cases} i(m) = 1 + [X_1 + \partial_{\text{mid}}(X_2 - X_1) - X_{\text{plane}}(1)]/d_x \\ j(m) = 1 + [Y_1 + \partial_{\text{mid}}(Y_2 - Y_1) - Y_{\text{plane}}(1)]/d_y \end{cases} \quad (2)$$

改进的 Siddon 算法与 Siddon 算法在计算  $\partial_{\min}$  和  $\partial_{\max}$  时方法相同, 但改进算法不直接计算所有的  $\{\partial_x\}\{\partial_y\}$ , 而是只计算  $\partial_x = \partial_x[0]$ 、 $\partial_y = \partial_y[0]$ , 即射线在像素区域内第一个相交的水平网格线与垂直网格线对应的  $\partial_x$ 、 $\partial_y$  值。两者对  $i_{\min}$ 、 $i_{\max}$ 、 $j_{\min}$ 、 $j_{\max}$  的计算方法相同。这 4 个参量用于计算射线在像素区域内与网格线相交的交点个数, 即:

$$N_p = (i_{\max} - i_{\min} + 1) + (j_{\max} - j_{\min} + 1) \quad (3)$$

射线与网格相交时, 会同时与水平网格线和垂直网格线相交。射线先穿过水平网格线, 再穿过垂直网格线; 或者先穿过垂直网格线, 再穿过水平网格线。因此, 我们只需利用下列等式来计算第一个相交像素的次数。

$$i = \left\lceil \varphi_x \frac{\min(\partial_x, \partial_y) + \partial_{\min}}{2} \right\rceil \quad (4)$$

$$j = \left\lceil \varphi_y \frac{\min(\partial_x, \partial_y) + \partial_{\min}}{2} \right\rceil \quad (5)$$

其中

$$\varphi_x(\partial) = \frac{X(\partial)}{d_x} = \frac{X_1 + \partial_x(X_2 - X_1)}{d_x} \quad (6)$$

随着射线与其他像素相交, 我们需要根据射线与水平网格线或垂直网格线相交的情况来更新  $\partial_x$ 、 $\partial_y$ 、 $i$ 、 $j$  的值。若  $\partial_x < \partial_y$ , 那么射线将与水平网格线相交,  $\partial_x$  增加  $\partial_{xu}$ ,  $i$  增加  $i_u$ , 根据式(7)和式(8)对各

变量进行更新。

$$\partial_{xu} = \frac{d_x}{|X_2 - X_1|} \quad (7)$$

$$i_u = \begin{cases} 1 & X_1 < X_2 \\ -1 & \text{else} \end{cases} \quad (8)$$

同理, 若  $\partial_x > \partial_y$ , 那么射线将与垂直网格线相交, 用与式(7)和式(8)相似的等式, 分别对  $\partial_y$ 、 $j$  进行更新。若  $\partial_x = \partial_y$ , 则任意选择以上两种方法之一, 对变量进行更新。

最后, 对变量进行初始化( $d_{12} = 0$ ,  $\partial_c = \partial_{\min}$ ), 经循环  $N_p$  次, 即可将射线穿过的像素编号与长度计算出来, 射线路径也因此被确定。

改进的 Siddon 算法不仅可以用于计算射线路径, 还可应用于需要计算射线与像素相交长度的技术中, 比如图像反投影。

## 3 图像重建结果分析

Shepp-Logan 头部模型通常由能够模拟人体脑部组织结构的数学函数组成, 几何形状上为 10 个不同的椭圆, 可有效刻画脑部的相邻组织密度差和不同解剖结构。实验以二维的 Shepp-Logan 图像作为原始图像, 迭代 60 次时的输出结果如图 1 所示。

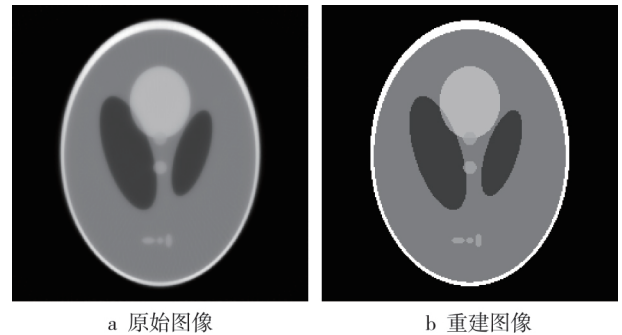


图 1 原始图像与重建图像对比

对图像进行主观判断, 可发现重建图像质量较好。可见 SIRT 算法可较好的重建出原始模型。为对原始图像和重建图像进行量化比较, 选用图像中间一行数据作曲线图(见图 2)。

对重建图像与原始图像质量差异进行客观评价, 一般采用 2 种评价参数: 归一化均方距离( $d$ )和归一化平均绝对距离( $r$ )。

$$d = \sqrt{\frac{\sum_{u=1}^N \sum_{v=1}^N (t_{uv} - r_{uv})^2}{\sum_{u=1}^N \sum_{v=1}^N (t_{uv} - \bar{t})^2}} \quad (9)$$

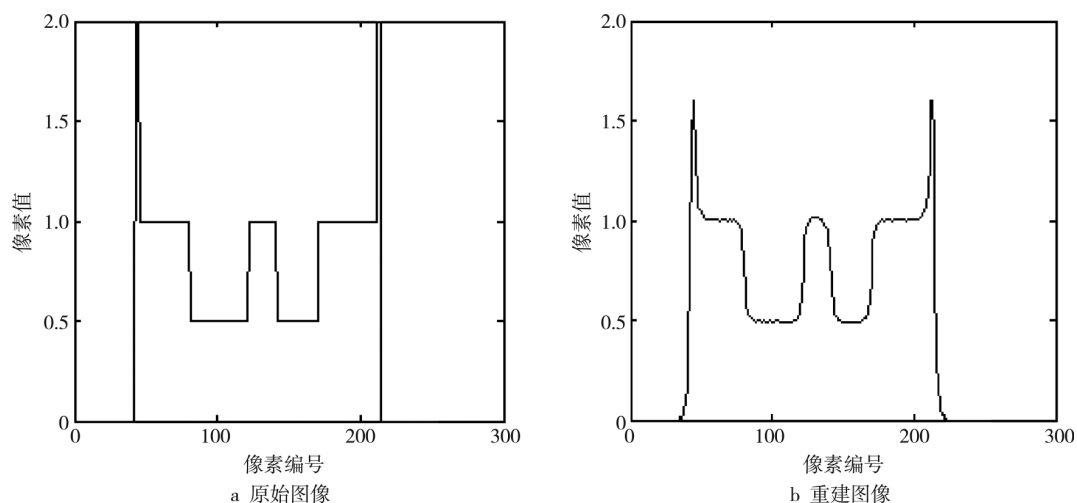


图2 图像中间一行的像素

$$r = \frac{\sum_{u=1}^N \sum_{v=1}^N |t_{u,v} - r_{u,v}|}{\sum_{u=1}^N \sum_{v=1}^N |t_{u,v}|} \quad (10)$$

式中:  $t_{u,v}$  和  $r_{u,v}$  分别为原始模型和重建结果第  $u$  行第  $v$  列的像素值。

若  $d=0$ , 则说明重建图像可完全再现原始模型。  $d$  愈大, 说明两者的差异愈大, 需进一步改进方法。  $r$  增大时, 说明图像误差增大。

迭代重建过程中, 影响图像质量的因素很多, 比如投影方向数、松弛因子、图像初始值、每个方向的采样点数等。这里, 主要研究松弛因子  $\lambda$  对重建图像质量的影响。在迭代次数为 60 时, 不同的松弛因子对应的图像重建结果如图 3 所示。

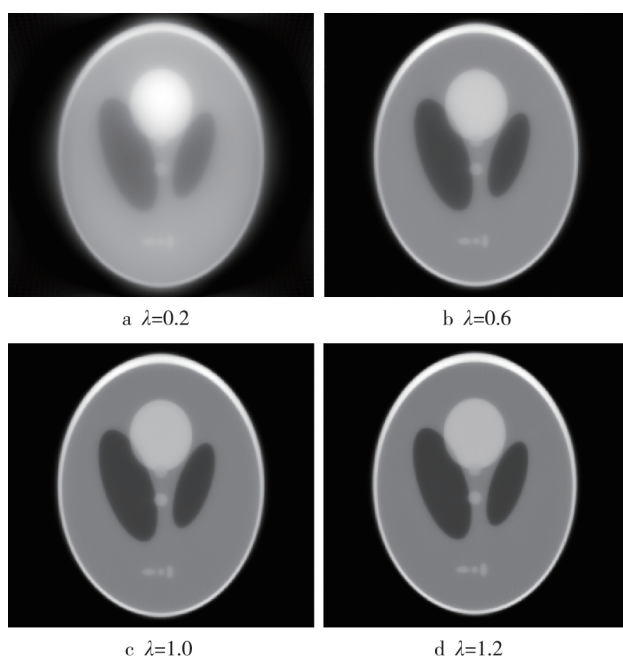


图3 不同松弛因子对应的重建图像

随着迭代次数的增加, 不同松弛因子下, 距离因子  $d$  与  $r$  的变化情况如图 4 所示。迭代次数相同时, 距离因子随松弛系数的增大而减小; 松弛因子相同时, 距离因子随迭代次数的增大而减小, 图像质量更好。

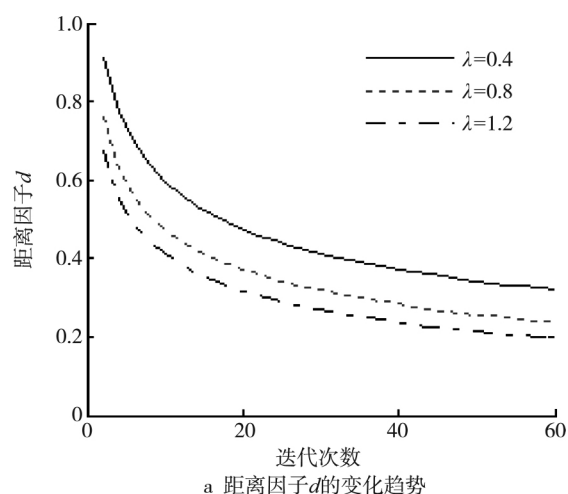
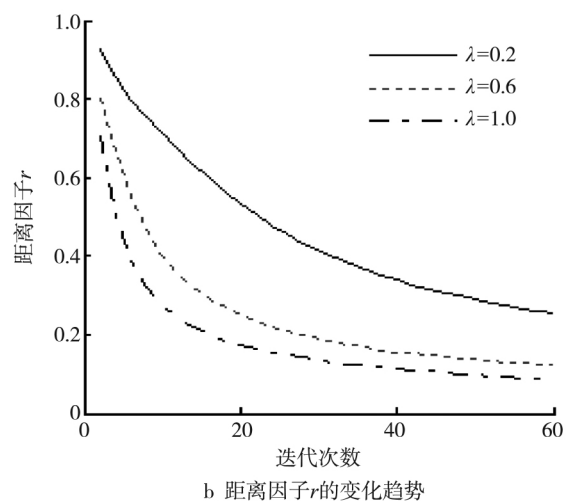

 a 距离因子  $d$  的变化趋势

 b 距离因子  $r$  的变化趋势

图4 距离因子随迭代次数的变化情况

## 4 结 语

在基于同时迭代算法的图像重建中,原来的 Siddon 算法在计算系数矩阵时,速度较慢;将改进的 Siddon 算法应用于计算系数矩阵后,整体重建速度有一定提升。对于不均匀投影时的图像重建,同时迭代算法将有更好的发展前景。

### 参考文献

- [1] REN S J , ZHAO J , DONG F. Dimensionality Reduced Simultaneous Iterative Reconstruction Technique for Electrical Resistance Tomography [J]. Flow Measurement and Instrumentation 2015 , 46: 284 – 291.
- [2] SPITZBARTH M , DRESCHER M. Simultaneous Iterative Reconstruction Technique Software for Spectral – Spatial EPR Imaging [J]. Journal of Magnetic Resonance 2015 , 257: 79 – 88.
- [3] WOLF D , LUBK A , LICHTEN H. Weighted Simultaneous Iterative Reconstruction Technique for Single – Axis Tomography [J]. Ultramicroscopy 2013 , 136: 15 – 25.
- [4] AL – MASNI M A , AL – ANTARI M A , METWALLY M K , et al. A Rapid Algebraic 3D Volume Image Reconstruction Technique for Cone Beam Computed Tomography [J]. Bio-cybernetics and Biomedical Engineering 2017 , 37( 4 ) : 619 – 629.
- [5] BOUDJELAL A , MESSALI Z , ELMOATAZ A , et al. Improved Simultaneous Algebraic Reconstruction Technique Algorithm for Positron – Emission Tomography Image Reconstruction Via Minimizing the Fast Total Variation [J]. Journal of Medical Imaging and Radiation Sciences 2017 , 48( 4 ) : 385 – 393.
- [6] LEE H , CHOI S , LEE D , et al. Investigation of Various Reconstruction Parameters for Algebraic Reconstruction Technique in a Newly Developed Chest Digital Tomosynthesis [J]. Journal of Instrumentation 2017 , 12( 8 ) .
- [7] YANG F Q , ZHANG D H , HUANG K D. Incomplete Projection Reconstruction of Computed Tomography Based on the Modified Discrete Algebraic Reconstruction Technique [J]. Measurement Science and Technology 2017 , 29( 2 ) .

## Research on Accelerating CT Image Reconstruction With Improved Siddon Algorithm

XIAO Zheng

( Sichuan Technology & Business College , Chengdu 611830 , China )

**Abstract:** Image reconstruction is the core step in CT technology. Algebraic Reconstruction Techniques and Simultaneous Iterative Reconstruction Techniques are used in the reconstruction of incomplete projection. In this paper , the image reconstruction based on SIRT algorithm is introduced. To speed up image reconstruction , an improved Siddon algorithm is proposed to calculate the intersection length and pixel number of ray and pixel. The experimental results show that when the improved Siddon algorithm is used to calculate the coefficient matrix , it can improve the speed of image reconstruction as a whole.

**Key words:** tomography; image reconstruction; simultaneous iterative algorithm; Siddon algorithm