1 Problembeschreibung und -analyse

1.1 Problembeschreibung

Die Hauptschwierigkeit des Problems liegt daran, dass es sich eigentlich um eine Kombination aus (mindestens) zwei Problemen handelen. Jedes Problem für sich ist gut beschrieben und gelöst worden, doch für alles gleichzeitig nicht.

1. Graph coloring - Visit stuff
2. Evacuate

1.2 Annahmen über das Problem

- Roboter sind punktförmig
- Können in der Bewegung saugen
- Keine Beschränkung, wie viele Roboter sich in einem Punkt befinden
- Kommunikation ist instantan und ohne Berechnungszeit (Senden wie Empfangen)
- Kommunikation zwischen Robotern kann alles sein
- Roboter haben unbeschränkt viel Speicher

1.3 Disclaimer

Einschränkungen nicht simuliert, aber deren Auswirkungen

2 Vorgehensmodell

- Keep it simple
- Start with working prototype before you do srs stuff
- Getrennt marschieren, zusammen kämpfen (self contained subprograms, assemble at the end, bottom to top)
- ipython notebook
- using a lib before reinventing the wheel
- Optimize when needed, first correct and working, then fast
- 90 % thinking, 10 % coding
- Abstract away decisions not made or which might change (geometry, polygon, agent)

2.1 Design-Ziele

2.2 Nicht-Ziele

Schöne UI, nur usable

3 Problembetrachtung

Das Problem kann unter vielen verschiedenen betrachtet werden. Je nachdem, in welcher Domäne der Informatik es eingeordnet wird, gibt es unterschiedliche Lösungsansätze.

In diesem Abschnitt wird kurz beschrieben, welche Ansätze erdacht wurden, welches deren Vor- und Nachteile sind, und für welche schließlich ausgewählt wurden.

3.1 Graphenproblem

Suche

3.2 Optimierungsproblem

3.3 Maschinenlernen

3.4 Künstliche Intelligenz

4 Umgebung

Die Modellierung des Meeresbodens hat zum Ziel, die folgenden Fragen zu beantworten oder einen guten Kompromiss zu finden:

1. Wie lassen sich eine begrenzte Anzahl an Kreisen auf einer unendlichen Fläche anorden, sodass die nicht von Kreisen bedeckte Fläche minimal ist (vergleichbar mit dem Ausstechen von Kreisen aus Keksteig)?
2. Wie lässt sich der Meeresboden unterteilen, sodass eine Simulation möglichst einfach wird?

Geplant ist, dass die Missionsdauer in Zeitschritt von 1s aufgeteilt wird. In jedem Zeitschritt bewegen sich die Roboter einen geometrischen Schritt auf dem Meeresboden weiter und säubern ihn dabei von Manganknollen. Der Vorteil darin besteht, dass die Optimierung der Ausbeute darauf reduziert wird, den nächsten Schritt möglichst geeignet auszuwählen.

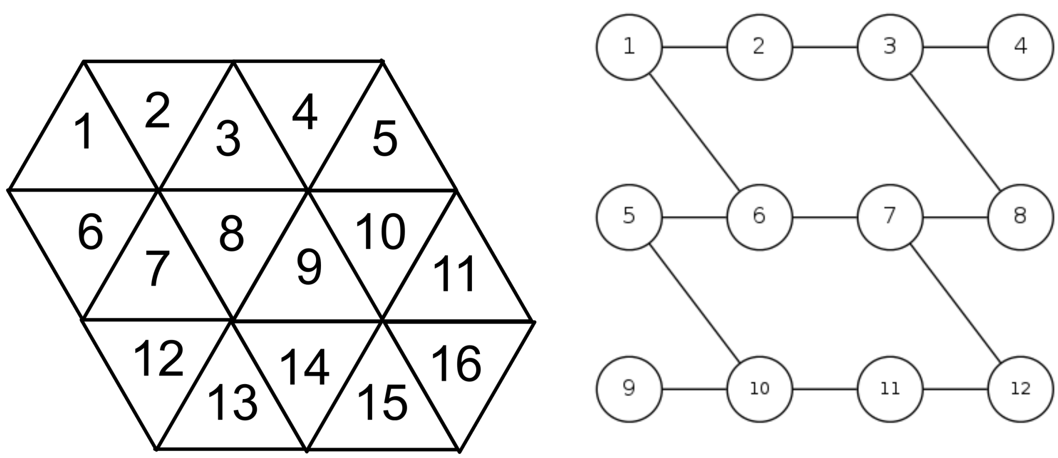
Dazu werden unendlichen Weiten des pazifischen Meeresgrundes in Abschnitte in Form von Polygonen eingeteilt (parkettiert), damit der Wertebereich der nächsten möglichen Schritte diskretisiert wird.

Die Wahl, mit welchem Polygon gearbeitet wird, hat direkte Auswirkungen auf Genauigkeit und Leistungsfähigkeit der Simulation, wie im Folgenden gezeigt wird.

4.1 Konkrete Modellierung des Meeresbodens

Der Meeresboden kann dann als Graph gesehen werden, bei denen Knoten als Zellen gesehen werden und geometrisch einem Polygon entsprechen. Angeordnet werden diese so, dass zwischen den Mittelpunkten der Innenkreise zweier benachbarter Zellen exakt 1m Abstand ist. Dies hat den Grund, dass ein Roboter in jedem Zeitschritt in die Mitte der nächste Zelle wechseln kann.

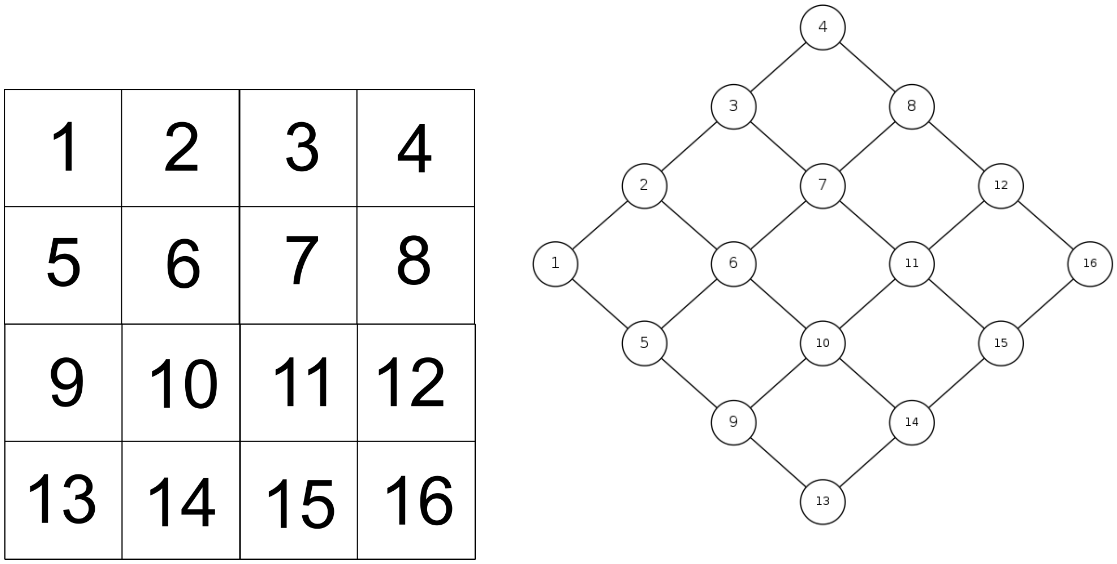
Der Zusammenhang zwischen realer Umgebung und Modellierung ist in Fig. 1 - 8 visualisiert.



(a) (b)

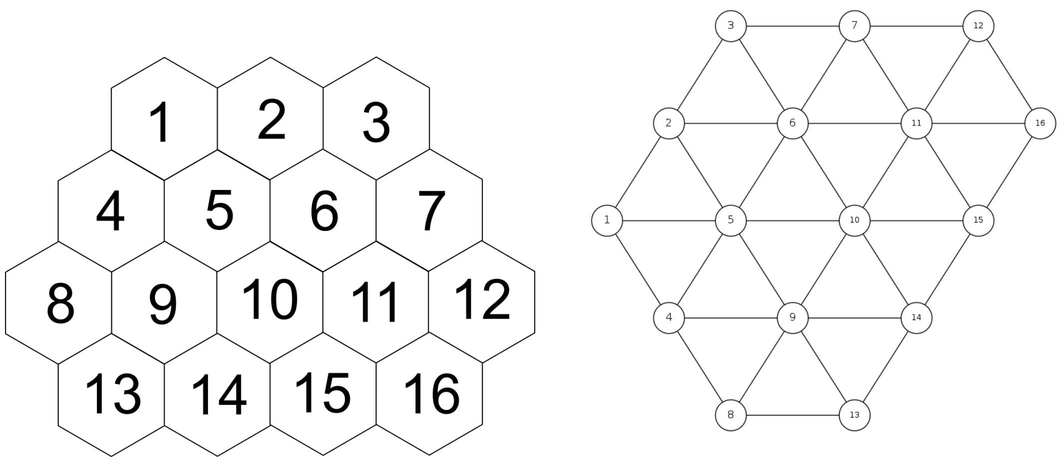
Abbildung 1: Parkettierung mit gleichseitigen Dreiecken

Roboter werden so simuliert, dass die Bewegungen nur über die Kanten einer Zelle möglich sind. Daher ist Anzahl der Ecken identisch mit den möglichen Bewegungsrichtungen. Somit gilt: je mehr Ecken,



(a) (b)

Abbildung 2: Parkettierung mit Quadraten



(a) (b)

Abbildung 3: Parkettierung mit regelmäßigen Sechsecken

desto mehr Freiheitsgrade. Die Kanten geben an, von welchem Knoten zu welchen Nachbarn gewechselt werden kann. Somit hat jeder Knoten auch so viele Kanten wie das gewählte Polygon Ecken hat.

Nach [HH02, S. 12] gilt:

Satz 1. *Eine lückenlose Parkettierung* ***ohne*** *Überschneidungen ist nur mit den regulären n-Ecken für $n = 3,4,6$ möglich.*

Da eine Simulation mit unregelmäßiger Parkettierung unnötig komplex erscheint, entscheidet es sich zwischen gleichseitigem Dreieck, Quadrat und regelmäßigem Sechseck.

4.2 Polygone und Innenkreis

Der Arbeitsbereich eines Roboters ist kreisförmig, die Zellen, in denen er sich befindet, jedoch ein Polygon. Daher gibt es in den Ecken der Zelle Bereiche, die nicht (unmittelbar) gesaugt werden. Berechnen lässt sich der Verlust Q über das Verhältnis von der Fläche des Innenkreises des Polygons zum Flächeninhalt des Polygons selbst:

$$Q = \frac{A_{\text{Kreis}}}{A_{\text{Polygon}}} \tag{1}$$

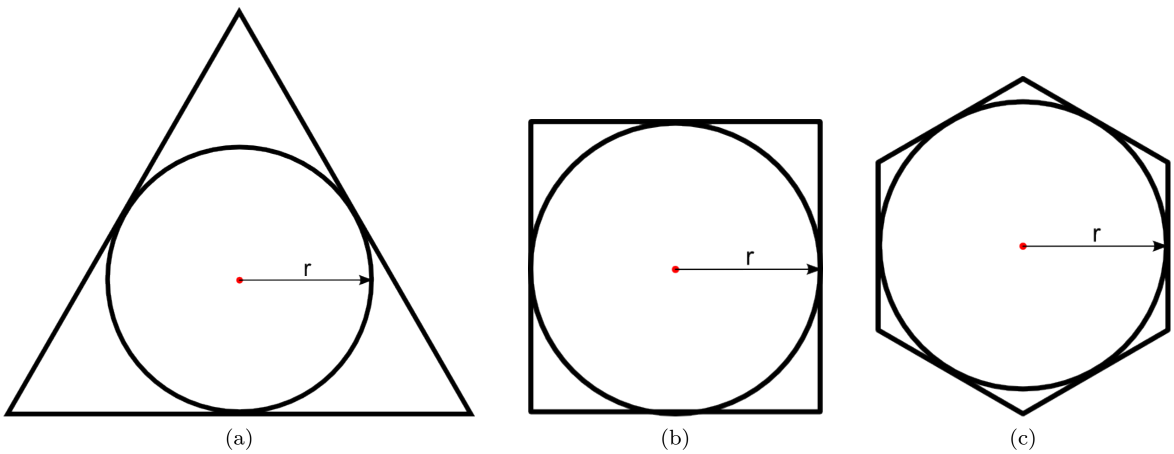


Abbildung 4: Regelmäßiges 3,4,6-Eck mit eingezeichnetem Innenkreis und Radius

Die folgende Tabelle zeigt das Verhälntis von den drei Polygonen.

n	Q
3	60,46 %
4	78,50 %
6	90,69 %

Abbildung 5: Verhältnis Q der Flächeninhalte von Innenkreis eines n-Ecks und dessen gesamten Flächeninhalts

Somit würde zum Beispiel bei Modellierung durch Zellen in Form von regelmäßigen Dreiecken ein Roboter nur 60 % des Mangans darin einsammeln. Je größer n, desto besser wird die unmittelbare Ausbeute.

Die genaue Herleitung kann unter HIER[1] nachvollzogen werden.

4.3 Entscheidung

Die Auswahl fiel schließlich leicht, da die Simulation mit einem Quadrat als zugrundeliegendem Polygon folgende Vorteile bietet:

- Einfache Datenstruktur

[1] HIER

- Einfaches Berechnen der Nachbarn
- Visualisierung einfach, da eine Zelle einem Pixel entspricht, somit keine Umrechnung nötig
- Weniger Verlust als Dreieck
- Weniger Freiheitsgrade als Sechseck (weniger Auswahl bedeutet weniger Rechenaufwand)
- Einfache Berechnung von Entfernungen zwischen zwei Zellen 5.1

Die tatsächliche Modellierung ist in Fig. 6 dargestellt. Zu beachten ist, dass sich das Gitter unendlich weit in alle Richtungen erstreckt, aber in der Implementierung fast nur der erste Quadrant genutzt wird.

Bewegungen können nur in Nachbarzellen erfolgen. Lediglich die Zellen, welche eine Kante mit der Basisfläche gemeinsam haben, gelten als Nachbarn. Die wird auch Von-Neumann-Nachbarschaft genannt.

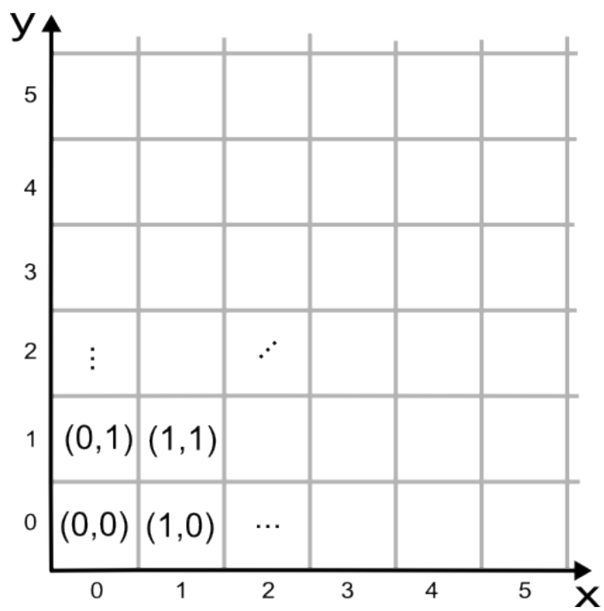


Abbildung 6: Diskretisierung der möglichen Positionen auf dem pazifischen Meeresboden durch quadratische Zellen. Jede Zelle ist eindeutig durch kartesische Koordinaten bestimmt. Das Gitter erstreckt sich unendlich weit in alle Richtungen.

Als wie gut sich diese Entscheidung schließlich herausgestellt hat, wird im Abschnitt HIER[2] evaluiert.

[2] HIER2

5 Theory Crafting

Der folgende Abschnitt beschreibt die zugrundeliegende Theorie hinter der Implementierung.

5.1 Manhattan-Metrik

Nachdem in 6 gezeigt wurde, wie genau die Umgebung modelliert wurde, fällt auf, dass die Distanz zwischen zwei Zellen nicht der euklidischen Entfernung entspricht. Dies ist in Fig. 7 gezeigt. Daher muss eine neue Entfernungsfunktion gefunden werden, bei der der Weg nur aus horizontalen und Vertikalen Wegstücken besteht.

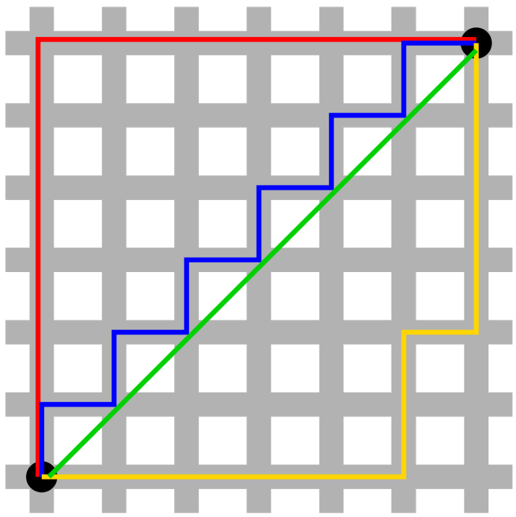


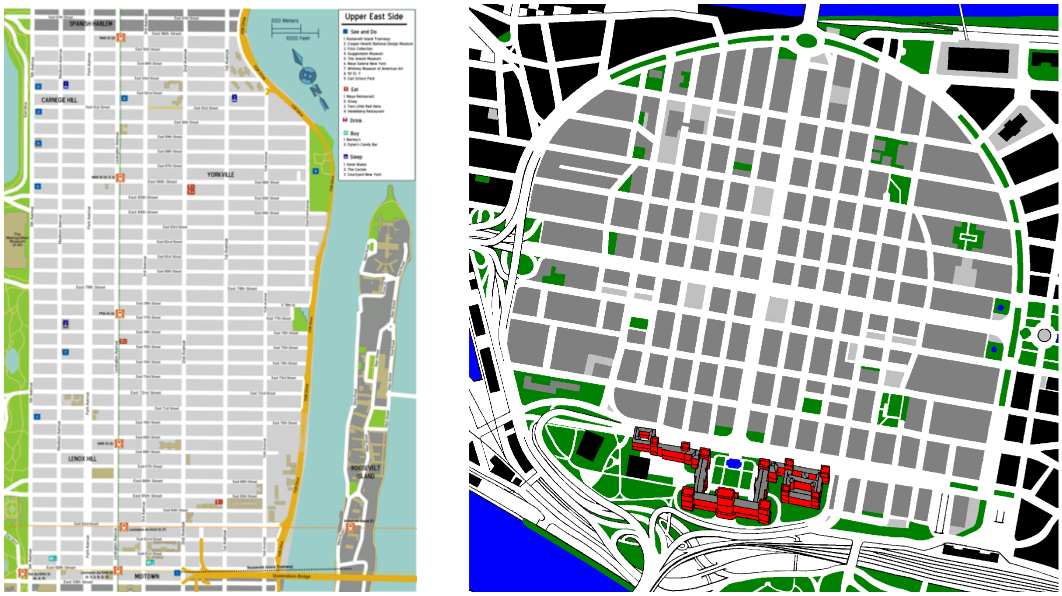
Abbildung 7: Verschiedene, gleichgroße Taxicab-Distanzen zwischen zwei Punkten (je 12 Einheiten lang). Zum Vergleich ist die grüne Linie die euklidische Distanz (etwa 8,5 Einheiten) eingetragen. [Wik]

Glücklicherweise wurde eine solche Geometrie, in der die Entfernung so definiert ist, bereits erforscht. Die Manhattan-Geometrie (oder Taxicab-Geometrie, Cityblock-Geometrie), ist eine Geometrie, in der die übliche, euklidische Entfernungsfunktion durch eine neue Metrik ersetzt ist. Eine Metrik ist hier eine Funktion, die zwei Elemente aus der Geometrie einen reele, nichtnegativen Abstand zuweist.

Ihr Name entstammt der Analogie mit dem Straßennetz von Manhattan (oder Mannheim, wo sich die Universität der beiden Autoren befindet). Es ist gitterförmig angelegt. Um ein Ziel zu erreichen, wird die Entfernung durch Aneinanderreihung von vertikalen und Horizontalen Stücken zurückgelegt.

Ein Taxifahrer, welcher eine Route durch solch eine System plant, legt immer die gleiche Strecke zurück, wenn er Wege benutzt, die ihn näher zum Ziel bringen, egal welche Wahl er dabei an Abzweigungen trifft.

Da diese Geometrie der Modellierung des Meeresbodens durch Quadrate entspricht, werden im Folgenden notwendige und wichtige Eigenschaften derer beschrieben.



(a) New York (b) Mannheim

Abbildung 8: Auszüge aus Stadplänen von New York und Mannheim.
Auffallend ist die gitterförmige Anordnung der Straßenzüge.

5.1.1 Entfernung

Die Entfernung zwischen zwei Punkten $a, b \in \mathbb{R}^n$ in einer Manhattan-Geometrie ist die Summe der absoluten Differenzen derer kartesischer Einzelkoordinaten:

$$d(a,b) = \sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i|$$

Für den hier relevanten Spezialfall von $\mathbb{R}^2$ gilt somit:

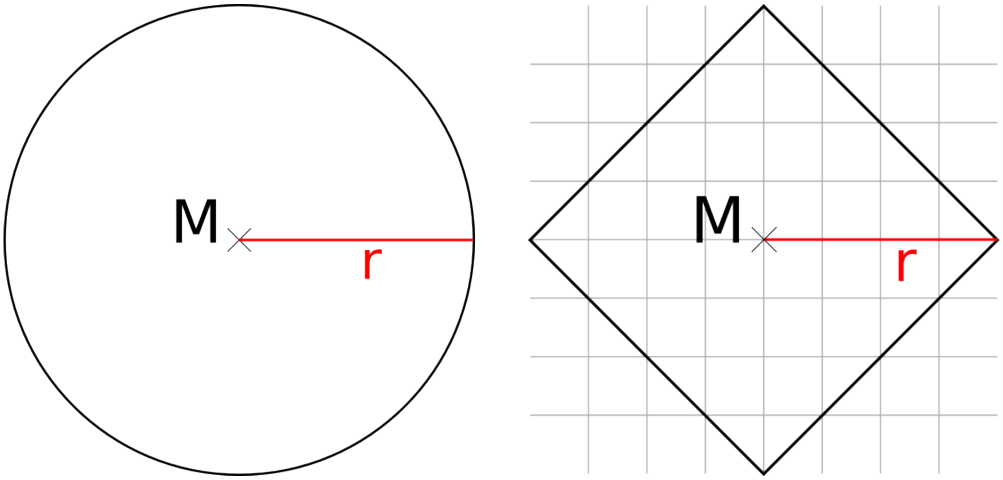
$$d(a,b) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|$$

5.1.2 Kreise

Ein Kreis ist die Menge aller Punkte in einer Ebene, die einen konstanten Abstand, dem Radius, zu einem bestimmten Punkt, dem Mittelpunkt, haben. Die gewählte Metrik, die in dem Wort *Abstand* versteckt ist, hat unmittelbar Einfluss auf die Form des Kreises.

Kreise in einer Taxicab-Geometrie haben die Form von Quadraten, die 45 ° um deren Mittelpunkt gedreht sind. Fig. 9 gibt eine Idee, wieso es so ist. Eine ausführliche Behandlung ist in [Jan07] zu finden.

Die Berechnung von Mittelpunkt und Radius eines Taxicab-Kreises ist schwieriger als in euklidischer Geometrie. Es wird hier keine Formel benutzt, sondern ein Algorithmus. Interessant hier ist das Berechnen von einem Kreis in Taxicab-Geometrie von zwei oder drei Punkten. Das Problem lässt sich auch wie



(a) Euklidischer Kreis (b) Taxicab-Kreis

Abbildung 9: Alle Punkte auf der Kreislinie haben den gleichen Abstand zum Mittelpunkt. Auffallend ist, das der Kreis in Taxicab-Metrik nicht rund, sondern quadratisch ist.

folgt beschreiben: Finde das kleinste Quadrat, welches um 45 ° gedreht ist, welches zwei (drei) Punkte enthält. Da es nicht eindeutig definiert wird, reicht eine einzige Lösung für dieses Problem.

Algorithmus 1 : Kreis von zwei Punkten in Taxicab-Geometrie

Data : Zwei Punkte $X, Y \in \mathbb{R}^n$

Result : Radius und Mittelpunkt eines Quadrates, das X und Y enthält und eine minimale Seitenlänge hat.

1. Um die Lösung des Problems zu vereinfachen, werden die Punkte je um 45 ° um den Ursprung herum gedreht, dann das Quadrat berechnet, die so enstandende Lösung schließlich zurückgedreht.
2. Rotiere X, Y 45 ° um den Ursprung und nenne die so entstehenden Punkte P, Q.
3. Offensichtlich ist nun die Seitenlänge s des minimalen Quadrates gegeben durch
$$s = \max\{|P_x - Q_x|, |P_y - Q_y|\} \tag{2}$$
4. Um eine Lösung zu finden, wähle die unterste Linke Ecke als Ausgangspunkt und nenne sie A
$$\begin{cases} A_x = \min\{P_x, Q_x\} \\ A_y = \min\{P_y, Q_y\} \end{cases} \tag{3}$$
5. Der rotierte Mittelpunkt M' ist somit gegeben durch
$$\begin{cases} M'_x = A_x + \frac{s}{2} \\ M'_y = A_y + \frac{s}{2} \end{cases} \tag{4}$$
6. Rotiere M' um 45 ° um den Ursprung und nenne den so entstehenden Punkt M.
7. Der Radius r ist gegeben durch
$$r = \sqrt{((A_x - M'_x)^2 + (A_y - M'_y)^2)} \tag{5}$$

return r, M

Interessanterweise liefert dieser Algorithmus durch geringfügige Anpassungen auch die Lösung für folgendes Problem: Finde das kleinste Quadrat, welches um 45 ° gedreht ist, welches drei Punkte enthält:

Algorithmus 2 : Kreis von drei Punkten in Taxicab-Geometrie

Data : Drei Punkte $X, Y, Z \in \mathbb{R}^n$

Result : Radius und Mittelpunkt eines Quadrates, das X, Y, Z enthält und eine minimale Seitenlänge hat.

1. Um die Lösung des Problems zu vereinfachen, werden die Punkte je um 45 ° um den Ursprung herum gedreht, dann das Quadrat berechnet, die so enstandende Lösung schließlich zurückgedreht.
2. Rotiere X, Y, Z 45 ° um den Ursprung und nenne die so entstehenden Punkte P, Q, R.
3. Offensichtlich ist nun die Seitenlänge s des minimalen Quadrates gegeben durch

$$s = \max\{|P_x - Q_x|, |P_x - R_x|, |Q_x - R_x|, |P_y - Q_y|, |P_y - R_y|, |Q_y - R_y|\} \tag{6}$$

4. Um eine Lösung zu finden, wähle die unterste Linke Ecke als Ausgangspunkt und nenne sie A

$$\begin{cases} A_x = \min\{P_x, Q_x, R_x\} \\ A_y = \min\{P_y, Q_y, R_y\} \end{cases} \tag{7}$$

5. Der rotierte Mittelpunkt M' ist somit gegeben durch

$$\begin{cases} M'_x = A_x + \frac{s}{2} \\ M'_y = A_y + \frac{s}{2} \end{cases} \tag{8}$$

6. Rotiere M' um 45 ° um den Ursprung und nenne den so entstehenden Punkt M.
7. Der Radius r ist gegeben durch

$$r = \sqrt{((A_x - M'_x)^2 + (A_y - M'_y)^2)} \tag{9}$$

return r, M

Im Rahmen dieser Arbeit wurden diese Algorithmen auch mittels GeoGebra visualisiert. Eine interaktive Visualisierung für einen Kreis in Taxicab-Geometrie, der zwei (drei) Punkte enthält, ist unter folgenden Links zu sehen:

`http://www.geogebratube.org/student/m65241`
`http://www.geogebratube.org/student/m68655`

5.2 Platzierung

Keine Häufigkeitsverteilung gegeben

5.3 Missionsdauer

goal runden missiontime runden

5.4 Finden des Sammelpunktes

5.5 Zeitbeschränkung

6 Implementierung

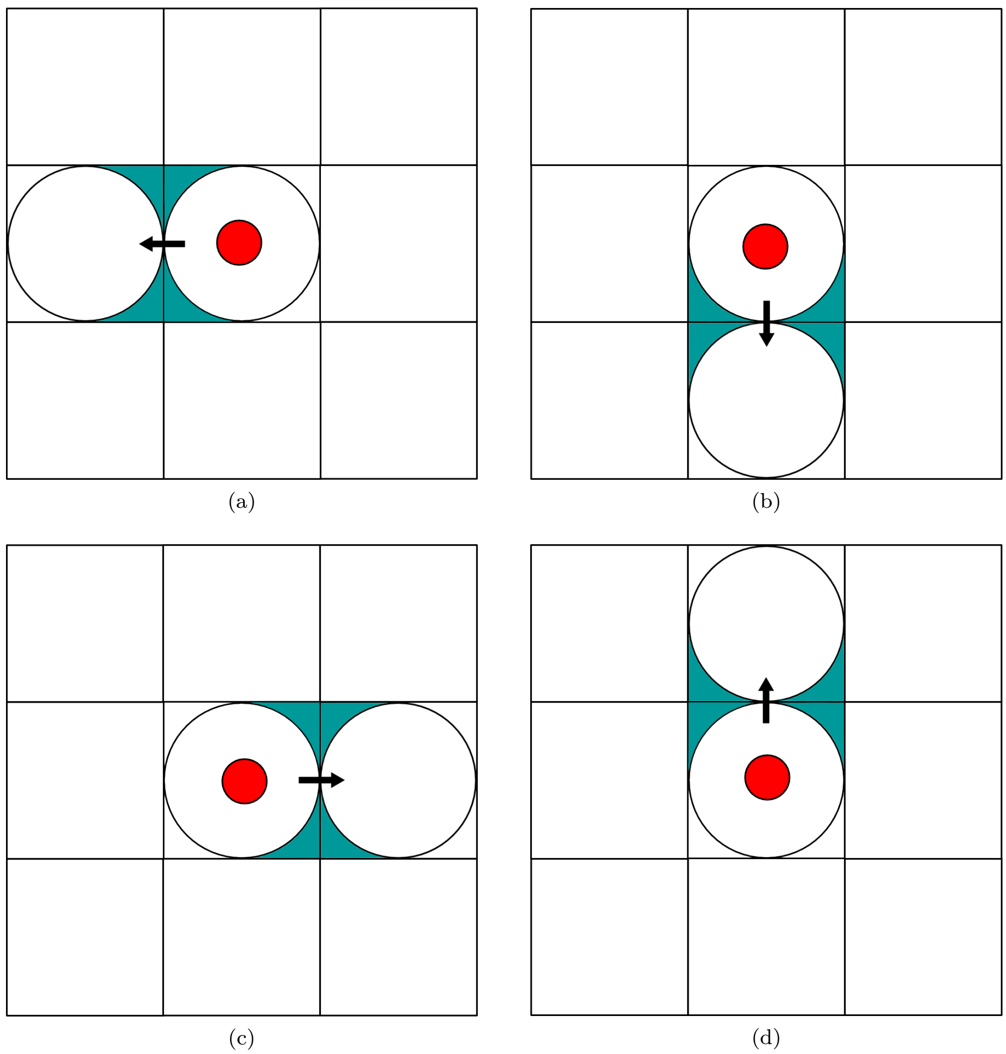
7 Diskussion

7.1 Performance

7.2 Fehlerrechnung

7.2.1 Abweichung vom Optimum

7.2.2 Fehler durch Modellierung



(a) (b) (c) (d)

Abbildung 10: Überstreichen der Ecken beim Wechseln in eine benachbarte Zelle: Der Roboter (hier rot), kann nicht nur den ursprünglichen, kreisförmigen Teil in der Mitte einer Zelle abernten, sondern beim Wechseln auch die Ecken, da sein Arbeitsbereich diese in der Bewegung überschneidet.

7.3 Lessons learned/Fehlentscheidungen

- Zu viele Abstraktion, die sich später unnötig herausgetsellt hat (Geometry, Circle)

7.4 Ausblick

Literatur

[HH02] **Christian Hartfeldt** und **Prof. Dr. Herbert Henning**. *Muster, Flächen, Parkettierungen — Anregungen fur einen kreativen Mathematikunterricht.* Techn. Ber. Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, 2002. URL: `http://www.math.uni-magdeburg.de/reports/2002/parkett.pdf`.

[Jan07] **Christina Janssen**. *Taxicab Geometry: Not the Shortest Ride Across Town.* Techn. Ber. Iowa State University, 2007. URL: `http://www.math.iastate.edu/thesisarchive/MSM/JanssenMSMSS07.pdf`.

[Wik] **Wikipedia**. *Manhattan-Metrik.* URL: `https://de.wikipedia.org/wiki/Manhattan-Metrik`.