~ Heute Fortsetzung Statik der Fluide

- **Kraftangriffspunkt** (Druckmittelpunkt) [Kapitel 3.4.7]

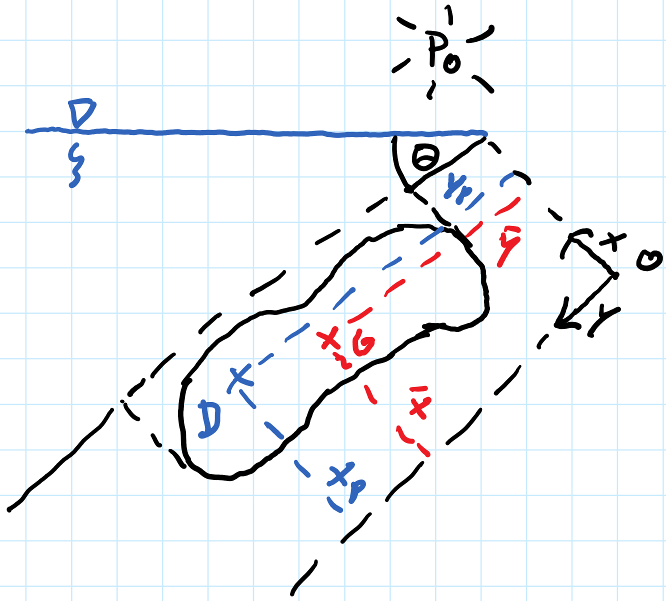
resultierender Angriffspunkt der durch Druck verursachten Flächenlast

Flächenschwerpunkt

$G(\bar{x} \,|\, \bar{y})$

Druckmittelpunkt

$D(x_P \,|\, y_P)$




Momentengleichgewicht:

Gesamtkraft

$$F \cdot y_P = \int_A (p\,y)\, dA$$

lokale finite Drücke mit jeweiligem Hebelarm

Druckmittelpunkt

$$y_P = \frac{p_0}{p_G}\,\bar{y} + \frac{\rho g \sin\Theta}{p_G A}\, I_{xx}$$

$$x_P = \frac{p_0}{p_G}\,\bar{x} - \frac{\rho g \sin\Theta}{p_G A}\, I_{xy}$$

mit

$p_0$ : Umgebungsdruck

$p_G$ : Druck im Flächenschwerpunkt

$(\bar{x}/\bar{y})$ : Koordinaten Flächenschwerpunkt

$\Theta$ : Neigung der Fläche

$I_{xx}, I_{xy}$ : Flächenträgheitsmoment

→ Wahl des Koordinatensystems wichtig ($I_{xx}, I_{xy}, \bar{y}, \bar{x}$)

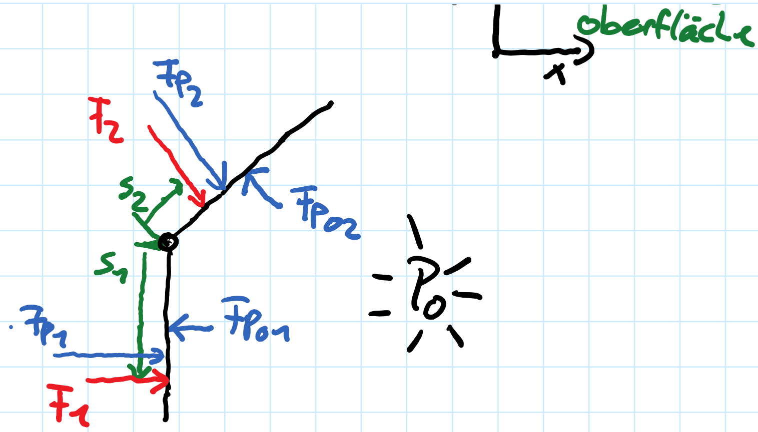
**Aufgabe 3** (Prüfungsniveau)

Aufgabe vorstellen


Auf Wasseroberfläche

## Aufgabe vorstellen

a) ges: $H$




### Vertikaler Schenkel

(1) $\underline{F}_{p_1} = -\int_A p \, d\underline{A} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \int_A p \, dA = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \int_{-(H+L_1)}^{-H} (p_0 - \rho g y) \, b \, dy$

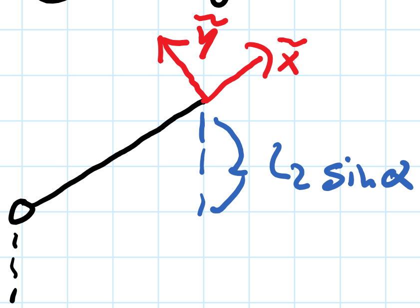
$$= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \left(p_0 + \rho g \left(H + \frac{L_1}{2}\right)\right) L_1 b$$

$$\underline{F}_{p_{01}} = -\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} p_0 L_1 b$$

→ in beiden Kräften steckt $p_0$

$$|\underline{F}_1| = |\underline{F}_{p_1} + \underline{F}_{p_{01}}| = \rho g \left(H + \frac{L_1}{2}\right) L_1 b$$

(2) analog zu (1) mit gedrehtem KOS




$p_0$ wirkt von beiden Seiten: Vor Integration „eliminieren"

$$p(\tilde{x}=0) = \rho g (H - L_2 \sin\alpha)$$

$$\underline{F}_2 = -\int_A p \, d\underline{A} = -\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \int_{-L_2}^{0} (p(\tilde{x}=0) - \rho g \tilde{x} \sin\alpha) \, b \, d\tilde{x} =$$

$$= -\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \int_{-L_2}^{0} (\rho g (H - L_2 \sin\alpha) - \rho g \tilde{x} \sin\alpha) \, b \, d\tilde{x} =$$

$$= \binom{0}{-1} b L_2 \rho g \left(H - \frac{L_2}{2}\sin\alpha\right)$$

$$\Rightarrow |F_2| = \rho g \left(H - \frac{L_2}{2}\sin\alpha\right) b L_2$$

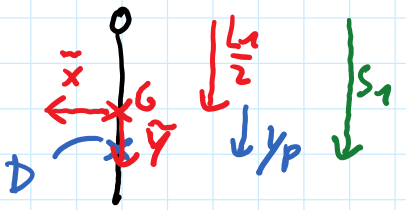
Bestimmung der Kräfte auch über Druck im Flächenschwerpunkt multipliziert mit Fläche möglich

Hebelarme: $y_P = \frac{P_0}{P_G}\bar{y} + \frac{\rho g \sin\theta}{P_G A} I_{xx}$ (3.26 b)

Zur Bestimmung von $y_P$ wird ein lokales KOS im Flächenschwerpunkt gelegt

$\Rightarrow \bar{y} = 0$, $I_{xx}$ einfach

$S_1$:




$$y_P = \frac{P_0}{P_G}\cdot 0 + \frac{\rho g}{P_G A} I_{xx}$$

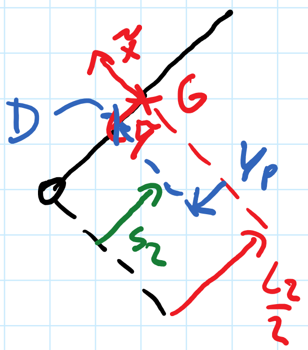
Entspricht berechneter Kraft $F_1$

mit $P_G A = \rho g \left(H + \frac{L_1}{2}\right) L_1 b$ ; $I_{xx} = A\frac{L_1^2}{12}$ — Formelsammlung

$$y_P = \frac{L_1^2}{12\left(H + \frac{L_1}{2}\right)}$$

$$S_1 = \frac{1}{2} L_1 + y_P = \frac{1}{2} L_1 + \frac{L_1^2}{12\left(H + \frac{L_1}{2}\right)}$$

$S_2$:




$$S_2 = \frac{L_2}{2} - y_P =$$

$$= \frac{L_2}{2} - \frac{\rho g \sin\alpha}{P_G A} I_{xx} = \frac{L_2}{2} - \frac{L_2^2 \sin\alpha}{12\left(H - \frac{L_2}{2}\sin\alpha\right)}$$

$F_2$ einsetzen

Drehmoment M:

$$M = \Sigma M_M = F_1 s_1 - F_2 s_2 = \rho g b \left( L_1^2 \left( \frac{H}{2} + \frac{L_1}{3} \right) - L_2^2 \left( \frac{H}{2} - \frac{L_2 \sin\alpha}{3} \right) \right)$$

b) $L_2 = 2L_1$; $\alpha = 30^\circ \Rightarrow \sin\alpha = 0{,}5$

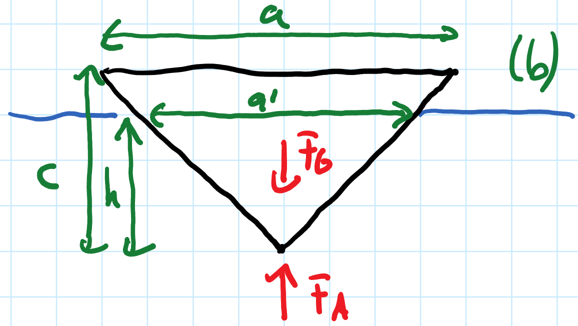
$$\Sigma M < 0 \quad \Rightarrow H > \frac{70}{9} L_1$$

Mit Aufgabenstellung erklären

<u>Aufgabe 4</u> (Basiswissen)

Aufgabe vorstellen → Auftrieb

a) ges: h




a. nach Archimedes

$$F_G = F_A$$

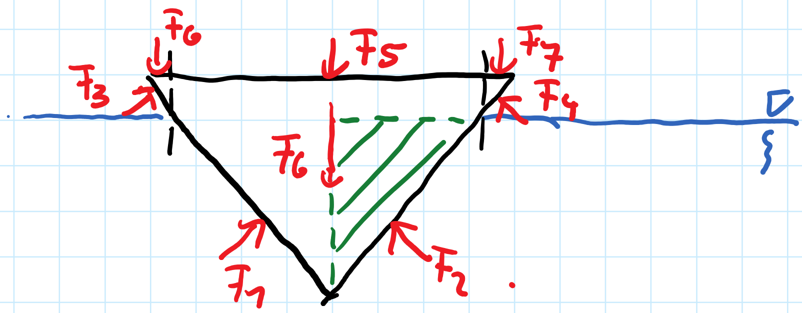
$$F_A = \rho_F V_V g$$

$V_V$ mit Strahlensatz: $\frac{a}{c} = \frac{a'}{h}$ $\quad a' = h \frac{a}{c}$

$$\Rightarrow \rho_K \cancel{\tfrac{1}{2}} a c \cancel{b} \cancel{g} = \rho_F \cancel{\tfrac{1}{2}} a' h \cancel{b} \cancel{g}$$

$$\rho_K a c = \rho_F h \frac{a}{c} h \Rightarrow h = c \sqrt{\frac{\rho_K}{\rho_F}}$$

b. aus Druckkräften



Keine resultierende horizontale hydrostatische Kraft (geschl. Oberfl.)

$\Sigma F_h = 0$

$F_{3z}, F_6$ und $F_{4z}, F_7$ heben sich auf

Gewichtskraft der Fluidsäule über der Fläche

$$F_{1z} = F_{2z} = p_0 \frac{1}{2} a' b + \frac{1}{4} a' h b \, \rho_F g =$$

$$= \left(p_0 + \frac{1}{2} h \rho_F g\right) \frac{a'}{2} b$$

$$F_5 = -p_0 a' b$$

$$\Rightarrow \Sigma F_v = 2\left(p_0 + \frac{1}{2} h \rho_F g\right) \frac{a'}{2} b - p_0 a' b - \underbrace{\frac{1}{2} \rho_K a c b g}_{F_6} = 0$$

$$\Rightarrow h = c \sqrt{\frac{\rho_K}{\rho_F}}$$

b) $p_0$ wirkt überall $\rightarrow$ bei geschlossenem Körper „kürzt" sich $p_0$ weg

$\rightarrow p_0$ hat keinen Einfluss auf $F_A$!

## Aufgabe 5: (Expertenwissen)

Aufgabe vorstellen

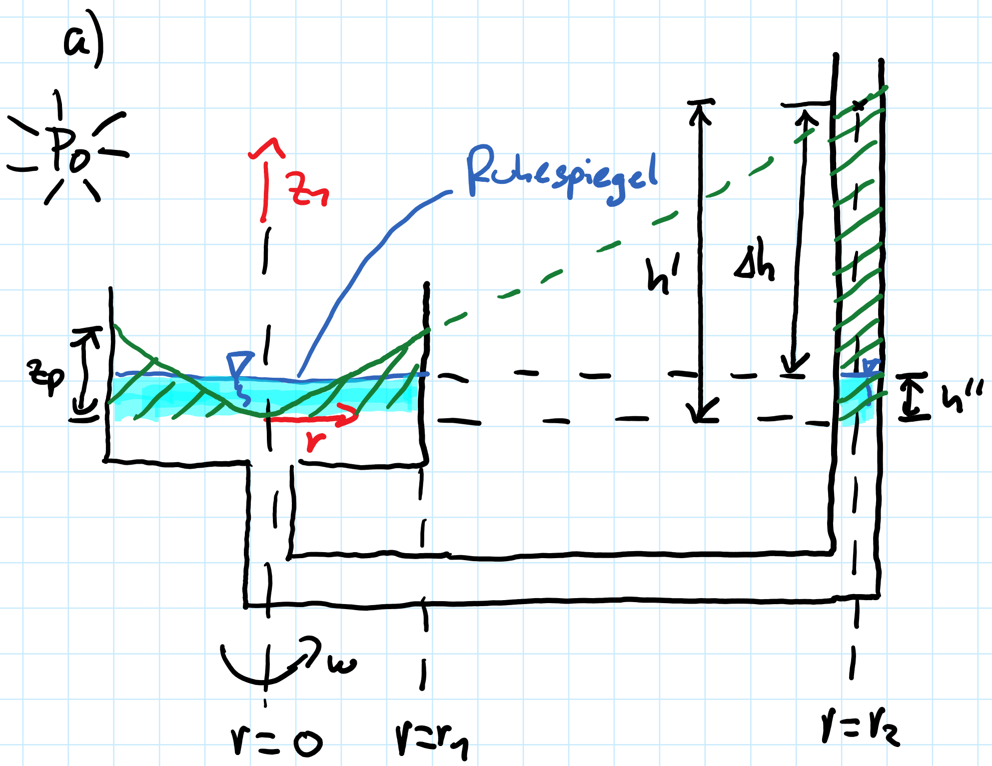
Vorbemerkung: gleichmäßig beschleunigte Fluide

Skript: „Verhalten des Fluids entspricht einem starren Körper ..." (S. 42)

$\rightarrow$ gleichförmige Rotation: $p(r,z) = \frac{1}{2} \rho r^2 \omega^2 - \rho g z + C$ (3.51)

a)

a)




b) ges: $\Delta h$ neu definiert (einzeichnen)

$$\Delta h = \underbrace{h' - h''}$$

$$p(r,z) = \frac{1}{2}\rho r^2 \omega^2 - \rho g z + C$$

Bestimmung der Integrationskonstanten $C$:

$$p(r=0;\, z=0) = p_0 \Rightarrow C = p_0$$

Bestimmung $h'$:

$$p(r=r_2;\, z=h') = \frac{1}{2}\rho r_2^2 \omega^2 - \rho g h' + p_0 = p_0$$

$$\Rightarrow h' = \frac{r_2^2 \omega^2}{2g}$$

Standard Hydrostatik

Alternativ: $p(r=r_2;\, z=0) = \frac{1}{2}\rho \omega^2 r^2 + p_0 = p_0 + \rho g h' \Rightarrow h' = \ldots$

Bestimmung von $h''$:

Massenerhaltung: $\cancel{\rho}\,\Delta V_{\text{ruhend}} = \cancel{\rho}\,\Delta V_{\text{drehend}}$

rot. paraboloid

$$h'' \pi r_1^2 + h'' A = \frac{1}{2} z_p \pi r_1^2 + h' A$$

Bestimmung $z_p$ analog zu $h'$ über $p(r=r_1; z=z_p)=p_0$

$$z_p = \frac{\omega^2 r_1^2}{2g}$$

$z_p$ und $h'$ einsetzen und nach $h''$ umformen:

$$h'' = \frac{\omega^2}{2g} \frac{\frac{\pi}{2} r_1^4 + r_2^2 A}{\pi r_1^2 + A}$$

$$\Delta h = h' - h'' = \frac{\pi \omega^2}{2g} r_1^2 \left( \frac{r_2^2 - \frac{r_1^2}{2}}{\pi r_1^2 + A} \right) = 4{,}43\,\text{cm}$$

Zusammenfassung:

- heute Kraftangriffspunkt und konst. Beschleunigung
- damit Statik abgeschlossen
- nächstes mal Energieerhaltung

Nächste VÜ: Morgen