VORTRAGSÜBUNG TECHNISCHE STRÖMUNGSLEHRE

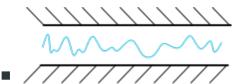
Tobias Rentschler

DIFFERNTIALGLEICHUNG IM SPALT

VORBEMERKUNGEN ZU DGL IM SPALT

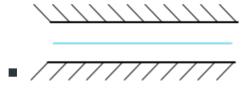
Spaltströmungen:

• Turbulent:



Bewegungen quer zur Hauptströmung

• Laminar:



 Keine Bewegungen quer zur Hauptströmung

- Voll ausgebildet: Keine Änderung der Strömung in Strömungsrichtung
- 2D Strömung
- Viskosität: Zähigkeit eines Fluids
 - dynamische Viskosität: $\mu\left[\frac{kg}{ms}\right]$
 - kinematische Viskosität: $v\left[\frac{m^2}{s}\right]$
 - $\blacksquare \mu = \rho \cdot v$
- Newton'sches Fluid: linear viskoses Fließverhalten: $au=\mu rac{\partial u}{\partial y}$

VORBEMERKUNGEN ZU DGL IM SPALT

DGL einer stationären, inkompressiblen 2D-Spaltströmung

- Massenbilanz: $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$
- Impulsbilanz:

$$lacksquare x$$
-Richtung: $ho\left(rac{\partial u}{\partial t}+urac{\partial u}{\partial x}+vrac{\partial u}{\partial y}
ight)=
ho g_x-rac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(rac{\partial^2 u}{\partial x^2}+rac{\partial^2 u}{\partial y^2}
ight)$

$$lacksquare y ext{-Richtung:}\,
ho\left(rac{\partial v}{\partial t}+urac{\partial v}{\partial x}+vrac{\partial v}{\partial y}
ight)=
ho g_y-rac{\partial p}{\partial y}+\mu\left(rac{\partial^2 v}{\partial x^2}+rac{\partial^2 v}{\partial y^2}
ight)$$

• Laminar:
$$v=0=>\frac{\partial v}{\partial y}=0=>\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

• Folgende Terme der Impulsgleichung werden auf Grund der Annahmen zu Null:

$$\bullet$$
 $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ stationär

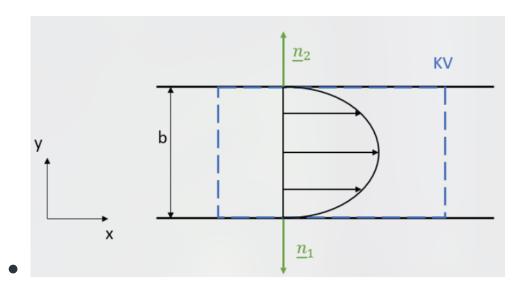
•
$$u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$
 voll ausgebildet

•
$$v \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$
 laminar und voll ausgebildet

$$begin{array}{c} rac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad ext{voll ausgebildet} \end{array}$$

VORBEMERKUNGEN ZU DGL IM SPALT

• Hydrostatische Druckverteilung

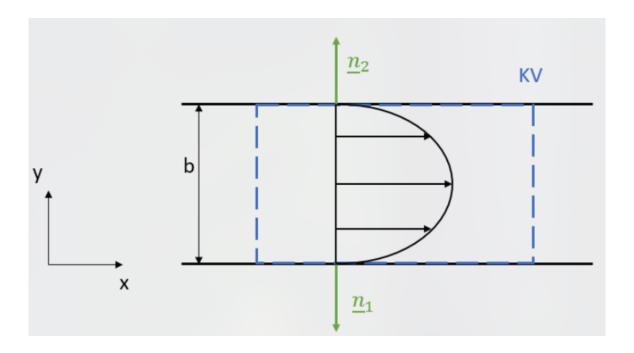


•
$$x$$
-Richtung: $-\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

•
$$y$$
- Richtung: $ho g_y = rac{dp}{dy}$

BEIBLATT DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Bestimmung des Vorzeichens der aus der Schubspannung resultierenden Kraft vom Körper auf das Fluid



- Annahmen:
 - Die Strömung ist stationär, laminar und voll ausgebildet.
- Möglichkeit 1: Bestimmung des Vorzeichens aus der Anschauung:
 - Das Fluid wird an den Stellen y = 0 und y = b abgebremst.
 - => Es muss eine Kraft auf das Fluid in negativer Richtung wirken.

BEIBLATT DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Bestimmung des Vorzeichens der aus der Schubspannung resultierenden Kraft vom Körper auf das Fluid

Möglichkeit 2: Bestimmung des Vorzeichens rechnerisch über $F_{S, au}$

$$ullet F_{S, au} = \int_S au \cdot dS = \int_S au \cdot n \, dS = \int_S egin{pmatrix} au_{xx} & au_{xy} \ au_{yx} & au_{yy} \end{pmatrix} \cdot egin{pmatrix} n_x \ n_y \end{pmatrix} dS$$

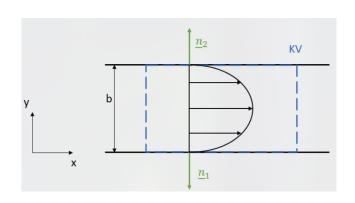
$$ullet = \int_S \left(rac{ au_{xx} n_x + au_{xy} n_y}{ au_{yx} n_x + au_{yy} n_y}
ight) dS$$

 \blacksquare mit $n_x = 0$:

$$ullet F_{S, au} = \int_S \left(rac{ au_{xy} n_y}{ au_{yy} n_y}
ight) dS = \int_S \left(rac{\mu \left(rac{\partial v}{\partial x} + rac{\partial u}{\partial y}
ight) n_y}{2\mu rac{\partial v}{\partial y} n_y}
ight) dS$$

• mit v = 0 (laminar, voll ausgebildet):

$$ullet F_{S, au} = \int_S \left(rac{\mu rac{\partial u}{\partial y} n_y}{0}
ight) dS$$



AUFGABE 16 A) (BASISWISSEN)

gesucht: $\frac{\partial p}{\partial x}$ damit Q=0

$$Q=\int_A u_A dA=t\int u(y)dy=1\int_0^b u(y)dy$$

Herleitung u(y) auf Massen-& Impuslsnilanz für stationäre, imkompressible, laminare Strömung:

$$ullet$$
 $-rac{\partial p}{\partial x} + \mu rac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 => rac{\partial^2 u}{\partial y^2} = rac{1}{\mu} rac{\partial p}{x}$

$$ullet \int \left(rac{\partial^2 u}{\partial y^2} = rac{1}{\mu}rac{\partial p}{x}
ight) dy = rac{\partial u}{\partial y} = rac{1}{\mu}rac{\partial p}{\partial x}y + c_1$$

$$ullet \int \left(rac{1}{\mu}rac{\partial p}{\partial x}y+c_1
ight)dy=rac{1}{2\mu}rac{\partial p}{x}y^2+c_1y+c_2$$

Randbedingungen zur bestimmung der Integrationskonstanten $c_1 \& c_2$:

•
$$u(0) = 0$$

•
$$u(b) = v_0$$

$$-> c_2 = 0$$

$$=> c_1 = \frac{v_0}{b} - \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} b$$

$$ullet \ u(y) = rac{1}{2\mu} rac{\partial p}{\partial x} ig(y^2 - b y ig) + rac{v_0}{b} y$$

AUFABE 16 A) (BASISWISSEN)

- Q = 0
- $ullet \ u(y) = rac{1}{2\mu} rac{\partial p}{\partial x} ig(y^2 b y ig) + rac{v_0}{b} y$
- $ullet \int_0^b u(y)dy = \left[rac{1}{2\mu}rac{\partial p}{\partial x}\left(rac{y^3}{3}-brac{y^2}{2}
 ight)+rac{v_0}{2b}y^2
 ight]_0^b = rac{v_0}{2}b-rac{1}{12\mu}rac{\partial p}{\partial x}b^3$
- Auflösen nach $\frac{\partial p}{\partial x}$:
 - $= > \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{6\mu v_0}{b^2}$
 - lacksquare mit $v_0=0.12rac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ und $\mu=1.5\mathrm{Pa}\cdot\mathrm{s}$
 - $=> \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{6\mu v_0}{b^2} = 30000 \left[\frac{Pa}{m} \right]$

AUFGABE 16 B) (BASISWISSEN)

• gesucht: u(y), $\tau(y)$ => Kurvendiskussion

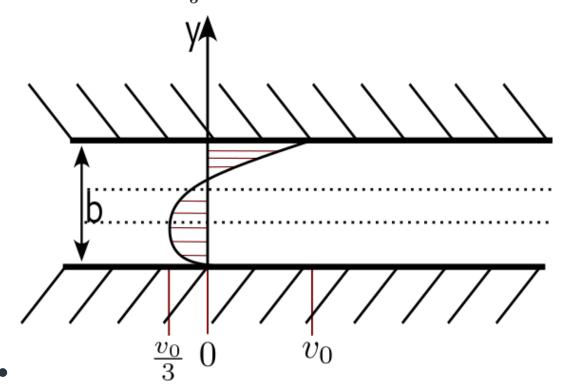
$$ullet au = \mu rac{\partial u}{\partial y} = rac{\partial p}{\partial x} ig(y - rac{b}{2} ig) + \mu rac{v_0}{b}$$

• Extremwerte von u(y) bei $\tau(y)=0$

$$ullet rac{\partial p}{\partial x} \left(y^* - rac{b}{2}
ight) + \mu rac{v_0}{b} = 0$$

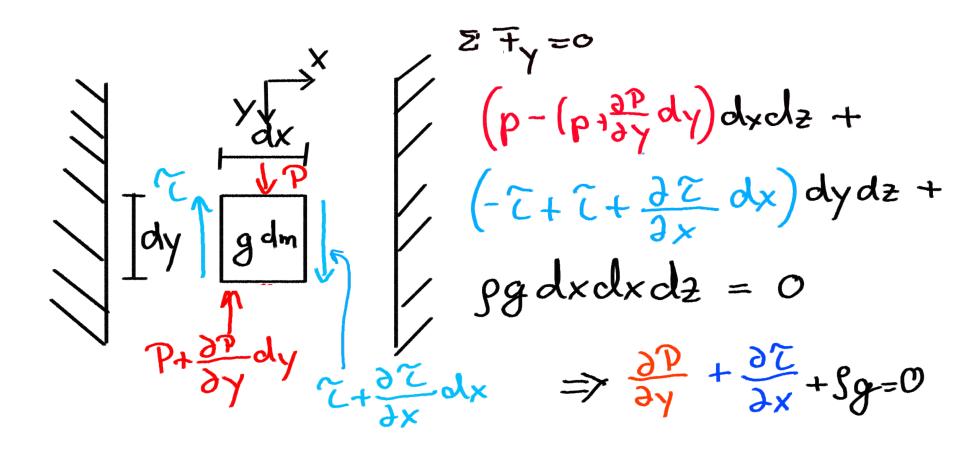
$$lacksquare = > y^* = rac{b}{3}$$

$$u(y^*) = -\frac{v_0}{3}$$



AUFGABE 17 A)

• Bestimmung von $\tau(x)$ und v(x):



AUFGABE 17 A)

• Bestimmung von $\tau(x)$ und v(x):

$$ullet \int rac{\partial au}{\partial x} dx => au(x) = rac{\partial p}{\partial y} x -
ho g x + c_1$$

$$ullet \ rac{1}{\mu}\int au dx => v(x) = rac{1}{\mu}rac{\partial p}{\partial y}rac{x^2}{2} - rac{1}{\mu}
ho grac{x^2}{2} + rac{c_1x}{\mu} + c_2$$

• mit
$$v(a) = -v_0, v(-a) = 2v_0$$

$$ullet rac{1}{\mu}rac{\partial p}{\partial y}rac{a^2}{2}-rac{1}{\mu}
ho grac{a^2}{2}+rac{c_1a}{\mu}+c_2=-v_0$$

$$ullet rac{1}{\mu}rac{\partial p}{\partial y}rac{a^2}{2}-rac{1}{\mu}
ho grac{a^2}{2}-rac{c_1a}{\mu}+c_2=2v_0$$

$$\bullet$$
 => $c_1 = -\frac{3v_0\mu}{2a}$

$$lacksquare = c_2 = rac{v_0}{2} - rac{a^2}{2\mu} \left(rac{\partial p}{\partial y} -
ho g
ight)$$

$$ullet v(x) = rac{1}{\mu} rac{\partial p}{\partial y} \cdot rac{x^2}{2} -
ho g \cdot rac{x^2}{2} + rac{x}{\mu} \cdot rac{-3v_0}{2a} + rac{v_0}{2} - rac{a^2}{2\mu} \Big(rac{\partial p}{\partial y} -
ho g\Big)$$

$$ullet$$
 $au(x)=rac{\partial p}{\partial y}x-
ho gx-rac{3v_0M}{2a}$

AUFGABE 17 B)

- ullet ges: v(0) wenn $au\left(rac{a}{-2}
 ight)$ & Verläufe u(x), au(x)
- $ullet v(0) = rac{v_0}{2} rac{a^2}{2\mu} \Big(rac{\partial p}{\partial y}
 ho g\Big)$
- Bestimmung $\frac{\partial p}{\partial y}$ aus $au\left(\frac{a}{-2}\right)=0$:
- $ullet au\left(rac{a}{-2}
 ight) = rac{\partial p}{\partial y}\cdotrac{a}{-2} +
 ho grac{a}{-2} rac{3v_0M}{2a} = 0$
 - $lacksquare rac{\partial p}{\partial y} =
 ho g rac{3 v_0 M}{a^2}$
- $ullet \ v(0) = rac{v_0}{2} rac{a^2}{2\mu} \Big(
 ho g rac{3v_0 M}{a^2}
 ho g \Big) = rac{v_0}{2} + rac{3v_0}{2} = 2v_0$

AUFGABE 18 A)

• $\operatorname{geg:} u(\frac{\partial P}{\partial x}), \tau(\frac{\partial P}{\partial x})$

Partielle Ableitungen -
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \int y$$

$$ullet \ rac{\partial u}{\partial y} = rac{1}{\mu} rac{\partial P}{\partial x} y + C_1 \quad \int y$$

$$ullet u=rac{1}{2\mu}rac{\partial P}{\partial x}y^2+C_1y+C_2$$

$$lacksquare$$
 oben: $u_B=rac{1}{2\mu_B}rac{\partial P}{\partial x}y^2+C_1y+C_2$

$$ullet$$
 $au_B=rac{\partial P}{\partial x}y+\mu_B C_1$

$$lacksquare$$
 unten: $u_A=rac{1}{2\mu_A}rac{\partial P}{\partial x}y^2+C_3y+C_4$

$$ullet$$
 $au_A=rac{\partial P}{\partial x}y+\mu_A C_3$

• 4 Unbekannte => 4 Randbedingungen

$$u_B(b) = 0 \longrightarrow \frac{1}{2\mu_B} \frac{\partial P}{\partial x} b^2 + \frac{\mu_A C_3}{\mu_B} b + C_2 = 0$$
 (1)

$$\bullet$$
 $u_B(0) = u_A(0) \longrightarrow C_2 = C_4$ (3)

$$\bullet \ \tau_B(0) = \tau_A(0) \longrightarrow \mu_B C_1 = \mu_A C_3 \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{\mu_A C_3}{\mu_B} \quad (4)$$

AUFGABE 18 A)

- (1) (2):
 - $\frac{\partial P}{\partial x}b^2\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu_B} \frac{1}{\mu_A}\right) + bC_3\left(\frac{\mu_A}{\mu_B} + 1\right) = 0$ $\circ => C_3 = \frac{\partial P}{\partial x}\frac{b}{2}\frac{\mu_B \mu_A}{(\mu_B + \mu_A)\mu_A}$
- in (4) einsetzen:

$$lacksquare C_1 = rac{\partial P}{\partial x} rac{b}{2} rac{\mu_B - \mu_A}{(\mu_B + \mu_A)\mu_B}$$

• in (2) einsetzen:

$$lacksquare C_2 = -b^2 rac{\partial P}{\partial x} rac{1}{M_B + M_A} = C_4$$

 $ullet \; au_{AB} = rac{\partial p}{\partial x} y + rac{\partial p}{\partial x} rac{b}{2} rac{M_B - M_A}{M_B + M_A}$

AUFGABE 18 B)

- u_B, u_A, τ_{AB}
- $ullet au_{AB} = \left(rac{\partial P}{\partial x}
 ight) y + rac{\partial P}{\partial x} rac{b}{2} rac{\mu_B \mu_A}{\mu_B + \mu_A}$
- $\tau_{AB}(y^*) = 0$
- $ullet \frac{\partial P}{\partial x}y^* + \frac{\partial P}{\partial x} \frac{b}{2} \frac{\mu_B \mu_A}{\mu_B + \mu_A} = 0$
- $ullet \ y^* = rac{b}{2} rac{\mu_A \mu_B}{\mu_B + \mu_A}
 ightarrow 0 \, \mathsf{mit} \, \mu_A = \mu_B$