VORTRAGSÜBUNG TECHNISCHE STRÖMUNGSLEHRE

Tobias Rentschler

AUFGABE 1

AUFGABE 1A)

- Berechnen Sie die auf den Würfel wirkende Auftriebskraft und dessen Dichte ρ_w.
- Berechnen der Auftriebskraft $F_{Auftrieb}$ auf den Würfel.
  - Die Dichte ρ_w entspricht der Dichte ρ damit der Würfel in Öl schweben kann.
- Die Auftriebskraft entspricht der Gewichtskraft des verdrängten Volumens
  - $F_{Auftrieb} = \frac{\rho g H^3}{8}$

AUFGABE 1B)

- Berechnen Sie den Betrag der resultierenden Druckkraft F_p auf die Klappe.
- Berechnung über den Druck im Flächenschwerpunkt, multipliziert mit der Fläche der Klappe
  - Druckverlauf mit $p(y) = \rho g y$:
  - Flächenschwerpunkt bei: $y = \frac{3}{2}H$
- $F_p = p_G A = \frac{3}{2}\rho g H^2 b$

AUFGABE 1C)

Berechnen Sie das von der Druckkraft F_p erzeugte Moment um den Drehpunkt M.

- Hebelarm:
  - $l_p = \frac{H}{2} + \frac{\rho g}{p_G A} I_{\tilde{x}\tilde{x}}$
  - $l_p = \frac{H}{2} + \frac{\rho g}{\rho g \frac{3H}{2} Hb} \frac{1}{12} H^3 b$
  - $l_p = \frac{5}{9} H$
- Resultierendes Moment:
  - $M_p = F_p l_p$
  - $M_p = \frac{3}{2} \rho g H^2 b \frac{5}{9} H$
  - $M_p = \frac{5}{6} \rho g H^3 b$

AUFGABE 1D)

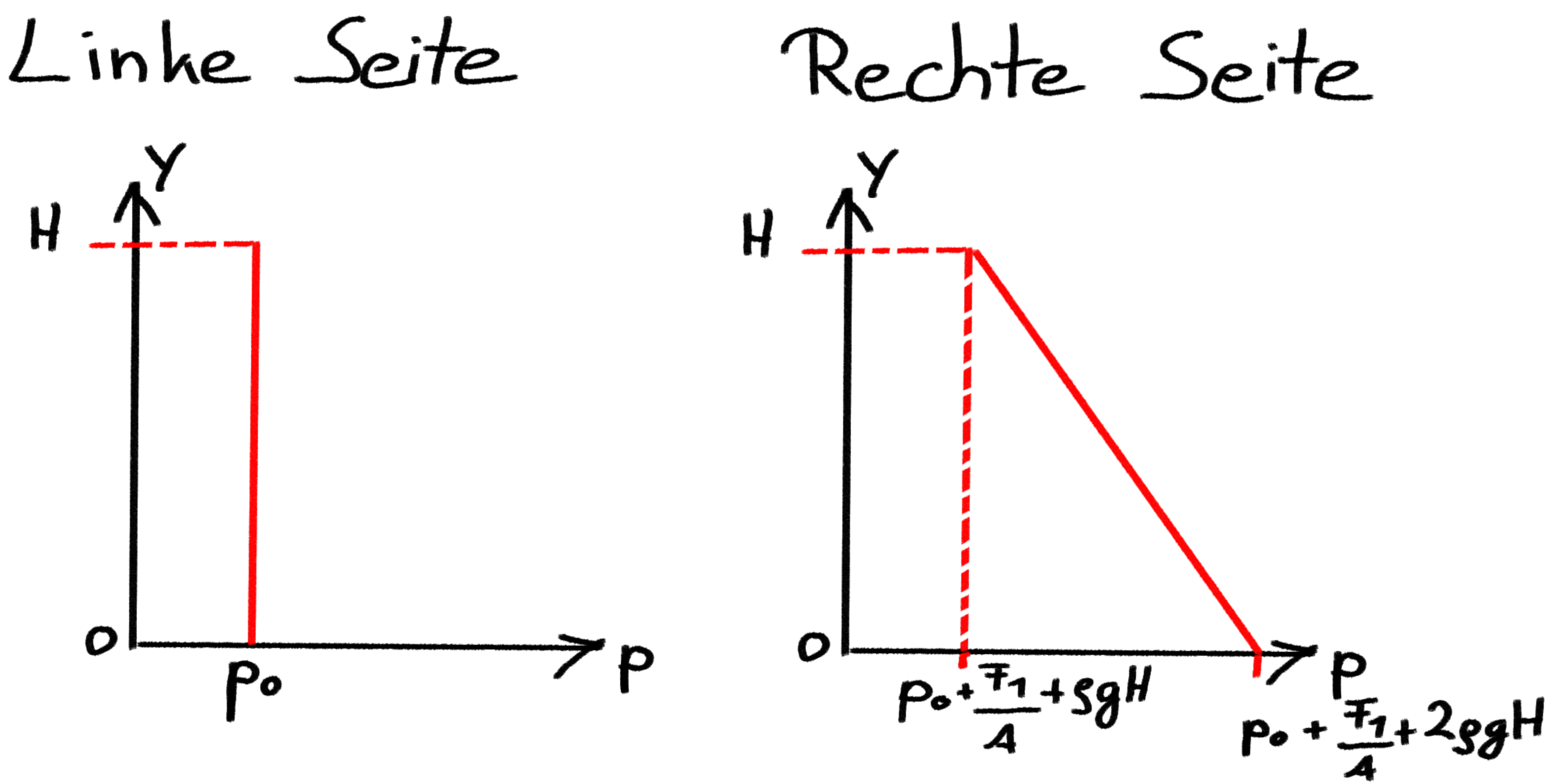
Nun wirke die Kraft $F_1 \neq 0$. Die Positionen der Kolben und des Würfels bleiben gleich.

Wie verändern sich die auf die Ober- und Unterseite des Würfels wirkenden Druckkräfte und die Auftriebskraft?

- F_o und F_u erhöhen sich um den Betrag $\frac{F_1}{A}$

AUFGABE 1E)

Skizzieren Sie den Druckverlauf über die linke und rechte Seite der Klappe und geben Sie die charakteristischen Werte an.



AUFGABE 1F)

Berechnen Sie die Kraft F_2 in Abhängigkeit von F_1, damit das System im Ruhezustand ist.

- $p_0 + \frac{F_1}{A} = p_0 + \frac{F_2}{4A}$
- $F_2 = 4F_1$

AUFGABE 1G)

Bestimmen Sie die Kraft F_1, bei der sich die Klappe öffnet.

- Druckkraft:
  - $F_p = p_G A = \left(\frac{F_1}{A} + \frac{3}{2}\rho g H\right) Hb$
- Hebelarm:
  - $l_p = \frac{H}{2} + \frac{\rho g}{p_G A} I_{\tilde{x}\tilde{x}}$
  - $l_p = \frac{H}{2} + \frac{\rho g}{\left(\frac{F_1}{A} + \frac{3}{2}\rho g H\right) Hb} \frac{1}{12} H^3 b$
- Klappe öffnet ab einem kritischen Moment M_{krit}:
  - $\left(\frac{F_1}{A} + \frac{3}{2}\rho g H\right) Hb \left(\frac{H}{2} + \frac{\rho g}{\left(\frac{F_1}{A} + \frac{3}{2}\rho g H\right) Hb} \frac{1}{12} H^3 b\right) \overset{!}{=} M_{krit}$
  - $\left(\frac{F_1}{A} + \frac{3}{2}\rho g H\right) \frac{H^2 b}{2} + \frac{\rho g H^3 b}{12} = M_{krit}$
  - $F_1 = \frac{2 A M_{krit}}{H^2 b} - \frac{5}{3}\rho g H A$

AUFGABE 2)

AUFGABE 2A)

Bestimmen Sie die Strömungsgeschwindigkeit v sowie die Rohrreibungszahl λ unter Verwendung des beiliegenden Moody-Diagramms.

- Die Strömungsgeschwindigkeit berechnet sich über den Volumenstrom und dem Querschnitt:
  - $v = \frac{Q}{A} = 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
- Für die Bestimmung von λ werden die Reynolds-Zahl und das Verhältnis von Wandrauhigkeit k zu Rohrdurchmesser D benötigt.
  - $\mathrm{Re} = \frac{vD}{\nu} = \frac{2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} * 2\mathrm{m}}{10^{-6}\,\frac{m^2}{s}} = 4 * 10^6$
  - $\frac{k}{D} = \frac{10\ \mathrm{mm}}{2000\ \mathrm{mm}} = 0,005$
  - => $\lambda = 0,03$

AUFGABE 2B)

Bestimmen Sie die notwendige Förderhöhe h_P um den Volumenstrom von Speicher 1 nach Speicher 2 zu pumpen und die dafür nötige Wellenleistung P_P der Pumpe.

- Energiegleichung von Speicher 1 nach Speicher 2:
  - $\frac{p_0}{\rho g} + H_1 = \frac{p_0}{\rho g} + H_2 + \lambda \frac{L_1}{D} \frac{v^2}{2g} + \lambda \frac{L_2}{D} \frac{v^2}{2g} + \frac{v^2}{2g} - h_P$
  - Bedeutung der einzelnen Verlustterme:
    - $\lambda \frac{L_1}{D} \frac{v^2}{2g}$ - Reibungsverluste in Rohrabschnitt 1
    - $\lambda \frac{L_2}{D} \frac{v^2}{2g}$ - Reibungsverluste in Rohrabschnitt 2
    - $\frac{v^2}{2g}$ - Örtliche Verluste (z.B. Einlauf, Auslauf, Carnot)
    - h_P - Pumpenhöhe (Energiezufuhr, daher negatives Vorzeichen)
  - $\frac{p_0}{\rho g} + H_1 = \frac{p_0}{\rho g} + H_2 + \left(\lambda \left(\frac{L_1 + L_2}{D} \right) + 1 \right) \frac{v^2}{2g} - h_P$
  - $h_P = 117,18\,\mathrm{m}$
  - $P_P = \frac{\rho g Q h_P}{\eta_P} = 8,5\,\mathrm{MW}$

AUFGABE 2C)

Damit der Dampfdruck auf dem Berg nicht unterschritten wird ($p_B > p_{vap}$), muss das Druckniveau erhöht werden. Zur Energierückgewinnung wird eine Turbine unmittelbar vor dem Speicher 2 eingebaut. Der Volumenstrom kann für c), d) und e) als konstant angenommen werden.

- Ziel: Pumpe muss so dimensioniert werden, dass am höchsten Punkt (Berg) der Druck nicht unter den Dampfdruck fällt.
- Randbedingung: $p_B = p_{vap}$ (kritischer Fall)
- Energiegleichung von Speicher 1 bis zum Berg aufstellen
    - $$\frac{p_0}{\rho g} + H_1 = \frac{p_B}{\rho g} + H_B + \frac{v^2}{2g} + \lambda \frac{L_1}{D} \frac{v^2}{2g} - h_P$$
- Kritische Bedingung: $p_B = p_{vap}$
    - $$\frac{p_0}{} + H_1 = \frac{p_{vap}}{} + H_B + \frac{v^2}{} + \lambda \frac{L_1}{} \frac{v^2}{} - h_P$$

AUFGABE 2C)

- Nach Pumpenhöhe auflösen
  - $$h_P = \frac{p_0 - p_{vap}}{\rho g} + (H_1 - H_B) - \left(1 + \lambda \frac{L_1}{D}\right) \frac{v^2}{2g}$$
- Gegebene Werte einsetzen
  - $p_0 = 1 \times 10^5\,\mathrm{Pa}$
  - $p_{vap} = 2300\,\mathrm{Pa}$
  - $\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$
  - $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$
  - $v = 2\,\mathrm{m/s}$ (aus Teilaufgabe a)
  - $\lambda = 0{,}03$ (aus Teilaufgabe a)
- => $h_P = 151{,}4\,\mathrm{m}$

AUFGABE 2C)

- Wellenleistung berechnen
    - $$P_P = \frac{\rho g Q h_P}{\eta_P}$$
        - $Q = 2\pi\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$
        - $\eta_P = 0{,}85$
        - $h_P = 151{,}4\,\mathrm{m}$
- $$P_P = \frac{1000 \times 9{,}81 \times 2\pi \times 151{,}4}{0{,}85} = 11\,\mathrm{MW}$$
- Notwendige Förderhöhe: $h_{P,neu} = 151{,}4\,\mathrm{m}$
- Wellenleistung: $P_{P,neu} = 11\,\mathrm{MW}$
- Interpretation: Die Pumpe muss eine höhere Förderhöhe als in Teilaufgabe b) aufbringen, um den Dampfdruck am Berg nicht zu unterschreiten.

AUFGABE 2D)

Bestimmen Sie die Wellenleistung P_T, die mit der Turbine gewonnen werden könnte, unter der Bedingung von Aufgabenteil c).

- Ziel:Bestimmung der Turbinenleistung zwischen Berg und Speicher 2
- Ausgangssituation:
  - Turbine wird unmittelbar vor Speicher 2 eingebaut
  - Bedingung aus Teil c): $p_B = p_{vap}$ am Berg
  - Energierückgewinnung durch Höhenunterschied und Druckdifferenz

AUFGABE 2D)

- Energiegleichung aufstellen: Von Berg nach Speicher 2:
  - $$\frac{p_B}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + H_B = \frac{p_0}{\rho g} + H_2 + \left(\lambda \frac{L_2}{D} + 1\right) \frac{v^2}{2g} + h_T$$

- $\frac{p_B}{\rho g}$: Druckhöhe am Berg
- $\frac{v^2}{2g}$: Geschwindigkeitshöhe am Berg
- H_B: Höhe des Berges
- $\frac{p_0}{\rho g}$: Druckhöhe am Speicher 2
- H_2: Höhe des Wasserspiegels in Speicher 2
- $\lambda \frac{L_2}{D} \frac{v^2}{2g}$: Reibungsverluste vom Berg bis Speicher 2
- $\frac{v^2}{2g}$: Carnot-Verlust $\zeta_{Carnot} \alpha \frac{v^2}{2g}$ mit $\zeta_{Carnot} := 1$ & $\alpha = 1$ turbulent
- h_T: Turbinenhöhe (Energieentnahme)
- Randbedingung $p_B = p_{vap}$

- $$\frac{p_{vap}}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + H_B = \frac{p_0}{\rho g} + H_2 + \left(\lambda \frac{L_2}{D} + 1\right) \frac{v^2}{2g} + h_T$$

AUFGABE 2D)

- Nach Turbinenhöhe auflösen
  - $h_T = \frac{p_{vap}}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + H_B - \frac{p_0}{\rho g} - H_2 - \left(\lambda \frac{L_2}{D} + 1\right) \frac{v^2}{2g}$
- Umformen zu:
  - $$h_T = \frac{p_{vap} - p_0}{\rho g} + (H_B - H_2) - \lambda \frac{L_2}{D} \frac{v^2}{2g}$$
- Werte einsetzen $p_{vap} = 2300\,\mathrm{Pa}$

  $p_0 = 1 \times 10^5\,\mathrm{Pa}$

  $\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$

  $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$

  $v = 2\,\mathrm{m/s}$ (aus Teilaufgabe a)

  $\lambda = 0{,}03$ (aus Teilaufgabe a)
- => $h_T = 34,2\,\mathrm{m}$

AUFGABE 2D)

Wellenleistung der Turbine berechnen

- $$P_T = \eta_T \rho g Q h_T$$
    - Bei der Turbine wird Energie **entnommen** (Energiewandlung)
    - Wirkungsgrad η_T berücksichtigt Verluste bei der Energieumwandlung
        - $\eta_T = 0{,}9$
        - $Q = 2\pi\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$
        - $h_T = 34{,}2\,\mathrm{m}$
- $$P_T = 0{,}9 \times 1000 \times 9{,}81 \times 2\pi \times 34{,}2 = 1{,}9\,\mathrm{MW}$$
- Turbinenhöhe: $h_T = 34{,}2\,\mathrm{m}$
- Wellenleistung der Turbine: $P_T = 1{,}9\,\mathrm{MW}$

AUFGABE 2E)

Bestimmen Sie die sich einstellende Höhe der Fontäne.

- **Anwendung der Energiegleichung:**
  - Von Berg (Punkt B) über Leckage zur Oberseite der Fontäne
  - Berücksichtigung aller Energieterme und Verluste
- **Energiegleichung aufstellen:**

$$\frac{p_B}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + H_B = \frac{p_0}{\rho g} + H_F + \lambda \frac{L_2}{D} \frac{v^2}{2g} + \Delta h$$

- **Erläuterung der Terme:**
  - $\frac{p_B}{\rho g}$: Druckhöhe am Berg
  - $\frac{v^2}{2g}$: Geschwindigkeitshöhe
  - H_B: Geodätische Höhe am Berg
  - $\frac{p_0}{\rho g}$: Atmosphärendruck an der Fontäne
  - H_F: Fontänenhöhe (gesucht)
  - $\lambda \frac{L_2}{D} \frac{v^2}{2g}$: Reibungsverluste in der Leitung
  - Δh: Verlust Leckage

AUFGABE 2E)

Bestimmen Sie die sich einstellende Höhe der Fontäne.

- **Umstellung nach Fontänenhöhe:**

$$H_F = \frac{p_B}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + H_B - \frac{p_0}{\rho g} - \lambda \frac{L_2}{D} \frac{v^2}{2g} - \Delta h$$

- **Ergebnis:**
  - **Absolute Höhe (bezogen auf NN):** $H_F = 264,4\,\mathrm{m}$
  - **Relative Höhe (bezogen auf Leckstelle):** $H_F' = 14,4\,\mathrm{m}$

AUFGABE 3

AUFGBAE 3A)

- Berechnen Sie die Geschwindigkeit v_3 an der Stelle (3).
- Energiebilanz von (1) nach (3):
- $p_0 + \frac{\rho}{2} v_1^2 = p_0 + \frac{\rho}{2} v_3^2$
- $v_3 = v_1$

AUFGABE 3B)

- Berechnen Sie das Geschwindigkeitsprofil $v_2(h)$ in Abhängigkeit der unbekannten Strahlhöhe h_2 und der maximalen Geschwindigkeit $v_{2,max}$.
- Lineare Gleichung: $v_2(h) = mh + c$
- Randbedingungen:
  - $v_2(0) = 0$
  - $v_2(h_2) = v_{2,max}$
- Damit ergibt sich für das lineare Geschwindigkeitsprofil:
  - $v_2(h) = v_{2,max} \frac{h}{h_2}$

AUFGABE 3C)

- Konti:
  - $Q_1 = Q_2 + Q_3$
  - $h_1^2 v_1 = \frac{v_{2,max}}{2} h_1 h_2 + h_1 h_3 v_1$
- Daraus erhält man die Strahlhöhe h_2:
  - $h_2 = \frac{2 v_1 (h_1 - h_3)}{v_{2,max}}$

AUFGABE 3D)

Im Folgenden wird die Umlenkschaufel fixiert, wodurch sich die Strahlhöhe h_2 einstellt. Die Größen h_2, h_3 und $v_{2,max}$ gelten als gegeben, die Reibung zwischen Umlenkvorrichtung und Strahl wird vernachlässigt. Das Geschwindigkeitsprofil $v_2(h)$ bleibt dabei linear.

- $\underline{v}_1 = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $\underline{v}_2(h) = v_{2,max} \frac{h}{h_2} \begin{pmatrix} -\cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$
- $\underline{v}_3 = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

AUFGABE 3E)

Berechnen Sie mit einer Impulsbilanz am eingezeichneten Kontrollvolumen den Vektor der Stützkraft $\underline{F}_S$ in Abhängigkeit von der Druckkraft auf die freien Oberflächen $\underline{F}_A$.

- **Impulsbilanz am Kontrollvolumen:**
  - Allgemeine Form: $\sum \dot{m}\underline{v} = \sum \underline{F}$
  - Mit Impulsstromdichte: $\rho\underline{v}(\underline{v} \cdot \underline{n})\,dA$
- **Impulsströme der drei Teilstrahlen:**
  - Strahl (1): $\rho h_1^2 \underline{v}_1 (\underline{v}_1 \cdot \underline{n}_1)$
  - Strahl (2): $\rho h_1 \int_0^{h_2} \underline{v}_2 (\underline{v}_2 \cdot \underline{n}_2)\,dh$
  - Strahl (3): $\rho h_1 h_3 \underline{v}_3 (\underline{v}_3 \cdot \underline{n}_3)$
- **Einsetzen der Richtungsvektoren:**
  - Strahl (1): $\rho h_1^2 v_1^2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$
  - Strahl (2): $\rho h_1 \frac{v_{2,max}^2}{h_2^2} \frac{h_2^3}{3} \begin{pmatrix} -\cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} = \rho h_1 \frac{h_2}{3} v_{2,max}^2 \begin{pmatrix} -\cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$
  - Strahl (3): $\rho h_1 h_3 v_3^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

AUFGABE 3E)

Berechnen Sie mit einer Impulsbilanz am eingezeichneten Kontrollvolumen den Vektor der Stützkraft $\underline{F}_S$ in Abhängigkeit von der Druckkraft auf die freien Oberflächen $\underline{F}_A$.

- **Impulsbilanz aufstellen:**

$$\rho h_1^2 v_1^2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \rho h_1 \frac{h_2}{3} v_{2,max}^2 \begin{pmatrix} -\cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} + \rho h_1 h_3 v_3^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{F}_S + \underline{F}_A$$

- **Auflösung nach Stützkraft:**

$$\underline{F}_S = -\underline{F}_A + \rho h_1^2 v_1^2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \rho h_1 \frac{h_2}{3} v_{2,max}^2 \begin{pmatrix} -\cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} + \rho h_1 h_3 v_1^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

AUFGABE 3F)

Bestimmen Sie mithilfe eines Kräftegleichgewichts an der Umlenkschaufel den Kraftvektor $\underline{F}_U$, der von der Befestigung der Umlenkschaufel aufgebracht werden muss.

- **Kräftegleichgewicht an der Umlenkschaufel:**
  - Alle Kräfte an der Schaufel müssen im Gleichgewicht stehen
  - $\underline{F}_K + \underline{F}_P + \underline{F}_G + \underline{F}_U = \underline{0}$
- **Identifikation der Kräfte:**
  - $\underline{F}_K$: Kontaktkraft vom Fluid auf die Schaufel
  - $\underline{F}_P$: Druckkraft auf die Schaufel
  - $\underline{F}_G$: Gewichtskraft der Schaufel
  - $\underline{F}_U$: Befestigungskraft (gesucht)
- **Anwendung des 3. Newtonschen Gesetzes:**
  - $\underline{F}_K = -\underline{F}_S$ (Reaktionskraft zur Stützkraft)
  - $\underline{F}_P = -\underline{F}_A$ (Reaktionskraft zur Druckkraft)
- **Umstellung nach gesuchter Kraft:** $\underline{F}_U = -\underline{F}_K - \underline{F}_P - \underline{F}_G \, \underline{F}_U = \underline{F}_S + \underline{F}_A - \underline{F}_G$
- **Gewichtskraft der Umlenkschaufel:** $\underline{F}_G = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix}$
- **Einsetzen der bekannten Ausdrücke:**
  $\underline{F}_U = \rho h_1^2 v_1^2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \rho h_1 h_3 v_1^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \rho h_1 \frac{h_2}{3} v_{2,max}^2 \begin{pmatrix} -\cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ mg \end{pmatrix}$

AUFGABE 3G)

Bestimmen Sie den Umlenkwinkel α, sodass $F_{U,y} = 2mg$ gilt.

- **Gegebene Bedingung:**
  - Die y-Komponente der Befestigungskraft soll: $F_{U,y} = 2mg$
- **y-Komponente von $\underline{F}_U$ aus Aufgabe f):**
  - Aus der vorherigen Lösung:

$$F_{U,y} = \rho h_1 \frac{h_2}{3} v_{2,max}^2 \sin\alpha + mg$$

- **Gleichsetzen mit der Bedingung:**

$$F_{U,y} \overset{!}{=} 2mg$$

$$2mg = \rho h_1 \frac{h_2}{3} v_{2,max}^2 \sin\alpha + mg$$

- **Umformen zur Bestimmung von** $\sin\alpha$**:**

$$2mg - mg = \rho h_1 \frac{h_2}{3} v_2^2 \ldots \sin\alpha$$

AUFGABE 3G)

Bestimmen Sie den Umlenkwinkel α, sodass $F_{U,y} = 2mg$ gilt.

- **Auflösung nach** $\sin\alpha$**:**

$$\sin\alpha = \frac{mg}{\rho h_1 \frac{h_2}{3} v_{2,max}^2} = \frac{3mg}{\rho h_1 h_2 v_{2,max}^2}$$

- **Bestimmung des Winkels:**

$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{3mg}{\rho h_1 h_2 v_{2,max}^2}\right)$$

AUFGABE 4

AUFGABE 4A)

Geben Sie die entsprechend vereinfachte Impulsgleichung in y-Richtung an.

- **Ausgangspunkt - Vollständige Impulsgleichung in y-Richtung:**

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u v)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v v)}{\partial y} = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

- **Vereinfachung - Stationäre Strömung:**
  - $\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} = 0$ (zeitunabhängig)
- **Vereinfachung - Voll ausgebildete Strömung:**
  - $\frac{\partial(\rho u v)}{\partial x} = 0$ (keine Änderung in Strömungsrichtung)
- **Vereinfachung - Laminar:**
  - $\frac{\partial(\rho v v)}{\partial y} = 0$ (keine Querströmung)
  - $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$ (kein Gradient in Strömungsrichtung)
- **Vereinfachung - Vernachlässigung der Schwerkraft:**
  - $\rho g_y = 0$ (gegeben)
- **Vereinfachte Impulsgleichung:**

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

AUFGABE 4B)

Geben Sie die Randbedingung für die Spaltwände an.

- Haftbedingung:
  - Flüssigkeit haftet vollständig an den festen Wänden
  - Geschwindigkeit an der Wand entspricht der Wandgeschwindigkeit
- Spaltwände sind fixiert: Wandgeschwindigkeit ist null
- Randbedingungen:
  - An der oberen Spaltwand: $v(x = h) = 0$
  - An der unteren Spaltwand: $v(x = -h) = 0$
- Physikalische Bedeutung:
  - Maximum der Geschwindigkeit in der Spaltmitte
  - Symmetrisches Geschwindigkeitsprofil

AUFGABE 4C)

Bestimmen Sie die Geschwindigkeitsverteilung $v(x)$ in Abhängigkeit von x, h, μ und dem unbekannten Druckgradient $\frac{\partial p}{\partial y}$.

- **Ausgangspunkt - Vereinfachte Impulsgleichung:**

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

- **Umstellung für Integration:**

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial y}$$

- **Erste Integration:**

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial y}x + C_1$$

- **Zweite Integration:**

AUFGABE 4C)

Bestimmen Sie die Geschwindigkeitsverteilung $v(x)$ in Abhängigkeit von x, h, μ und dem unbekannten Druckgradient $\frac{\partial p}{\partial y}$.

$$v(x) = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial y}x^2 + C_1 x + C_2$$

- **Bestimmung von C_1:**
  - $v(x=-h) = 0 = v(x=+h)$
  - Umstellen der beiden Gleichungen: $2C_1 h = 0$
  - => $C_1 = 0$
- **Bestimmung von C_2:**
  - Einsetzen von $C_1 = 0$ in eine Randbedingung:
  - $C_2 = -\frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial y}h^2$
- **Geschwidigkeitsverteilung:**

$$v(x) = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial y}(x^2 - h^2)$$

AUFGABE 4D)

Skizzieren Sie die Geschwindigkeits- und Schubspannungsverteilung. Geben Sie die charakteristischen Werte an.

- **Schubspannungsverteilung ableiten:**
  - Aus dem Newton'schen Reibungsgesetz: $\tau = \mu \frac{\partial v}{\partial x}$
  - Mit $v(x) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial y} (x^2 - h^2)$
- **Ableitung der Geschwindigkeit:**

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \cdot 2x = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y} x$$

- **Schubspannungsverteilung:**

$$\tau(x) = \mu \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} x$$

AUFGABE 4D)

- **Charakteristische Werte der Schubspannung:**
  - An der oberen Wand: $\tau(h) = \frac{\partial p}{\partial y} h$
  - An der unteren Wand: $\tau(-h) = -\frac{\partial p}{\partial y} h$
  - In der Spaltmitte: $\tau(0) = 0$
- **Charakteristische Werte der Geschwindigkeit:**
  - An den Wänden: $v(\pm h) = 0$
  - Maximum in der Spaltmitte: $v(0) = -\frac{h^2}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial y}$
- **Verlauf der Profile:**
  - **Geschwindigkeit:** Parabolisches Profil mit Maximum in der Mitte
  - **Schubspannung:** Lineares Profil, null in der Mitte, Maximum an den Wänden
  - Die Schubspannung wechselt das Vorzeichen (obere/untere Wand)

AUFGABE 4E)

Berechnen Sie den Druckgradienten $\frac{\partial p}{\partial y}$ und den sich einstellenden Volumenstrom, damit die Platten in derselben Position bleiben.

- **Neue Geschwindigkeitsverteilung mit Schwerkraft:**

$$v(x) = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g\right)(x^2 - h^2)$$

- **Schubspannungsverteilung ableiten:**

$$\tau(x) = \mu \frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g\right) x$$

- **Reibungskräfte auf die Platten:**
  - Rechte Platte (x = h): $F_{\tau,r} = \tau(h) \cdot 2ab \cdot (-1) = -2abh\left(\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g\right)$
  - Linke Platte (x = -h): $F_{\tau,l} = \tau(-h) \cdot 2ab \cdot (1) = -2abh\left(\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g\right)$
- **Kräftegleichgewicht für beide Platten:**
  - Gesamte Reibungskraft: $F_{\tau,r} + F_{\tau,l} = -4abh\left(\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g\right)$
  - Gewichtskraft beider Platten: $-2mg$

AUFGABE 4E)

- **Gleichgewichtsbedingung:**

$$-4abh\left(\frac{\partial p}{\partial y}-\rho g\right)=-2mg$$

- **Auflösung nach Druckgradient:**

$$\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{2mg}{4abh}+\rho g=\frac{mg}{2abh}+\rho g$$

- **Geschwindigkeitsverteilung einsetzen:**

$$v(x)=\frac{1}{2\mu}\left(\frac{mg}{2abh}+\rho g-\rho g\right)(x^2-h^2)=\frac{mg}{4\mu abh}(x^2-h^2)$$

- **Volumenstrom berechnen:**

$$Q=b\int_{-h}^{+h}v(x)\,dx=b\int_{-h}^{+h}\frac{mg}{4\mu abh}(x^2-h^2)\,dx$$

- **Integration durchführen:**

AUFGABE 4E)

$$Q = b\frac{mg}{4\mu abh}\left(\frac{2h^3}{3} - 2h^3\right)$$

Finaler Volumenstrom:

$$Q = -\frac{mgh^2}{3\mu a}$$