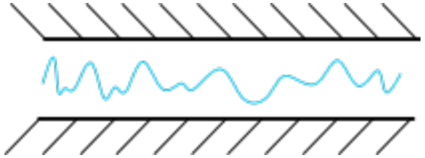
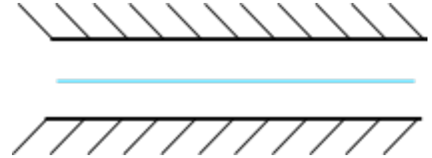
VORTRAGSÜBUNG TECHNISCHE STRÖMUNGSLEHRE

Tobias Rentschler

DIFFERENTIALGLEICHUNG IM SPALT

VORBEMERKUNGEN ZU DGL IM SPALT

Spaltströmungen:

- Turbulent:
  - 
  - Bewegungen quer zur Hauptströmung
- Laminar:
  - 
  - Keine Bewegungen quer zur Hauptströmung

- Voll ausgebildet: Keine Änderung der Strömung in Strömungsrichtung
- 2D - Strömung

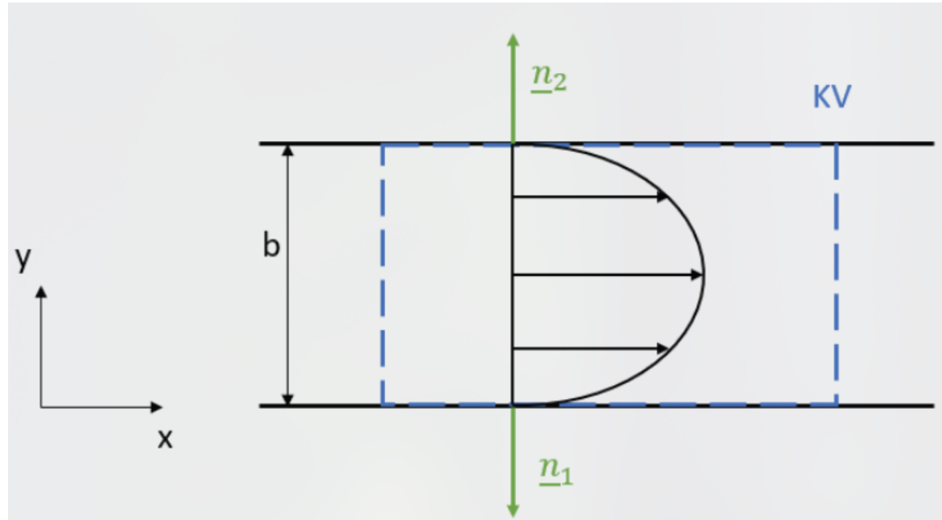
- Viskosität: Zähigkeit eines Fluids
  - dynamische Viskosität: $\mu \left[\frac{kg}{ms}\right]$
  - kinematische Viskosität: $\upsilon \left[\frac{m^2}{s}\right]$
  - $\mu = \rho \cdot \upsilon$
- Newton'sches Fluid: linear viskoses Fließverhalten: $\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$

VORBEMERKUNGEN ZU DGL IM SPALT

DGL einer stationären, inkompressiblen 2D-Spaltströmung

- Massenbilanz: $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$
- Impulsbilanz:
  - x-Richtung: $\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$
  - y-Richtung: $\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$
- Laminar: $v = 0 => \frac{\partial v}{\partial y} = 0 => \frac{\partial u}{\partial x} = 0$
- Folgende Terme der Impulsgleichung werden auf Grund der Annahmen zu Null:
  - $\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \qquad \text{stationär}$
  - $u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad \text{voll ausgebildet}$
  - $v \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad \text{laminar und voll ausgebildet}$
  - $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad \text{voll ausgebildet}$

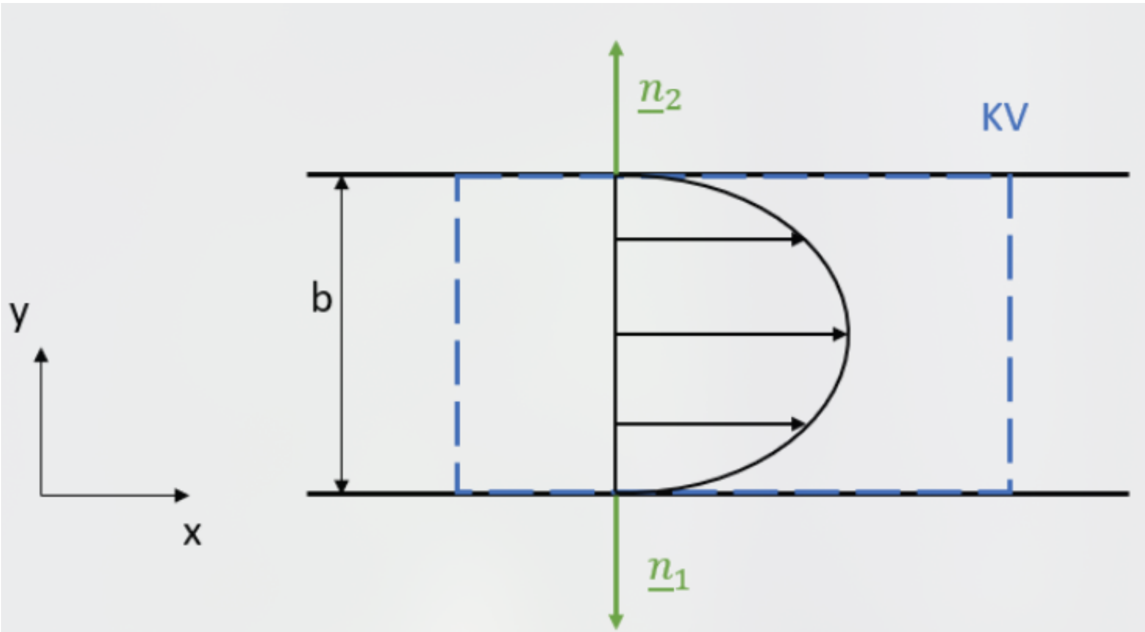
VORBEMERKUNGEN ZU DGL IM SPALT

- Hydrostatische Druckverteilung
- 

- x- Richtung: $-\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$
- y- Richtung: $\rho g_y = \frac{dp}{dy}$

BEIBLATT DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Bestimmung des Vorzeichens der aus der Schubspannung resultierenden Kraft vom Körper auf das Fluid



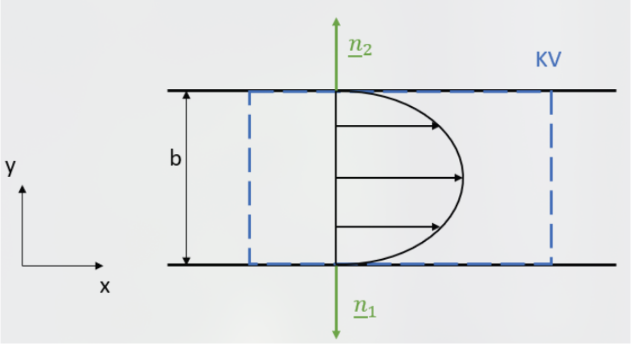
- Annahmen:
  - Die Strömung ist stationär, laminar und voll ausgebildet.
- Möglichkeit 1: Bestimmung des Vorzeichens aus der Anschauung:
  - Das Fluid wird an den Stellen $y = 0$ und $y = b$ abgebremst.
  - => Es muss eine Kraft auf das Fluid in negativer Richtung wirken.

BEIBLATT DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Bestimmung des Vorzeichens der aus der Schubspannung resultierenden Kraft vom Körper auf das Fluid

Möglichkeit 2: Bestimmung des Vorzeichens rechnerisch über $F_{S,\tau}$

- $F_{S,\tau} = \int_S \tau \cdot dS = \int_S \tau \cdot n \, dS = \int_S \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix} dS$
- $= \int_S \begin{pmatrix} \tau_{xx} n_x + \tau_{xy} n_y \\ \tau_{yx} n_x + \tau_{yy} n_y \end{pmatrix} dS$
    - mit $n_x = 0$:
- $F_{S,\tau} = \int_S \begin{pmatrix} \tau_{xy} n_y \\ \tau_{yy} n_y \end{pmatrix} dS = \int_S \begin{pmatrix} \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) n_y \\ 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} n_y \end{pmatrix} dS$
    - mit $v = 0$ (laminar, voll ausgebildet):
- $F_{S,\tau} = \int_S \begin{pmatrix} \mu \frac{\partial u}{\partial y} n_y \\ 0 \end{pmatrix} dS$



AUFGABE 16 A) (BASISWISSEN)

gesucht: $\frac{\partial p}{\partial x}$ damit $Q = 0$

$Q = \int_A u_A dA = t \int u(y) dy = 1 \int_0^b u(y) dy$

Herleitung $u(y)$ auf Massen-& Impuslsnilanz für stationäre, imkompressible, laminare Strömung:

- $-\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 => \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{x}$
- $\int \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{x} \right) dy = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y + c_1$
- $\int \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y + c_1 \right) dy = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{x} y^2 + c_1 y + c_2$

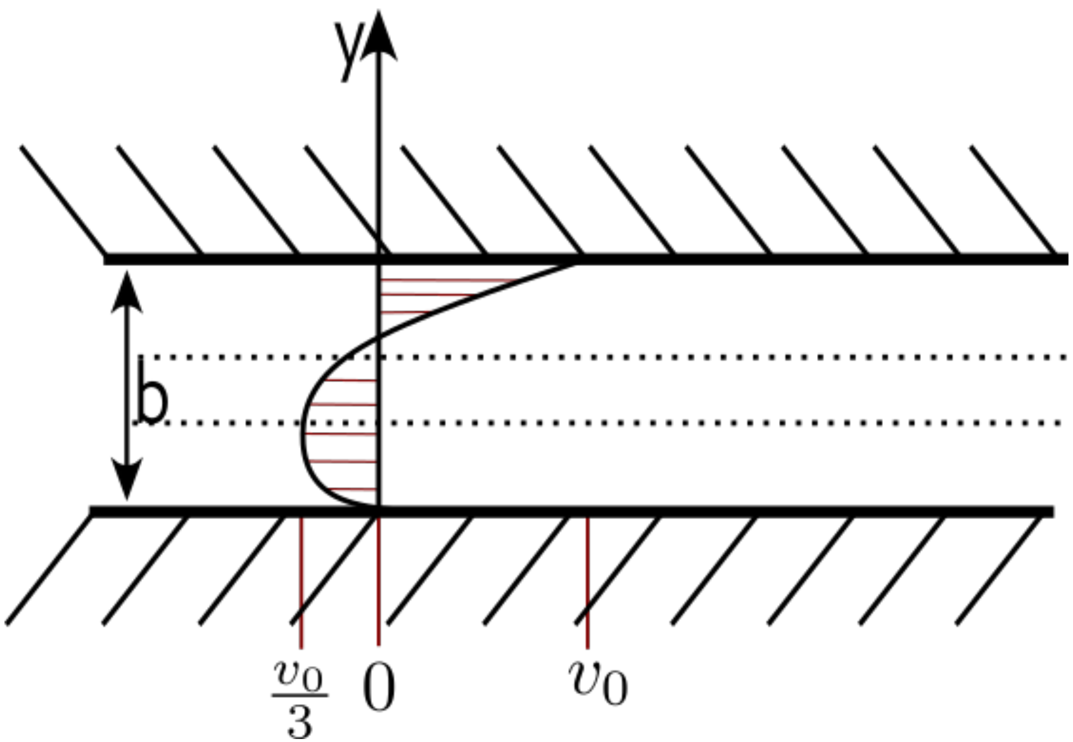
Randbedingungen zur bestimmung der Integrationskonstanten c_1 & c_2:

- $u(0) = 0$
- $u(b) = v_0$
  - => $c_2 = 0$
  - => $c_1 = \frac{v_0}{b} - \frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x} b$
- $u(y) = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\left(y^2 - by\right) + \frac{v_0}{b} y$

AUFABE 16 A) (BASISWISSEN)

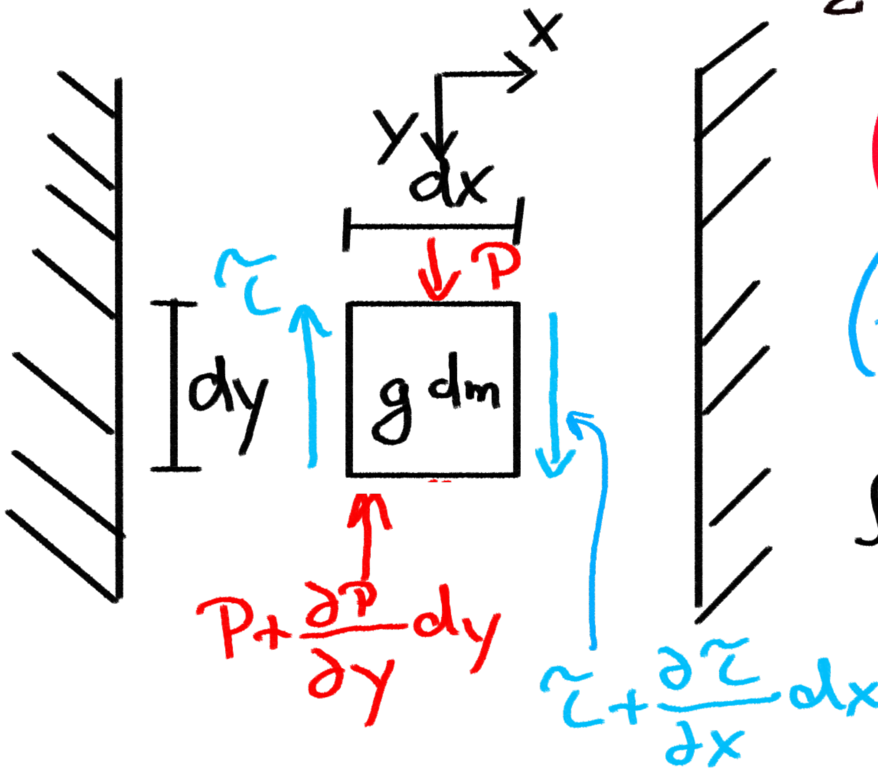
- $Q = 0$
- $u(y) = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\left(y^2 - by\right) + \frac{v_0}{b}y$
- $\int_0^b u(y)dy = \left[\frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\left(\frac{y^3}{3} - b\frac{y^2}{2}\right) + \frac{v_0}{2b}y^2\right]_0^b = \frac{v_0}{2}b - \frac{1}{12\mu}\frac{\partial p}{\partial x}b^3$
- Auflösen nach $\frac{\partial p}{\partial x}$:
    - => $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{6\mu v_0}{b^2}$
    - mit $v_0 = 0.12\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ und $\mu = 1.5\mathrm{Pa}\cdot\mathrm{s}$
    - => $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{6\mu v_0}{b^2} = 30000\left[\frac{Pa}{m}\right]$

AUFGABE 16 B) (BASISWISSEN)

- gesucht: $u(y), \tau(y)$ => Kurvendiskussion
- $\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial x}\left(y - \frac{b}{2}\right) + \mu \frac{v_0}{b}$
- Extremwerte von $u(y)$ bei $\tau(y) = 0$
- $\frac{\partial p}{\partial x}\left(y^* - \frac{b}{2}\right) + \mu \frac{v_0}{b} = 0$
  - $=> y^* = \frac{b}{3}$
  - $u(y^*) = -\frac{v_0}{3}$
- 

AUFGABE 17 A)

- Bestimmung von $\tau(x)$ und $v(x)$:



$$\Sigma F_y = 0$$

$$\left(p - \left(p + \frac{\partial p}{\partial y} dy\right)\right) dx\, dz +$$

$$\left(-\tau + \tau + \frac{\partial \tau}{\partial x} dx\right) dy\, dz +$$

$$\rho g\, dx\, dx\, dz = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial x} + \rho g = 0$$

AUFGABE 17 A)

- Bestimmung von $\tau(x)$ und $v(x)$:
- $\int \frac{\partial\tau}{\partial x}dx => \tau(x) = \frac{\partial p}{\partial y}x - \rho g x + c_1$
- $\frac{1}{\mu}\int \tau dx => v(x) = \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial y}\frac{x^2}{2} - \frac{1}{\mu}\rho g\frac{x^2}{2} + \frac{c_1 x}{\mu} + c_2$
- mit $v(a) = -v_0, v(-a) = 2v_0$
- $\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial y}\frac{a^2}{2} - \frac{1}{\mu}\rho g\frac{a^2}{2} + \frac{c_1 a}{\mu} + c_2 = -v_0$
- $\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial y}\frac{a^2}{2} - \frac{1}{\mu}\rho g\frac{a^2}{2} - \frac{c_1 a}{\mu} + c_2 = 2v_0$
    - => $c_1 = -\frac{3v_0\mu}{2a}$
    - => $c_2 = \frac{v_0}{2} - \frac{a^2}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g\right)$
- $v(x) = \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial y}\cdot\frac{x^2}{2} - \rho g\cdot\frac{x^2}{2} + \frac{x}{\mu}\cdot\frac{-3v_0}{2a} + \frac{v_0}{2} - \frac{a^2}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g\right)$
- $\tau(x) = \frac{\partial p}{\partial y}x - \rho g x - \frac{3v_0 M}{2a}$

AUFGABE 17 B)

- ges: $v(0)$ wenn $\tau\left(\frac{a}{-2}\right)$ & Verläufe $u(x), \tau(x)$
- $v(0) = \frac{v_0}{2} - \frac{a^2}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g\right)$
- Bestimmung $\frac{\partial p}{\partial y}$ aus $\tau\left(\frac{a}{-2}\right) = 0:$
- $\tau\left(\frac{a}{-2}\right) = \frac{\partial p}{\partial y} \cdot \frac{a}{-2} + \rho g \frac{a}{-2} - \frac{3v_0 M}{2a} = 0$
  - $\frac{\partial p}{\partial y} = \rho g - \frac{3v_0 M}{a^2}$
- $v(0) = \frac{v_0}{2} - \frac{a^2}{2\mu}\left(\rho g - \frac{3v_0 M}{a^2} - \rho g\right) = \frac{v_0}{2} + \frac{3v_0}{2} = 2v_0$

AUFGABE 18 A)

- geg: $u(\frac{\partial P}{\partial x}), \tau(\frac{\partial P}{\partial x})$

Partielle Ableitungen - $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial P}{\partial x} \quad \int y$

- $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial P}{\partial x} y + C_1 \quad \int y$
- $u = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial P}{\partial x} y^2 + C_1 y + C_2$
  - oben: $u_B = \frac{1}{2\mu_B}\frac{\partial P}{\partial x} y^2 + C_1 y + C_2$
- $\tau_B = \frac{\partial P}{\partial x} y + \mu_B C_1$
  - unten: $u_A = \frac{1}{2\mu_A}\frac{\partial P}{\partial x} y^2 + C_3 y + C_4$
- $\tau_A = \frac{\partial P}{\partial x} y + \mu_A C_3$
- 4 Unbekannte => 4 Randbedingungen
  - $u_B(b) = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{2\mu_B}\frac{\partial P}{\partial x} b^2 + \frac{\mu_A C_3}{\mu_B} b + C_2 = 0 \quad (1)$
  - $u_A(-b) = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{2\mu_A}\frac{\partial P}{\partial x} b^2 + C_3(-b) + C_2 = 0 \quad (2)$
  - $u_B(0) = u_A(0) \quad \longrightarrow \quad C_2 = C_4 \quad (3)$
  - $\tau_B(0) = \tau_A(0) \quad \longrightarrow \quad \mu_B C_1 = \mu_A C_3 \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{\mu_A C_3}{\mu_B} \quad (4)$

AUFGABE 18 A)

- $(1) - (2):$
  - $$\frac{\partial P}{\partial x} b^2 \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu_B} - \frac{1}{\mu_A}\right) + bC_3\left(\frac{\mu_A}{\mu_B} + 1\right) = 0$$
    - => $C_3 = \frac{\partial P}{\partial x}\frac{b}{2}\frac{\mu_B - \mu_A}{(\mu_B + \mu_A)\mu_A}$
- in (4) einsetzen:
  - $$C_1 = \frac{\partial P}{\partial x}\frac{b}{2}\frac{\mu_B - \mu_A}{(\mu_B + \mu_A)\mu_B}$$
- in (2) einsetzen:
  - $$C_2 = -b^2 \frac{\partial P}{\partial x}\frac{1}{M_B + M_A} = C_4$$
- $\tau_{AB} = \frac{\partial p}{\partial x} y + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{b}{2}\frac{M_B - M_A}{M_B + M_A}$

AUFGABE 18 B)

- u_B, u_A, τ_{AB}
- $\tau_{AB} = \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) y + \frac{\partial P}{\partial x} \frac{b}{2} \frac{\mu_B - \mu_A}{\mu_B + \mu_A}$
- $\tau_{AB}(y^*) = 0$
- $\frac{\partial P}{\partial x} y^* + \frac{\partial P}{\partial x} \frac{b}{2} \frac{\mu_B - \mu_A}{\mu_B + \mu_A} = 0$
- $y^* = \frac{b}{2} \frac{\mu_A - \mu_B}{\mu_B + \mu_A} \rightarrow 0$ mit $\mu_A = \mu_B$