- letzte Woche Rohrhydraulik
- heute letzter Themenblock Differentialgleichung für laminare Strömung
- nächste Woche VÜ Rechnen ein Altklausur (2023 F) und evtl. was wir heute nicht schaffen

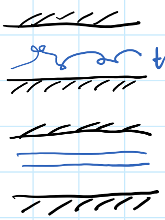
Vorbemerkungen zur DGL im Spalt

Skript Kapital 7 „Differentialgleichungen für ein Fluidelement"

Kapital 7.4 Reduktion auf stationäre Spaltströmung im homogenen Fluid ($\rho, \mu = \text{konst.}$)

turbulent kann nicht analytisch gelöst werden

Spaltströmung:



- laminar $\hat{=}$ keine Bewegung quer zur Hauptströmungsrichtungen
- 2D – Strömung (eben), meist sogar 1D

★ Viskosität: Zähigkeit eines Fluids

dynamische Viskosität: $\mu \left[\frac{kg}{ms}\right]$ $\quad > \mu = \nu\rho$

kinematische Viskosität: $\nu \left[\frac{m^2}{s}\right]$

Viskosität: Verformung eines Körpers/Fluids ist abhängig von wirkende Kraft $\quad \nu \uparrow \rightarrow$ aufzubringende Kraft $\uparrow$

z.B Bier vs. Honig: Bei Honig ist viel mehr Kraft nötig um in gleicher Zeit gleiche Fläche zu benetzen

★ Newton'sches Fluid: linear viskoses Fließverhalten

bei nicht newton'schen Fluiden $\mu = f(\frac{\partial u}{\partial y})$ z.B. Kunststoff

$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$ Schubspannung $\hat{=}$ 1. Ableitung normal zur Wand

DGL einer statistionären, inkompressiblen 2D – Spaltströmung

N-S vereifacht

Massenbilanz: $\frac{\partial u}{\partial x} + \cancel{\frac{\partial v}{\partial y}} = 0$ (7.62)

Impulsbilanz:

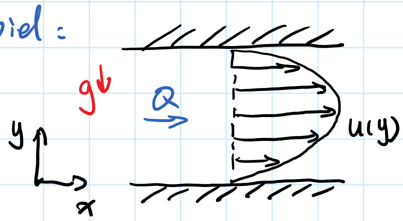
$$\rho\left(u\cancel{\frac{\partial u}{\partial x}} + v\cancel{\frac{\partial u}{\partial y}}\right) = \rho \cancel{g} - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\underbrace{\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}_{\text{Reibungskräfte}}\right)$$

Impulsbilanz:

x-Richtung: $\rho\left(u\cancel{\frac{\partial u}{\partial x}} + v\cancel{\frac{\partial u}{\partial y}}\right) = \cancel{\rho g_x} - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$ (7.64)

y-Richtung: $\rho\left(u\cancel{\frac{\partial v}{\partial x}} + v\cancel{\frac{\partial v}{\partial y}}\right) = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\cancel{\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}}\right)$

Beispiel:



$v = 0 \xrightarrow{(7.62)} \frac{\partial u}{\partial x} = 0$

x-Richtung: $-\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

y-Richtung: $\frac{dp}{dy} = \rho g_y \rightarrow$ Hydrostatische Druckverteilung

verändert die Verhältnisse in x-Richtung nicht!

$\Rightarrow$ Beiblatt

Aufgabe 16

a) ges: $\frac{\partial p}{\partial x}$ damit $Q \overset{!}{=} 0$

Bestimmung von Q:

$$Q = \int_A u(A)\, dA = t\int_0^b u(y)\, dy \overset{!}{=} 0 \qquad (1)$$

unbekannt

normal zu A

Geschwindigkeitsprofil nur abhängig von y-Koordinate

Herleitung u(y):

Aus Impulsbilanz in x-Richtung folgt: [vgl. Beispiel Vorbemerkung]

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \int y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\cdot y + C_1 \qquad \int y$$

$$u(y) = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}y^2 + C_1 y + C_2 \qquad (2)$$

Bestimmung der Integrationskonstanten C_1 und C_2 über Randwerte:

Haftbedingung

$u(y=0) = 0$ in (2) einsetzen: $C_2 = 0$

$u(y=b) = V_0$ in (2) einsetzen: $\frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}b^2 + C_1 b = V_0$

$$C_1 = \frac{V_0}{b} - \frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}b$$

Einsetzen der Konstanten in (2):

$$u(y) = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}(y^2 - by) + \frac{V_0}{b}y \qquad (3)$$

(5) in (1):

$$Q = t\int_0^b u(y)\,dy = t\left[\frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\left(\frac{y^3}{3}-\frac{by^2}{2}\right)+\frac{v_0}{b}\frac{y^2}{2}\right]_0^b$$

$$= t\left[\frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\left(\frac{b^3}{3}-\frac{b^3}{2}\right)+\frac{v_0}{b}\cdot\frac{b^2}{2}\right]$$

$$= t\left[\frac{\partial p}{\partial x}\cdot\frac{b^3}{-12\mu}+\frac{v_0 b}{2}\right] \overset{!}{=} 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{6\mu v_0}{b^2} = 30000\ \frac{Pa}{m}$$

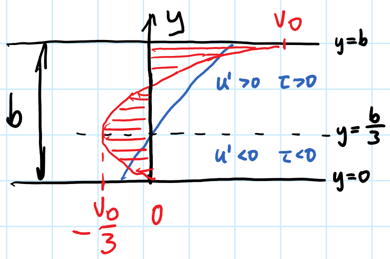
b) ges: $u(y)$ und $\tau(y)$

$$\tau = \mu\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial x}\left(y-\frac{b}{2}\right)+\frac{\mu v_0}{b}$$

Extremewerte von $u(y)$ bei $\tau(y)=0$:

$$\tau = \frac{\partial p}{\partial x}\left(y^*-\frac{b}{2}\right)+\frac{\mu v_0}{b} \overset{!}{=} 0 \implies y^* = \frac{b}{3}$$

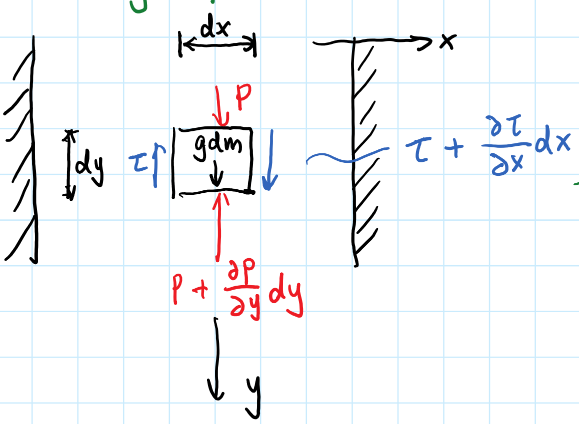
$$u(y^*) = -\frac{v_0}{3}$$



Aufgabe 17

a) ges: y-KGG, $\tau(x)$, $v(x)$

Betrachtung infinitesimales Fluidelement



vgl. Skript Bild 7.3

Taylorreihe, abgebrochen nach dem ersten Glied da infinitesmal kleines Fluidelement

$$\Sigma F_y = 0$$

$$\left(p-\left(p+\frac{\partial p}{\partial y}dy\right)\right)\underbrace{dx\,dz}_{A}+\left(-\tau+\tau+\frac{\partial \tau}{\partial x}dx\right)dy\,dz+\underbrace{g\rho\,dx\,dy\,dz}_{\rho dV}=0$$

$$-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial \tau}{\partial x}+\rho g = 0 \qquad (1)$$

Bestimmung von $\tau(x)$ und $v(x)$:

$$\int \frac{\partial \tau}{\partial x}\,dx: \quad \tau(x) = \frac{\partial p}{\partial y} x - \rho g x + C_1$$

$$\frac{1}{\mu}\int \tau\,dx: \quad v(x) = \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial y}\frac{x^2}{2} - \frac{1}{\mu}\rho g \frac{x^2}{2} + \frac{C_1}{\mu}x + C_2$$

mit $v(a) = -v_0$, $v(-a) = 2v_0$

$$\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g\right)\frac{a^2}{2} + \frac{C_1}{\mu}a + C_2 = -v_0$$

$$\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g\right)\frac{a^2}{2} - \frac{C_1}{\mu}a + C_2 = 2v_0$$

$$\Rightarrow \quad C_1 = \frac{-3v_0\mu}{2a}, \qquad C_2 = \frac{v_0}{2} - \frac{a^2}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g\right)$$

$$v(x) = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g\right)\frac{x^2}{2} - \frac{3v_0}{2a}x + \frac{v_0}{2} - \frac{a^2}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g\right)$$

$$\tau(x) = \left(\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g\right)x - \frac{3v_0\mu}{2a}$$

b) ges: $v(0)$ wenn $\tau(-\frac{a}{2}) = 0$ und Verläufe $v(x)$, $\tau(x)$

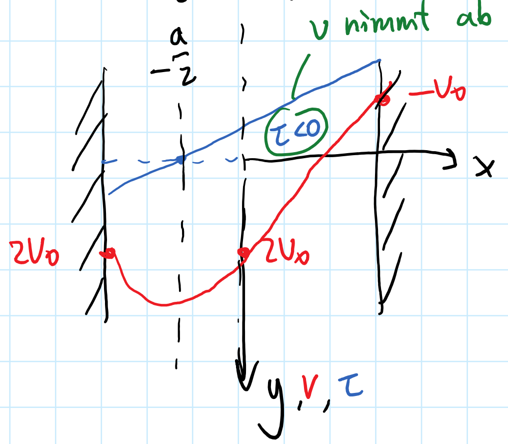
$$v(0) = \frac{v_0}{2} - \frac{a^2}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g\right)$$

unbekannt

Bestimmung $\frac{\partial p}{\partial y}$ aus $\tau(-\frac{a}{2}) = 0$:

$$-\frac{\partial p}{\partial y}\frac{a}{2} + \frac{\rho g a}{2} - \frac{3v_0\mu}{2a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho g - \frac{3v_0\mu}{a^2}$$

$$v(0) = \frac{v_0}{2} - \frac{a^2}{2\mu}\rho g + \frac{3}{2}v_0 + \frac{a^2}{2\mu}\rho g = 2v_0$$



Aufgabe 18

a) ges: $u(\frac{\partial p}{\partial x})$, $\tau(\frac{\partial p}{\partial x})$

→ nur x-Richtung betrachten. Vereinfachung entsprechend Vorbereitung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x} \qquad \int y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x} y + c_1 \qquad \int y$$

$$u = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x} y^2 + c_1 y + c_2$$

Aufteilung in oben (b) und unten (a) aufgrund unterschiedliche Fluid (μ_A / μ_B)

Oben: $u_B = \frac{1}{2\mu_B}\frac{\partial p}{\partial x} y^2 + c_1 y + c_2$

$\tau_B(y) = \frac{\partial p}{\partial x} y + \mu_B c_1$

Unten: $u_A = \frac{1}{2\mu_A}\frac{\partial p}{\partial x} y^2 + c_3 y + c_4$

$\tau_A(y) = \frac{\partial p}{\partial x} y + \mu_A c_3$

muss am Ende eine Funktion ergeben

4 Unbekannte → 4 Randbedingungen !

$u_B(b) = 0 \rightsquigarrow \frac{1}{2\mu_B}\frac{\partial p}{\partial x} b^2 + \frac{\mu_A c_3}{\mu_B} b + c_2 = 0$ ①

$u_A(-b) = 0 \rightsquigarrow \frac{1}{2\mu_A}\frac{\partial p}{\partial x} b^2 - c_3 b + c_2 = 0$ ②

$u_B(0) = u_A(0) \rightsquigarrow c_2 = c_4$

$\tau_B(0) = \tau_A(0) \rightsquigarrow c_1 = \frac{\mu_A c_3}{\mu_B}$

①−②: $\frac{\partial p}{\partial x}\frac{b^{\cancel{2}}}{2}\left(\frac{1}{\mu_B} - \frac{1}{\mu_A}\right) + \left(\frac{\mu_A \cancel{b}}{\mu_B} + \cancel{b}\right) c_3 = 0$

$$c_3 = -\frac{\partial p}{\partial x}\frac{b}{2}\left(\frac{1}{\mu_B} - \frac{1}{\mu_A}\right) \cdot \frac{1}{\frac{\mu_A}{\mu_B} + 1}$$

$$= \frac{\partial p}{\partial x}\frac{b}{2}\frac{\mu_B - \mu_A}{(\mu_A + \mu_B)\mu_A}$$

$$c_1 = \frac{\mu_A}{\mu_B} c_3 = \frac{\partial p}{\partial x}\frac{b}{2}\frac{\mu_B - \mu_A}{(\mu_A + \mu_B)\mu_B}$$

c_1 in ② einsetzen: $\frac{1}{2\mu_A}\frac{\partial p}{\partial x} b^2 - \frac{\partial p}{\partial x}\frac{b^2}{2}\frac{1}{\mu_A}\left(\frac{\mu_B - \mu_A}{\mu_A + \mu_B}\right) + c_2 = 0$

$$c_2 = \frac{b^2}{2\mu_A}\frac{\partial p}{\partial x}\left(\frac{\mu_B - \mu_A}{\mu_B + \mu_A} - 1\right) = \frac{b^2}{\cancel{2\mu_A}}\frac{\partial p}{\partial x}\frac{-\cancel{2\mu_A}}{\mu_B + \mu_A} = -b^2\frac{\partial p}{\partial x}\frac{1}{\mu_B + \mu_A}$$

$$2\mu_A \quad \partial x \qquad \mu_B+\mu_A \qquad = \quad 2\mu_A \quad \partial x \quad \mu_B+\mu_A \qquad \mu_B+\mu_A$$

$$u_B(y) = \frac{1}{2\mu_B}\frac{\partial p}{\partial x}\left(y^2 + b\,\frac{\mu_B-\mu_A}{\mu_B+\mu_A}\,y\right) - b^2\frac{\partial p}{\partial x}\frac{1}{\mu_B+\mu_A}$$

$$u_A(y) = \frac{1}{2\mu_A}\frac{\partial p}{\partial x}\left(y^2 + b\,\frac{\mu_B-\mu_A}{\mu_B+\mu_A}\,y\right) - b^2\frac{\partial p}{\partial x}\frac{1}{\mu_B+\mu_A}$$

$$\tau_{AB} = \frac{\partial p}{\partial x}\,y + \frac{\partial p}{\partial x}\,\frac{b}{2}\,\frac{\mu_B-\mu_A}{\mu_B+\mu_A}$$

b) Verlauf $u(y)$, $\tau(y)$

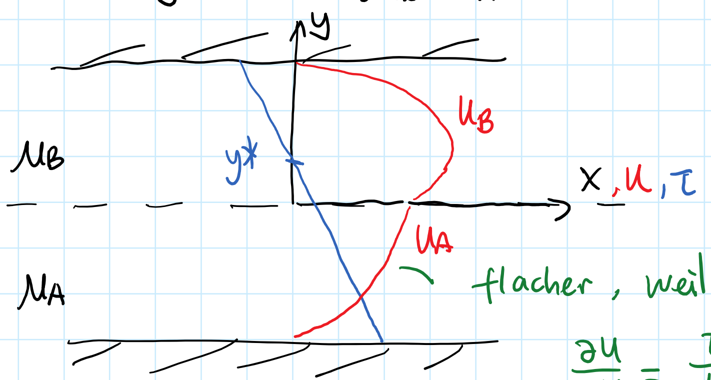
Qualitativ $\longrightarrow$ alles bekannt außer Position y^*

für u_{max}, abschätzen: oben oder unten?

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \longrightarrow \tau = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}\,y^* + \frac{\partial p}{\partial x}\,\frac{b}{2}\,\frac{\mu_B-\mu_A}{\mu_B+\mu_A} = 0$$

$$y^* = \frac{b}{2}\,\frac{\mu_A-\mu_B}{\mu_B+\mu_A} > 0 \quad \text{mit } \mu_A > \mu_B$$



flacher, weil Viskosität größer

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\tau}{\mu}$$

Zusammenfassung:

- Bestimmung Geschwindigkeits- und Schubspannungsverteilung über DGL oder Kraftgleichgewicht am Fluidelement

- Nächste Vortragsübung wird über Webex durchgeführt
  Aufgaben von Klausur 2023 F