全国硕士研究生招生考试数学试题 精选

数学 （二）

今人不见古时月　今月曾经照古人

作者：Renye Zhang
时间：September 12, 2024
邮箱: renyezhang2016@163.com

版本: 1.0

目　录

第 1 章 1989 年数学（二）真题精选

1.1 Q1：导数定义辨析

设 $f(x)$ 在点 $x=a$ 的某个领域内有定义，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导的一个充分条件是（ ）.

(A) $\lim\limits_{h\to+\infty} h\left[f\left(a+\dfrac{1}{h}\right)-f(a)\right]$ 存在.

(B) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$ 存在.

(C) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ 存在.

(D) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a)-f(a-h)}{h}$ 存在.

答案：

D

分析 1.1

本题不算难题，但一眼看去四个选项高度相似，对导数定义掌握不清则极易混淆。要解出此题需牢牢紧扣住导数的原始定义，不要被选项的相似形式所迷惑

方法：

由充分条件可知，本题需要根据选项内容推导出“$f(x)$ 在 $x=a$ 处可导”的结论。根据导数定义，$f(x)$ 在 $x=a$ 处可导可表示为：

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} \tag{1.1}$$

过程 1.1

在作答此题时，需将所有选项严格化为如式 (1.1) 所示的形式才能判断导数是否存在，不能望文生义。

对于选项 A

写成分子分母形式：

$$\lim_{h\to+\infty}\frac{\left[f\left(a+\frac{1}{h}\right)-f(a)\right]}{\frac{1}{h}} \tag{1.2}$$

为便于观察，作代换 $t=\dfrac{1}{h}$：

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{[f(a+t)-f(a)]}{t} \tag{1.3}$$

对比式 (1.1) 与式 (1.3) 可知，需要 $t \to 0$ 时极限存在才能满足导数存在的定义，而式 (1.3) 仅有 $t \to 0^+$ 时极限存在，也就是只有右导数存在，而无法证明导数存在.

对于选项 B

观察式 (1.1)可知，极限式的分母仅允许变量出现一次，即 $f(a+\Delta x)$，而选项 B 的分子中同时含有 $f(a+2h)$ 与 $f(a+h)$ 两项，故不能直接使用导数定义式，需要进行改写：

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)+f(a)-f(a+h)}{h} \tag{1.4}$$

将式 (1.4) 按照导数定义形式拆成 $A+B$ 的形式：

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(a)-f(a+h)}{h} \tag{1.5}$$

无论是 A 存在还是 B 存在，都可以推导至符合导数定义，从而证明可导。然而，选项只能证明 $A+B$ 存在，根据极限运算法则可知，这既不能证明 A 存在，也不能证明 B 存在，故本选项实际上无法证得.

过程 1.2

对 A 而言，构造 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a)}{2h}$ 即可完全符合导数定义，而 A 与前者仅仅相差一个大小为 $\dfrac{1}{2}$ 的系数而已，故只要 A 存在，前者必然也存在.

对 B 而言，有式 (1.6) 成立：

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a)-f(a+h)}{h}=-\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \tag{1.6}$$

与 A 同理，B 仅与标准导数形式相差一个大小为 -1 的系数，只要 B 存在，前者必然存在. ♡

对于选项 C

与选项 B同理，将选项中的式子拆分成导数定义形式：

$$\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f(a)-f(a-h)}{h} \tag{1.7}$$

同理，无法得证。

对于选项 D

式子中的分子符合导数定义的要求，只有 $f(a-h)$ 一处含有变量的项，故无需拆分，只需作简单变换化成导数定义形式即可.

令 $t=-h$，$h\to 0$ 转化为 $t\to 0$：

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a)-f(a-h)}{h}=\lim_{t\to 0}\frac{f(a)-f(a+t)}{-t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(a+t)-f(a)}{t} \tag{1.8}$$

由式 (1.8) 可知，选项可完全转化为导数定义形式，故为正确答案.

第 2 章 1992 年数学（二）真题精选

2.1 Q1：多元函数的一元证明法

已知 $f''(x)<0, f(0)=0$，证明对任何 $x_1>0, x_2>0$，有 $f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$.

分析 2.1

面对多元函数时，也可以简化为熟悉的一元函数进行分析. ♠

方法：

常规做法移项，本题需证明：

$$f(x_1+x_2)-f(x_1)-f(x_2)<0 \tag{2.1}$$

过程 2.1: 简化变量

面临 x_1 与 x_2 两个变量，但是都给出了实际取值范围，可把其中一个视作变量，另一个视作常量，转化为一元函数求解. ♡

设函数 $F(x)$:

$$F(x)=f(x+x_2)-f(x)-f(x_2) \tag{2.2}$$

对 $F(x)$ 求导得（x 为求导变量，x_2 视为常量，不参与求导）:

$$F'(x)=f'(x+x_2)-f'(x) \tag{2.3}$$

由 $f''(x)<0$ 可知 $f'(x)$ 单调递减，而 $x_2>0$，故 $x+x_2>x$ 恒成立，所以有 $F'(x)<0$，即 $F(x)$ 单调递减. 因此可知：

$$F(x_2)<F(0)=f(0+x_2)-f(0)-f(x_2). \tag{2.4}$$

由题给条件 $f(0)=0$，易证得最后结果.

第 3 章 1993 年数学（二）真题精选

3.1 Q1：与根式负数除法有关的极限

求 $\lim\limits_{x\to-\infty} x(\sqrt{x^2+100}+x)$.

分析 3.1: 此

本身属于简单题，但涉及到根式与负数的除法，极易出错. ♠

方法：

首先进行有理化：

$$\begin{aligned} x(\sqrt{x^2+100}+x) &= x\frac{(\sqrt{x^2+100}+x)(\sqrt{x^2+100}-x)}{\sqrt{x^2+100}-x} \\ &= \frac{100x}{\sqrt{x^2+100}-x} \end{aligned} \tag{3.1}$$

将 x 除下：

$$\begin{aligned} x(\sqrt{x^2+100}+x) &= \frac{100x}{\sqrt{x^2+100}-x} \\ &= \frac{100}{\frac{\sqrt{x^2+100}}{x}-1} \\ &= \frac{100}{-\sqrt{1+\frac{100}{x^2}}-1} \end{aligned} \tag{3.2}$$

过程 3.1

本题关键在于 $\dfrac{\sqrt{x^2+100}}{x}$ 到 $-\sqrt{1+\frac{100}{x^2}}$ 的转化。式 (3.2)容易错写成如下形式：

$$\frac{100}{\frac{\sqrt{x^2+100}}{x}-1} = \frac{100}{\frac{\sqrt{x^2+100}}{\sqrt{x^2}}-1} = \frac{100}{\sqrt{1+\frac{100}{x^2}}-1}. \tag{3.3}$$

下面从两方面进行解释. 首先 $\sqrt{x^2}=x$ 这个结论式是错误的，应该为 $\sqrt{x^2}=|x|$，前者只在 $x>0$ 时成立. 而在本题中 $x\to-\infty$ ，所以有 $x=-|x|$，因此转换如下所示：

$$\frac{\sqrt{x^2+100}}{x}-1 = \frac{\sqrt{x^2+100}}{-|x|}-1 = \frac{\sqrt{x^2+100}}{-\sqrt{x^2}}-1 = -\sqrt{1+\frac{100}{x^2}}-1. \tag{3.4}$$

另一方面，可从根式性质和负数运算法则考虑。对于 $\dfrac{\sqrt{x^2+100}}{x}$，是根式

$\sqrt{x^2+100}$ 除以负数 x. 根号内的式子是必须恒大于等于 0 的，因此不可能把 x 直接塞到根号里面进行运算, 只能把 $-x$ 塞进去，再在根号外部添符号，以保持符号一致性，可写作：

$$\frac{\sqrt{x^2+100}}{x}-1=-\frac{\sqrt{x^2+100}}{-x}-1=-\frac{\sqrt{x^2+100}}{\sqrt{x^2}}-1=-\sqrt{1+\frac{100}{x^2}}-1. \tag{3.5}$$

无论怎样考虑，涉及负数的乘除运算一定要仔细，与根式结合时更是如此. ♡

第 4 章 1995 年数学（二）真题精选

4.1 Q1：定积分与夹逼定理结合

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)$.

答案：

$1/2$.

分析 4.1

本题容易联想到使用定积分求解，但构造定积分形式存在一定难度. 此外，本题亦可直接使用夹逼定理求解.

可将要求极限的式子简写成

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2+n+i} \tag{4.1}$$

方法一： 构造定积分形式

要构造出定积分的 $\frac{i}{n}$ 形式，自然会上下同时除以 n.

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\frac{i}{n}}{n+1+\frac{i}{n}} \tag{4.2}$$

而对定积分而言，还需构造出一个“$\frac{1}{n}$”形式的式子，而原式的分母则把 $n+1$ 与 $\frac{i}{n}$ 堆在了一起，分离起来有一定难度，本题关键点也在于此处. 对于这种较难处理的分离，考虑使用夹逼定理对原式进行放缩.

过程 4.1: 放缩要点

放缩的目的是要使得式 (4.2) 便于分离，而要分离出的是“$\dfrac{1}{n}$”形式的式子，故放缩时应该保留分母的 $n+1$ 不变，而在分母的 $\dfrac{i}{n}$ 上进行考虑.

先构造夹逼不等式的左边，把分母放大，由于 $\dfrac{i}{n}<\dfrac{n}{n}=1$，故得到

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\frac{i}{n}}{n+1+1}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\frac{i}{n}}{n+2}<\sum_{i=1}^{n}\frac{\frac{i}{n}}{n+1+\frac{i}{n}} \tag{4.3}$$

构造夹逼不等式的右边，把分母放小，可直接消去 $\dfrac{i}{n}$，得到

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\frac{i}{n}}{n+1+\frac{i}{n}} < \sum_{i=1}^{n} \frac{\frac{i}{n}}{n+1} \tag{4.4}$$

结合式 (4.3) 与 (4.4)，得到如下夹逼不等式

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\frac{i}{n}}{n+2} < I < \sum_{i=1}^{n} \frac{\frac{i}{n}}{n+1} \tag{4.5}$$

添加极限符号写成定积分形式

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+2}\right)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n} < I < \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n} \tag{4.6}$$

之后过程容易求解.

方法二： 直接使用夹逼定理

若想直接计算式 (4.1) ，则对 i 求和. 分子中的 i 可直接用求和公式求和，但分母中亦含有 i，同时处理比较困难，因此考虑使用夹逼定理对分母中的 i 进行处理.

过程 4.2: 放缩要点

极限式子的分母为 n^2+n+i，又有 $n\to\infty$，此种情形我们知道，最后求得的极限值往往只取决于最高此项，因此，我们在将分子放大的过程中，可将 i 放大为 n，分母变为 n^2+2n. 最终极限值仅取决于 n^2，于 n 的系数无关. ♡

对分母进行放大放小可得

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n^2+2n} < I < \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n^2+n} \tag{4.7}$$

对 i 进行等差数列求和，之后过程容易求解.

4.2 Q2：复合函数连续性

设 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，$f(x)$ 为连续函数，且 $f(x)\neq 0$，$\varphi(x)$ 有间断点，则（ ）.

(A) $\varphi(f(x))$ 必有间断点.

(B) $[\varphi(x)]^2$ 必有间断点.

(C) $f(\varphi(x))$ 必有间断点.

(D) $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ 必有间断点

答案：

D

分析 4.2

本题选出正确答案不难，但此处对复合函数的连续性作一些说明. ♠

命题 4.1: 复合函数连续性

对于函数 $y=f(\varphi(x))$ 而言，若 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 均连续，那么 $f(\varphi(x))$ 也连续. 但对于其他情况的复合函数连续性判断，则没有明确的定理可以使用. ♡

方法：

对于正确选项 D 的证明，考虑反证法.

假设 $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ 无间断点，即连续，那么 $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}\cdot f(x)$ 必然也连续.

过程 4.3

$\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ 与 $f(x)$ 相乘，两者都是连续函数且定义域相同，故可以看作对于定义域上的每一点 x_i，都是使用 $f(x_i)$ 的值来拉伸 $\dfrac{\varphi(x_i)}{f(x_i)}$ 的值，即对每一个 $\dfrac{\varphi(x_i)}{f(x_i)}$ 乘上 $f(x_i)$，这样运算后的函数当然依旧是连续的.

但有一点需要注意，若 $\exists x_i, f(x_i)=0$，则可能直接将原本的 $\dfrac{\varphi(x_i)}{f(x_i)}$ 直接化成 0，而 x_i 邻域内的其他值只是普通数值变化，这将导致新函数不连续. 不过题给条件$f(x)\neq 0$已经将这一条件否决. ♡

计算两函数乘积：

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)}\cdot f(x)=\varphi(x) \tag{4.8}$$

因此得出结论 $\varphi(x)$ 连续，这与题意矛盾，故反证法得证.

4.3 Q3：以运动为背景的微分方程

设单位质点在水平面内作直线运动，初速度 $v|_{t=0}=v_0$. 已知阻力与速度成正比（比例常数为 1），问 t 为多少时此质点的速度为 $\dfrac{v_0}{3}$，并求到此时刻该质点所经过的路程.

答案：

$t=\ln 3 \quad s=\dfrac{2}{3}v_0$

分析 4.3

本题难度不大，但作为根据物理应用建立方程的典例之一进行讲解. ♠

方法：

首先由牛顿第二定律：

$$f=ma \tag{4.9}$$

此处 f 为阻力，所以等式应添负号，且 f 与速度成系数为 1 的正比，结合 $a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ 可得：

$$v(t)=-m\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} \tag{4.10}$$

过程 4.4

对于这种速度问题，容易最先想到的是中学物理中的速度公式：

$$v=v_0+at \tag{4.11}$$

式 (4.11) 比较简单，容易想到，但此公式是用以处理匀加速问题的，而此题的阻力与速度成正比，代表力的大小会随时间变化，加速度的大小亦会随时间变化，故本题为变加速运动，式 (4.11) 不适用。♡

由于 m 是单位质点，可得到微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}=-v(t) \tag{4.12}$$

代入 $v(0)=v_0$ 的初值解得：

$$v(t)=v_0e^{-t} \tag{4.13}$$

易得当 $v(t)=\frac{v_0}{3}$ 时，$t=\ln 3$.

接下来求解路程，对于变加速运动，直接列积分求解：

$$s=\int_0^{\ln 3}v(t)\mathrm{d}t=\int_0^{\ln 3}v_0\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t=\frac{2}{3}v_0. \tag{4.14}$$

第 5 章 1997 年数学（二）真题精选

5.1 Q1：根号下的有理函数积分

求不定积分 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(4-x)}}$.

答案：

$\arcsin \dfrac{x-2}{2}+C$ 或 $2\arcsin\dfrac{\sqrt{x}}{2}+C$.

分析 5.1

对于根号下的有理函数积分，要构造成 $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的形式来计算. 同时，由于 $\sqrt{x}$ 导数的特殊性，还可以使用第一类换元来处理. ♠

方法一： 配方

过程 5.1: 配方依据

考虑到根式内部为 $x(4-x)=4x-x^2$ ，应考虑 $(x-2)^2$ ，再做线性变换即可.♡

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(4-x)}}=\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2^2-(x-2)^2}}=\int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{x-2}{2}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x-2}{2}\right)^2}}=\arcsin\frac{x-2}{2}+C \tag{5.1}$$

可解得答案

方法二： 第一类换元

根号内部存在

$$\sqrt{x(4-x)}=\sqrt{x}\sqrt{4-\sqrt{x}^2}. \tag{5.2}$$

考虑 $\mathrm{d}(\sqrt{x})=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$，故可将原式化为式 (5.3).

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(4-x)}}=\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\sqrt{4-(\sqrt{x})^2}}=2\int \frac{\mathrm{d}(\sqrt{x})}{\sqrt{4-(\sqrt{x})^2}}. \tag{5.3}$$

可解得答案

$$2\int \frac{\mathrm{d}(\sqrt{x})}{\sqrt{4-(\sqrt{x})^2}}=2\int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^2}}=2\arcsin\frac{\sqrt{x}}{2}+C. \tag{5.4}$$

5.2 Q2：极坐标下的曲边图形面积与弧长

设曲线 L 的极坐标方程为 $r=r(\theta)$，$M(r,\theta)$ 为 L 上任意一点，$M_0(2,0)$ 为 L 上一定点. 若极径 OM_0，OM 与曲线 L 所围成的曲边扇形面积等于 L 上 M_0，M 两点间弧长值的一半，求曲线 L 的方程.

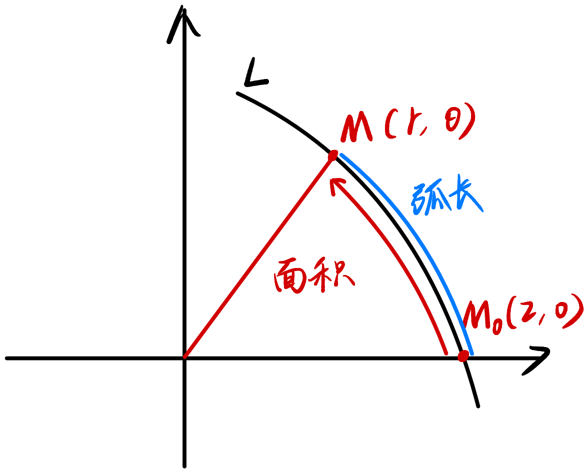
分析 5.2

本题探讨极坐标下的曲边图形面积与弧长计算，同时涉及微分方程计算. ♠

答案：

$x\pm\sqrt{3}y=2$

方法： 先绘制出符合题目情景的草图.



假设所求面积为 S_{OMM_0}，所求弧长为 l_{MM_0}，有如下等式关系：

$$S_{OMM_0}=\frac{1}{2}l_{MM_0}. \tag{5.5}$$

首先探究 S_{OMM_0}，由于题目说明为曲边扇形，故可沿着图中的箭头方向将面积趋于分割为微小扇形进行积分，可得式 (5.6) .

$$S_{OMM_0}=\frac{1}{2}\int_0^\theta r^2(t)\mathrm{d}t. \tag{5.6}$$

过程 5.2: 扇形面积公式

此处用到扇形面积公式：

$$S=\frac{1}{2}\theta r^2. \tag{5.7}$$

其中 θ 为弧度制下的圆心角大小,r 为扇形顶点到弧边的长度（扇形圆的半径）. ♡

接下来计算弧长，可直接利用公式，如式所示：

$$l_{MM_0}=\int_0^\theta\sqrt{r^2(t)+[r'(t)]^2}. \tag{5.8}$$

将式 (5.6) 与式 (5.8) 代入到式 (5.5) 中可得：

$$\int_0^\theta r^2(t)\mathrm{d}t = \int_0^\theta \sqrt{r^2(t) + [r'(t)]^2} \tag{5.9}$$

注意到两边均为边上限积分，均对 θ 求导:

$$r^2(\theta) = \sqrt{r^2(\theta) + [r'(\theta)]^2} \tag{5.10}$$

为去根号表达，两边平方并将 $r(\theta)$ 简写为 r：

$$r^4 = r^2 + (r')^2 \,. \tag{5.11}$$

式 (5.11) 中含有微分项，故构造出如式所示得微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \pm r\sqrt{r^2 - 1}. \tag{5.12}$$

解得微分方程后，代入 $\theta = 0$ 时 $r = 2$ 的初值条件（即 M_0 坐标），得到最终方程如式所示

$$r\cos\left(\frac{\pi}{3} \pm \theta\right) = 1. \tag{5.13}$$

过程 5.3: 解微分方程

式 (5.12) 的微分方程解法如下，通过移项可化到如下形式.

$$\int \frac{\mathrm{d}r}{r\sqrt{r^2-1}} = \pm \int \mathrm{d}\theta. \tag{5.14}$$

对于右边，一眼看出结果为 $\pm\theta + C$. 对于左边，观察到有 $\sqrt{r^2-1}$，故令 $r = \sec t$. 左边可以代换成如下形式：

$$\int \frac{\sec t \cdot \tan t}{\sec t \cdot \sqrt{\sec^2 t - 1}} = \int \frac{\sec t \cdot \tan t}{\sec t \cdot |\tan t|} \tag{5.15}$$

若 $\tan t > 0$ 则左边等于 t，否则等于 $-t$. 由于右边的结果有任意的正负性，故左边的结果无需考虑正负性，可得到如式 (5.16) 所示的结果.

$$t = \pm\theta + C \tag{5.16}$$

由于 $r = \sec t = \dfrac{1}{\cos t}$，代回到式 (5.16) 得：

$$\begin{aligned} \cos t &= \cos(\pm\theta + C) \\ \frac{1}{r} &= \cos(\pm\theta + C) \\ 1 &= r\cos(\pm\theta + C) \end{aligned} \tag{5.17}$$

♡

最终结果式 (5.13) 涉及到两个方程，首先考虑 $r\cos\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right) = 1$.

用三角函数内角和公式拆开 $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)$：

$$r\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos\theta-\sin\frac{\pi}{3}\sin\theta\right)=1 \tag{5.18}$$

利用 $x=r\cos\theta$ 与 $y=r\sin\theta$ 可得直线方程：

$$x-\sqrt{3}y=2. \tag{5.19}$$

对于 $r\cos\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)=1$ 同理可得：

$$x+\sqrt{3}y=2. \tag{5.20}$$

第 6 章 1999 年数学（二）真题精选

6.1 Q1：求和符号与积分符号的转化

设 $f(x)$ 是区间 $[0,+\infty)$ 上单调减少且非负的连续函数，$a_n=\sum_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)\mathrm{d}x,(n=1,2,\cdots)$ 证明数列 a_n 的极限存在.

分析 6.1

本题 a_n 的差式中，前一项为求和符号，后一项为积分符号，需利用两者之间的符号来转换表达形式，使得两项式子能进行统一的计算. ♠

方法：

采用单调有界准则证明数列极限存在.

$$
\begin{aligned}
a_n-a_{n-1}&=\sum_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)\mathrm{d}x-\left(\sum_{k=1}^{n-1}f(k)-\int_1^{n-1}f(x)\mathrm{d}x\right)\\
&=\left(\sum_{k=1}^{n}f(k)-\sum_{k=1}^{n-1}f(k)\right)+\left(\int_1^{n-1}f(x)\mathrm{d}x-\int_1^{n}f(x)\mathrm{d}x\right)\\
&=f(n)-\int_{n-1}^{n}f(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}
\tag{6.1}
$$

运用中值定理：

$$
\int_{n-1}^{n}f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\quad(n-1\le\xi\le n)
\tag{6.2}
$$

代入到式 (6.1) 可得：

$$
a_n-a_{n-1}=f(n)-f(\xi)
\tag{6.3}
$$

由 $f(x)$ 单调减少可知 a_n 单调递减. 还需证 a_n 有下界.

过程 6.1

a_n 显然难以直接计算，应先寻求积分符号与求和符号的互相转化，把 a_n 化为方便计算的形式. ♡

$$
\begin{aligned}
a_n &= \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)\mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=1}^{n} f(k) - \left(\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x + \int_2^3 f(x)\mathrm{d}x + \cdots + \int_{n-1}^{n} f(x)\mathrm{d}x\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} f(k) - \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} f(k)\mathrm{d}x + f(n)\right) - \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=1}^{n-1}\left(\int_k^{k+1} f(k) - f(x)\mathrm{d}x\right) + f(n)
\end{aligned} \tag{6.4}
$$

由 $f(k) > f(x)$，$f(n) > 0$ 可知 $a_n > 0$，故单调有界定理得证.

第 7 章 2000 年数学（二）真题精选

7.1 Q1：三阶导数判断极值点与拐点

设 $f(x)$ 满足关系式 $f''(x)+[f'(x)]^2=x$，且 $f'(0)=0$，则（ ）

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值.

(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值.

(C) 点 $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(D) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值，点 $(0,f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

分析 7.1

直接将 $f'(0)=0$ 代入会得到 $f''(0)=0$ 的结果，既无法判断极值点，也无法判断拐点，需进一步引入更高一阶的导数来进行判断. ♠

答案： C.

方法：

首先将 $x=0$ 代入原式得 $f''(0)=0$，发现无法对极值点与拐点进行判断.

考虑采用三阶导. 对原式两边求导可得：

$$f'''(x)+2f'(x)f''(x)=1. \tag{7.1}$$

将 $x=0$ 代入得到 $f'''(0)=1$，而 $f'''(0)$ 又可由式 (7.2) 所示的导数定义得到.

$$f'''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)-f''(0)}{x-0} \tag{7.2}$$

又有 $f''(0)=0$，故可得到式 (7.3).

$$\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{x}=1>0. \tag{7.3}$$

由极限保号性可知，必存在 δ，使 $x\in(-\delta,0)$，$f''(x)<0$，而 $x\in(0,\delta)$ 时，$f''(x)>0$. 由于 $f''(x)$ 在 $x=0$ 附近变号，故 $(0,f(0))$ 是 $y=f(x)$ 的拐点.

过程 7.1: 验证 AB 选项

在 $(-\delta,\delta)$ 区间内，由 $f''(x)$ 与 0 的大小关系可知，$x\in(-\delta,0)$ 时，$f'(x)$ 单调递减；$x\in(0,\delta)$ 时，$f'(x)$ 单调递增. 故 $f'(0)=0$ 为 $f'(x)$ 在 $(-\delta,\delta)$ 上的极小值，$f'(x)$ 在 $x=0$ 附近没有发生变号，故 $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值. ♡

第 8 章 2003 年数学（二）真题精选

8.1 Q1：直线交点与方程组解的关系

已知平面上三条不同的直线方程分别为

$$l_1 : ax + 2by + 3c = 0$$
$$l_2 : bx + 2cy + 3a = 0$$
$$l_3 : cx + 2ay + 3b = 0$$

试证：这三条直线交于一点的充分必要条件为 $a + b + c = 0$.

分析 8.1

将直线相交于一点转化为方程组有解，然后构造行列式求解.

方法：

三条直线交于一点 $\Rightarrow$ 三个方程式有公共解 $\Rightarrow$ 非齐次方程组有解.

以矩阵形式表达方程组 $[A, \beta]$，如式 (8.1) 所示：

$$\begin{bmatrix} a & 2b & -3c \\ b & 2c & -3a \\ c & 2a & -3b \end{bmatrix} \tag{8.1}$$

构造出题目中的 $a + b + c$ 形式：

$$\begin{bmatrix} a & 2b & -3c \\ b & 2c & -3a \\ c & 2a & -3b \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} a & 2b & -3c \\ b & 2c & -3a \\ a+b+c & 2(a+b+c) & -3(a+b+c) \end{bmatrix} \tag{8.2}$$

由于只有两个未知数，若要 $[A, \beta]$ 有解，则 $r[A, \beta] = 2 < 3$, 有行列式 $|A, \beta| = 0$.

本题即证：$|A, \beta| = 0$ 的充要条件是 $a + b + c = 0$.

先证充分性：$a + b + c = 0 \Rightarrow |A, \beta| = 0$.

将 $a + b + c = 0$ 代入到式 (8.2) 中可知充分条件显然成立。

再证必要性：$|A, \beta| = 0 \Rightarrow a + b + c = 0$.

$$|A, \beta| = \begin{vmatrix} a & 2b & -3c \\ b & 2c & -3a \\ a+b+c & 2(a+b+c) & -3(a+b+c) \end{vmatrix} \to (a+b+c) \begin{vmatrix} a & 2b & -3c \\ b & 2c & -3a \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} \tag{8.3}$$

可得结果：

$$\begin{aligned}|A,\beta| &= 6(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)\\ &= 3(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]\end{aligned} \tag{8.4}$$

由于 $|A,\beta|=0$ 且 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2>0$ 恒成立，故必有 $a+b+c=0$，必要性得证.

过程 8.1

题干条件中已经明确“三条不同的直线”，故不可能出现 $a=b=c$，即 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$ 的情况. ♡

第 9 章 2006 年数学（二）真题精选

9.1 Q1：一元函数的增量与微分

设函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数，且 $f'(x)>0$，$f''(x)>0$，Δx 为自变量 x 在 x_0 处的增量，Δy 与 $\mathrm{d}y$ 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分，若 $\Delta x>0$，则 (　).

(A) $0<\mathrm{d}y<\Delta y$.

(B) $0<\Delta y<\mathrm{d}y$.

(C) $\Delta y<\mathrm{d}y<0$.

(D) $\mathrm{d}y<\Delta y<0$.

分析 9.1

应正确分析出增量与微分的确切含义，抓住二者之间的关联.

答案： A.

方法： 增量与微分各自的含义如式 (9.1) 所示.

$$\begin{aligned}\Delta y&=f(x+\Delta x)-f(x).\\ \mathrm{d}y&=f'(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}\tag{9.1}$$

为将两者联系起来，可对 Δy 使用格朗日中值定理：

$$f'(\xi)=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{(x+\Delta x)-x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}.\tag{9.2}$$

其中 $\xi\in(x,x+\Delta x)$，构造成与微分相同的形式：

$$\Delta y=f'(\xi)\Delta x.\tag{9.3}$$

因为 $\mathrm{d}x=\Delta x$，又有 $f''(x)>0$ 且 $\xi>x$，故 $\Delta x>\mathrm{d}y$. 亦可考虑几何意义：

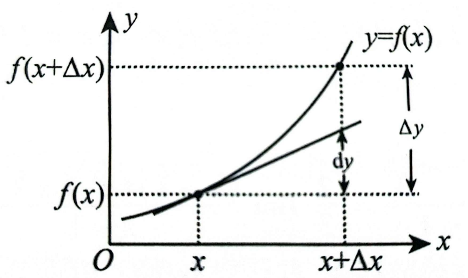


图 9.1: Δy 与 $\mathrm{d}y$ 的几何意义.

9.2 Q2：约束条件下的极值点判断

设 $f(x,y)$ 与 $\varphi(x,y)$ 均为可微函数，且 $\varphi_y'(x,y)\neq 0$. 已知 (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的一个极值点，下列选项正确的是（ ）

(A) 若 $f_x'(x_0,y_0)=0$，则 $f_y'(x_0,y_0)=0.$

(B) 若 $f_x'(x_0,y_0)=0$，则 $f_y'(x_0,y_0)\neq 0.$

(C) 若 $f_x'(x_0,y_0)\neq 0$，则 $f_y'(x_0,y_0)=0.$

(D) 若 $f_x'(x_0,y_0)\neq 0$，则 $f_y'(x_0,y_0)\neq 0.$

分析 9.2

在带约束条件时的求极值，不能简单地认为极值点一定在驻点上，而要建立拉格朗日函数进行分析. ♠

答案： D.

方法： 建立拉格朗日函数：

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y). \tag{9.4}$$

由于 (x_0,y_0) 是极值点，故有：

$$\left\{\begin{array}{l}L_x'\left(x_0,y_0,\lambda\right)=f_x'\left(x_0,y_0\right)+\lambda\varphi_x'\left(x_0,y_0\right)=0\\ L_y'\left(x_0,y_0,\lambda\right)=f_y'\left(x_0,y_0\right)+\lambda\varphi_y'\left(x_0,y_0\right)=0\\ L_\lambda'\left(x_0,y_0,\lambda\right)=\varphi\left(x_0,y_0\right)=0.\end{array}\right. \tag{9.5}$$

由于 $\varphi_y'(x,y)\neq 0$，故 $\lambda=-\dfrac{f_y'\left(x_0,y_0\right)}{\varphi_y'\left(x_0,y_0\right)}$，代入到 $L_x'\left(x_0,y_0,\lambda\right)$ 中可得：

$$f_x'\left(x_0,y_0\right)=\frac{f_y'\left(x_0,y_0\right)}{\varphi_y'\left(x_0,y_0\right)}\varphi_x'\left(x_0,y_0\right) \tag{9.6}$$

所以当 $f_x'(x_0,y_0)\neq 0$ 时，一定有 $f_y'(x_0,y_0)\neq 0.$

第 10 章 2007 年数学（二）真题精选

10.1 Q1：多元函数可微的定义

二元函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微的一个充分条件是（　）

(A) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}[f(x,y)-f(0,0)]=0$.

(B) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$，且 $\lim\limits_{y\to0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$.

(C) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0))}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

(D) $\lim\limits_{x\to0}[f'_x(x,0)-f'_x(0,0)]=0$，且 $\lim\limits_{y\to0}[f'_y(0,y)-f'_y(0,0)]=0$.

分析 10.1

需牢牢抓住多元函数连续、偏导存在、偏导连续、可微之间的关系与各自的定义.

答案： C.

方法：

由充分条件可知，本题为“选项 $\Longrightarrow f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微”.

多元函数可微与其他函数性质关系如图 10.1 所示.

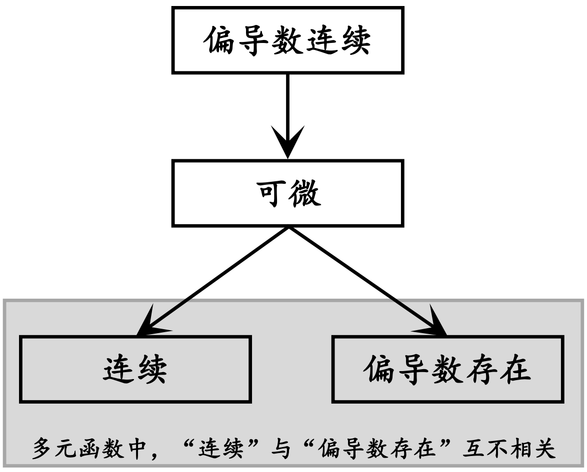


图 10.1: 多元函数连续、偏导存在、偏导连续、可微之间的关系.

根据图 10.1，可以首先排除 A、B、D.

对于选项 **A**

显然为 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续，无法推导出可微.

对于选项 B

显然为 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的两个偏导数都存在，无法推导出可微.

对于选项 D

选项 D 与“偏导数连续”的定义高度相似，实则不然。该选项只能推导出“一元函数 $f_x'(x,0)$ 在 $x=0$ 处连续，$f_y'(0,y)$ 在 $y=0$ 处连续”. 若要偏导数连续，应满足如式 (10.1) 所示的极限.

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left[f_x'(x,y)-f_x'(0,0)\right]&=0\\ \lim_{(x,y)\to(0,0)}\left[f_y'(x,y)-f_y'(0,0)\right]&=0\end{aligned}\tag{10.1}$$

对于选项 C

若要证明 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微，需证明式 (10.2).

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-f_x'(x_0,y_0)(x-x_0)-f_y'(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}=0\tag{10.2}$$

将 $x_0=0,y_0=0$ 代入，即需证：

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x'(0,0)x-f_y'(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0\tag{10.3}$$

先求 $f_x'(0,0)$ 与 $f_y'(0,0)$. 由偏导数存在的定义可得：

$$f_x'(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{|x|}\cdot\frac{|x|}{x}\tag{10.4}$$

将分母转化为 $\sqrt{x^2+y^2}$ 的形式：

$$f_x'(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+0^2}}\cdot\frac{|x|}{x}\tag{10.5}$$

由选项条件 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0))}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$ 可知，式 (10.6) 必然成立。

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+0^2}}=0\tag{10.6}$$

过程 10.1

当平面坐标点集 $(x,y)\to(0,0)$ 时，都能求得极限值为 0. 将 $y=0$ 代入，无非就是把整个平面点集的范围压缩到了 $y=0$ 这一条直线当中，此种情形单独让 $x\to0$ 必然也能得到之前的极限值. ♡

结合式 (10.5) 可知，$f_x'(0,0)=0$，同理亦可证 $f_y'(0,0)=0$. 将求得的值代回到式 (10.3) 中可得：

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x'(0,0)x-f_y'(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}\tag{10.7}$$

再由选项 C 可知式 (10.7) 的极限值为 0，可微得证.

第 11 章 2008 年数学（二）真题精选

11.1 Q1：通过零矩阵性质判断可逆

设 $\mathbf{A}$ 为 n 阶非零矩阵，$\mathbf{E}$ 为 n 阶单位矩阵，若 $\mathbf{A}^3=\mathbf{O}$，则（ ）

(A) $\mathbf{E}-\mathbf{A}$ 不可逆，$\mathbf{E}+\mathbf{A}$ 不可逆.

(B) $\mathbf{E}-\mathbf{A}$ 不可逆，$\mathbf{E}+\mathbf{A}$ 可逆.

(C) $\mathbf{E}-\mathbf{A}$ 可逆，$\mathbf{E}+\mathbf{A}$ 可逆.

(D) $\mathbf{E}-\mathbf{A}$ 可逆，$\mathbf{E}+\mathbf{A}$ 不可逆.

分析 11.1

可以考虑构造选项中矩阵的逆矩阵，也可以求出 $\mathbf{A}$ 的特征值，进而求出 $\mathbf{E}+\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{E}-\mathbf{A}$ 的特征值. ♠

答案： C.

方法一： 构造逆矩阵

由于 $\mathbf{A}^3=\mathbf{O}$，故 $\mathbf{A}^4=\mathbf{O}$，可得到如式 (11.1) 所示的恒等关系.

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}-\mathbf{A}^4=(\mathbf{E}-\mathbf{A}^2)(\mathbf{E}+\mathbf{A}^2)=(\mathbf{E}+\mathbf{A})(\mathbf{E}-\mathbf{A})(\mathbf{E}+\mathbf{A}^2). \tag{11.1}$$

显然，选项中的两个矩阵均可逆。

方法二：特征值

设 $\mathbf{A}$ 的任意一个特征值为 λ，对应的特征向量为 α，$\mathbf{A}^3$ 的特征值为 λ^3.

又因为 $\mathbf{A}^3=\mathbf{O}$，故 $\lambda^3\mathbf{A}^3=\lambda^3\alpha\mathbf{O}$，进而得到 $\lambda=0.\mathbf{A}$ 的特征值全 0，那么 $\mathbf{E}+A$ 与 $\mathbf{E}-A$ 的特征值分别为全 1 与全 -1，根据行列式的值可知两矩阵均线性无关，可逆.

第 12 章 2010 年数学（二）真题精选

12.1 Q1：矩形对角线增速

已知一个长方形的长 l 以 2 cm/s 的速率增加，宽 w 以 3 cm/s 的速率增加，则当 $l = 12$ cm，$w = 5$ cm 时，它的对角线增加的速率为.

分析 12.1

借助长、宽、对角线的几何关系来求解，可同时对时间 t 求导来表达速率. ♠

答案： 3 cm/s.

方法： 对角线 s 与长度 l 宽度 w 的关系如式 (12.1) 所示：

$$s^2(t) = l^2(t) + w^2(t). \tag{12.1}$$

两边同时关于 t 求导：

$$s\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = l\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} + w\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}. \tag{12.2}$$

代入题目数据即可求得答案.

12.2 Q2：螺线的极坐标弧长

当 $\leq \theta \leq \pi$ 时，对数螺线 $r = e^{\theta}$ 的弧长为_________.

分析 12.2

本题没有难度，但需记住极坐标下的弧长公式. ♠

答案：$\sqrt{2}(e^{\pi} - 1)$

方法：

过程 12.1: 极坐标系下的弧长公式

若平面光滑曲线由极坐标方程 $r = r(\theta)$ 由 $(\alpha \leq \theta \leq \beta)$ 给出，那么弧长公式如下所示：

$$s = \int_0^{\pi} \sqrt{[\rho(\theta)]^2 + [\rho'(\theta)]^2} \tag{12.3}$$

♡

根据弧长公式坐标，该螺旋长度计算公式如式所示。

$$s = \int_0^{\pi} \sqrt{(e^{\theta})^2 + [(e^{\theta})']^2}\mathrm{d}\theta \tag{12.4}$$

将数据代入计算即可得到答案。

12.3 Q2：分区间二次中值定理

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，在开区间 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=\dfrac{1}{3}$. 证明：存在 $\xi \in \left(0,\dfrac{1}{2}\right)$, $\eta \in \left(\dfrac{1}{2},1\right)$，使得 $f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$.

分析 12.3

由于题目中存在导数形式，可先设出原函数，然后在两个区间内分别使用中值定理求解.

方法： 首先寻求式子中的同构部分，原式可化为式 (12.5).

$$f'(\xi)-\xi^2=-(f'(\eta)-\eta^2). \tag{12.5}$$

令 $g(x)=f(x)-\dfrac{1}{3}x^3$, 则题目需证：存在 $\xi \in \left(0,\dfrac{1}{2}\right)$, $\eta \in \left(\dfrac{1}{2},1\right)$，使得 $g'(\xi)+g'(\eta)=0$.

分别在 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 与 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 上对 $g(x)$ 分别使用拉格朗日中值定理可得：

$$\begin{aligned}
&\exists \xi \in \left(0,\frac{1}{2}\right), \quad g'(\xi)=\frac{g(\frac{1}{2})-g(0)}{\frac{1}{2}-0}\\
&\exists \eta \in \left(\frac{1}{2},1\right), \quad g'(\eta)=\frac{g(1)-g(\frac{1}{2})}{1-\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{12.6}$$

而 $g(0)=0$, $g(1)=0$，化简式 (12.7) 得

$$\begin{aligned}
&\exists \xi \in \left(0,\frac{1}{2}\right), \quad g'(\xi)=2g(\frac{1}{2})\\
&\exists \eta \in \left(\frac{1}{2},1\right), \quad g'(\eta)=-2g(\frac{1}{2}).
\end{aligned} \tag{12.7}$$

故有 $g'(\xi)+g'(\eta)=0$，原命题得证.

第 13 章 2011 年数学（二）真题精选

13.1 Q1：伴随矩阵的齐次方程

设 $\mathbf{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 是 4 阶矩阵，$\mathbf{A}^*$ 为 $\mathbf{A}$ 的伴随矩阵. 若 $(1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$ 是方程组 $\mathbf{A}x=0$ 的一个基础解系，则 $\mathbf{A}^*x=\mathbf{0}$ 的基础解系可为 ( )

(A) α_1,α_3.

(B) α_1,α_2.

(C) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$.

(D) $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$.

分析 13.1

对于 $\mathbf{A}^*x=\mathbf{0}$ 的基础解系的考察，首先应确定 $r(\mathbf{A}^*)$，再从 $\mathbf{A}^*x=\mathbf{0}$ 的解集中找到 $n-r(\mathbf{A}^*)$ 个线性无关的解向量。♠

答案： D.

方法： 要确定 $r(\mathbf{A}^*)$，首先要确定 $r(\mathbf{A})$. 由于 $\mathbf{A}x=\mathbf{0}$ 的基础解系为 $(1,0,1,0)^T$，故其解集的秩为 1，那么 $r(\mathbf{A})=3$.

过程 13.1: 矩阵的秩与其伴随矩阵的秩的关系

对于矩阵 $\mathbf{A}^*$ 的秩，与 $\mathbf{A}$ 的秩的关系如下所示：

$$r(\mathbf{A}^*)=\begin{cases} n, & r(A)= n \\ 1, & r(A)= n-1 \\ 0, & r(A)< n-1 \end{cases} \tag{13.1}$$

♡

已知 $r(\mathbf{A}^*)=1$，那么可知 $\mathbf{A}^*x=\mathbf{0}$ 的解集中应包含 3 个线性无关的向量，首先排除 AB 两个选项. 由于 $\mathbf{A}$ 不满秩，故 $|\mathbf{A}|=0$, 从而 $\mathbf{A}^*\mathbf{A}=|\mathbf{A}|\mathbf{E}=\mathbf{0}$，因此 $\mathbf{A}$ 的列向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 均为 $\mathbf{A}^*x=\mathbf{0}$ 的解集. 接下来需判断解集中哪 3 个向量线性无关.

由于 $(1,0,1,0)^T$ 是方程组 $\mathbf{A}x=\mathbf{0}$ 的基础解系，故式 (13.2) 成立.

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)(1,0,1,0)^T=\alpha_1+\alpha_3=\mathbf{0}. \tag{13.2}$$

因此 α_1 与 α_3 线性相关，排除 C，选择 D 选项.

13.2 Q2：借用对数不等式证明数列收敛

（I）证明：对任意的正整数 n，都有 $\dfrac{1}{n+1} \leq \ln(1+\dfrac{1}{n}) \leq \dfrac{1}{n}$ 成立；

（II）设 $a_n = 1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n \quad (n=1,2,\cdots)$，证明数列 a_n 收敛.

分析 13.2

本题证第一问不等式不难，但证明第二问的数列收敛时需要借助第一个不等式进行迭代相加.

方法：

使用单调有界准则判断数列收敛，首先证明 a_n 单调，作 $a_n - a_{n-1}$ 得：

$$
\begin{aligned}
a_{n+1}-a_n &= \frac{1}{n+1}-\ln(n+1)-(-\ln n)\,. \\
&= \frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n. \\
&= \frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).
\end{aligned} \tag{13.3}
$$

由第（I）问证明的不等式可知：

$$
a_{n+1}-a_n = \frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 0. \tag{13.4}
$$

故 a_n 单调递减. 下面需证 a_n 有下由 $\ln(1+\dfrac{1}{n}) \leq \dfrac{1}{n}$ 可得 $\ln(n+1)-\ln n \leq \dfrac{1}{n}$. 故有：

$$
\begin{aligned}
\ln 2-\ln 1 &< 1, \\
\ln 3-\ln 2 &< \frac{1}{2}, \\
&\cdots \\
\ln(n+1)-\ln n &< \frac{1}{n}.
\end{aligned} \tag{13.5}
$$

将上式全部相加可得：

$$
\ln(n+1)-\ln 1 < 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}. \tag{13.6}
$$

为构造符合题目要求的 a_n，式 (13.6) 左右两侧减去 $\ln n$ 可得：

$$
\ln(n+1)-\ln n < 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n. \tag{13.7}
$$

由式 (13.7) 可得：

$$
a_n > \ln(n+1)-\ln n > 0. \tag{13.8}
$$

故 a_n 有下界，又 a_n 单调递减，故 a_n 收敛.

第 14 章 2012 年数学（二）真题精选

14.1 Q1：多项式方程与数列极限

（I）证明方程 $x^n + x^{n+1} + \cdots + x = 1$（$n$ 为大于 1 的整数）在区间 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 内有且仅有一个实根；

（II）记（I）中的实根为 x_n，证明 $\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在，并求此极限.

分析 14.1

根据方程构造函数，数列的项即为方程零点. 题意已经轻易给出 x_n 的界，再借助函数的单调性完成数列单调性的证明即可. ♠

方法：

令 $f_n(x) = x^n + x^{n+1} + \cdots + x - 1$, 显然 $f(x)$ 单调递增，且当 $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 时，$f_n(x) < f_{n+1}(x)$. 因为 x_n 与 x_{n+1} 分别是 $f_n(x)$ 与 $f_{n+1}(x)$ 的零点，故有如式 (14.1) 所示的不等式关系.

$$f_n(x_{n+1}) < f_{n+1}(x_{n+1}) = 0 = f_n(x_n). \tag{14.1}$$

显然有 $x_{n+1} < x_n$，从而 x_n 单调减少，故其收敛得证.

由于 x_n 满足 $f(x_n)$，可先对 $f_n(x)$ 进行等比数列求和的化简，并代入 x_n 得：

$$\frac{x_n(1-x_n^n)}{1-x_n} = 1. \tag{14.2}$$

对 (14.2) 取极限有：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n(1-x_n^n)}{1-x_n} = 1. \tag{14.3}$$

由于 $\frac{1}{2} < x_n < 1$，故：

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{1-x_n} &= 1. \\ \frac{\lim_{n\to\infty} x_n}{1-\lim_{n\to\infty} x_n} &= 1. \end{aligned} \tag{14.4}$$

最终可得 $\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2}$.

第 15 章 2013 年数学（二）真题精选

15.1 Q1：矩阵变换中的行列向量的关系

设 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ 均为 n 阶矩阵. 若 $\mathbf{AB} = \mathbf{C}$，且 $\mathbf{B}$ 可逆，则（　）

(A) 矩阵 $\mathbf{C}$ 的行向量与矩阵 $\mathbf{A}$ 的行向量组等价.

(B) 矩阵 $\mathbf{C}$ 的列向量与矩阵 $\mathbf{A}$ 的列向量组等价.

(C) 矩阵 $\mathbf{C}$ 的行向量与矩阵 $\mathbf{A}$ 的行向量组等价.

(D) 矩阵 $\mathbf{C}$ 的列向量与矩阵 $\mathbf{A}$ 的列向量组等价.

分析 15.1

$\mathbf{AB} = \mathbf{C}$，由于 $\mathbf{B}$ 右乘 $\mathbf{A}$，故为对 $\mathbf{A}$ 的初等列变换. ♠

答案： B.

方法：

$\mathbf{AB}$ 为对 $\mathbf{A}$ 进行初等列变换，$\mathbf{C}$ 即为对 $\mathbf{A}$ 中的列向量作初等变换，故两者的列向量组等价.

15.2 Q2：二次型矩阵的向量表达

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2$，记 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,a_3)^T$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,b_3)^T$.

（I）证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$；

（II）若 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 正交且均为单位向量，证明 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2$.

分析 15.2

需用 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 表达出二次型. 第（II）问需借助第（II）问的表达式求解. 对于正交变换，可分别计算出特征值与特征向量.

方法：

（I）

令 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，可得如式 (15.1) 所示的等式代换.

$$\begin{aligned} a_1x_a+a_2x_2+a_3x_3&=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}.\\ b_1x_a+b_2x_2+b_3x_3&=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}.\end{aligned} \tag{15.1}$$

故二次型可用如式 (15.2)所示的表达.

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3)&=2(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}).\\ &=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{x}.\end{aligned} \tag{15.2}$$

故二次型对应的矩阵为 $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$.

（II）

要对矩阵进行正交变换并求得正交矩阵，先求出二次型矩阵的特征值与特征向量. 设该二次型矩阵为 $\boldsymbol{A}$. 由于 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交，因此可以往两向量相乘的方向进行构造，如式所示.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}&=(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\alpha}=2\boldsymbol{\alpha}.\\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}&=(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}.\end{aligned} \tag{15.3}$$

因此可以确定 $\boldsymbol{A}$ 的两个特征值分别为 2 和 1，对应的特征向量分别是 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$. 接下来需寻找另一个特征值. 可从 $r(\boldsymbol{A})$ 考虑：

$$r(\boldsymbol{A})=r(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\alpha}\leqslant r(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})+r(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})=2. \tag{15.4}$$

从式 (15.4) 可知，$\boldsymbol{A}$ 不满秩，故 $|\boldsymbol{A}|=0$，$\boldsymbol{A}$ 必有一特征值为 0. 那么 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值分别为 2,1,0. 那么存在正交矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$. 也即存在 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 的正交变换，使得 $f=2y_1^2+y_2^2$.

第 16 章 2023 年数学（二）真题精选

16.1 Q1：就是不构造，你能把我怎样？

已知数列 x_n，y_n 满足 $x_1=y_1=\frac{1}{2}$，$x_{n+1}=\sin x_n$，$y_{n+1}=y_n^2(n=1,2,\cdots)$，则当 $n\to\infty$ 时，（　）.

(A) x_n 是 y_n 的高阶无穷小.

(B) y_n 是 x_n 的高阶无穷小.

(C) x_n 与 y_n 是等价无穷小.

(D) x_n 与 y_n 是同阶但非等价无穷小.

分析 16.1

在大多数辅导书中，都是采取诸如 $\sin x>\frac{2}{\pi}x$ 等巧妙的构造来解决此题。但这些构造并非常见的放缩方法，考生在考场上根本难以直接想到。那些精巧的构造在此处不再赘述，此处给出一种无需构造的方法解决此题，亦不涉及任何超纲知识.

方法：

答案：

B.

本题无非是处理式 (16.1) 中的极限值（在数列极限中 $n\to\infty$ 与 $n\to+\infty$ 没区别）.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{y_n}{x_n}. \tag{16.1}$$

本题中 x_n 与 y_n 看似都是抽象数列，但接下来，我们不使用任何构造，以基础的数学手段直面式 (16.1)中的 y_n 和 x_n.

对于 y_n，题给条件有 $y_1=\frac{1}{2}$ 与 $y_{n+1}=y_n^2$，看上去束手无策，实则可以尝试求出通项公式. 首先列出前几项进行观察：

$$\begin{aligned}
y_2 &= \tfrac{1}{2}y_1 \\
y_3 &= y_2^2 = \left(\tfrac{1}{2}\right)^2(y_1)^2 \\
y_4 &= y_3^2 = \left(\tfrac{1}{2}\right)^4(y_1)^4 \\
y_5 &= y_4^2 = \left(\tfrac{1}{2}\right)^8(y_1)^8 \\
&\cdots
\end{aligned} \tag{16.2}$$

观察式子右侧的指数，不难发现规律：

$$
\begin{aligned}
y_2 &= \left(\tfrac{1}{2}\right)^{1}(y_1)^{1} &= \left(\tfrac{1}{2}\right)^{2^{1-1}}(y_1)^{2^{1-1}} \\
y_3 &= \left(\tfrac{1}{2}\right)^{2}(y_1)^{2} &= \left(\tfrac{1}{2}\right)^{2^{2-1}}(y_1)^{2^{2-1}} \\
y_4 &= \left(\tfrac{1}{2}\right)^{4}(y_1)^{4} &= \left(\tfrac{1}{2}\right)^{2^{3-1}}(y_1)^{2^{3-1}} \\
y_5 &= \left(\tfrac{1}{2}\right)^{8}(y_1)^{8} &= \left(\tfrac{1}{2}\right)^{2^{4-1}}(y_1)^{2^{4-1}} \\
&\cdots
\end{aligned}
\tag{16.3}
$$

根据式 (16.3) 可以得出 y_n 通项公式：

$$
y_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{(n-1)-1}}(y_1)^{2^{(n-1)-1}} \tag{16.4}
$$

代入初值条件 $y_1 = \frac{1}{2}$ 得：

$$
y_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{(n-1)-1}}(y_1)^{2^{(n-1)-1}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{(n-2)}}\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{(n-2)}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{(n-1)}} \tag{16.5}
$$

过程 16.1

式 (16.5) 的详细运算步骤如下所示。此处运算随属于基础运算，但“指数上面套指数”往往容易算错，需牢记同底数幂相乘指数相加.

$$
\begin{aligned}
y_n &= \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{(n-2)}}\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{(n-2)}} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{(n-2)}+2^{(n-2)}} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{2\times 2^{(n-2)}} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{(n-1)}}
\end{aligned}
\tag{16.6}
$$

♡

求出 y_n 的通项公式后，可计算式 (16.1)的分子部分：

$$
\lim_{n\to+\infty} y_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{(n-1)}} = 0 \tag{16.7}
$$

接下来，要想得到 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{y_n}{x_n}$ 的值，则还需计算 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$. 从题给条件可以看出，$x_n$ 的通项公式无法显示求得，故应视作抽象型数列，使用单调有界准则来计算极限值.

由 $x_{n+1} = \sin x_n$ 可知，必有 $-1 < x_n < 1$（实际上可进一步得到 $0 < x_n < 1$，此处不证，非解题关键），满足有界条件，下面分析 x_n 单调性：

$$
x_{n+1} - x_n = \sin x_n - x_n < 0 \tag{16.8}
$$

过程 16.2

式 (16.8) 的结论容易得到，此处不特地证明。可令 $f(x)=\sin x-x$，用导数证明 $f(x)<0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立即可. ♡

由于 $x_{n+1}<x_n$ ，故 x_n 单调递减有下界，数列极限存在，且不难求得极限的值为 0，即 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=0$，式 (16.1)构成 $\dfrac{0}{0}$ 型极限：

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{y_n}{x_n}=\frac{0}{0}. \tag{16.9}$$

对此类极限，首先想到的方法是洛必达法则，但此处是数列极限，且 x_n 无具体表达式，故洛必达法则不适用. 但依然可以借助洛必达法则的思想：普通函数值比不出结果，那就比较 y_n 与 x_n 的变化速率（此处是趋于 0 的速率）以计算极限值. 由于 x_n 为抽象型数列，可以借助放缩的手段来进行计算.

过程 16.3

其实做到这里，经过上文的提示，答案已经明了，y_n 呈指数级趋势向 0 靠拢，而 x_n 则是通过嵌套 sin 来靠近 0，这样的速度怎么可能比得过 y_n 呢？毫无疑问是 y_n 的指数级更快，进而得到 y_n 是 x_n 的高阶无穷小. ♡

考虑 $f(x)=\sin x$ 的拉格朗日余项泰勒公式：

$$\sin x=x+\frac{f'''(\xi)}{3!}x^3. \tag{16.10}$$

其中 $\xi\in(0,x)$，且 $f'''(x)=-\cos x$，那么代入 $x_{n+1}=\sin x_n$ 可得：

$$x_{n+1}=\sin x_n=x_n-\frac{\cos\xi}{6}x_n^3. \tag{16.11}$$

下面进行放缩，首先通过 $\cos\xi<1$ 得：

$$x_{n+1}=\sin x_n=x_n-\frac{\cos\xi}{6}x_n^3>x_n-\frac{1}{6}x_n^3. \tag{16.12}$$

通过以上步骤，将 sin 型转化为了常规的多项式型，接下来考虑通过多项式将 x_n 中逐项的三角函数关系转化为线性关系. 由于 x_n 单减，$x_1=\dfrac{1}{2}$ ，故有 $x_n<\dfrac{1}{2}$，可得：

$$x_{n+1}>x_n-\frac{1}{6}x_n^3=x_n\left(1-\frac{1}{6}x_n^2\right)>x_n\left(1-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)=\frac{23}{24}x_n. \tag{16.13}$$

即得到了如下的简单线性关系：

$$x_n>\frac{23}{24}x_{n-1}(n\geq 2). \tag{16.14}$$

逐项迭代：

$$x_n>\frac{23}{24}x_{n-1}>\left(\frac{23}{24}\right)^2x_{n-2}>\cdots>\left(\frac{23}{24}\right)^{n-1}x_1=\frac{1}{2}\left(\frac{23}{24}\right)^{n-1} \tag{16.15}$$

故可得：

$$\frac{y_n}{x_n} < \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{(n-1)}}}{\frac{1}{2}\left(\frac{23}{24}\right)^{n-1}} \tag{16.16}$$

不等式已构建完成，可使用夹逼定理：

$$0 < \lim_{n\to+\infty}\frac{y_n}{x_n} < \lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{(n-1)}}}{\frac{1}{2}\left(\frac{23}{24}\right)^{n-1}} \tag{16.17}$$

右侧极限分母为指数，分子为指数的指数，故分子增长速度远大了分母，极限值为 0. 根据夹逼定理，$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{y_n}{x_n}=0$.