

三级倒立摆的 LQR 方法优化参数控制

陈 健, 张持健

CHEN Jian ZHANG Chi-jian

安徽师范大学 智能控制与测控技术研究中心, 安徽 芜湖 241000

Center for the Study of Intelligent Control and Measure Technique, Anhui Normal University, Wuhu, Anhui 241000, China

E-mail: zhenjian0715@163.com

CHEN Jian ZHANG Chi-jian. Control of triple inverted pendulum based on LQR coefficients optimization. Computer Engineering and Applications 2009, 45(29): 245-248.

Abstract: The inverted pendulum is one kind of ideal object for intelligent control. The Lagrangian equations are chosen to establish the nonlinear mathematical model of the triple inverted pendulum system and then the model is linearized in its equilibrium point and the control law by using LQR (Linear Quadratic Regulator) optimal control theory is acquired. By analyzing the simulation curves obtained from a series of stabilizing swing and perturbation experiments on the triple inverted pendulum system, it makes clear the importance of the weight coefficients in the weight matrix Q for inverted pendulum stable control, which can therefore help to optimize the selection of these weight coefficients. The experimental results show that the system presents favorable robustness and dynamic property.

Key words: triple inverted pendulum system; Linear Quadratic Regulator (LQR) theory; optimal control; weight matrix

摘 要: 倒立摆是智能控制的理想对象。使用拉格朗日方程建立三级倒立摆系统的非线性数学模型, 在平衡点处对其线性化, 利用 LQR (Linear Quadratic Regulator) 最优控制理论, 导出控制规律。通过对三级倒立摆一系列稳定摆动和加扰实验仿真曲线的分析, 明确了加权矩阵 Q 中各权系数对系统稳定性控制的重要性, 由此来优化权系数的选择。实验表明, 系统显示出较好的鲁棒性和动态性能。

关键词: 三级倒立摆系统; LQR 理论; 最优控制; 权矩阵

DOI: 10.3778/j.issn.1002-8331.2009.29.073 文章编号: 1002-8331(2009)29-0245-04 文献标识码: A 中图分类号: TP13

1 前言

倒立摆是一种典型的多变量、非线性、高阶次、强耦合的快速不稳定系统, 对其研究有重要的理论和实践意义。在控制过程中能反映许多关键问题, 如跟踪问题^[1]、非线性问题^[2]、鲁棒性问题^[3]、随动问题^[4]等, 它常常被用来作为检验某种控制理论的实验平台, 已经有很多学者对倒立摆系统进行了深入的研究并提出了诸多控制方法, 如 PID 控制^[5]、模糊控制^[6]、神经网络控制^[7]、遗传算法控制^[8]等, 这些理论和方法在多级火箭飞行姿态的控制、机器人站立与行走、导弹拦截控制系统和航空器对接控制技术等领域具有广阔的开发利用前景。其中, 已广泛用于多变量系统控制的线性二次型(LQR)最优控制方法, 也能实现倒立摆系统稳定控制的要求, 然而随着系统摆杆级数的增加, 系统的目标变量数目大大增多, 且非线性更强, 阶次更高, 使得权矩阵 Q 的确定具有一定的盲目性, 目前通常采用实验试探的方法^[9], 缺乏理论指导。

以三级倒立摆为研究对象, 采用拉格朗日方程建立系统的数学模型^[10]。根据 LQR 控制理论^[11], 求出最优状态反馈矩阵 K , 结合 MATLAB, 通过对三级倒立摆一系列稳定摆动和加扰控制

实验仿真曲线的对比分析, 得到了权矩阵 Q 优化选取的方法, 使系统显示出较好的鲁棒性和动态性能。该方法为多变量反馈系统的设计提供了有效的理论依据, 可适用于时变系统, 对噪声测量、处理扰动信号以及实际工程应用, 具有一定的指导意义。

2 三级倒立摆系统的拉格朗日方程建模

2.1 三级倒立摆系统描述

三级倒立摆系统的模型如图 1 所示, 该系统主要由沿轨道自由运动的小车和固定在小车上的摆杆组成, 摆杆与摆杆之间, 小车与摆杆之间通过转轴连接, 各级摆杆可以绕各自的转轴在轨道所在的铅直平面内自由转动, 并在转轴处有电位器分别用来测量上摆杆、中摆杆和下摆杆的角度变化, 轨道一端装有用来测量小车位移的电位器。直流电机通过传送带控制小车在轨道上的运动, 从而使摆杆稳定在竖直向上平衡点。

采用分析力学中的拉格朗日方程建立三级倒立摆系统的数学模型。为明确物理意义和推导的方便, 忽略了一些次要因素, 做出如下假设: (1) 除传送带外, 整个系统看作刚体; (2) 皮

基金项目: 国家自然科学基金(the National Natural Science Foundation of China under Grant No.6047 5017); 安徽省特色专业和安徽师范大学特优强专业建设基金(Featured Specialty of Anhui Province and Key Specialty Sponsored Foundation of Anhui Normal University)。

作者简介: 陈健(1984-), 男, 硕士, 主要研究领域为人工智能在光学中的应用等; 张持健(1964-), 男, 教授, 硕士生导师, 主要研究领域为人工智能(C)1994与自动控制技术等。Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

收稿日期: 2009-04-10 修回日期: 2009-06-01

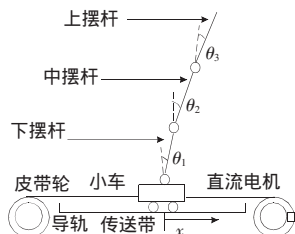


图1 三级倒立摆系统的模型

带轮和传送带之间无相对滑动,传送带无拉长现象,且传递作用的延迟忽略不计。(3)整个电路系统的传递延迟忽略不计,放大器和电位器是线性的。(4)小车运动过程中所受到的摩擦阻力正比于小车速度,摆杆转动时所受到的阻力矩正比于摆杆的角速度。定义系统各参数如表1所示。

$$M(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \begin{bmatrix} K_0 & K_1 \cos \theta_1 & K_2 \cos \theta_2 & M_3 l_3 \cos \theta_3 \\ K_1 \cos \theta_1 & K_3 & K_2 L_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) & M_3 L_1 l_3 \cos(\theta_3 - \theta_1) \\ K_2 \cos \theta_2 & K_2 L_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) & K_4 & M_3 L_2 l_3 \cos(\theta_3 - \theta_2) \\ M_3 l_3 \cos \theta_3 & M_3 L_1 l_3 \cos(\theta_3 - \theta_1) & M_3 L_2 l_3 \cos(\theta_3 - \theta_2) & J_3 + M_3 l_3^2 \end{bmatrix}$$

$$N(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3) = \begin{bmatrix} F_0 & -K_1 \sin \theta_1 \cdot \dot{\theta}_1 & -K_2 \sin \theta_2 \cdot \dot{\theta}_2 & -M_3 l_3 \sin \theta_3 \cdot \dot{\theta}_3 \\ 0 & F_1 + F_2 & -K_2 L_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) \cdot \dot{\theta}_2 - F_2 & -M_3 L_1 l_3 \sin(\theta_3 - \theta_1) \cdot \dot{\theta}_3 \\ 0 & K_2 L_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) \cdot \dot{\theta}_1 - F_2 & F_2 + F_3 & -M_3 L_2 l_3 \sin(\theta_3 - \theta_2) \cdot \dot{\theta}_3 - F_3 \\ 0 & M_3 L_1 l_3 \sin(\theta_3 - \theta_1) \cdot \dot{\theta}_1 & M_3 L_2 l_3 \sin(\theta_3 - \theta_2) \cdot \dot{\theta}_2 - F_3 & F_3 \end{bmatrix}$$

表1 三级倒立摆系统物理参数

符号	物理意义	数值	符号	物理意义	数值
x	小车位移	被控变量/m	l_1	下摆转轴到其重心的距离	0.37 m
θ_1	下摆角位移	被控变量/rad	l_2	中摆转轴到其重心的距离	0.3 m
θ_2	中摆角位移	被控变量/rad	l_3	上摆转轴到其重心的距离	0.05 m
θ_3	上摆角位移	被控变量/rad	J_1	下摆对质心的转动惯量	0.004 2 kg·m ²
M_0	小车质量	1.014 kg	J_2	中摆对质心的转动惯量	0.001 2 kg·m ²
M_1	下摆质量	0.450 6 kg	J_3	上摆对质心的转动惯量	0.000 1 kg·m ²
M_2	中摆质量	0.219 kg	u	控制器输出的控制电压	被控变量(V)
M_3	上摆质量	0.056 8 kg	G_0	控制力与功放输入电压之比	2.471 25 N/V
L_1	下摆摆长	0.43 m	F_0	小车与滑轨之间的摩擦系数	5.5 N·s/m
L_2	中摆摆长	0.33 m	F_1	下摆与转轴之间的摩擦系数	0.000 268 N·s/m
L_3	上摆摆长	0.13 m	F_2	中摆与转轴之间的摩擦系数	0.000 268 N·s/m
g	重力加速度	9.8 m/s ²	F_3	上摆与转轴之间的摩擦系数	0.000 268 N·s/m

2.2 三级倒立摆系统模型的推导

三级倒立摆系统的 Lagrange 方程为:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = F_i, L(q_i, \dot{q}_i) = T(q_i, \dot{q}_i) - V(q_i, \dot{q}_i) \quad (1)$$

其中,广义坐标 q_i 是小车位移 x 和摆杆角位移 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 。 F_i 为作用在系统上的广义力,当 $q_i = x$ 时 $F_i = G_0 u$; 当 $q_i = \theta_1, \theta_2, \theta_3$ 时, $F_i = 0$ 。 T, V, D 分别是小车和各级摆杆的总动能、总势能和总耗散能,可分别表示为:

$$T = 0.5 \sum_{i=1}^3 I_i \dot{\theta}_i^2 + \frac{m_i}{2} \left[\frac{d}{dt} \left(x + \sum_{k=2}^{i-1} (L_k \sin \theta_k + l_i \sin \theta_i) \right)^2 + \left[\frac{d}{dt} \left(\sum_{k=2}^{i-1} (L_k \cos \theta_k + l_i \cos \theta_i) \right) \right]^2 \right] + 0.5 M \dot{x}^2 \quad (2)$$

$$V = \sum_{i=1}^3 m_i g (l_i \cos \theta_i + \sum_{k=2}^{i-1} L_k \cos \theta_k) \quad (3)$$

$$D = 0.5 \sum_{i=1}^3 F_i (\dot{\theta}_i^2 - \dot{\theta}_{i-1}^2) + 0.5 F_i \dot{x}^2 \quad (4)$$

将式(2)(3)(4)代入(1)经过化简,可得三级倒立摆系统的非线性数学模型为:

$$M(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{bmatrix} + N(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3) \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} = G(u, \theta_1, \theta_2, \theta_3) \begin{bmatrix} x \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} \quad (5)$$

其中:

$$G(u, \theta_1, \theta_2, \theta_3) = [G_0 u \quad K_1 g \sin \theta_1 \quad K_2 g \sin \theta_2 \quad M_3 g l_3 \sin \theta_3]^T$$

$$K_0 = M_0 + M_1 + M_2 + M_3, K_1 = M_1 l_1 + M_2 L_1 + M_3 L_1, K_2 = M_2 l_2 + M_3 L_2$$

$$K_3 = J_1 + M_1 l_1^2 + M_2 L_1^2 + M_3 L_1^2, K_4 = J_2 + M_2 l_2^2 + M_3 L_2^2$$

将式(5)在系统平衡点 $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0, \dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_3 = 0$ 处线性化得:

$$M(0, 0, 0) \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{bmatrix} = -N(0, 0, 0, 0, 0, 0) \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} + F(0, 0, 0) \begin{bmatrix} x \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = G(0, 0, 0) u \quad (6)$$

其中:

$$M(0, 0, 0) = \begin{bmatrix} K_0 & K_1 & K_2 & M_3 l_3 \\ K_1 & K_3 & K_2 L_1 & M_3 L_1 l_3 \\ K_2 & K_2 L_1 & K_4 & M_3 L_2 l_3 \\ M_3 l_3 & M_3 L_1 l_3 & M_3 L_2 l_3 & J_3 + M_3 l_3^2 \end{bmatrix}$$

$$N(0, 0, 0, 0, 0, 0) = \begin{bmatrix} F_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F_1 + F_2 & -F_2 & 0 \\ 0 & -F_2 & F_2 + F_3 & -F_3 \\ 0 & 0 & -F_3 & F_3 \end{bmatrix}$$

$$F(0, 0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_1 g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_2 g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_3 g l_3 \end{bmatrix}, G(0, 0, 0) = [G_0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$$

使用 $X = [x \quad \theta_1 - \theta_2 \quad \theta_3 - \theta_2 \quad x \quad \dot{\theta}_1 \quad \dot{\theta}_2 \quad \dot{\theta}_3 \quad \dot{\theta}_3]$ 作为系统状态变量,

输出变量为 $Y=[x \ \dot{\theta}_1 \ \theta_2-\theta_1 \ \theta_3-\theta_2]^T$

$$\text{利用变换 } T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

得到系统的状态方程如下:

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + Bu \\ Y = CX + Du \end{cases} \quad (7)$$

其中:

$$A = \begin{pmatrix} O_{4 \times 4} & I_{4 \times 4} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}_{8 \times 8}, \quad B = \begin{pmatrix} O_{4 \times 1} \\ B_2 \end{pmatrix}_{8 \times 1}, \quad C = (I_{4 \times 4} \ O_{4 \times 4})_{8 \times 4}, \quad D = O_{4 \times 1}$$

$$A_{21} = TM^{-1}(0 \ 0 \ \rho)F(0 \ 0 \ \rho)T^{-1},$$

$$A_{22} = -TM^{-1}(0 \ 0 \ \rho)N(0 \ 0 \ \rho \ \rho \ \rho)T^{-1}$$

$$B_2 = TM^{-1}(0 \ 0 \ \rho)G(0 \ 0 \ \rho)$$

3 基于 LQR 算法的三级倒立摆的控制研究

3.1 LQR 控制方法理论分析

针对上述三级倒立摆系统式(7), 采用最优控制 LQR 算法, 确定最佳控制量 $u(t) = -KX$ 的反馈矩阵 K , 使得闭环系统渐近稳定, 同时使控制性能指标:

$$J = \frac{1}{2}x^T Sx + \frac{1}{2} \int_0^\infty (x^T Qx + u^T Ru) dt \quad (8)$$

达到最小, 即系统在整个控制过程中的动态跟踪误差与控制能量消耗, 以及控制过程结束时的末端跟踪偏差的综合最优。其中 S, Q, R 为正定(或半正定)的厄米特或实对称矩阵, S 是相应的代数 Riccati 方程:

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (9)$$

的解 Q, R 分别是状态变量和控制量的加权矩阵。权矩阵 $Q = \text{diag}(q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5 \ q_6 \ q_7 \ q_8)$, 对角线上各权系数分别代表各项指标误差的相对重要性, R 代表了能量损耗的相对重要性, 其作用在于限制控制器的输出不至太大而导致难于控制。 Q 中各权系数的优化选取对系统的整体控制性能有很大的影响, 选择合适的权矩阵 Q 是系统稳定性控制的关键, 然而对于三级倒立摆这一类高阶次的非线性系统, 由于其状态变量数目较多, 权系数的确定没有特定的方法, 缺乏理论指导, 权矩阵 Q 的选择具有一定的盲目性, 为了获得理想的控制效果, 通过实验验证的方法, 寻找权矩阵 Q 选取的规律。

3.2 三级倒立摆系统仿真研究

根据经验可知, 为满足系统稳定性控制的要求, 权矩阵 Q 中与各主要被控量相对应的权系数一般取值较大, 并且当 Q 矩阵的值较大时, 系统能更快地达到稳定状态。在三级倒立摆系统的控制过程中, 小车的位移 x 和各个摆杆的摆角 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 为主要的被控量, 因此 Q 中与这些指标相对应的权值 $q_i (i=1, 2, 3, 4)$ 对系统性能有很大影响, 应该选取较大的值, 可暂取为 100; 而与速度指标相对应的权系数对指标函数式(8)贡献很小, 各速度项对应的权系数可取为 1, 即 $q_i (i=5, 6, 7, 8) = 1$ 。通常, 为不失一般性, R 矩阵可取 1。

实验中, 竖直向上为系统不稳定平衡点, 小车的速度和各摆杆的角速度很小, 起始时间为 $t=0$, 此时, 各状态变量被赋予一定的初始值, 采样时间为 0.02 s, 给小车一个初始作用力 u_0 , 使系统进入暂态。首先以三级倒立摆系统的上摆杆摆角为研究对象, 当 $q_i (i=1, 2, 3, 4)$ 分别增大时, 上摆杆摆角的响应曲线如上图 2 所示。

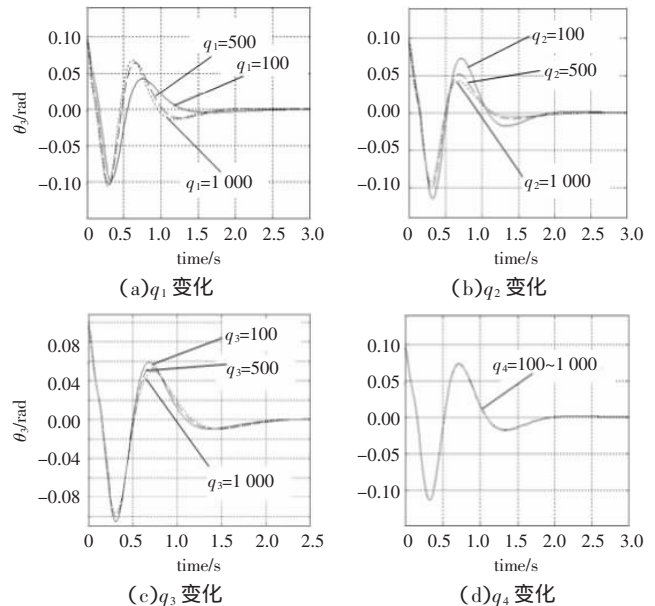


图 2 $q_i (i=1, 2, 3, 4)$ 变化时上摆杆摆角的响应曲线

由图 2 所示三级倒立摆系统上摆杆摆角的动态响应曲线可知, q_1 和 q_2 对上摆杆摆角的响应状态影响作用较大, 而 q_3 和 q_4 对响应状态影响作用较小, 尤其是 q_4 的影响作用几乎为零。通过初步分析, 得到了权矩阵中各主要权值变化时, 上摆杆摆角动态响应的变化趋势。根据得到的结论, 可以进一步做出假设, q_1 和 q_2 变化时, 对于系统的中摆杆摆角, 下摆杆摆角和小车位移的响应状态的影响作用, 较 q_3 和 q_4 的影响作用也要大得多。为了证明上面的假设, 通过实验进行验证。实验结果如表 2 所示, 其中, “ t_d ”为延迟时间, “ t_p ”为峰值时间, “ t_s ”为调节时间, “ Δ ”为超调量, “ \uparrow ”表示增大, “ \downarrow ”表示减小, “ $-$ ”表示不变。

表 2 系统时域动态特性受 $q_i (i=1, 2, 3, 4)$ 影响的变化趋势

q_i 变化情况	小车位移 x	下摆杆摆角 θ_1
q_1 由小变大	$t_d \downarrow, t_p \downarrow, t_s \downarrow, \Delta \downarrow$	$t_d \downarrow, t_p \downarrow, t_s \downarrow, \Delta \downarrow$
q_2 由小变大	$t_d \uparrow, t_p \uparrow, t_s \uparrow, \Delta \downarrow$	$t_d \uparrow, t_p \uparrow, t_s \uparrow, \Delta \downarrow$
q_3 由小变大	$t_d \uparrow, t_p \uparrow, t_s \uparrow, \Delta \uparrow$	$t_d \uparrow, t_p \uparrow, t_s \uparrow, \Delta \downarrow$
q_4 由小变大	$t_d \uparrow, t_p \uparrow, t_s \uparrow, \Delta \downarrow$	$t_d \uparrow, t_p \uparrow, t_s \uparrow, \Delta \downarrow$
对 t_d 的影响程度	$q_1 > q_2 > q_3 = q_4$	$q_1 > q_2 > q_3 = q_4$
对 t_p 的影响程度	$q_1 > q_2 > q_3 = q_4$	$q_1 > q_2 > q_3 = q_4$
对 t_s 的影响程度	$q_1 > q_2 > q_3 = q_4$	$q_1 > q_2 > q_3 = q_4$
对 Δ 的影响程度	$q_1 > q_2 > q_3 = q_4$	$q_2 > q_1 > q_3 = q_4$
q_i 变化情况	中摆杆摆角 θ_2	上摆杆摆角 θ_3
q_1 由小变大	$t_d \downarrow, t_p \downarrow, t_s \downarrow, \Delta \downarrow$	$t_d \downarrow, t_p \downarrow, t_s \downarrow, \Delta \uparrow$
q_2 由小变大	$t_d \uparrow, t_p \uparrow, t_s \uparrow, \Delta \downarrow$	$t_d \uparrow, t_p \uparrow, t_s \uparrow, \Delta \downarrow$
q_3 由小变大	$t_d \uparrow, t_p \uparrow, t_s \uparrow, \Delta \downarrow$	$t_d \uparrow, t_p \uparrow, t_s \uparrow, \Delta \downarrow$
q_4 由小变大	$t_d \uparrow, t_p \uparrow, t_s \uparrow, \Delta \downarrow$	$t_d \uparrow, t_p \uparrow, t_s \uparrow, \Delta \downarrow$
对 t_d 的影响程度	$q_2 > q_1 > q_3 = q_4$	$q_2 > q_1 > q_3 = q_4$
对 t_p 的影响程度	$q_1 > q_2 > q_3 = q_4$	$q_1 > q_2 > q_3 = q_4$
对 t_s 的影响程度	$q_1 > q_2 > q_3 = q_4$	$q_2 > q_1 > q_3 = q_4$
对 Δ 的影响程度	$q_2 > q_1 > q_3 = q_4$	$q_2 > q_1 > q_3 = q_4$

由表 2 可知 (1) 对于小车位移 x 和各个摆杆角位移 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, q_1 和 q_2 的影响作用较大, q_3 的影响次之, q_4 影响作用近似于零; (2) 对于系统时域动态特性中的延迟时间 t_d , 峰值时间 t_p 和调节时间 t_s , q_1 的影响作用最大, q_2, q_3, q_4 的影响作用依次减弱; (3) 对于系统的超调量 Δ , q_2 的影响作用最大, q_1, q_3 和 q_4 的影响作用相对较小。综合看来, q_1 和 q_2 对系统各项特性的影响作用最大, q_3 的影响次之, q_4 影响作用最小。实验证明, 上面提出的假设是完全正确的。

利用表 2 得到的规律, 可先假设 $q_1 > q_2 > q_3 = q_4$, 通过多次尝试, 并综合考虑各项因素, 取 $Q = \text{diag}(600, 1000, 500, 100, 1, 1, 1, 1)$,

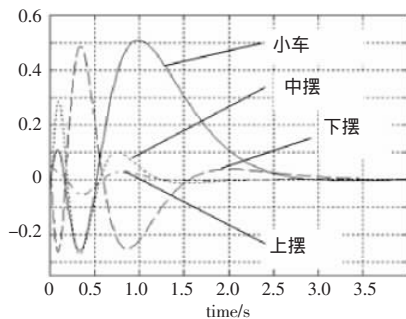


图3 三级倒立摆系统响应曲线

1, 1) $R=1$, 由黎卡提方程解得反馈矩阵为 $K=[-7.746 \ -80.334 \ 92.921 \ -970.334 \ -13.232 \ -31.790 \ -24.617 \ -79.988]$, 选取系统的初始状态为 $x=0 \ \theta_{10}=0.02 \ \theta_{20}=-0.05 \ \theta_{30}=0.05$, 得到三级倒立摆系统的响应曲线如图3所示。

当系统稳定之后, 在 $t=6\text{ s}$ 时, 给系统加一个阶跃扰动(这里给上摆角加一个 0.05 rad 的偏角), 得到系统的响应曲线如图4所示, 仿真曲线表明, 系统不但稳定性良好, 而且还具有一定的抗干扰能力。

4 结论

三级倒立摆系统的复杂性为其权矩阵 Q 的选取设置了障碍。首先利用拉格朗日方程建立系统的数学模型, 根据最优化控制理论, 结合 MATLAB 软件, 对系统进行稳定摆动和加扰仿真实验。通过对实验数据的对比分析, 探讨了权矩阵 Q 中各权系数对系统响应特性的影响作用, 从而获得权矩阵 Q 选取的初步规律。实验结果表明, 使用优化后的权矩阵对倒立摆系统进行控制, 能够达到稳定性控制的效果, 且系统具有一定的抗干扰能力, 该方法对使用 LQR 理论研究多变量的非线性系统具有一定的指导意义。

参考文献:

- [1] Pathak K, Franch J, Agrawal S A. Velocity and position control of a wheeled inverted pendulum[J]. IEEE Trans Robot, 2005, 21(3): 505-514.

(上接 206 页)

$$k_{ij} = \begin{cases} \frac{K_i(N_j)}{\max K_i(x)} & M_i \text{ 为正衡量条件} \\ \frac{\min K_i(x)}{K_i(N_j)} & M_i \text{ 为负衡量条件} \end{cases} \quad (6)$$

($i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, m$)

(6) 计算优度

对象 N_j 关于各衡量条件 M_1, M_2, \dots, M_n 的规范合格度为:

$$K(N_j) = [k_{1j}, k_{2j}, \dots, k_{nj}] \quad (j=1, 2, \dots, m)$$

故对象 N_j 的优度为:

$$C(N_j) = \tilde{w}k^T(N_j) = ([w_1^L \ w_1^U] [w_2^L \ w_2^U] \dots [w_n^L \ w_n^U]) \begin{bmatrix} k_{1j} \\ k_{2j} \\ \vdots \\ k_{nj} \end{bmatrix} = \left[\sum_{i=1}^n w_i^L k_{ij}, \sum_{i=1}^n w_i^U k_{ij} \right] = \tilde{d}_j \quad (7)$$

(7) 优度排序

上一步中求出的对象 N_j 的优度是一个区间数, 对于所有的区间数 $\tilde{d}_1, \tilde{d}_2, \dots, \tilde{d}_m$, 建立区间数两两比较的可能度矩阵, 即:

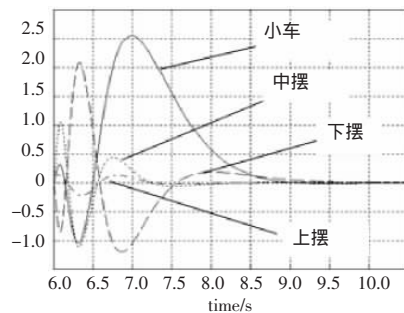


图4 系统加扰动后的响应曲线

- [2] 鄂大志, 薛定语, 魏玲. 网络控制系统结构下的非线性系统建模与仿真[J]. 系统仿真报, 2008, 20(17): 4521-4524.
- [3] 郑宇, 罗四维, 吕子昂. 倒立摆系统中强化学习的极限环问题[J]. 计算机工程与应用, 2008, 44(10): 16-19.
- [4] Becerikli Y, Celik B K. Fuzzy control of inverted pendulum and concept of stability using Java application[J]. Mathematical and Computer Modeling, 2007, 46(12): 24-37.
- [5] 杨平, 徐春梅, 曾婧婧, 等. PID 控制在倒立摆实时控制系统中的应用[J]. 微计算机信息, 2006, 83(3): 83-85.
- [6] El-Hawary M I, Elshafei A L, Emara H M et al. Adaptive fuzzy control of the inverted pendulum problem[J]. IEEE Transaction on Control System Technology, 2007, 14(6): 1135-1144.
- [7] Wai Rong-jong, Chang Li-jung. Stabilizing and tracking control of nonlinear dual-axis inverted-pendulum system using fuzzy neural network[J]. IEEE Transaction on Fuzzy Systems, 2006, 14(1): 145-168.
- [8] 徐立芳, 王科俊, 莫宏伟. 基于免疫克隆算法的倒立摆控制参数优化[J]. 计算机工程与应用, 2007, 43(35): 179-182.
- [9] Eltohamy K G, Kuo Chen-yuan. Nonlinear optimal control of a triple link inverted pendulum with single control input[J]. Int J Control, 1998, 69(2): 239-256.
- [10] 韩广才, 李鸿, 商中大. 分析力学[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学出版社, 2003: 39-60.
- [11] 胡寿松. 自动控制原理[M]. 4版. 北京: 科学出版社, 2001: 516-576.
- [12] 吴晓莉, 林哲辉. MATLAB 辅助模糊系统设计[M]. 西安: 西安电子科技大学出版社, 2003.

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} S_1 & S_2 & \cdots & S_m \end{matrix} \\ \begin{matrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_m \end{matrix} & \begin{bmatrix} - & p_{12} & \cdots & p_{1m} \\ p_{21} & - & \cdots & p_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & - \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (8)$$

其中 p_{ij} 表示 $\tilde{d}_i > \tilde{d}_j$ 的可能度。因此, 可以通过矩阵 P 看出所有方案中两两方案的比较结果, 进而比较出所有方案的优劣。

参考文献:

- [1] 应卫平, 李仁旺, 韦波, 等. 优度评价法及其 Web 专家评价模型设计与研究[J]. 浙江理工大学学报, 2006, 23(4): 409-413.
- [2] 姜智睿, 姜青山, 付爱辰, 等. 利用优度评价法评估导弹武器系统作战效能[J]. 海军航空工程学院学报, 2006, 21(4): 467-470.
- [3] 周艳美, 李伟华. 改进模糊层次分析法及其对任务方案的评价[J]. 计算机工程与应用, 2008, 44(5): 212-214.
- [4] 蔡文, 杨春燕, 林伟初. 可拓工程方法[M]. 北京: 科学出版社, 1997: 106-116.
- [5] 李志林. 关联函数为区间数的综合评价方法[J]. 江汉大学学报: 自然科学版, 2003, 31(5): 17-20.