Modelo Binomial de Cox–Ross–Rubinstein (CRR)
Aplicación al Pricing de un Call Europeo con Réplica y Greeks

1. Introducción

El modelo binomial para el pricing de opciones financieras, introducido por Cox, Ross y Rubinstein (1979), constituye uno de los pilares fundamentales de la teoría moderna de derivados. A diferencia de modelos continuos como Black–Scholes, el enfoque binomial trabaja con un árbol discreto de precios que evoluciona en pasos de tiempo pequeños.

Su principal ventaja es que:

1. Permite valorar opciones europeas y americanas.
2. Muestra de forma explícita el **portafolio replicante** (Delta + Bono).
3. Sirve como aproximación numérica al modelo de Black–Scholes cuando el número de pasos tiende a infinito.

Este documento presenta una implementación del modelo CRR utilizando Python, siguiendo el tratamiento teórico de:

- **Hull**, "Options, Futures and Other Derivatives" (cap. 13)
- **Wilmott**, "Paul Wilmott Introduces Quantitative Finance" (cap. 5)

2. Fundamentos Teóricos

2.1 Dinámica del Precio Bajo el Modelo Binomial

En cada paso de tiempo Δt, el precio del activo subyacente puede:

- subir un factor **u**
- bajar un factor **d**

En el modelo CRR (Hull, cap. 13):

- $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$
- $d = 1/u$

Esta elección asegura que:

1. La volatilidad del modelo discreto coincide con la volatilidad σ del modelo continuo.
2. El proceso converge a un movimiento Browniano con drift bajo medida neutral al riesgo.

2.2 Probabilidades Riesgo-Neutral

Un pilar central del pricing moderno es trabajar con probabilidades “riesgo-neutral”. Bajo esta medida, el rendimiento esperado del activo subyacente debe ser **la tasa libre de riesgo r**, no las expectativas reales del mercado.

La probabilidad neutral al riesgo se define como:

$$p = (e^{r\Delta t} - d) / (u - d)$$
$$q = 1 - p$$

Esta probabilidad **no describe el mundo real**, sino un mundo equivalente en el que:

- Todos los activos crecen al ritmo del interés libre de riesgo.
- El precio actual de cualquier derivado es el valor presente de su esperanza riesgo-neutral.

Este concepto es crucial tanto para el modelo binomial como para Black–Scholes.

3. Construcción del Árbol Binomial

El árbol de precios se construye como:

$$S(j,i) = S0 \cdot u^{j} \cdot d^{(i-j)}$$

donde:

- i = número de pasos
- j = número de subidas dentro del paso i

El resultado es una matriz triangular que contiene todos los posibles caminos del precio.

4. Payoff del Call Europeo

Un call europeo tiene valor terminal:

$$C_T = \max(S_T - K, 0)$$

En el último nivel del árbol ($i = N$), se calculan todos los payoffs terminales.

5. Backward Induction: Pricing de la Opción

El precio en cada nodo previo se obtiene aplicando:

$$C = e^{-r\Delta t} [p\cdot C_{up} + q\cdot C_{down}]$$

Esto representa:

1. El valor esperado bajo medida riesgo-neutral.
2. El descuento al presente utilizando la tasa libre de riesgo.
3. La eliminación de oportunidades de arbitraje.

Iterando hacia atrás se obtiene el precio de la opción hoy:

$C_0 = C(0,0)$

6. Portafolio Replicante: Delta y Bono

El modelo binomial permite mostrar explícitamente la réplica del derivado mediante una combinación de:

- **Δ unidades del subyacente**
- **B en un bono libre de riesgo**

Para cada nodo:

$\Delta = (C_{up} - C_{down}) / (S_{up} - S_{down})$

$B = e^{-r\Delta t}(C_{down} - \Delta \cdot S_{down})$

Interpretación:

- Delta indica cuántas unidades del subyacente hay que comprar para replicar la opción.
- El bono ajusta la posición para cubrir completamente el payoff futuro.
- Es la base de la **cobertura dinámica** que motiva el modelo Black–Scholes.

7. Greeks desde el Árbol Binomial

Se calculan usando diferencias finitas:

1. **Delta (Δ)** – sensibilidad del precio de la opción respecto al precio del activo.
2. **Gamma (Γ)** – tasa de cambio de la Delta.
3. **Theta (Θ)** – decaimiento temporal del valor de la opción.

Interpretación para los valores obtenidos:

- **Delta ≈ 0.62**
  Por cada USD 1 que sube el subyacente, el precio de la opción sube aproximadamente USD 0.62.

- **Gamma ≈ 0.04**
  Delta cambia lentamente. Esto es típico de opciones algo OTM/ATM con volatilidad moderada.
- **Theta ≈ 29.28** (valor anualizado en este modelo discreto)
  Representa la pérdida de valor por el paso del tiempo. Opciones compradas usualmente tienen **Theta negativo**, lo que coincide con la teoría.

8. Resultados del Ejemplo

Usando:

S0 = 99
K = 100
r = 0.05
σ = 0.20
T = 1
N = 5

El modelo produce:

- **Precio del call hoy:** 10.8059
- **Delta:** 0.6239
- **Gamma:** 0.0406
- **Theta:** 29.2812

Estos resultados son coherentes con los ejemplos de Hull y Wilmott y se acercan al valor que daría Black–Scholes en el continuo.

9. Conclusión

El modelo binomial CRR es una herramienta fundamental para entender:

- Cómo se replica un derivado
- Cómo se eliminan riesgos mediante Delta hedging
- Cómo se construye el pricing arbitrage-free
- Cómo se llega al modelo continuo de Black–Scholes
- Cómo interpretar las Greeks desde una perspectiva estructural

El proyecto implementado en Python reproduce fielmente la teoría presentada en Hull y Wilmott y constituye la base perfecta para avanzar hacia:

- Black–Scholes
- Volatilidad implícita
- Estructuras de opciones
- Estrategias de cobertura
- Modelos estocásticos avanzados