Distribución de Poisson

Esta distribución fue desarrollada por el matemático francés Simeon Poisson
(1781 – 1840). La distribución de Poisson determina la probabilidad de ocurrencia de un
resultado en el tiempo o en el espacio, esto es medir la probabilidad de ocurrencia de un evento sobre un intervalo de tiempo o espacio definido.

Consideremos que el experimento consiste en una sucesión de "n" ensayos independientes con probabilidad de éxito constante e igual a "p" en cada ensayo. Supongamos, además, que "p" es tan pequeño que un éxito es un suceso raro en cualquier ensayo, pero que el número "n" de ensayos es tan grande que la magnitud np=λ permanece constante de experimento en experimento.

Entonces:

$$\mathrm{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{k}}\mathrm{P}^{\mathrm{k}}(1-\mathrm{P})^{\mathrm{n-k}}=\frac{n(n-1)\ldots.(n-k-1)}{k!}p^k(1-p)^{n-k}=$$

$$\frac{(np)^k}{k!}.\frac{n}{n}.\frac{(n-1)}{n}\ldots\frac{(n-k)}{n}.(1-p)^{-k}.\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\big(1+o(1)\big).$$

Cuando $n\to\infty$ se cumple dicha aproximación.

Lo anterior motiva a formular la siguiente definición:

- **Definición:**

Se denomina variable aleatoria de Poisson con parámetro λ a toda variable aleatoria discreta con distribución

P{ ξ=k}=$e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$, k=0,1,2,……..

Notación: ξ =Π[λ]

Esta definición es correcta, puesto que:

$$\sum_{\mathrm{k}=0}^{\infty}P\{\xi=\mathrm{k}\}=e^{-\lambda}\sum_{\mathrm{k}=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=e^{-\lambda}.e^{\lambda}=1$$

De esta manera, una variable aleatoria de Poisson representa el número de éxitos en una serie ilimitada de ensayos, suponiendo que la probabilidad de éxito en cada ensayo es muy pequeña.

Ejemplo:

La probabilidad de que haya un accidente en una compañía es de 0.02 por cada día de trabajo. Si se trabajan 300 días al año, ¿cuál es la probabilidad de tener 3 accidentes?

Para este caso, la probabilidad “p” es de

p = 0.02 → 2 % < 10 % → $p < 0.10$

El tamaño de muestra “n” vendría a estar dado

n = 300

p*n = 0.02 * 300 = 6 → p*n < 10

Gracias a estas condiciones, podemos aplicar el modelo de distribución de Poisson

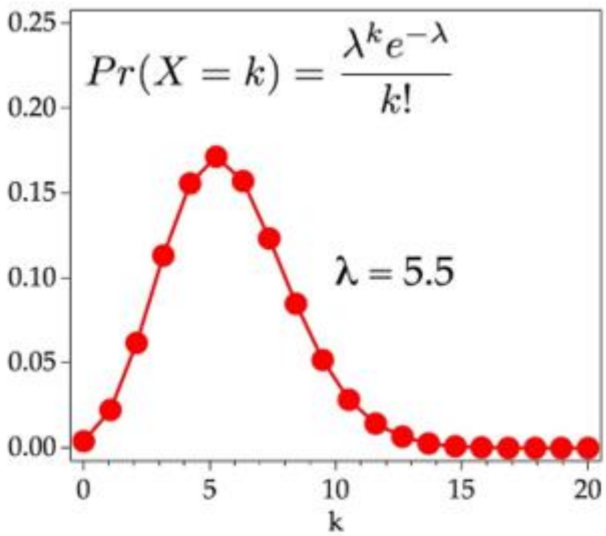
k = 3

λ = p*n = 6

$$P(X = 3) = e^{-\lambda} \times \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$P(X = 3) = e^{-6} \times \frac{6^3}{3!}$$

$$P(X = 3) = 0.0892$$



Gráfica que describe una distribución de Poisson para un λ = 5.5 para k desde 0 a 20.