

TESIS MAESTRÍA EN FÍSICA

FRENTES DE ONDA EN ECUACIONES DE REACCIÓN-DIFUSIÓN-CONVECCIÓN SOBRE MEDIOS HETEROGÉNEOS

Lic. Renzo Zagarra Saez
Maestrando

Dr. Alejandro Kolton
Director

Miembros del Jurado
Dr. Ezequiel Ferrero

8 de Julio de 2022

Teoría de la Materia Condensada – Centro Atómico Bariloche

Instituto Balseiro
Universidad Nacional de Cuyo
Comisión Nacional de Energía Atómica
Argentina

A mis padres, Francisco y Liliana,
por su apoyo incondicional.

A mis hermanos, Franco y Lucas,
por hacer de cada momento una sonrisa.

A mi novia, Sol,
por acompañarme y entenderme como nadie.

Índice de contenidos

Índice de contenidos	v
Índice de símbolos	vii
Índice de figuras	ix
Índice de tablas	xi
Resumen	xiii
Abstract	xv
1. Introducción	1
2. Marco teórico	3
2.1. Modelo SIR	3
2.2. Modelo SIR de reacción-difusión homogéneo	6
2.2.1. Soluciones de onda	6
2.3. Modelo SIR de reacción-difusión heterogéneo	9
2.3.1. Problema y observables	9
2.3.2. Tipos de heterogeneidades	11
3. Simulaciones numéricas	15
3.1. Medios aleatorios	15
3.1.1. Caso homogéneo	16
3.1.2. Heterogeneidad dicotómica-aleatoria	18
3.2. Medios correlacionados	22
3.2.1. Velocidad y amplitud del frente	23
3.2.2. Rugosidad y factor de estructura	27
3.3. Nocividad	29
4. Conclusiones	31

A. Metodología numérica	32
Bibliografía	35
Agradecimientos	37

Índice de símbolos

$S(x, y, t)$	Fracción de susceptibles en la posición (x, y) en el instante t .
$I(x, y, t)$	Fracción de infectados en la posición (x, y) en el instante t .
$R(x, y, t)$	Fracción de recuperados en la posición (x, y) en el instante t .
β	Tasa de transmisión.
γ	Tasa de recuperación.
S_0	Distribución inicial de la fracción de susceptibles.
S_c	Fracción de susceptibles crítica.
R_0	Coeficiente de reproducción.
D_x	Coeficiente de dispersión de x .
$u(y, t)$	Campo de desplazamiento del frente de onda.
$u_{cm}(t)$	Centro de masa del frente de onda.
I_{max}	Amplitud media del frente de onda.
c	Velocidad media del frente de onda.
$w(t)$	Rugosidad del frente de onda.
$S(q)$	Factor de estructura del campo de desplazamiento del frente de onda.
$f_I(t)$	Perfil centrado del frente de onda.
$\beta_{\mathbf{r}}$	Distribución espacial de la tasa de transmisión.
H	Medio homogéneo
DA	Heterogeneidad dicotómica-aleatoria.
S	Heterogeneidad suavizada.
DC	Heterogeneidad dicotómica-correlacionada.

Índice de figuras

2.1. Solución numérica del modelo S-I-R	4
2.2. De izquierda a derecha: representación de β_r sobre una grilla de 20×20 para $p = 0.3$, $p = 0.5$, $p = 0.7$ y $p = 0.9$	12
2.3. A la izquierda, se muestra una realización de β_r con $p = 0.5$. A la derecha, se muestra el efecto de un paso de suavizado sobre el β_r original.	12
2.4. De izquierda a derecha: representación de $\beta_r^{(1)}$ sobre una grilla de 20×20 para $p = 0.3$, $p = 0.5$, $p = 0.7$ y $p = 0.9$	13
2.5. De izquierda a derecha: se muestran los $\beta_r^{(n)}$ con $n = 0, 1, 3, 10$ sobre una grilla de 20×20	13
2.6. De izquierda a derecha: representación de $\tilde{\beta}_r^{(1)}$ sobre una grilla de 20×20 para $p = 0.3$, $p = 0.5$, $p = 0.7$ y $p = 0.9$	14
2.7. De izquierda a derecha: se muestran los $\tilde{\beta}_r^{(n)}$ con $n = 0, 1, 3, 10$ sobre una grilla de 20×20	14
3.1. Evolución del frente de infección/incendio para el problema homogéneo.	16
3.2. Posición del centro de masa del frente de propagación en función del tiempo para distintos valores de γ/β junto con los correspondientes ajustes lineales. Se muestra también la velocidad c del frente obtenida para cada caso.	17
3.3. Perfil del frente de propagación $f_I(x)$ para $\gamma/\beta = 0.2$. Se muestran también los perfiles asintóticos frontal y posterior del frente de onda calculados en la sección 2.2.	17
3.4. Evolución del frente de infección/incendio para el problema heterogéneo dicotómico-aleatorio con $p = 0.3$, $\gamma/\beta = 0.2$ y $D_I = 1$	18
3.5. Posición del centro de masa del frente de propagación en función del tiempo para distintos valores de p , con $\gamma/\beta = 0.2$ y $D_I = 1$	19
3.6. Rugosidad $w(t)$ en función de la posición del centro de masa para distintos valores de p , con $\gamma/\beta = 0.2$ y $D_I = 1$	19

3.7. Velocidad c del frente de propagación en función de p con $\gamma/\beta = 0.2$ y 0.4 y $D_I = 1$. Se muestran los ajustes con la regla de potencia $c \propto (1 - p/p_c)^{\alpha_c}$ sobre la región crítica.	20
3.8. Amplitud media I_{max} del frente de propagación en función de p con $\gamma/\beta = 0.2$ y 0.4 y $D_I = 1$. Se muestran los ajustes con la regla de potencia $I_{max} \propto (1 - p/p_c)^{\alpha_I}$ sobre la región crítica.	21
3.9. Evolución temporal del sistema para $p = 0.3$ con un paso de S.	23
3.10. Evolución temporal del sistema para $p = 0.3$ con un paso de DC.	23
3.11. Posición del centro de masa del frente en función del tiempo sobre el medio S.	24
3.12. Posición del centro de masa del frente en función del tiempo sobre el medio DC.	24
3.13. Velocidad del frente de infección en función del valor medio de la tasa de transmisión $\overline{\beta_r}$ sobre los medios S, DC, DA y H. Se muestran los ajustes con la regla de potencia $c \propto (\beta - \beta_c)^{\alpha_c}$ sobre la región crítica.	25
3.14. Distribución de la tasa de transmisión β_r del medio DA. A izquierda se muestra la distribución sobre todo el espacio de 1024×1024 y a la derecha un acercamiento a una región de 100×100	25
3.15. Distribución de la tasa de transmisión β_r del medio DC. A izquierda se muestra la distribución sobre todo el espacio de 1024×1024 y a la derecha un acercamiento a una región de 100×100	26
3.16. Amplitud media del frente de infección/incendio I_{max} en función de la tasa de transmisión media $\overline{\beta_r}$ para los medios S, DA, DC y H.	27
3.17. Rugosidad del frente de infección/incendio en función de la tasa de transmisión media $\overline{\beta_r}$ para los medios S, DA y DC.	28
3.18. Factor de estructura $S(q)$ sobre el medio DA cerca de la tasa de transmisión crítica. Se muestra el ajuste $S(q) \sim 1/q^{1+2\zeta}$ con $\zeta \approx 0.3$	28
3.19. Fracción de susceptibles S_1 en función de la tasa de transmisión media $\overline{\beta_r}$ para los medios H, S, DA y DC.	29
A.1. Tiempo de resolución de un sistema de $N \times N$ sitios y 1000 pasos de Euler con procesadores gráficos (GPU) y con procesadores convencionales (CPU). Se muestran también los ajustes de tipo $t \propto N^a$ con $a \approx 2$ para ambos.	33

Índice de tablas

3.1. Parámetros críticos p_c y α_c de los medios H y DA con diferentes γ/β . . .	21
3.2. Parámetros críticos p_c y α_I del medio DA con diferentes γ/β	21
3.3. Parámetros críticos β_c y α_c de los medios DC, DA ,S y H.	26
3.4. Parámetros críticos β_c y α_w de los medios DC, DA y S.	27

Resumen

Se estudió la propagación de frentes de onda gobernados por ecuaciones de reacción-difusión en el marco del modelo SIR espacial. Dichos frentes de onda podrían utilizarse para caracterizar frentes de infección en una problemática epidemiológica o bien orientarse a una problemática completamente diferente como lo son los frentes de incendios. Se definió una metodología estadística para la caracterización de los frentes de onda a partir de la cual se obtuvieron resultados cuantitativos respecto de la velocidad, la amplitud media, las propiedades geométricas e incluso la nocividad de los frentes sobre diferentes medios isotrópicos. En particular, se exploraron medios homogéneos, desordenados y correlacionados a partir de lo cual pudo describirse cuantitativamente el efecto que tenía cada uno de ellos sobre las características del frente de onda.

Se realizaron simulaciones numéricas masivas para resolver el sistema de ecuaciones de reacción-difusión involucrado en la dinámica. Estas se implementaron de manera eficiente utilizando computación acelerada a través de programación en paralelo sobre procesadores gráficos. De esta manera fue posible obtener resultados sobre sistemas a gran escala en tiempos razonables.

Palabras clave: SISTEMAS COMPLEJOS, MEDIOS DESORDENADOS, ECUACIONES DE DIFUSIÓN, MODELO SIR

Abstract

The propagation of wave fronts governed by reaction-diffusion equations were studied within the framework of the spatial SIR model. These wave fronts could be used to characterize infection fronts in an epidemiological problem or be oriented to a completely different problem such as fire fronts. A statistical methodology was defined for the characterization of the wave fronts from which quantitative results were obtained regarding the speed, the mean amplitude, the geometric properties and even the harmfulness of the fronts on different isotropic media. In particular, homogeneous, disordered and correlated media were explored, from which it was possible to quantitatively describe the effect that each of them had on the characteristics of the wavefront.

Massive numerical simulations were performed to solve the system of reaction-diffusion equations involved in the dynamics. These were efficiently implemented using accelerated computing through parallel programming on graphics processors. In this way it was possible to obtain results on large-scale systems in reasonable times.

Keywords: DYNAMIC SYSTEMS, DISORDERED MEDIA, DIFFUSION EQUATIONS, SIR MODEL

Capítulo 1

Introducción

El modelado matemático de una dada fenomenología constituye una herramienta fundamental en el proceso de entendimiento cuantitativo de la misma. Más aún, aplicado correctamente sobre una problemática concreta, como lo son las epidemias o los incendios forestales, permite desarrollar estrategias de contención, mitigación y prevención [1].

Entre la gran diversidad de desafíos que se presentan al momento de describir la dinámica de enfermedades infecciosas sobre una dada población o bien la propagación de un frente de incendio, se encuentra el desafío de representar correctamente el carácter heterogéneo de la distribución espacial de la población o vegetación [2]. Esto, en última instancia, incluiría aspectos desde el ámbito comportamental de los individuos hasta la distribución espacial de los mismos. En tanto que para incendios forestales, involucra la topografía del terreno, la diversidad de vegetación y su distribución espacial y hasta contribuciones climáticas.

El objetivo de este trabajo de tesis es dar un paso en esta dirección. Tanto para comprender los efectos que tienen sobre la dinámica las heterogeneidades del medio de sustentación, ya sea de la población o vegetación, como para desarrollar herramientas estadísticas y computacionales que puedan ser utilizadas en sistemas completamente diferentes donde la influencia de las características del medio sean de interés. Para ello se consideró un modelo espacio-temporal de los más sencillos en lo que respecta a modelos epidemiológicos de tipo SIR (Susceptibles - Infectados - Recuperados) [3–6], en donde la movilidad de los individuos es dominada por un término difusivo[7], tal como se verá en detalle en el capítulo 2.

Por su parte, las heterogeneidades del medio se introdujeron por medio de la distribución espacial de la tasa de transmisión la cual ha mostrado tener implicaciones significativas para reproducir patrones de propagación espacio-temporales dados por datos epidemiológicos [8].

El presente trabajo se divide en tres capítulos además del presente, los cuales se describen brevemente a continuación:

En el **Capítulo 2** se presenta el marco teórico del trabajo, las herramientas estadísticas utilizadas para caracterizar los frentes de onda y se precisa las condiciones del problema a resolver junto con la caracterización de los distintos medios que se propone estudiar.

En el **Capítulo 3** se presentan los resultados obtenidos a partir de las simulaciones numéricas realizadas masivamente para cubrir diferentes parámetros del problema y fundamentalmente para cuantificar los efectos sobre la dinámica de los distintos medios de sustentación.

En el **Capítulo 4** se comentan brevemente las conclusiones del trabajo, sus potenciales aplicaciones y un posible desarrollo a futuro.

Capítulo 2

Marco teórico

2.1. Modelo SIR

El modelo SIR describe la dinámica de tres grupos característicos de un sistema, denominados comunmente como **S**usceptibles, **I**nfectados y **R**ecuperados, de ahí su nombre. Es el modelo más simple que puede encontrarse para describir la propagación de una enfermedad infecciosa. El mismo está formulado de la siguiente manera: sean $S(t)$, $I(t)$ y $R(t)$ la fracción de susceptibles, infectados y recuperados de una población dada a tiempo t respectivamente, entonces la dinámica de estos grupos está descrita por el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI, \quad (2.1)$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I, \quad (2.2)$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I. \quad (2.3)$$

Donde β corresponde a una tasa de transmisión mientras que γ corresponde a una tasa de recuperación.

Usualmente la ecuación para R (2.3) no se escribe ya que puede ser reemplazada por la más simple $S + I + R = 1$. Puede verse por inspección que el sistema de ecuaciones (2.1 - 2.3) cumple $\frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt} = 0$, como corresponde.

Para entender porqué este simple sistema de ecuaciones (2.1 - 2.3) gobierna la dinámica del problema observamos que el mismo está compuesto esencialmente por dos términos, el término de transmisión βSI y el de recuperación γI . Cualitativamente, resulta razonable que la magnitud de sujetos infectados por unidad de tiempo aumente con el producto de la cantidad de infectados y susceptibles, de ahí el término de transmisión. Por otro lado, la cantidad de infectados que se recuperan por unidad de

tiempo es entendible que sea proporcional a la misma cantidad de infectados y de ahí el término de recuperación. Por supuesto, es posible justificar esto de una manera más cuantitativa y precisa, para ver una derivación de estas ecuaciones consulte [3, 4].

A pesar de su simplicidad, este modelo (2.1 - 2.3) no puede resolverse explícitamente. Es decir, no puede hallarse una expresión analítica exacta para $I(t)$ y $S(t)$ que nos permita anticipar la cantidad de infectados que habrá a tiempo t dadas las condiciones iniciales $I(0) = I_0$ y $S(0) = S_0$. Por ello es necesario recurrir a métodos numéricos para resolverlo. En la figura 2.1 se puede ver la evolución temporal de las variables del modelo resuelto numéricamente¹ usando los parámetros $\beta = 5/\text{semana}$ y $\gamma = 1/\text{semana}$ con condiciones iniciales $I_0 = 0.01$ y $S_0 = 0.99$. Se observa cómo la fracción de susceptibles decrece mientras la de infectados aumenta hasta llegar a un pico donde aproximadamente la mitad de la población está infectada. Luego los infectados comienzan a recuperarse y casi toda la población termina en la clase R , de modo que la mayoría de la población atravesó la enfermedad.

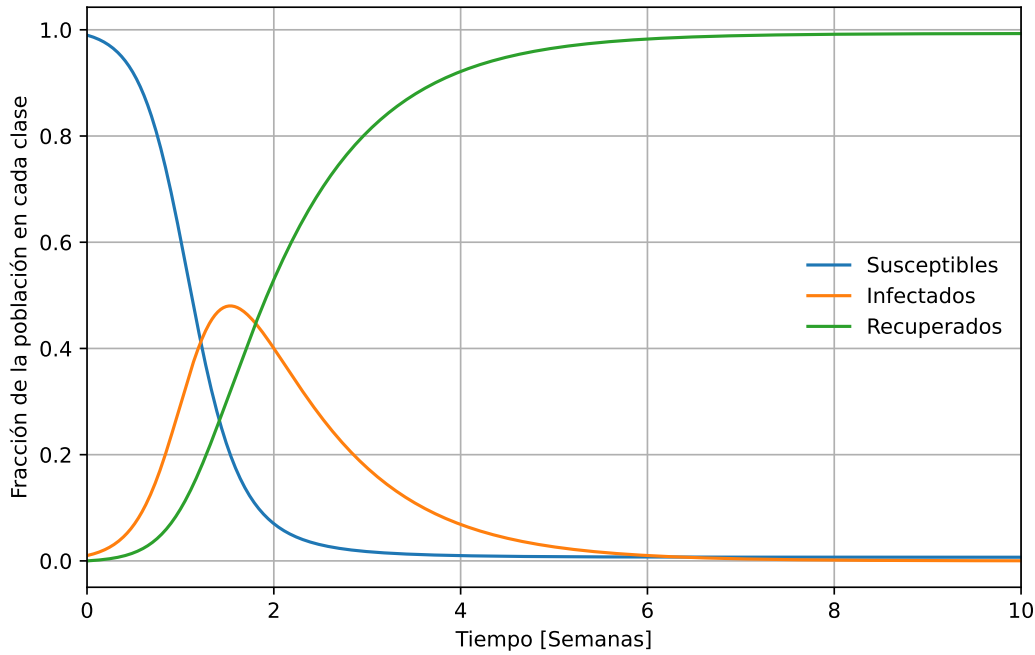


Figura 2.1: Evolución temporal de las variables del modelo resuelto numéricamente con $\beta = 5/\text{semana}$, $\gamma = 1/\text{semana}$, $I_0 = 0.01$ y $S_0 = 0.99$.

Es claro que la figura 2.1 no muestra toda la riqueza del sistema ya que simplemente muestra la solución para un solo conjunto de parámetros y condiciones iniciales. Es decir, es de esperar que la dinámica difiera si por ejemplo la tasa de transmisión β es menor. En particular, es de interés saber para qué conjunto de parámetros β y γ la propagación de la infección es efectiva, es decir, si la mayoría de la población debió cursar la enfermedad. Esto puede determinarse de manera sencilla pidiendo que

¹Se utilizó Runge-Kutta de cuarto orden para la integración numérica.[9]

$\frac{dI}{dt} < 0$ al momento del brote de la infección. De esto resulta que si $S_0 < S_c = \gamma/\beta$ para cualquier $I_0 > 0$ entonces la infección perece y no resulta efectiva. Este es un resultado conocido obtenido por Kermack y McKendrick (1927).^[3] El cociente γ/β es la tasa de recuperación relativa, sin embargo, su recíproco le quita todos los méritos, $R_0 = \beta/\gamma$ conocido en epidemiología comunmente como el coeficiente de reproducción, el cual describe la media de personas infectadas por un individuo infectado. Dado que usualmente $S_0 \approx 1$, la condición para que la infección perezca se lee ahora en función de R_0 simplemente como $R_0 < 1$. Lo cual resulta natural, si un infectado infecta en promedio a menos de una persona en lo que cursa la enfermedad entonces la infección no se propaga.

Es importante señalar brevemente las virtudes y fundamentalmente las hipótesis bajo las que se presenta este modelo. La ventaja más notable es la simplicidad y el carácter didáctico del mismo, que como vimos, permite definir y asimilar conceptos generales asociados a la problemática de manera sencilla. Esta simplicidad, sin embargo, viene acompañada de hipótesis que en ocasiones resultan restrictivas y poco realistas en lo que respecta a una dinámica tan compleja como lo es la propagación de una enfermedad infecciosa sobre una dada población. Por ejemplo, se ignoran efectos de demografía los cuales pueden tener un impacto apreciable sobre la dinámica a escalas temporales extensas propias de una endemia. Además, se trata de un modelo de campo medio, donde se asume que cada sujeto de la población interactúa con todos los demás, es decir, desprecia heterogeneidades que puedan surgir de la edad, el espacio o aspectos de comportamiento. Adicionalmente, supone que individuos que pasaron por la enfermedad adquieren inmunidad para toda la vida, que un sujeto inmediatamente infectado puede infectar a otro y que todos los individuos infectados tienen el mismo período de infección. Por supuesto, esto no desmerece en nada al modelo, el cual sigue siendo extremadamente útil como primera aproximación al modelado de este tipo de sistemas complejos, simplemente es importante recordar las hipótesis sobre las que se trabaja para evitar posibles confusiones.

Por último, es de interés mencionar que si bien el enfoque ha estado hasta ahora centrado en una descripción epidemiológica, es posible extender este mismo modelo de manera sencilla a otras problemáticas. En particular, puede asociarse rápidamente el modelo SIR con la dinámica de un incendio en un bosque. Donde los «susceptibles» son los árboles que pueden incendiarse, los «infectados» son los árboles en llamas y los «recuperados» los árboles que ya han sido quemados y no pueden volver a incendiarse.

2.2. Modelo SIR de reacción-difusión homogéneo

De manera general las ecuaciones de reacción-difusión sobre un medio isotrópico son aquellas que pueden escribirse como

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{f} + \nabla \cdot (D \nabla \mathbf{u}), \quad (2.4)$$

donde \mathbf{u} es un campo vectorial que depende de la posición \mathbf{x} y el tiempo t , \mathbf{f} es el término de reacción, que es función de \mathbf{u} , \mathbf{x} y t , mientras que $\nabla \cdot (D \nabla \mathbf{u})$ es el término de difusión, donde D es la matriz de difusión que puede ser función de \mathbf{x} . Este tipo de ecuaciones han sido ampliamente estudiadas [4, 10–12] y se denominan así porque originalmente se utilizaron para estudiar la dinámica de reactivos químicos.[13]

En lo que respecta al modelo SIR de reacción-difusión que nos interesa a nosotros, este puede escribirse de manera sencilla agregando el término difusivo a las ecuaciones (2.1 - 2.3), dejando de lado la ecuación para R , esto es

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\beta SI + D_S \nabla^2 S, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \beta SI - \gamma I + D_I \nabla^2 I. \quad (2.6)$$

Donde ahora S , I y R son funciones de la posición (x, y) en un espacio bidimensional además del tiempo t , de modo que ahora se cumple $S(x, y, t) + I(x, y, t) + R(x, y, t) = 1$ para todo (x, y, t) . En este nuevo modelo (2.5 - 2.6) los términos difusivos dan lugar a una transmisión local de la infección. Es decir, abandonamos el modelo de campo medio que teníamos en la sección 2.1 donde todos los individuos podían interactuar entre sí.

Hemos supuesto que los coeficientes de difusión D_S y D_I son independientes de la posición y que la matriz D es diagonal dejando de lado la posibilidad de difusión cruzada. Adicionalmente, tanto β como γ son independientes de la posición, dando lugar a un medio totalmente homogéneo, todos los puntos del espacio son equivalentes en términos de transmisión. Esta es una característica crítica a remarcar, ya que en la sección 2.3 presentamos el correspondiente modelo heterogéneo, donde el medio puede adquirir un carácter desordenado, que es el foco de estudio de este trabajo.

A continuación se muestran algunos resultados interesantes asociados a este modelo que serán de interés a la hora de compararlo con su versión heterogénea.

2.2.1. Soluciones de onda

El objetivo principal que quiere alcanzarse es, naturalmente, el siguiente. Dada una fracción de infectados inicial $I(x, y, 0)$ y una fracción de susceptibles distribuída

homogéneamente $S(x, y, 0) = S_0$, se quiere saber cómo es la evolución espacio-temporal de la fracción de infectados $I(x, y, t)$. En la problemática de incendios la idea sería la misma, pero cambiando infectados por, digamos, incendiados.

Nuevamente, no es posible resolver las ecuaciones 2.5 y 2.6 explícitamente, sin embargo, es posible estudiar qué condiciones deben satisfacerse para que cierto tipo de soluciones puedan existir. En particular, nos interesa estudiar bajo qué condiciones podría existir una solución de onda y qué características tendría.

Para ello proponemos una solución de onda plana donde

$$S(x, y, t) = S(z), \quad I(x, y, t) = I(z), \quad z = x - ct, \quad (2.7)$$

que representa una onda de infección viajando en la dirección x positiva con una velocidad $c > 0$. Reemplazando 2.7 en 2.5 y 2.6, resulta el siguiente sistema de ecuaciones no lineales,

$$D_S S'' + cS' - \beta IS = 0, \quad (2.8)$$

$$D_I I'' + cI' + \beta I(S - \gamma/\beta) = 0, \quad (2.9)$$

donde las primas indican derivadas respecto de z . Como es habitual, este sistema tampoco puede resolverse explícitamente, sin embargo, imponiendo las siguientes condiciones para las soluciones²

$$I(\pm\infty) = 0, \quad S(\infty) = S_0, \quad S(-\infty) = S_1,$$

donde S_1 sería la fracción de susceptibles que deja la onda por detrás, es posible linealizar la ecuación 2.9 para z donde $S(z) \approx S_0$, es decir, sobre el perfil frontal de la onda. De lo cual resulta,

$$D_I I'' + cI' + \beta I(S_0 - \gamma/\beta) = 0, \quad (2.10)$$

que tiene una solución $I(z) \propto e^{-\lambda z}$, con λ satisfaciendo,

$$D_I \lambda^2 - c\lambda + \beta(S_0 - \gamma/\beta) = 0,$$

es decir,

$$\lambda = \frac{c}{2D_I} \pm \sqrt{(c/2D_I)^2 - \frac{\beta}{D_I}(S_0 - \gamma/\beta)}.$$

²Se utiliza la siguiente notación por simplicidad, dada una función $f(z)$,

$$\lim_{z \rightarrow \pm\infty} f(z) \equiv f(\pm\infty)$$

Debemos imponer además que $\lambda \in \mathbb{R}$ con $\lambda > 0$, de otra manera la solución no sería autoconsistente. Al imponer que $\lambda > 0$ resulta $\gamma/\beta < S_0$, que es la misma condición que habíamos obtenido en la sección 2.1 para que la infección progrese, mientras que ahora es una condición necesaria para la existencia de soluciones onda, las cuales darían lugar a la propagación de la infección, por lo menos resulta concordante. Más interesante quizás, es la condición $\lambda \in \mathbb{R}$, de la cual resulta que

$$0 \leq (c/2D_I)^2 - \frac{\beta}{D_I}(S_0 - \gamma/\beta),$$

$$c \geq 2\sqrt{D_I\beta(S_0 - \gamma/\beta)} \equiv c_0,$$

dando así una velocidad mínima c_0 para la existencia de la onda. Veremos en la sección 3.1 que la velocidad de propagación es en realidad muy cercana a la mínima encontrada aquí c_0 . Tomando esto por cierto, el perfil frontal de la onda de infección está dado por

$$I(z) \propto \exp\left[-\frac{c_0}{2D_I}z\right]. \quad (2.11)$$

Haciendo una cuenta equivalente para el perfil posterior de la onda donde $S(z) \approx S_1$, hay que resolver la ecuación análoga a 2.10, $D_I I'' + cI' + \beta I(S_1 - \gamma/\beta) = 0$, de esto resulta

$$I(z) \propto \exp\left[\left(-\frac{c_0}{2D_I} + \sqrt{(c_0/2D_I)^2 - \frac{\beta}{D_I}(S_1 - \gamma/\beta)}\right)z\right], \quad (2.12)$$

$$I(z) \propto \exp\left[\left(-\frac{c_0}{2D_I} + \sqrt{\frac{\beta}{D_I}(S_0 - S_1)}\right)z\right]. \quad (2.13)$$

De la ecuación 2.12 se ve fácilmente que es necesario que $\gamma/\beta > S_1$, de modo que en resumen se tiene la siguiente relación

$$S_0 > \gamma/\beta > S_1 > 0,$$

es decir, que la fracción de susceptibles que quedan tras el paso de la onda no es suficiente para activar una onda de retroceso ya que $S_1 < \gamma/\beta$.

En resumen, se obtuvieron expresiones analíticas aproximadas del perfil frontal y posterior que tendría una solución de onda, ecuaciones 2.11 y 2.12 respectivamente, las cuales dan a entender que el perfil completo de la onda es asimétrico. Se determinó a su vez la velocidad de propagación de la onda $c_0 = 2\sqrt{D_I\beta(S_0 - \gamma/\beta)}$ y se estableció la jerarquía $S_0 > \gamma/\beta > S_1 > 0$ para la existencia de la onda.

2.3. Modelo SIR de reacción-difusión heterogéneo

En esta sección presentamos el modelo que estudiamos con profundidad en este trabajo junto con las descripciones estadísticas del mismo que se usarán luego en el capítulo 3.

Esencialmente las ecuaciones son las mismas que 2.5 y 2.6 con la salvedad de que ahora introducimos heterogeneidad en el medio poniendo una tasa de transmisión $\beta_{\mathbf{r}}$ dependiente de la posición. Por completitud escribimos las ecuaciones nuevamente aquí,

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\beta_{\mathbf{r}}SI + D_S \nabla^2 S, \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \beta_{\mathbf{r}}SI - \gamma I + D_I \nabla^2 I. \quad (2.15)$$

Una tasa de transmisión $\beta_{\mathbf{r}}$ de este tipo podría utilizarse, por ejemplo, para estudiar el efecto de la vacunación sobre la población. Esto es entendible dado que se espera que los lugares donde hay población vacunada la tasa de transmisión sea menor ya que hay menos individuos susceptibles para infectarse. Otra alternativa apuntaría a describir lugares donde la tasa de transmisión es más baja por un efecto de densidad poblacional. En cuanto a la propagación de incendios podría interpretarse de manera similar como una variación de la densidad de vegetación en el espacio, lo cual facilitaría o no la transmisión de las llamas.

2.3.1. Problema y observables

Vamos a centrarnos en estudiar el frente de infección/incendio en un espacio cuadrado de longitud L , con $x, y \in [0, L - 1]$, y condiciones iniciales

$$I(x, y, 0) = I_0, \quad S(x, y, 0) = 1 - I_0,$$

con $x \in (0, \delta x)$ y

$$I(x, y, 0) = 0, \quad S(x, y, 0) = S_0,$$

para $x \in [\delta x, L - 1]$. Adicionalmente, se tienen condiciones de contorno de Dirichlet en la dirección x ,

$$I(0, y, t) = I(L - 1, y, t) = S(0, y, t) = S(L - 1, y, t) = 0.$$

Y condiciones periódicas en la dirección y ,

$$I(x, 0, t) = I(x, L - 1, t) \quad S(x, 0, t) = S(x, L - 1, t).$$

Estas condiciones iniciales y de contorno dan lugar a un único frente de onda propagándose en la dirección x , lo cual resulta conveniente para realizar un análisis estadístico a partir de ciertos observables, los cuales se definen a continuación.

Para caracterizar las fluctuaciones espaciales y temporales del frente de infección/incendio, definimos el campo de desplazamiento del frente $u(y, t)$ como

$$\max_{x \in (0, L-1)} \{I(x, y, t)\} = I(u(y, t), y, t). \quad (2.16)$$

Es decir, $u(y, t)$ es la posición en x del máximo de la fracción de infectados/incendiados para un dado y en el instante t . Se define a su vez el centro de masa de $u(y, t)$,

$$u_{cm}(t) \equiv \langle u(y, t) \rangle_y, \quad (2.17)$$

donde $\langle \dots \rangle_y$ indica el promedio sobre la coordenada y . El valor medio de la amplitud máxima de $I(x, y, t)$ sobre $u(y, t)$ es,

$$I_{max}(t) = \langle I(u(y, t), y, t) \rangle_y. \quad (2.18)$$

Por otro lado, la velocidad media de la onda de propagación se define como,

$$c \equiv \langle \dot{u}_{cm}(t) \rangle_t. \quad (2.19)$$

donde $\langle \dots \rangle_t$ indica promedio sobre el tiempo. De manera similar, la amplitud media del frente de propagación es

$$I_{max} = \langle I_{max}(t) \rangle_t. \quad (2.20)$$

Las fluctuaciones del frente de onda pueden ser caracterizadas definiendo la rugosidad del mismo como la desviación estándar de $u(y, t)$,

$$w(t)^2 \equiv \langle [u(y, t) - u_{cm}(t)]^2 \rangle_y, \quad (2.21)$$

o con el factor de estructura,

$$S(q) \equiv \langle |u(q, t)|^2 \rangle_t, \quad (2.22)$$

donde $u(q, t)$ es la transformada de Fourier sobre el espacio de $u(y, t)$. Por último,

estaremos interesados en observar el perfil de la onda de propagación, estos es,

$$f_I(x) = \langle I(x - u(y, t), y, t) \rangle_{y, t}. \quad (2.23)$$

En el capítulo 3 utilizaremos los observables definidos aquí como principales herramientas para caracterizar y comparar de manera cuantitativa los efectos que tienen distintas heterogeneidades, introducidas mediante $\beta_{\mathbf{r}}$, sobre la dinámica del problema.

2.3.2. Tipos de heterogeneidades

Discutiremos aquí brevemente los distintos tipos de heterogeneidad que nos proponemos explorar en este trabajo. Para ello simplemente describimos los distintos $\beta_{\mathbf{r}}$ utilizados.

Heterogeneidad dicotómica-aleatoria

El modelo (2.14 - 2.15) fue estudiado por A. Kolton y K. Laneri (2019) [6] en su trabajo sobre frentes de infección rugosos en medios aleatorios, donde se propusieron estudiar la dinámica utilizando una tasa de transmisión $\beta_{\mathbf{r}}$ en forma de ruido dicotómico con una distribución de probabilidad dada por

$$f(\beta_{\mathbf{r}}) = p\delta(\beta_{\mathbf{r}}) + (1 - p)\delta(\beta_{\mathbf{r}} - \beta), \quad (2.24)$$

donde $0 \leq p \leq 1$. Esto es equivalente a decir, dada una posición $\mathbf{r} = (x, y)$, la tasa de transmisión en \mathbf{r} es 0 con probabilidad p o es β con probabilidad $1 - p$. De modo que el medio puede considerarse aleatorio. Nótese que cuando $p = 0$ se recupera el caso homogéneo de la sección 2.2 donde la tasa de transmisión es β en todo el espacio. Con la distribución de probabilidad 2.24, este $\beta_{\mathbf{r}}$ cumple

$$\overline{\beta_{\mathbf{r}}} = (1 - p)\beta, \quad (2.25)$$

$$\overline{\beta_{\mathbf{r}}\beta_{\mathbf{r}'}} - \overline{\beta_{\mathbf{r}}} \overline{\beta_{\mathbf{r}'}} = \beta^2 p(1 - p)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (2.26)$$

donde las barras indican valor medio sobre desorden. Puede verse que no se tiene correlación espacial, por tanto se estaría representando una estrategia de vacunación aleatoria sobre la población. Llamaremos a la heterogeneidad definida así como «heterogeneidad dicotómica-aleatoria».

Para ganar cierta intuición sobre lo que implica este tipo de heterogeneidad sobre el espacio, en la figura 2.2 pueden verse distintas realizaciones de $\beta_{\mathbf{r}}$ para diferentes valores de p representadas sobre una grilla de 20×20 .

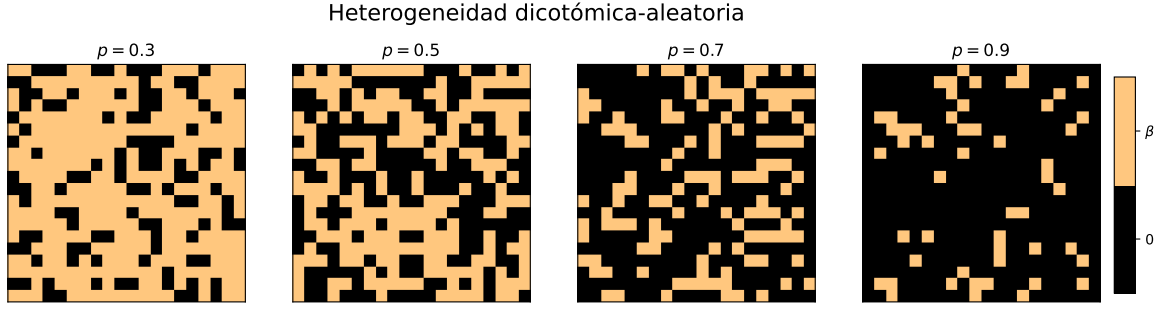


Figura 2.2: De izquierda a derecha: representación de $\beta_{\mathbf{r}}$ sobre una grilla de 20×20 para $p = 0.3$, $p = 0.5$, $p = 0.7$ y $p = 0.9$.

Heterogeneidad suavizada

En este caso se propone una heterogeneidad suavizada, donde, en primera instancia, se genera un $\beta_{\mathbf{r}}$ usando la distribución de probabilidad 2.24 y luego se aplica una regla de suavizado n veces. En un esquema discreto donde el espacio de $L \times L$ se descompone en $N \times N$ cuadrantes de L/N por L/N , la regla de suavizado puede describirse de manera recursiva como,

$$\beta_{\mathbf{r}}^{(0)} = \beta_{\mathbf{r}}, \quad (2.27)$$

$$\beta_{i,j}^{(n)} = \frac{1}{5}(\beta_{i-1,j}^{(n-1)} + \beta_{i+1,j}^{(n-1)} + \beta_{i,j-1}^{(n-1)} + \beta_{i,j+1}^{(n-1)} + \beta_{i,j}^{(n-1)}), \quad (2.28)$$

donde $\beta_{i,j}^{(n)}$ es el valor del nuevo $\beta_{\mathbf{r}}^{(n)}$ en el cuadrante $\mathbf{r} = (i, j)$ con $i, j = 1, 2, \dots, N$.³

La particularidad de esta tasa de transmisión es que ahora presenta una correlación espacial local. Esto implica que disminuirán los efectos de cambios abruptos en la tasa de transmisión sobre la propagación del frente de onda. Por otro lado, el valor medio $\overline{\beta_{\mathbf{r}}^{(n)}}$ es igual al valor medio $\overline{\beta_{\mathbf{r}}}$, esto puede verse por inducción, $\overline{\beta_{\mathbf{r}}^{(1)}} = \overline{\beta_{\mathbf{r}}^{(0)}} = \overline{\beta_{\mathbf{r}}}$, luego, asumiendo que $\overline{\beta_{\mathbf{r}}^{(n-1)}} = \overline{\beta_{\mathbf{r}}}$ resulta que $\overline{\beta_{\mathbf{r}}^{(n)}} = \overline{\beta_{\mathbf{r}}}$.

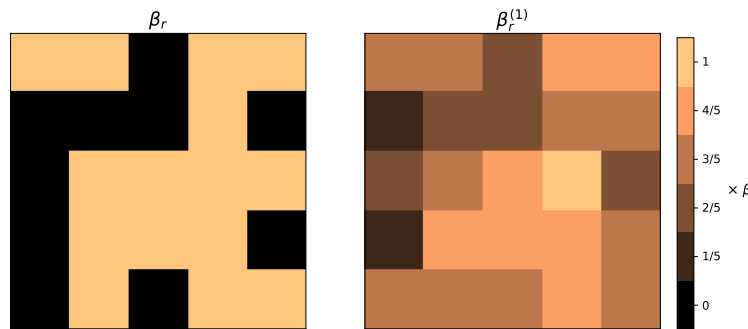


Figura 2.3: A la izquierda, se muestra una realización de $\beta_{\mathbf{r}}$ con $p = 0.5$. A la derecha, se muestra el efecto de un paso de suavizado sobre el $\beta_{\mathbf{r}}$ original.

³Se consideran condiciones periódicas sobre la grilla, de modo que por ejemplo, $i = N + 1$ se entiende como $i = 1$.

En la figura 2.3 puede verse esquemáticamente el efecto de un paso de suavizado sobre una grilla de 10×10 , mientras que en la figura 2.4 se muestran realizaciones de $\beta_{\mathbf{r}}^{(1)}$ para diferentes p sobre una grilla de 20×20 , compare con la figura 2.2.

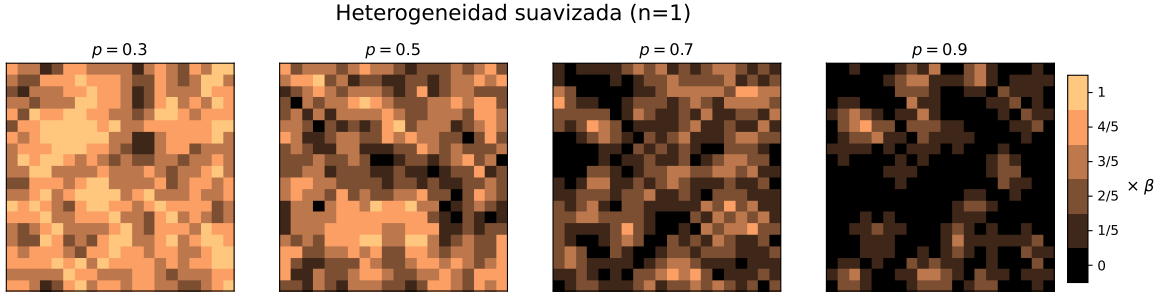


Figura 2.4: De izquierda a derecha: representación de $\beta_{\mathbf{r}}^{(1)}$ sobre una grilla de 20×20 para $p = 0.3$, $p = 0.5$, $p = 0.7$ y $p = 0.9$.

Un detalle más a notar sobre este tipo de heterogeneidad es que para $n \rightarrow \infty$ recuperamos nuevamente el caso homogéneo de la sección 2.2, con una tasa de transmisión constante en todo el espacio de valor $\overline{\beta_{\mathbf{r}}} = (1 - p)\beta$. Esto puede verse tomando el límite en la ecuación 2.28 para $n \rightarrow \infty$, poniendo $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_{i,j}^{(n)} \equiv \beta_{i,j}^{(\infty)}$, se tiene

$$4\beta_{i,j}^{(\infty)} = \beta_{i-1,j}^{(\infty)} + \beta_{i+1,j}^{(\infty)} + \beta_{i,j-1}^{(\infty)} + \beta_{i,j+1}^{(\infty)},$$

para todo (i, j) , de modo que la única posibilidad es que $\beta_{i,j}^{(\infty)}$ sea el mismo para todo (i, j) e igual a $\overline{\beta_{\mathbf{r}}}$, ya que debe conservar el valor medio. En la figura 2.5 se muestra el efecto al realizar varios pasos de suavizado.

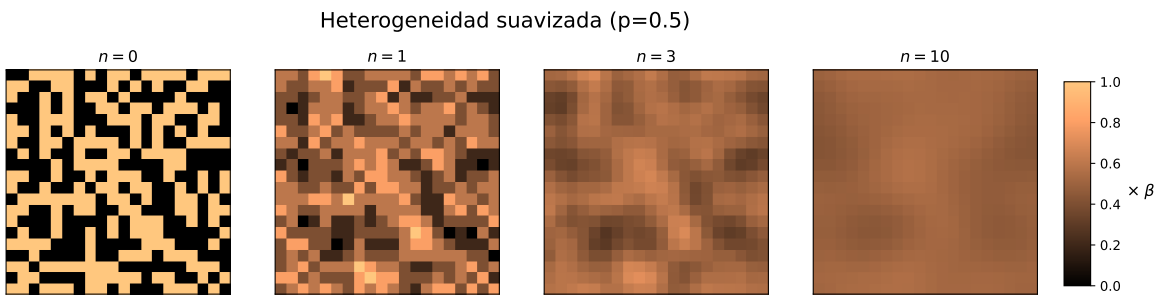


Figura 2.5: De izquierda a derecha: se muestran los $\beta_{\mathbf{r}}^{(n)}$ con $n = 0, 1, 3, 10$ sobre una grilla de 20×20 .

Heterogeneidad dicotómica-correlacionada

Esta consiste, de alguna manera, en una combinación de las dos anteriores. Se genera un $\beta_{\mathbf{r}}^{(n)}$ de la misma manera que para la versión suavizada. Una vez obtenido este $\beta_{\mathbf{r}}^{(n)}$ definimos un nuevo $\tilde{\beta}_{i,j}^{(n)}$ de la siguiente manera,

$$\begin{aligned}\tilde{\beta}_{i,j}^{(n)} &= \beta, & \text{si } \beta_{i,j}^{(n)} &\geq \overline{\beta}_{\mathbf{r}} = (1-p)\beta, \\ \tilde{\beta}_{i,j}^{(n)} &= 0, & \text{si } \beta_{i,j}^{(n)} &< \overline{\beta}_{\mathbf{r}} = (1-p)\beta.\end{aligned}$$

Este caso presenta correlación local en una versión dicotómica, pero naturalmente no conserva el valor medio. En la figura 2.6 se muestran realizaciones para distintos valores de p con $n = 1$. Puede observarse a simple vista que la densidad de puntos negros no aumenta con p como pasaba en los casos anteriores esta diferencia sustancial en el comportamiento debe tenerse en cuenta a la hora de comparar resultados. Para ello utilizaremos el valor medio $\tilde{\beta}_{\mathbf{r}}^{(n)}$ en lugar de p , ya que da cuenta de esta variación del comportamiento.

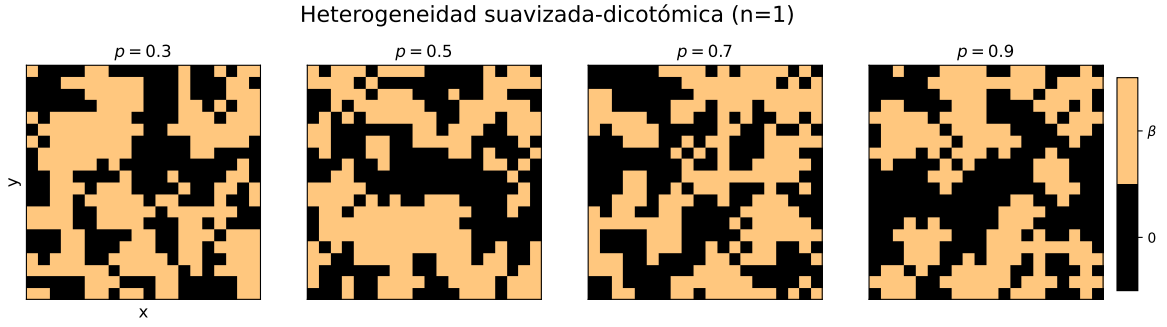


Figura 2.6: De izquierda a derecha: representación de $\tilde{\beta}_{\mathbf{r}}^{(1)}$ sobre una grilla de 20×20 para $p = 0.3$, $p = 0.5$, $p = 0.7$ y $p = 0.9$.

En la figura 2.7 se muestra el efecto de los pasos de suavizado para este caso con $p = 0.5$. En este caso, al hacer el límite $n \rightarrow \infty$ se recupera nuevamente el caso homogéneo pero con un valor medio de $\tilde{\beta}_{\mathbf{r}}^{(\infty)} = \beta$.

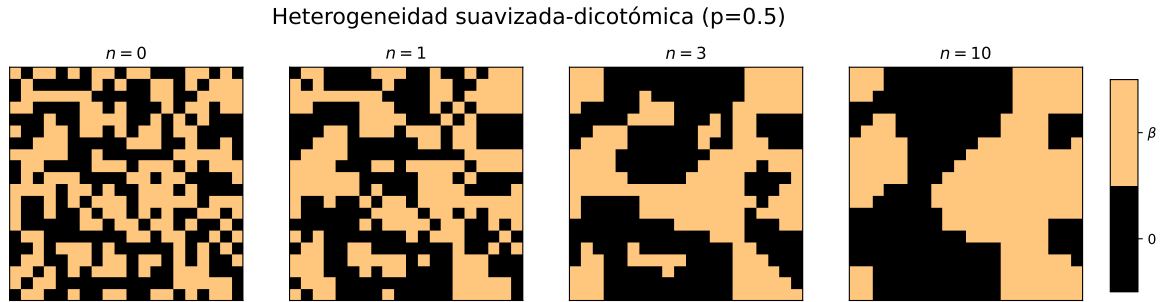


Figura 2.7: De izquierda a derecha: se muestran los $\tilde{\beta}_{\mathbf{r}}^{(n)}$ con $n = 0, 1, 3, 10$ sobre una grilla de 20×20 .

Capítulo 3

Simulaciones numéricas

En este capítulo presentamos los resultados obtenidos al resolver el problema propuesto en la sección 2.3 para los distintos casos de β_r utilizando métodos numéricos. Se utilizaron para ello técnicas de programación en paralelo para acelerar la velocidad de cómputo. En el apéndice A puede encontrarse la descripción de la metodología numérica utilizada, que consiste en un esquema simple de diferencias finitas sobre una grilla regular.

Todas las simulaciones realizadas en este capítulo corresponden al problema presentado en la subsección 2.3.1 pero con distintas distribuciones de β_r . De modo que las condiciones iniciales y de contorno son las que se indican en dicha subsección, utilizando de manera general $\delta x = 1$, $L = 1024$ y $S_0 = I_0 = 1$.¹ Por otro lado, cabe mencionar que en el esquema numérico se utilizó, también de manera general, una discretización espacial del sistema de 1024×1024 sitios de igual tamaño. Los demás parámetros se especificarán según corresponda y si los mencionados aquí fueran distintos en alguna ocasión se hará mención de ello.

3.1. Medios aleatorios

En esta sección reproducimos y validamos los resultados obtenidos por A. Kolton y K. Laneri (2019) [6] en su trabajo sobre frentes de infección rugosos en medios aleatorios, donde trabajaron con la heterogeneidad dicotómica-aleatoria descrita en la sección 2.3. Adicionalmente, se muestran los resultados correspondientes al caso homogéneo de la sección 2.2. De esta manera podremos visualizar y entender la dinámica del problema heterogéneo comparando con el caso homogéneo del cual tenemos mayor entendimiento analítico.

¹Se recomienda mirar nuevamente la subsección 2.3.1.

3.1.1. Caso homogéneo

Recordemos que el problema homogéneo, donde la tasa de transmisión $\beta_r = \beta$ es la misma en todo el espacio, es equivalente a usar la distribución 2.24 con $p = 0$. Se utilizó $\beta = 1$ y $\gamma = 0.2$. Se omitirán las unidades por claridad pero es importante recordar que estos valores tienen unidades de $1/t$ ya que son la tasa de infección y recuperación respectivamente². Para los coeficientes de difusión se utilizó $D_S = 0$ y $D_I = 1$, los cuales deben tener dimensión de área por unidad de tiempo. Podemos ver que $\gamma/\beta = 0.2 < S_0 = 1$, de modo que según lo visto en la subsección 2.2.1 es posible la propagación de la infección a través de una solución de onda.

En la figura 3.1 se muestra la evolución del frente de infección/incendio para este caso. Puede observarse que el frente es asimétrico, es decir, se comporta de manera distinta en la parte frontal que en la parte posterior, tal como habíamos anticipado en la subsección 2.2.1. Se muestra también el campo de desplazamiento del frente $u(y, t)$ (2.16). Puede verse que éste es completamente plano, como es de esperar para un medio homogéneo.

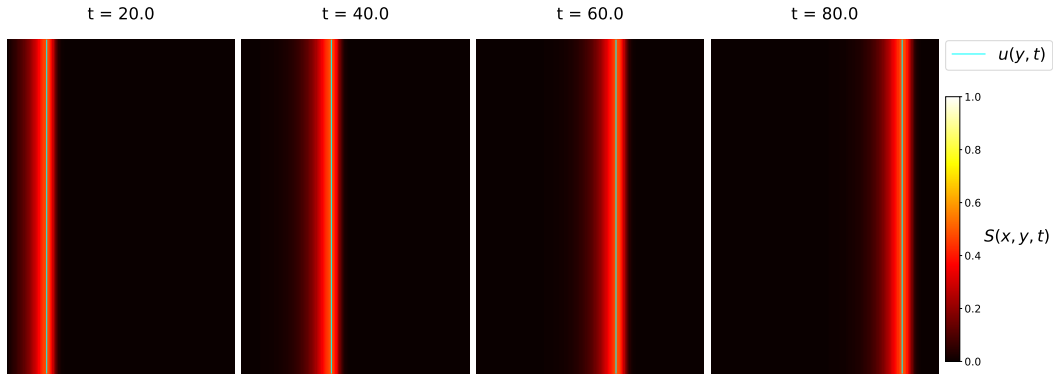


Figura 3.1: Evolución del frente de infección/incendio para el problema homogéneo.

En la figura 3.2 se muestra la posición del centro de masa del frente de propagación $u_{cm}(t)$ (2.17) en función del tiempo para distintos valores de γ/β . Puede observarse que para el caso $\gamma/\beta = 1$ el sistema cambia notablemente su comportamiento y no es posible identificar un frente de onda propagándose a velocidad constante, en acuerdo con la condición $\gamma/\beta < S_0 = 1$. Por otro lado, a partir de estos resultados se calculó la velocidad c (2.19) para cada caso a partir de un ajuste lineal descartando un periodo transitorio. De ello vemos que la velocidad del frente $c_0 = 2\sqrt{D_I\beta(S_0 - \gamma/\beta)}$ estimada en la subsección 2.2.1 concuerda con las velocidades calculadas a partir de la resolución numérica con un error relativo, en promedio, de 4.5 %. En la mayoría de los casos c_0 resulta sobreestimar levemente el valor de c , esto puede explicarse recordando que el

²De manera similar se omitirán las unidades tanto de tiempo como de longitud en la mayoría de las ocasiones. Si esto lo incomoda mucho piense que las unidades de tiempo son u_t y las de espacio u_L , poniendo β , γ , D_S y D_I en estas unidades la dinámica se describe correctamente en dichas unidades.

valor de c_0 se obtuvo en una aproximación donde se supone que hay más susceptibles de los que realmente hay y por ello es de esperar que la velocidad c_0 estimada sea mayor que la real.

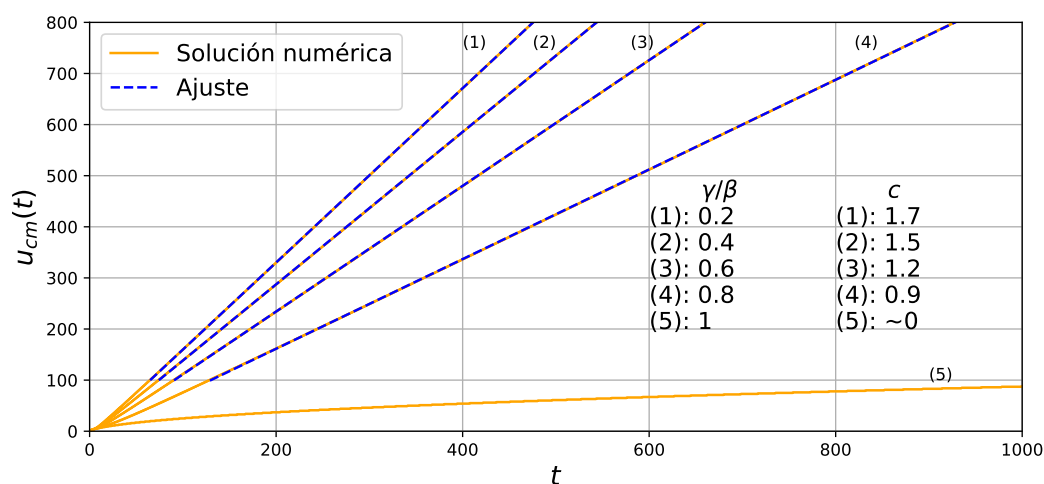


Figura 3.2: Posición del centro de masa del frente de propagación en función del tiempo para distintos valores de γ/β junto con los correspondientes ajustes lineales. Se muestra también la velocidad c del frente obtenida para cada caso.

Un observable más a destacar en esta instancia es el perfil del frente de propagación $f_I(x)$ (2.23), que se observa en la figura 3.3 para $\gamma/\beta = 0.2$. Se muestran también los perfiles asintóticos frontal y posterior del frente de onda calculados en la subsección 2.2.1, ecuaciones 2.11 y 2.12 respectivamente.

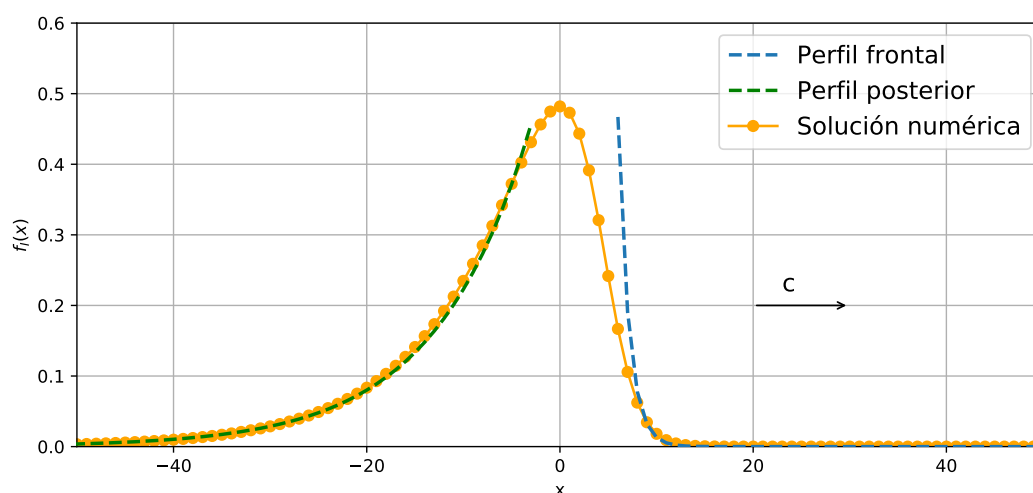


Figura 3.3: Perfil del frente de propagación $f_I(x)$ para $\gamma/\beta = 0.2$. Se muestran también los perfiles asintóticos frontal y posterior del frente de onda calculados en la sección 2.2.

3.1.2. Heterogeneidad dicotómica-aleatoria

Comenzamos el estudio de la heterogeneidad dicotómica-aleatoria, con $\beta_{\mathbf{r}}$ dado por 2.24, observando en la figura 3.4 la evolución temporal del frente de infección/incendio con $p = 0.3$. Puede verse el campo de desplazamiento del frente $u(y, t)$, el cual resulta rugoso en esta ocasión como consecuencia del carácter heterogéneo del medio. Vemos también que la velocidad del frente es menor respecto del caso homogéneo, como resulta claro de comparar con la figura 3.1. Este hecho no resulta sorprendente ya que el valor medio de la tasa de transmisión para este caso es $\overline{\beta_{\mathbf{r}}} = (1 - p)\beta = 0.7\beta$, mientras que en el caso homogéneo es mayor (β). Lo justo sería comparar la velocidad de este caso con uno homogéneo y la misma tasa de transmisión media. Como veremos enseguida, la propagación resulta ser más rápida sobre el medio desordenado que sobre el homogéneo. Otro tema de interés es investigar cómo depende la velocidad o la amplitud media del frente con p . Recordemos que p podría representar la fracción de población vacunada, de modo que es relevante determinar cómo influye sobre la dinámica.

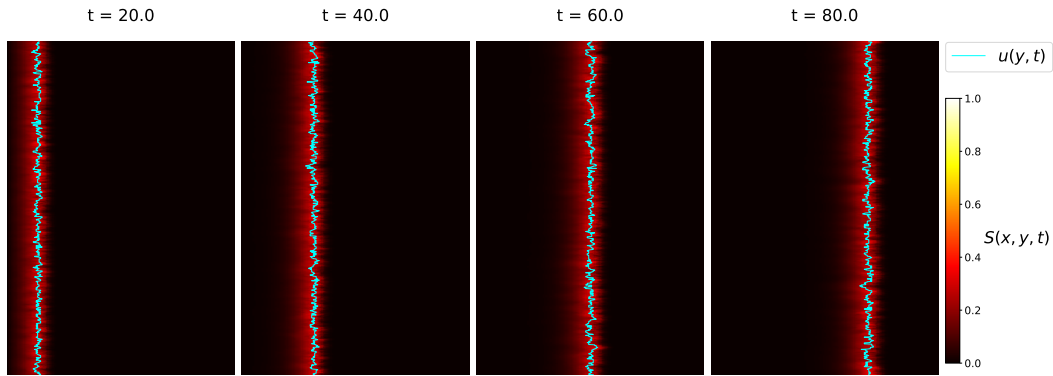


Figura 3.4: Evolución del frente de infección/incendio para el problema heterogéneo dicotómico-aleatorio con $p = 0.3$, $\gamma/\beta = 0.2$ y $D_I = 1$.

Velocidad y amplitud del frente

En la figura 3.5 se muestra la posición del centro de masa del frente de propagación $u_{cm}(t)$ en función del tiempo para realizaciones de la simulación con 70 valores distintos de $p \in (0, 0.95)$. Puede observarse que para valores de p grandes ($p \geq 0.9$) hay un cambio de comportamiento apreciable, las trayectorias comienzan a ser inestables y la velocidad media del frente se reduce drásticamente, ya que lleva más tiempo llegar al mismo lugar. Este cambio de comportamiento como consecuencia del valor de p es de interés, ya que pareciera haber un valor crítico p_c para el que el frente de infección reduce drásticamente su velocidad a un punto tal en que es difícil incluso identificar un frente. Este hecho también puede apreciarse en la figura 3.6 donde se muestra la rugosidad del campo de desplazamiento del frente (2.21) en función de la posición del centro de masa. Para valores de $p \geq 0.9$ la rugosidad no deja de crecer mientras que para valores

menores de p la rugosidad se estabiliza alrededor de un valor dado. Adicionalmente, la rugosidad es un orden de magnitud mayor en los casos en que $p \geq 0.9$ comparada con las demás, esto también habla de una disipación del frente de onda al punto en que es irreconocible.

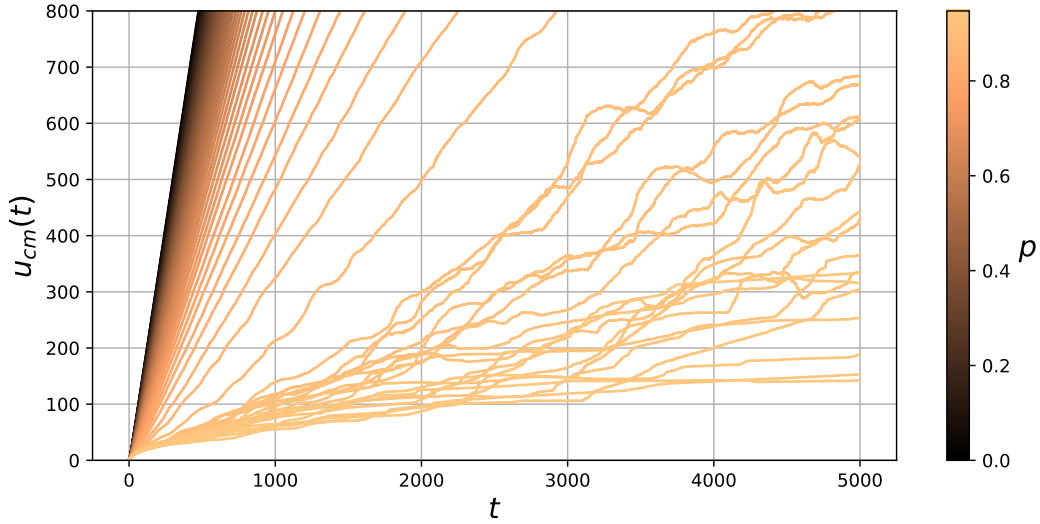


Figura 3.5: Posición del centro de masa del frente de propagación en función del tiempo para distintos valores de p , con $\gamma/\beta = 0.2$ y $D_I = 1$.

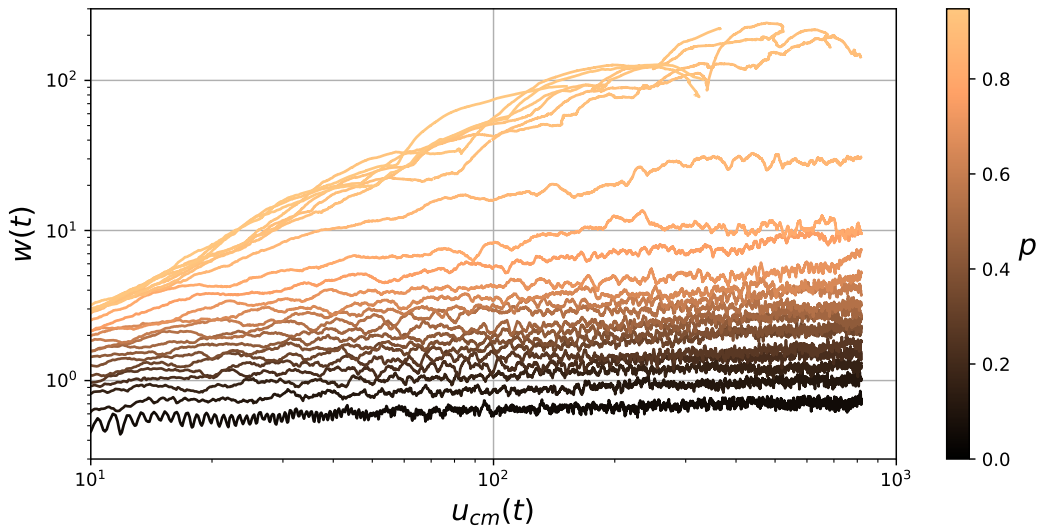


Figura 3.6: Rugosidad $w(t)$ en función de la posición del centro de masa para distintos valores de p , con $\gamma/\beta = 0.2$ y $D_I = 1$.

Para poder determinar el valor crítico p_c en el que se produce este cambio de comportamiento, calculamos a partir de los resultados de la figura 3.5 la velocidad de propagación c para los distintos valores de p usando ajustes lineales. Los resultados obtenidos se muestran en la figura 3.7. Se observa este procedimiento para dos sistemas distintos con $\gamma/\beta = 0.2$ y 0.4 y $D_I = 1$. Además, se muestran estos mismos resultados

para los mismos sistemas simulados sobre un medio homogéneo (H) con una tasa de transmisión igual a la media de sus pares heterogéneos dicotómicos-aleatorios (DA). Vemos que en ambos casos la velocidad del frente es menor sobre el medio homogéneo que sobre el heterogéneo y la diferencia entre ambas velocidades incrementa con p . Este tipo de resultado no es trivial y como es propio de los sistemas complejos no siempre es posible desarrollar una intuición apropiada para describir fenómenos emergentes de este tipo. Es decir, con la misma tasa de transmisión media, una distribución homogénea sobre el espacio da lugar a un frente de propagación de menor velocidad que una distribución heterogénea dicotómica y aleatoria.

Se realizó un ajuste con la regla de potencia $c \propto (1 - p/p_c)^{\alpha_c}$ para las realizaciones sobre el medio homogéneo en todo el rango de p . De lo cual se obtuvo $p_c \approx 0.8$ y 0.6 para $\gamma/\beta = 0.2$ y 0.4 respectivamente con exponente crítico $\alpha_c \approx 0.5$ para ambos. Esto concuerda con lo que resulta de reemplazar β por $(1 - p)\beta$ en la ecuación para la velocidad sobre medios homogéneos determinada en 2.2.1, es decir,

$$c(p) = 2\sqrt{D_I((1 - p)\beta S_0 - \gamma)} = c_0(1 - p/p_c)^{\alpha_c},$$

con $p_c = 1 - \gamma/(\beta S_0)$ y $\alpha_c = 0.5$.

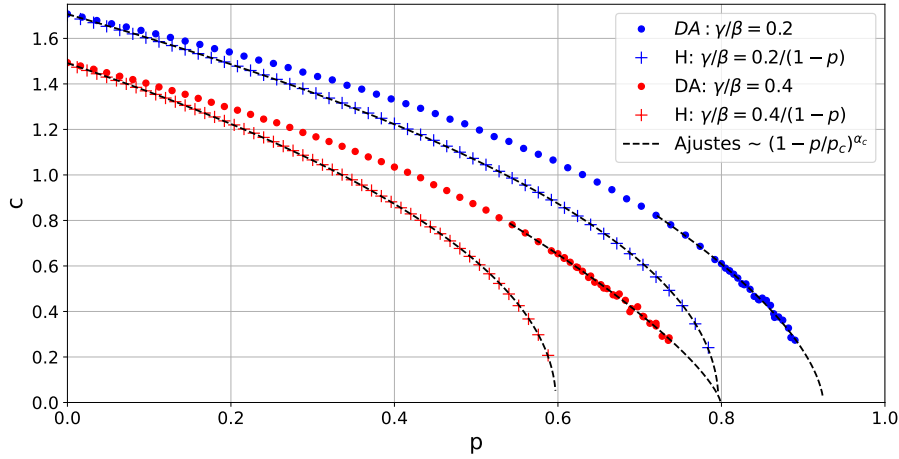


Figura 3.7: Velocidad c del frente de propagación en función de p con $\gamma/\beta = 0.2$ y 0.4 y $D_I = 1$. Se muestran los ajustes con la regla de potencia $c \propto (1 - p/p_c)^{\alpha_c}$ sobre la región crítica.

Por otro lado, para los medios DA se realizó un ajuste similar sobre las regiones críticas de p . Todos los resultados asociados a los parámetros críticos de la velocidad determinados para cada caso se muestran en la tabla 3.1.

De estos resultados queda claro otra diferencia importante entre los casos H y DA, y es que el valor crítico de p para el cual se extingue el frente de propagación es apreciablemente mayor en los casos heterogéneos, hasta un 30 % mayor en el caso de $\gamma/\beta = 0.4$.

Tabla 3.1: Parámetros críticos p_c y α_c de los medios H y DA con diferentes γ/β .

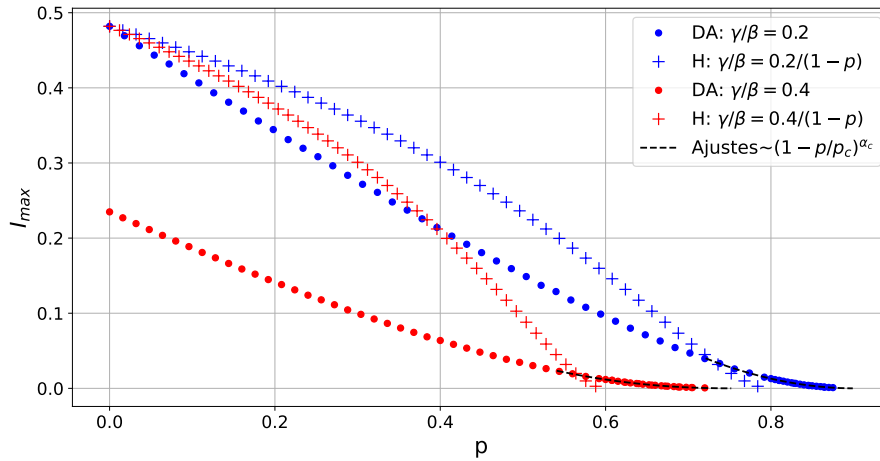
Medio	γ/β	p_c	α_c
DA	0.2	0.92 ± 0.04	0.61 ± 0.05
H	0.2	0.80 ± 0.01	0.47 ± 0.04
DA	0.4	0.80 ± 0.04	0.73 ± 0.05
H	0.4	0.60 ± 0.01	0.48 ± 0.04

Es posible realizar un procedimiento similar determinando la amplitud media del frente de infección I_{max} (2.20) para distintas realizaciones variando el valor de p . En la figura 3.8 se muestran los resultados obtenidos. En este caso vemos que sale desfavorecido el medio homogéneo ya que la amplitud media I_{max} del frente de infección resulta ser mayor que en el medio aleatorio. Se realizó asimismo un ajuste con la regla $(1 - p/p_c)^{\alpha_I}$ para los casos heterogéneos sobre las regiones críticas, en la tabla 3.2 se muestran los resultados obtenidos.

Tabla 3.2: Parámetros críticos p_c y α_I del medio DA con diferentes γ/β .

Medio	γ/β	p_c	α_I
DA	0.2	0.90 ± 0.04	1.93 ± 0.05
DA	0.4	0.75 ± 0.04	2.12 ± 0.05

Puede verse que dentro del error, los resultados obtenidos para p_c concuerdan con los obtenidos del ajuste para la velocidad. Por otro lado, es posible observar que tanto para el caso de la amplitud media como de la velocidad los exponentes críticos difieren del dado en los casos homogéneos y también difieren entre sí.

**Figura 3.8:** Amplitud media I_{max} del frente de propagación en función de p con $\gamma/\beta = 0.2$ y 0.4 y $D_I = 1$. Se muestran los ajustes con la regla de potencia $I_{max} \propto (1 - p/p_c)^{\alpha_I}$ sobre la región crítica.

Para ver más resultados asociados a esta heterogeneidad se puede consultar el artículo [6]. Allí se presentan resultados adicionales acerca del factor de estructura del frente $S(q)$ (2.22) y del perfil del frente $f_I(x)$. Se encuentra una estructura auto-afín del frente sobre la región crítica, con una ley del tipo $S(q) \propto 1/q^{1+2\zeta}$.

En resumen, los resultados obtenidos aquí pueden describirse cualitativamente de la siguiente manera:

- Si el valor medio de la tasa de transmisión $\overline{\beta_{\mathbf{r}}}$ es el mismo, la velocidad del frente de infección/incendio es *mayor* sobre el medio dicotómico-aleatorio que sobre el homogéneo.
- Si el valor medio de la tasa de transmisión $\overline{\beta_{\mathbf{r}}}$ es el mismo, la amplitud media del frente de infección/incendio I_{max} es *mayor* sobre el medio homogéneo que sobre el dicotómico-aleatorio en tanto $p < p_c$, con p_c del medio homogéneo.
- El valor crítico p_c para el cual se extingue el frente de infección/incendio es *mayor* sobre el medio dicotómico-aleatorio que sobre el homogéneo.
- Los exponentes críticos de la velocidad α_c para el medio homogéneo *coinciden* con el estimado por c_0 en la aproximación analítica de la solución de onda.
- Los exponentes críticos de la velocidad α_c para el medio dicotómico-aleatorio son *mayores* que para el medio homogéneo y parecen *variar* con γ/β .

3.2. Medios correlacionados

En esta sección estudiamos las heterogeneidades con correlación introducidas en la sección 2.3, estas son las denominadas «suavizada» (S) y «dicotómica-correlacionada» (DC).

En las figuras 3.9 y 3.10 se muestra la evolución temporal del sistema para $p = 0.3$ y con un paso de suavizado para cada caso, es decir, con $\beta_{\mathbf{r}}^{(1)}$ y $\tilde{\beta}_{\mathbf{r}}^{(1)}$ respectivamente. Puede verse que DC presenta un campo de desplazamiento más rugoso que S y que la velocidad del frente en S es mayor que en DC. Sin embargo, aquí nuevamente resulta que la comparación es injusta ya que, aunque ambas simulaciones están hechas con el mismo valor de p , tienen distinta tasa de transmisión media. Como se vió en la sección 2.3, el valor medio sobre S es $\overline{\beta_{\mathbf{r}}^{(n)}} = (1-p)\beta$ mientras que sobre DC el valor medio de la tasa de transmisión cambia. Por ello utilizaremos de ahora en más como parámetro de referencia el valor medio de la tasa de transmisión y no p .

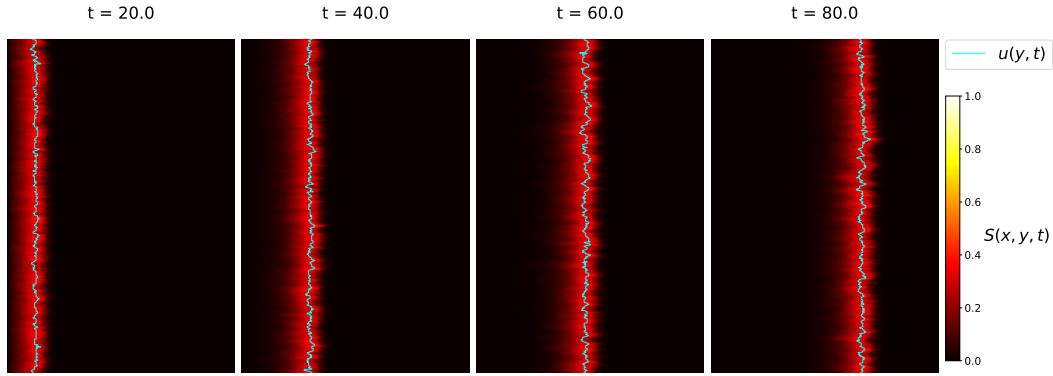


Figura 3.9: Evolución temporal del sistema para $p = 0.3$ con un paso de S.

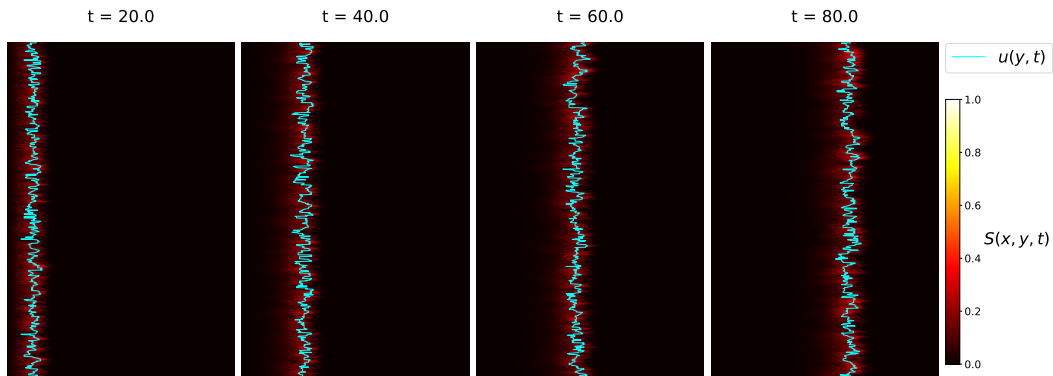


Figura 3.10: Evolución temporal del sistema para $p = 0.3$ con un paso de DC.

3.2.1. Velocidad y amplitud del frente

En las figuras 3.11 y 3.12 se muestra la posición del centro de masa del frente de realizaciones con distinta tasa de transmisión media, para S y DC respectivamente. Se utilizó $\gamma = 0.2$, $\beta = 1$ y $D_I = 1$.

Se puede apreciar, en ambos casos, que mientras mayor es la tasa de transmisión media, mayor es la velocidad del frente de infección/incendio, esto es algo de esperar. Sin embargo, algo que llama la atención es que el frente de infección parece sostener una velocidad mayor sobre DC que sobre S a medida que disminuye $\overline{\beta_r}$.

Lo mencionado anteriormente queda claro al observar la figura 3.13, donde se muestra la velocidad en función de $\overline{\beta_r}$ sobre los medios S y DC con un paso de suavizado. Adicionalmente, se muestran las curvas equivalentes para los medios homogéneo (H) y dicotómico-aleatorio (DA), vistos en 3.1. Vemos que la curva asociada a S queda entre las curvas de los medios H y DA. Esto es razonable ya que S se genera a partir de DA y como vimos en la sección 2.3, el medio S tiende a uno homogéneo con $\overline{\beta_r} = (1 - p)\beta$ cuando incrementamos los pasos de suavizado. Es de esperar entonces que curvas similares sobre S pero con más pasos de suavizado vayan asemejándose cada vez más a la versión homogénea.

Por otro lado, la curva asociada a DC queda alejada de las demás, se observa que la

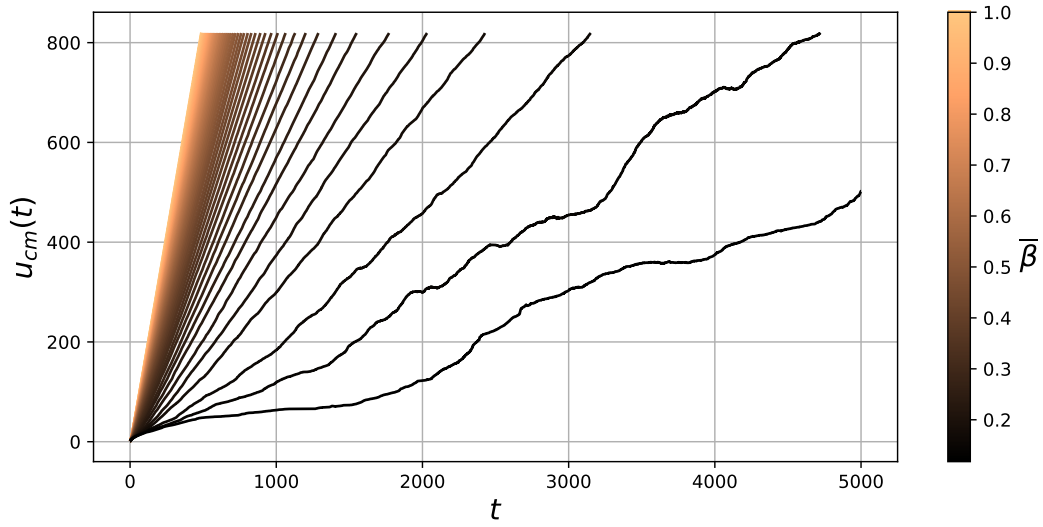


Figura 3.11: Posición del centro de masa del frente en función del tiempo sobre el medio S.

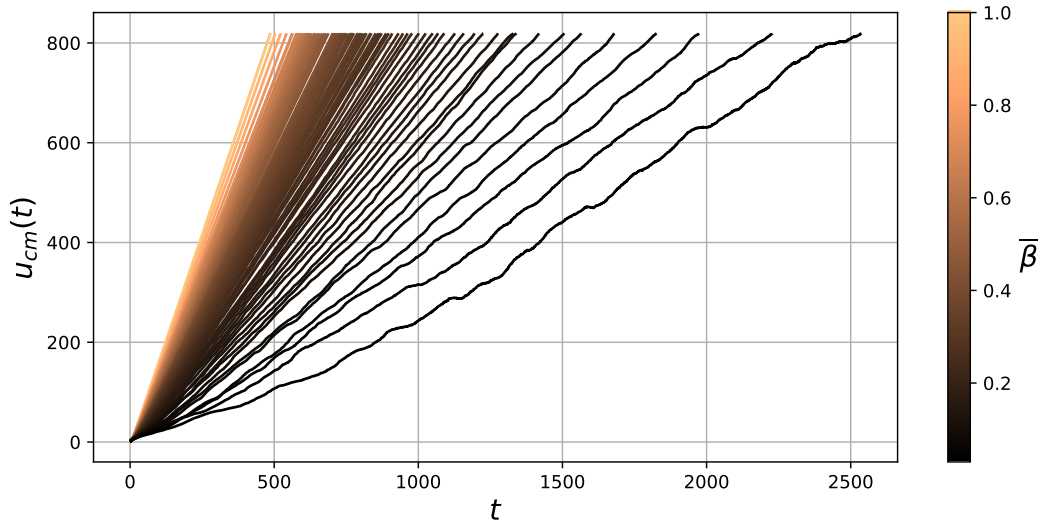


Figura 3.12: Posición del centro de masa del frente en función del tiempo sobre el medio DC.

velocidad del frente es apreciablemente más grande que en los demás casos cuando la tasa de transmisión media es chica, $\bar{\beta}_r < 0.2$. Ahora bien, este resultado por sí mismo es por lo menos curioso, es decir, **un ligero cambio en la estructura del medio sin afectar la tasa de transmisión media produce un cambio notable en la velocidad del frente**. Fundamentalmente, comparando el resultado de DC con el de DA, a pesar de que ambos medios tengan un carácter dicotómico, la correlación espacial introducida en DC genera un cambio notable sobre la velocidad.

Para entender mejor qué es lo que produce este cambio de velocidad entre DA y DC es interesante observar con mayor detenimiento la estructura de estos medios. En las figuras 3.14 y 3.15 se muestra la distribución de la tasa de transmisión β_r sobre el espacio de los medios DA y DC respectivamente. Ambos casos tienen la misma tasa de transmisión media. Observando la distribución espacial de cada uno de ellos a

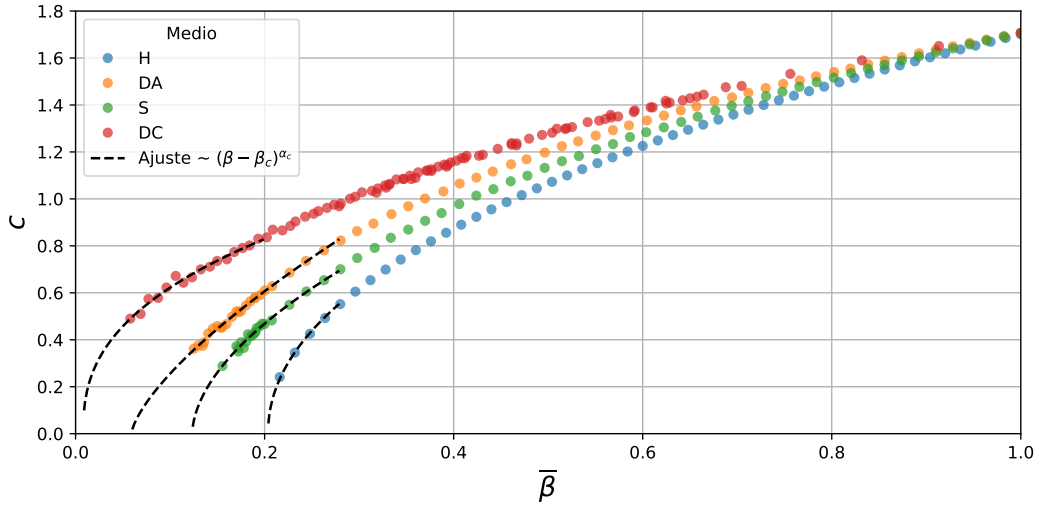


Figura 3.13: Velocidad del frente de infección en función del valor medio de la tasa de transmisión $\bar{\beta}_r$ sobre los medios S, DC, DA y H. Se muestran los ajustes con la regla de potencia $c \propto (\beta - \beta_c)^{\alpha_c}$ sobre la región crítica.

gran escala, sobre el espacio de 1024×1024 , no es sencillo señalar ninguna diferencia. Sin embargo, al observar la distribución sobre una región acotada de 100×100 se puede ver que son estructuralmente distintos en esta escala. La distribución de CD con $n = 1$ alcanza a formar un patrón distinguible, se forman regiones agrupadas con tasa de transmisión no nula β , mientras que en DA, por supuesto, se observa el carácter aleatorio. Este es un fenómeno notable, la velocidad de propagación es mayor si la distribución de la tasa de transmisión forma estructuras como las que se ven en la figura 3.15 en lugar de estar distribuída aleatoriamente, por más que la tasa de transmisión media sea la misma.

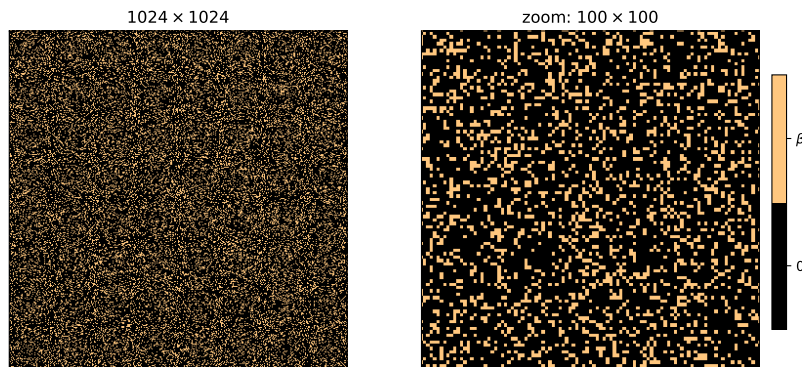


Figura 3.14: Distribución de la tasa de transmisión β_r del medio DA. A izquierda se muestra la distribución sobre todo el espacio de 1024×1024 y a la derecha un acercamiento a una región de 100×100 .

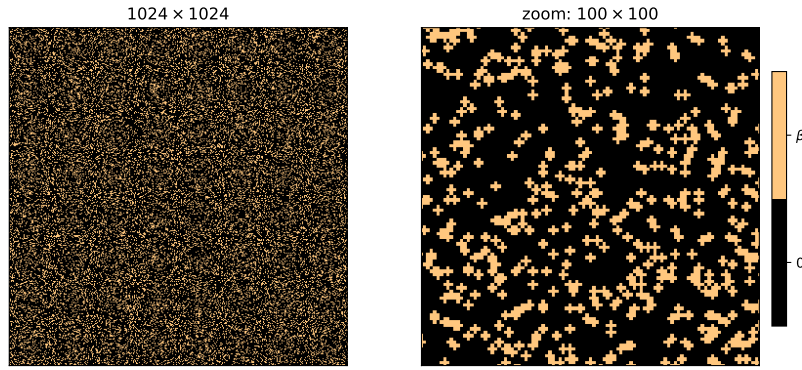


Figura 3.15: Distribución de la tasa de transmisión β_r del medio DC. A izquierda se muestra la distribución sobre todo el espacio de 1024×1024 y a la derecha un acercamiento a una región de 100×100 .

Se realizaron ajustes con la regla de potencia $c \propto (\beta - \beta_c)^{\alpha_c}$ sobre la región crítica para los medios DC, DA, S y H. De ello se determinó la tasa de transmisión crítica y el exponente crítico para cada uno de ellos. En la tabla 3.3 se muestran los resultados obtenidos.

Tabla 3.3: Parámetros críticos β_c y α_c de los medios DC, DA ,S y H.

Medio	β_c	α_c
H	0.20 ± 0.01	0.48 ± 0.03
DA	0.06 ± 0.02	0.70 ± 0.05
DC	0.01 ± 0.01	0.39 ± 0.05
S	0.12 ± 0.02	0.55 ± 0.05

Puede verse que los resultados sobre los medios H y DA coinciden con los valores críticos p_c obtenidos en la sección anterior (Tabla 3.1). Esto era de esperar dado que sobre estos medios, la tasa de transmisión media y el valor de p están relacionados por $\overline{\beta_r} = (1 - p)\beta$, de modo que $\beta_c = (1 - p_c)\beta$. De estos resultados también queda claro otro fenómeno notable al que da lugar la estructura del medio DC, y es que sobre este la tasa de transmisión crítica es *menor* comparada con las demás. Es decir, basta con una tasa de transmisión extremadamente chica, comparada con los demás medios, para que tenga lugar un frente de propagación.

Otro aspecto de interés es observar el efecto que tienen los distintos medios sobre la amplitud media del frente de infección/incendio . En la figura 3.16 se observa la amplitud media del frente como función de la tasa de transmisión media $\overline{\beta_r}$ para los medios S, DC, DA y H. En esta ocasión vemos que el medio homogéneo es el que sostiene la mayor amplitud del frente cuando $\overline{\beta_r} > 0.35$. Vemos aquí nuevamente que la curva de S queda entre las dadas por H y DA. Por otro lado, el medio DC, en consistencia con lo observado para la velocidad, otorga la mayor amplitud del frente para valores bajos de la tasa de transmisión media $\overline{\beta_r} < 0.35$. Es decir, el medio DC

favorece nuevamente, en este aspecto y sobre este régimen, a la propagación del frente.

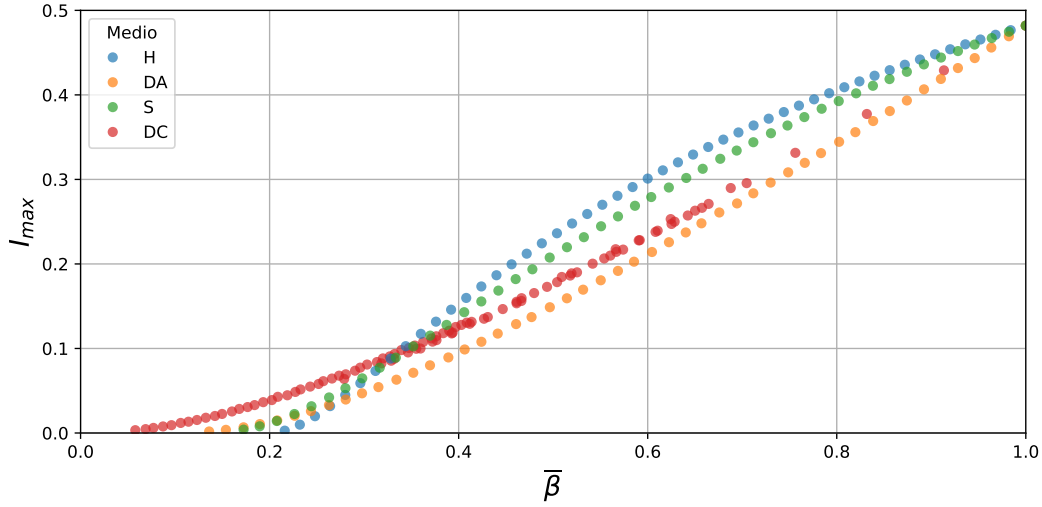


Figura 3.16: Amplitud media del frente de infección/incendio I_{max} en función de la tasa de transmisión media $\bar{\beta}_r$ para los medios S, DA, DC y H.

3.2.2. Rugosidad y factor de estructura

Ahora se propone investigar las propiedades geométricas del frente en función de $\bar{\beta}_r$ cerca de los valores críticos β_c obtenidos previamente para cada medio. En la figura 3.17 se muestra la rugosidad $\langle w(t) \rangle_t$ del frente de infección/incendio en función de la tasa de transmisión media para realizaciones sobre los medios S, DA y DC.

Para cada una de estas curvas se realizó un ajuste de tipo $\langle w(t) \rangle_t \propto (\beta - \beta_c)^{\alpha_w}$ sobre la región crítica. A partir de lo cual se obtuvieron los resultados que se muestran en la tabla 3.4 para cada uno de los medios.

Tabla 3.4: Parámetros críticos β_c y α_w de los medios DC, DA y S.

Medio	β_c	α_w
DA	0.07 ± 0.02	1.61 ± 0.05
DC	0.01 ± 0.01	0.96 ± 0.05
S	0.11 ± 0.02	1.48 ± 0.05

Los valores críticos de β_c concuerdan con los obtenidos previamente del estudio de la velocidad del frente, tal como corresponde (Tabla 3.3).

Por otro lado, si observamos el factor de estructura $S(q)$ (2.22) de los frentes cerca del valor crítico de la tasa de transmisión media, se observa que sobre el medio DA el frente presenta una estructura fractal auto-afín, $S(q) \sim 1/q^{1+2\zeta}$, con exponente de rugosidad $\zeta = 0.3$ tal como puede verse de la figura 3.18. Sin embargo, para los medios S y DC no se observa nada similar, los valores de ζ son indistinguibles de cero.

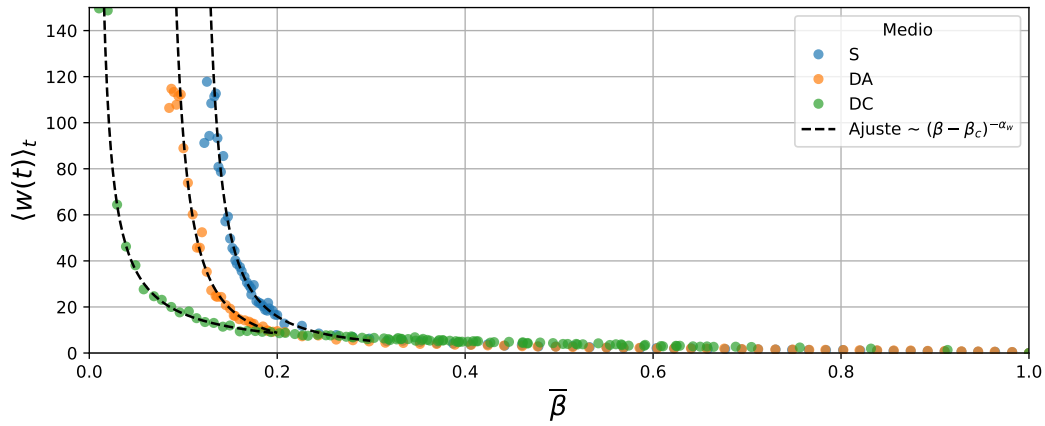


Figura 3.17: Rugosidad del frente de infección/incendio en función de la tasa de transmisión media $\bar{\beta}_r$ para los medios S, DA y DC.

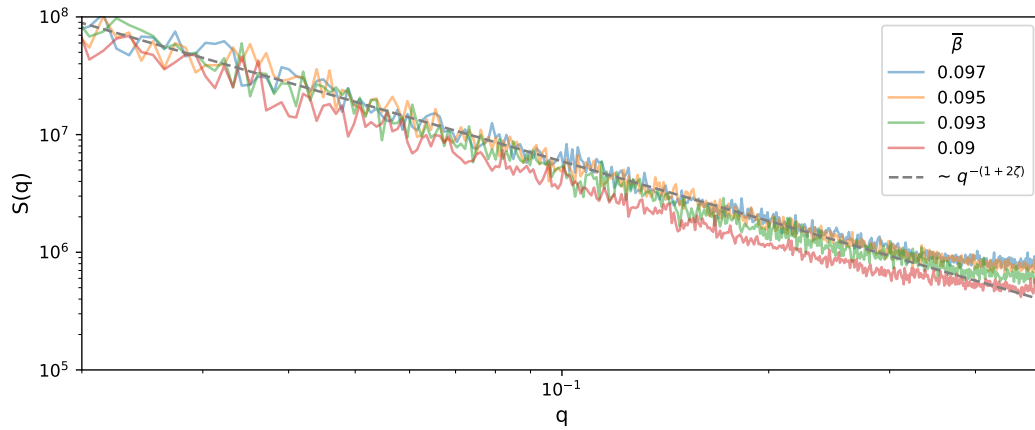


Figura 3.18: Factor de estructura $S(q)$ sobre el medio DA cerca de la tasa de transmisión crítica. Se muestra el ajuste $S(q) \sim 1/q^{1+2\zeta}$ con $\zeta \approx 0.3$.

Resumiendo esta sección, se tienen los siguientes resultados:

- Si la tasa de transmisión media es la misma, la velocidad del frente de infección/incendio es *mayor* sobre el medio DC.
- Si la tasa de transmisión media es la misma y $\bar{\beta}_r > 0.35$, la amplitud media del frente de infección/incendio es *mayor* sobre el medio H.
- Si la tasa de transmisión media es la misma y $\bar{\beta}_r < 0.35$, la amplitud media del frente de infección/incendio es *mayor* sobre el medio DC.
- La tasa de transmisión crítica es la *menor* sobre el medio DC y la *mayor* sobre el medio H.
- Los exponentes críticos de la velocidad sobre los medios H, S, DA y DC parecen ser *diferentes* entre sí, siendo el *mayor* en el medio DA.

- El campo de desplazamiento del frente presenta una estructura auto-afín en el medio DA sobre el régimen crítico, $S(q) \propto q^{-(1+2\zeta)}$ con $\zeta = 0.3$.

3.3. Nocividad

Un aspecto de gran importancia en lo que respecta a problemáticas tanto epidemiológicas como de incendios es la posibilidad de cuantificar los daños que deja un brote de enfermedad infecciosa o un incendio. En particular, estaremos interesados en estimar el daño que queda tras el paso del frente de infección/incendio. Para ello utilizaremos como cuantificador de daños la fracción de susceptibles S_1 que queda tras el paso del frente de onda. Entendiendo que mientras menor sea esta fracción, mayor será el daño ocasionado por el frente.

Para ser más precisos al respecto, tomaremos

$$S_1 = \langle S(x, y, T) \rangle_{x,y}$$

con $0.2L < x < u_{cm}(T) - 0.2L$, siendo T el tiempo que dure la simulación correspondiente. Utilizando este criterio para todas las simulaciones, podremos comparar la nocividad de cada frente al modificar los parámetros que interesen. En particular, veremos cómo cambia esta magnitud S_1 con la tasa de transmisión media $\bar{\beta}_r$.

En la figura 3.19 se muestran los resultados obtenidos de S_1 en función de $\bar{\beta}_r$ sobre los medios H, S, DA y DC. Se puede observar que el frente de propagación más nocivo se da sobre el medio homogéneo, ya que da lugar a la menor fracción de susceptibles S_1 tras el paso del frente. Sin embargo, tal como ya hemos apreciado antes (Tabla 3.3), la tasa de transmisión crítica es menor que en los demás casos $\beta_c \approx 0.2$.

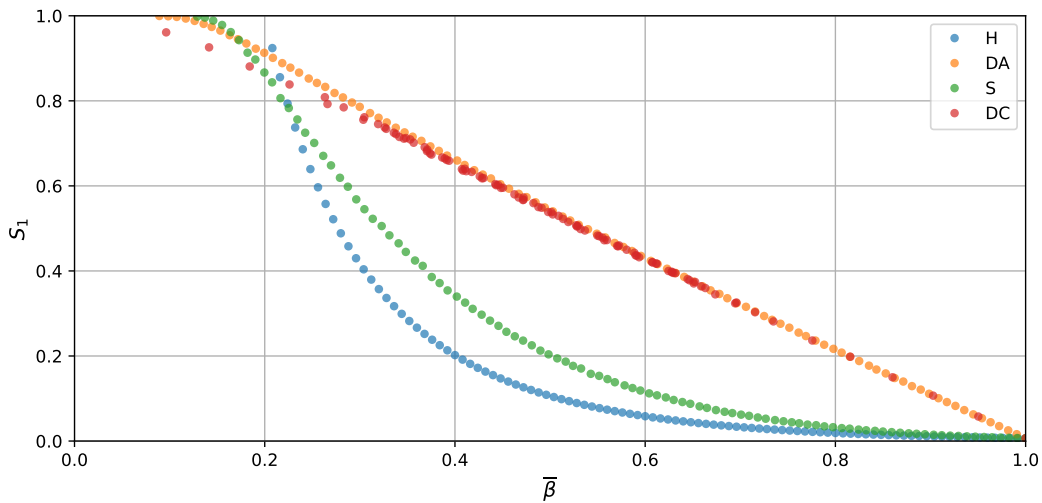


Figura 3.19: Fracción de susceptibles S_1 en función de la tasa de transmisión media $\bar{\beta}_r$ para los medios H, S, DA y DC.

El siguiente medio de nocividad elevada es S, mientras que los medios DC y DA presentan curvas similares de carácter lineal. Estos nuevos resultados dan una perspectiva nueva acerca de los medios. Por ejemplo, habíamos visto que la velocidad de propagación del frente es mayor sobre el medio DC que sobre los demás, lo cual es una característica indeseable en problemáticas tanto epidemiológicas como de incendios. Sin embargo, vemos ahora que a pesar de ello la nocividad del frente, tal como la hemos caracterizado aquí, es menor sobre DC que sobre los demás medios, lo cual es deseable. A modo cualitativo es entendible que si el frente se desplaza a mayor velocidad tenga menos tiempo de ocasionar grandes daños.

En resumen:

- Si $\overline{\beta_r} > 0.2$, el frente de infección/incendio *más nocivo* se da sobre el medio H.
- Si $\overline{\beta_r} < 0.2$, el frente de infección/incendio *más nocivo* se da sobre el medio DC.
- Sobre los medios dicotómicos DC y DA, la *nocividad* es directamente proporcional a la tasa de transmisión media, $S_1 \propto \overline{\beta_r}$.

Capítulo 4

Conclusiones

Se utilizaron herramientas estadísticas y computacionales para caracterizar frentes de onda gobernados por ecuaciones de reacción-difusión asociadas al modelo SIR sobre una variedad de medios estadísticamente isotrópicos. Estos frentes de onda son característicos de diversas fenomenologías asociadas a ecuaciones de reacción-difusión.

En particular, en el ámbito epidemiológico, modelar el efecto que tiene el carácter heterogéneo de la distribución espacial de las poblaciones sobre la dinámica infecciosa constituye un desafío complejo y sin lugar a dudas moderno.[\[2\]](#)

El trabajo desarrollado aquí constituye un paso en esa dirección. Fue posible obtener resultados no triviales respecto de la influencia del medio sobre los frentes de propagación. Características de interés como la velocidad de propagación, la amplitud media, la rugosidad del campo de desplazamiento e incluso la nocividad de los frentes fueron desarrolladas a nivel cuantitativo. Exponentes críticos asociados a un cambio radical de la dinámica fueron determinados sobre los distintos medios.

Por otro lado, en el modelado de incendios forestales es claro que la topografía, el carácter heterogéneo del medio y las condiciones climáticas son factores determinantes. Estos podrían introducirse en el modelo a partir de una interpretación precisa de los efectos que las variaciones en el medio tienen sobre la dinámica y ser estudiados utilizando las mismas herramientas desarrolladas aquí.

Es importante notar que exponentes críticos tal como los determinados en este trabajo, suelen estar asociados a una dada clase de universalidad, que resulta independiente de los detalles propios del problema estudiado aquí. [\[14\]](#) Esto daría la posibilidad de estudiar sistemas más complejos dentro de la misma clase de universalidad a partir del modelo más simple que se ha explorado en este trabajo.

Para futuros trabajos en esta línea sería interesante investigar los efectos de la dinámica sobre medios hiper-uniformes, tanto ordenados como desordenados. Así como medios con configuraciones periódicas o bien tan arbitrarias como se quiera. También se propone trabajar con medios dinámicos y no solo estacionarios como los estudiados aquí.

Apéndice A

Metodología numérica

El sistema de ecuaciones dado por

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial t} &= -\beta_{\mathbf{r}}SI + D_S\nabla^2 S, \\ \frac{\partial I}{\partial t} &= \beta_{\mathbf{r}}SI - \gamma I + D_I\nabla^2 I,\end{aligned}$$

se resolvió numéricamente utilizando el siguiente esquema explícito de Euler:

$$\begin{aligned}S_{ij}^{n+1} &= S_{ij}^n + \Delta t \left(-\beta_{ij}S_{ij}^n I_{ij}^n + \frac{D_S}{d^2}(S_{i+1j}^n + S_{i-1j}^n + S_{ij+1}^n + S_{ij-1}^n - 4S_{ij}^n) \right) \\ I_{ij}^{n+1} &= I_{ij}^n + \Delta t \left(\beta_{ij}S_{ij}^n I_{ij}^n - \gamma I_{ij}^n + \frac{D_I}{d^2}(I_{i+1j}^n + I_{i-1j}^n + I_{ij+1}^n + I_{ij-1}^n - 4I_{ij}^n) \right)\end{aligned}$$

donde los índices i y j corresponden a la discretización de las coordenadas espaciales y el índice n corresponde a la discretización temporal. Se utilizaron de manera general los siguientes parámetros $\Delta t = 0.1$, $d = 1$, $D_I = 1$ y $D_S = 0$. Los demás parámetros involucrados se indican según corresponde en el texto.

Este esquema se implementó por computación en paralelo utilizando procesadores gráficos. De esta manera fue posible resolver de manera eficiente cientos de sistemas sobre grillas de 1024×1024 . En particular se utilizó la librería de **Python** para computación en paralelo llamada **CuPy**, que es un equivalente de la librería **NumPy** pero integrada con **CUDA**.

A continuación se muestra la función central del esquema numérico que permite recorrer la grilla del sistema en paralelo y calcular las derivadas del sistema en cada nodo utilizando esta librería, se representan a S e I como X e Y respectivamente:


```

forces = cp.ElementwiseKernel(
    'raw float64 X, raw float64 Y, raw float64 params, raw float64 beta, raw float64 gamma, int16 L',
    'float64 fX, float64 fY',
    ',,',
    double N = params[0]; double nu = params[1]; double mu = params[2]; double Dx = params[3];
    double Dy = params[4];

    int x = i % L;
    int y = (int) i/L;

    fX = nu - beta[i]*X[i]*Y[i]/N - mu*X[i] +
        Dx*(X[(x+1)%L + L*y] + X[(x-1+L)%L+L*y] + X[x + L*((y+1)%L)] + X[x + L*((y-1+L)%L)] - 4*X[i]);

    fY = beta[i]*X[i]*Y[i]/N - (gamma[i]+mu)*Y[i] +
        Dy*(Y[(x+1)%L + L*y] + Y[(x-1+L)%L+L*y] + Y[x + L*((y+1)%L)] + Y[x + L*((y-1+L)%L)] - 4*Y[i]);
    ',,
    'forces')

```

y el paso de Euler se lee simplemente como:

```

...
forces(X,Y,params,beta,gamma,Lx,fX,fY)
X = X + tstep*fX
Y = Y + tstep*fY
...

```

Para dar una idea de la aceleración dada por la programación en paralelo, en la figura A.1 se muestra el tiempo necesario para resolver un sistema de $N \times N$ sitios y 1000 pasos de Euler con procesadores gráficos (GPU) y con procesadores convencionales (CPU). La diferencia es notable, por ejemplo, para un sistema de 1024×1024 , el tiempo necesario para resolverlo con CPU es aproximadamente de 2.7 horas, mientras que con GPU se resuelve en 1 segundo. Se muestra también un ajuste para ambas curvas del tipo $t \propto N^a$ con $a \approx 2$ para ambos. De todo esto resulta clara la necesidad de trabajar con computación en paralelo para obtener los resultados desarrollados en este trabajo en un tiempo razonable. Para ver más detalles acerca del código y las herramientas computacionales implementadas puede acceder al siguiente [Notebook](#) de *Google Colab*.

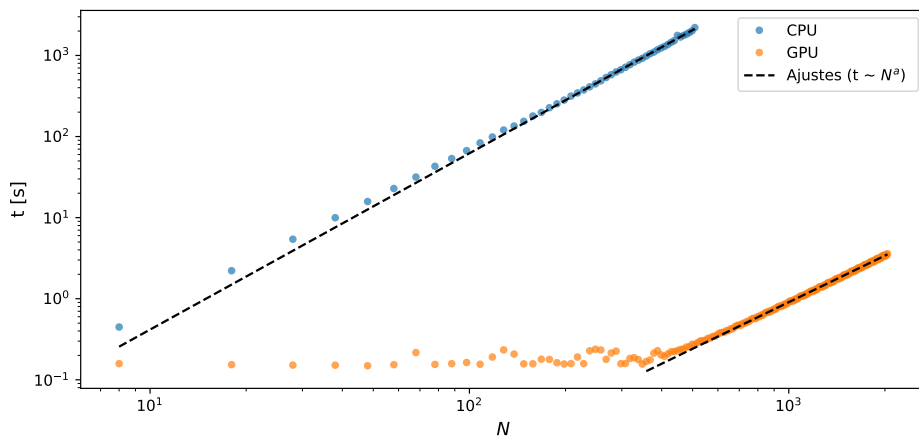


Figura A.1: Tiempo de resolución de un sistema de $N \times N$ sitios y 1000 pasos de Euler con procesadores gráficos (GPU) y con procesadores convencionales (CPU). Se muestran también los ajustes de tipo $t \propto N^a$ con $a \approx 2$ para ambos.

Bibliografía

- [1] Bressan, A., De Lellis, C. Existence of optimal strategies for a fire confinement problem. *Communications on Pure and Applied Mathematics: A Journal Issued by the Courant Institute of Mathematical Sciences*, **62** (6), 789–830, 2009. [1](#)
- [2] Riley, S., Eames, K., Isham, V., Mollison, D., Trapman, P. Five challenges for spatial epidemic models. *Epidemics*, **10**, 68–71, 2015. Challenges in Modelling Infectious Disease Dynamics. [1](#), [31](#)
- [3] Kermack, W. O., McKendrick, A. G., Walker, G. T. A contribution to the mathematical theory of epidemics. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, **115** (772), 700–721, 1927. [1](#), [4](#), [5](#)
- [4] Keeling, M. J., Rohani, P. Modeling infectious diseases in humans and animals. págs. 15–26. Princeton University Press, 2008. [4](#), [6](#)
- [5] Noble, J. V. Geographic and temporal development of plagues. *Nature*, **250**, 726–729, 1974.
- [6] Kolton, A. B., Laneri, K. Rough infection fronts in a random medium. *The European Physical Journal B*, **92** (6), Jun 2019. [1](#), [11](#), [15](#), [22](#)
- [7] Abramson, G., Kenkre, V., Yates, T., Parmenter, R. Traveling waves of infection in the hantavirus epidemics. *Bulletin of mathematical biology*, **65**, 519–34, 06 2003. [1](#)
- [8] Romeo-Aznar, V., Paul, R., Telle, O., Pascual, M. Mosquito-borne transmission in urban landscapes: The missing link between vector abundance and human density. *Proceedings of the Royal Society B: Biological Sciences*, **285**, 20180826, 08 2018. [1](#)
- [9] Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., Flannery, B. P. Numerical recipes 3rd edition: The art of scientific computing. págs. 907–910. Cambridge University Press, 2007. [4](#)

-
- [10] Murray, J. D. Mathematical Biology I. An Introduction, tomo 17 de *Interdisciplinary Applied Mathematics*. New York: Springer, 2002. [6](#)
- [11] Murray, J. D. Mathematical Biology II: Spatial Models and Biomedical Applications, tomo 18 de *Interdisciplinary Applied Mathematics*. Springer New York, 2003.
- [12] Coulson, C. A. The mathematics of diffusion. by j. crank. pp. vii, 347. 50s. 1956. (clarendon press). *The Mathematical Gazette*, **42** (340), 165–165, 1958. [6](#)
- [13] Turing, A. The chemical basis of morphogenesis. *Philosophical Transactions of the Royal Society B*, **237**, 37–72, 1952. [6](#)
- [14] Barabási, A.-L., Stanley, H. E., *et al.* Fractal concepts in surface growth. Cambridge university press, 1995. [31](#)

Agradecimientos

Agradezco al Instituto Balseiro, a la Universidad Nacional de Cuyo y a la Comisión Nacional de Energía Atómica por hacer posible mis estudios universitarios. Agradezco enteramente a todo el personal de estas instituciones que hacen posible, con gran esfuerzo y a pesar todas las complicaciones dadas por la pandemia, que educación universitaria de altísimo nivel, pública y gratuita llegue a todo el país. Particular agradecimiento para mi director de tesis, Dr. Alejandro Kolton, por su gran apoyo en el desarrollo de este trabajo y buena predisposición para todo. Agradezco también a mis compañeros de camada Amir Zablotsky, Pedro *El Bata* Llauradó, Esteban *El Leches* Acerbo, Marco Madile, Ezequiel Saidman, Martín Famá y Francisco *El Bbto* Gymnich por estar siempre presentes y ayudar a liberar las tensiones de la vida universitaria.

