



DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA2601-5 ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Tarea Numérica

Modelo simple de formación de estrellas

Estudiante:

Renzo Zanca Ruedlinger

Equipo Docente:

Álvaro Bustos

Alexander Frank

Alexis Fuentes

Álvaro Hernández

Christofer Maulén

Axel Osses

Donato Vasquez

Entrega:

7 de Junio de 2021

1. Introducción/Motivación

En este informe se abordara la resolución de un sistema de ecuaciones diferenciales utilizando métodos numéricos, en particular, el método de Euler progresivo y Runge Kutta orden 4. Para implementar los métodos numéricos, se utilizó Python 3.8. El problema que se buscaba resolver es un modelo de formación y evolución de estrellas. Para ello se consideraron las variables t , $a(t)$, $m(t)$ y $s(t)$, donde $a(t)$ es la fracción de masa de gas atómico, $m(t)$ la fracción de masa de gas molecular, $s(t)$ la fracción de masa de estrellas activas y t la variable independiente que representa el tiempo en millones de años. Para resolver este sistema se consideraron la siguientes ecuaciones:

$$a + m + s = 1 \quad (1)$$

$$\frac{da}{dt} = s - k_1 m^2 a \quad (2)$$

$$\frac{dm}{dt} = k_1 m^2 a - k_2 m^\alpha s \quad (3)$$

Con estas ecuaciones se debían resolver 5 actividades, que serán brevemente explicadas a continuación.

- Parte a) En esta parte se debía resolver numéricamente el sistema usando el método de Euler progresivo y luego graficar la superposición de las 3 curvas a , m y s . Se debían considerar 6 casos que se presentan en la siguiente tabla:

	k_1	k_2	α	$a(0)$	$m(0)$
Caso 1	10	10	1.0	0.15	0.15
Caso 2	8	15	1.2	0.4	0.3
Caso 3	8	15	1.5	0.4	0.3
Caso 4	8	15	1.9	0.4	0.3
Caso 5	8	15	2.0	0.4	0.3
Caso 6	8	15	2.1	0.4	0.3

- Parte b) En esta parte se debía graficar el plano de fases ($a(t)$, $m(t)$) para cada caso de la tabla y explicar su comportamiento.
- Parte c) En esta parte se debe considerar el segundo caso de la tabla y haciendo variar α entre $1,3 \leq \alpha \leq 1,9$. Luego se debía calcular el periodo limite en que se reproducen las estrellas para distintos valores de α , utilizando el método de Euler progresivo.
- Parte d) Esta parte consistía en resolver el mismo problema que en c), pero resolviendo el sistema con el método de Runge Kutta orden 4.

-
- Parte e) Esta parte consistía en resolver el mismo problema que en c), pero resolviendo el sistema con algún método de resolución de ecuaciones diferenciales que Python.

La principal motivación para la realizar estas actividades, es que se puede aplicar lo aprendido en el curso para resolver un problema científico, en este caso, del área de la astronomía. Esto es de interés, pues permite comprender la importancia de las ecuaciones diferenciales para modelar y resolver problemas presentes en la ciencia.

2. Resultados

2.1. Parte a)

Para resolver el sistema, se despejó s de la ecuación 1 (obteniendo la ecuación 4), luego se reemplazó este valor en las ecuaciones 2 y 3, obteniendo 2 ecuaciones diferenciales con 2 variables (ecuaciones 5 y 6). Una vez hecho esto, se resolvieron esas ecuaciones (5 y 6) usando Euler progresivo y finalmente se obtuvo el valor de s reemplazando a y m en la ecuación 4. Cabe destacar que se considero un largo de intervalo de 100 millones de años y un paso de 0.1 millones de años, a excepción del caso 2 donde se utilizó un paso de 0.05 años para que el método converja.

$$s = 1 - a - m \quad (4)$$

$$\frac{da}{dt} = (1 - a - m) - k_1 m^2 a \quad (5)$$

$$\frac{dm}{dt} = k_1 m^2 a - k_2 m^\alpha (1 - a - m) \quad (6)$$

Una vez resuelto el sistema, se procedió a graficar la superposición de las 3 curvas en un mismo gráfico. Los graficos obtenidos para cada caso son los siguientes:



Figura 1: Resolución del sistema caso 1.



Figura 2: Resolución del sistema caso 2.



Figura 3: Resolución del sistema caso 3.

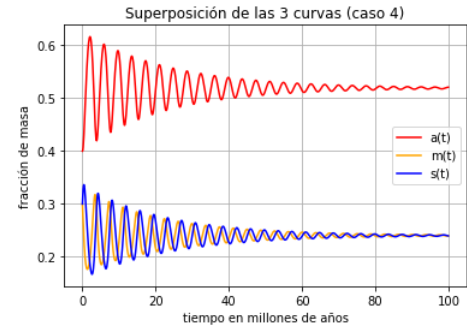


Figura 4: Resolución del sistema caso 4.

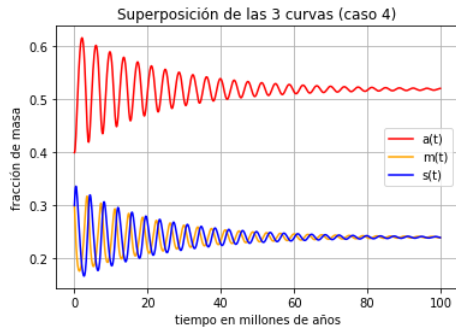


Figura 5: Resolución del sistema caso 5.

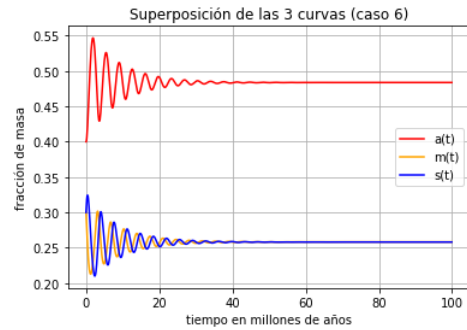


Figura 6: Resolución del sistema caso 6.

2.2. Parte b)

Utilizando lo resuelto en la parte a, se obtuvieron los siguientes planos de fase para cada caso:

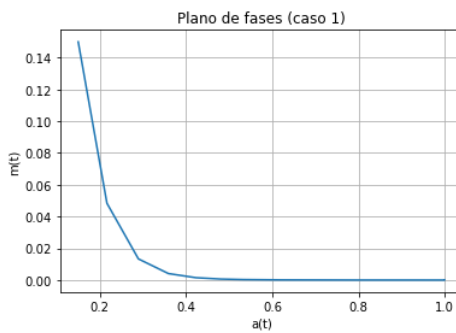


Figura 7: Plano de fase caso 1.

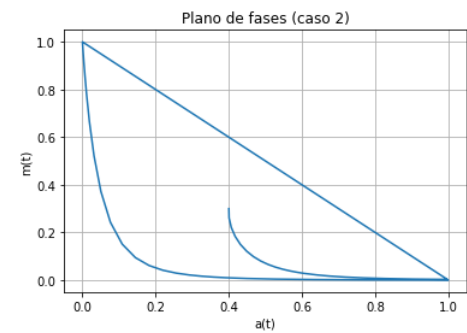


Figura 8: Plano de fase caso 2.

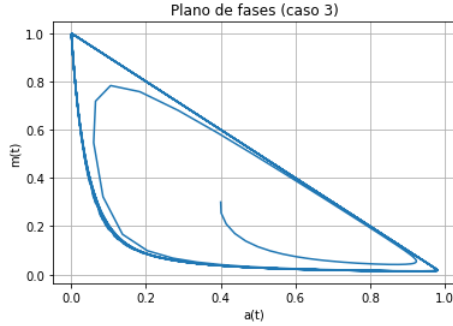


Figura 9: Plano de fase caso 3.

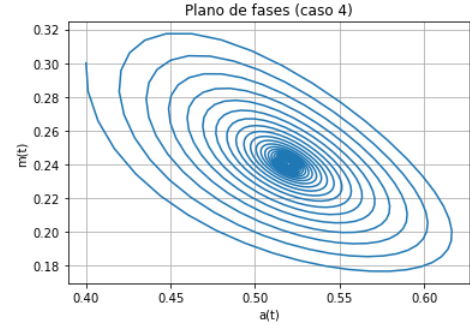


Figura 10: Plano de fase caso 4.

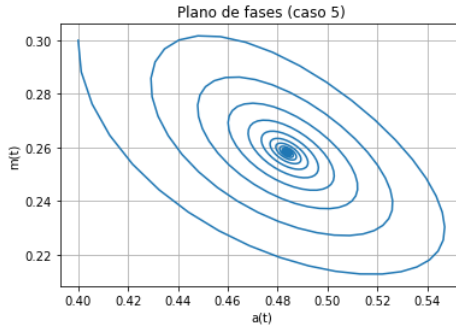


Figura 11: Plano de fase caso 5.

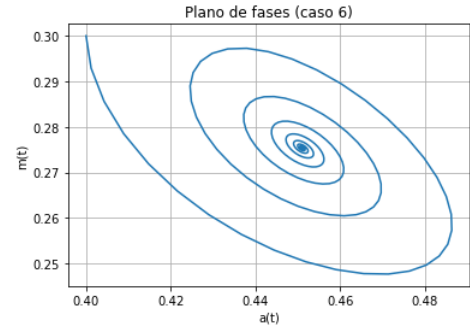


Figura 12: Plano de fase caso 6.

2.3. Parte c)

Para estimar el periodo límite se consideraron 7 valores de α , los cuales fueron: 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8 y 1.9. Además se consideraron las mismas constantes k_1 , k_2 y las mismas condiciones iniciales que las del caso 2 de la parte a. Como se buscaba el periodo en el límite (t tendiendo a infinito), el primer paso fue resolver el sistema para un t grande, donde se consideró un largo de intervalo de 500 millones de años y un paso de 0.1 millones de años, a excepción del caso $\alpha=1.3$, donde se consideraron 100 millones de años solamente y un paso de 0.05 millones de años para que el método convergiera. De igual manera, para los valores de α 1.8 y 1.9, se consideró un largo de intervalo de 100 millones de años para asegurar la convergencia.

Una vez resuelto el sistema, se almacenó en una lista todos los máximos de $s(t)$, dado que una forma de obtener el periodo, es comparar la diferencia de tiempo entre 2 máximos. Se considero como periodo límite la diferencia de tiempo entre los 2 últimos máximos de $s(t)$, donde se asume que los máximos posteriores también poseerán una diferencia entre máximos similar. Una vez hecho este proceso para los 7 valores de α , se visualizaron los resultados en el siguiente gráfico:

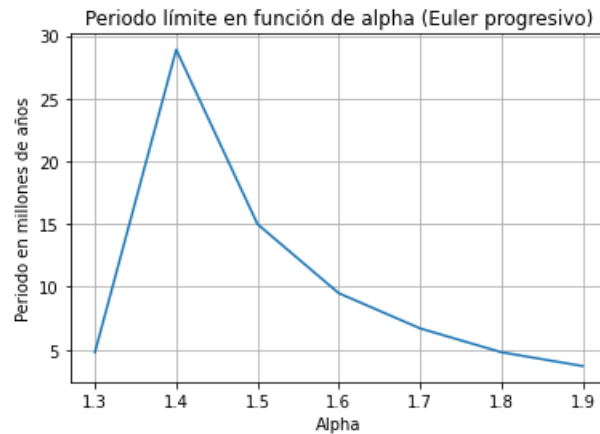


Figura 13: Periodo límite obtenido usando el método de Euler progresivo.

2.4. Parte d)

Para esta parte se consideraron los mismos 7 valores de alpha que la parte anterior. Además se consideraron las mismas constantes k_1 , k_2 y las mismas condiciones iniciales que las del caso 2 de la parte a. El primer paso para obtener el periodo límite fue utilizar el método de Runge Kutta orden 4 para resolver el sistema para cada valor de alpha. En general se resolvió el sistema con un largo de intervalo de 500 millones de años y un paso de 0.1 millones de años. Sin embargo, para asegurar la convergencia de los métodos, para el caso de $\alpha=1.3$ se utilizó un paso de 0.05 millones de años y un largo de intervalo de 100 millones de años y para el caso de alpha igual a 1.8 y 1.9 se utilizó un largo de intervalo de 100 millones de años. Una vez resuelto el sistema, se calculó el periodo límite con un proceso análogo al de la parte c. Al terminar este proceso, se obtuvo el siguiente gráfico de periodo límite:

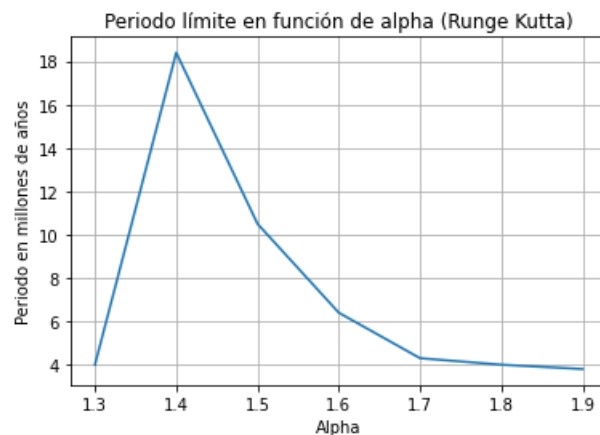


Figura 14: Periodo límite obtenido usando el método de Runge Kutta orden 4.

2.5. Parte e)

Para esta parte se consideraron los mismos 7 valores de α que la parte c. Además se consideraron las mismas constantes k_1 , k_2 y las mismas condiciones iniciales que las del caso 2 de la parte a. En este caso se debía utilizar alguna rutina de resolución de ecuaciones diferenciales de alguna librería de Python. Se escogió la librería `scipy.integrate`, en donde se utilizó la función `odeint`, la cual permite aproximar el valor de una integral. La forma en que se aproxima es utilizando la cuadratura de Gauss–Kronrod, el cual corresponde a una variación del método numérico de la cuadratura de Gauss. Una cuadratura de Gauss n , es una cuadratura utilizada para obtener el resultado exacto al integrar polinomios de grado $2n-1$ o menor. Esto implica que la aproximación mejora si la función se puede aproximar a un polinomio de grado $2n-1$ o menor.

Volviendo a la función `odeint`, esta requiere 3 parámetros para resolver el sistema, el primero es una función que entregue las ecuaciones diferenciales a resolver, el segundo un vector de condiciones iniciales y el tercero la variable independiente del sistema. Luego, para resolver el sistema se debieron crear funciones que representen las ecuaciones diferenciales para cada valor de α , definir t , definir las condiciones iniciales y finalmente resolver utilizando la función `odeint`. En general, para resolver el sistema se consideró un largo de intervalo de 500 millones de años y un paso de 0.1 millones de años. No obstante, para asegurar la convergencia, para los valores de α 1.3, 1.8 y 1.9 se consideró un largo de intervalo de 100 millones de años. Además, para el valor de α 1.3, se consideró un paso de 0.05 millones de años. Una vez resuelto el sistema, se calculó el periodo de forma análoga a las partes c y d y se obtuvo el siguiente gráfico:

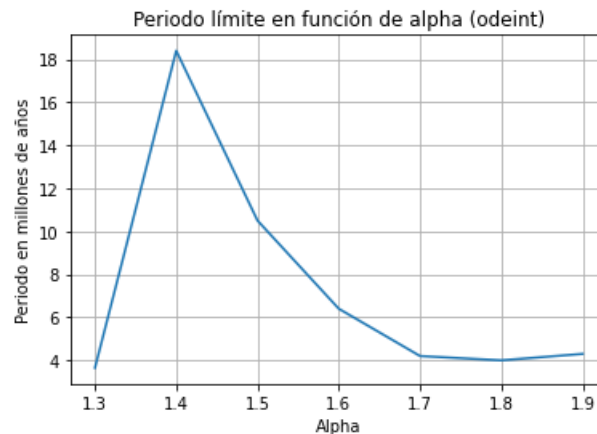


Figura 15: Periodo límite obtenido usando la librería `scipy.integrate.odeint`.

Una vez hecho esto, se comparó el periodo límite obtenido en las partes c, d y e. En el siguiente gráfico se muestra la superposición de los 3 periodos límites obtenidos:

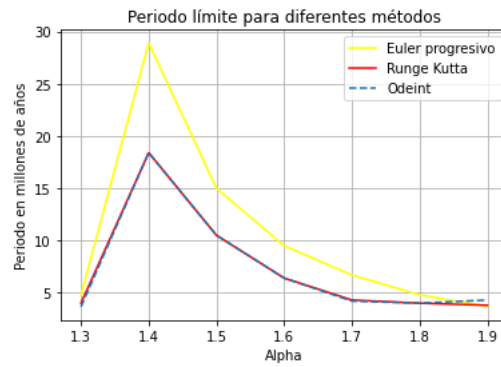


Figura 16: Comparación de los periodos límite utilizando 3 métodos distintos.

3. Análisis de resultados/Conclusiones

3.1. Parte a)

Se puede observar de las figuras 1 a 6, que los métodos permitieron resolver exitosamente el sistema, pues las soluciones convergieron a valores entre 0 y 1, lo cual es coherente con que a , m y s representan una fracción de masa. Cabe destacar que para el caso 2 se debió disminuir el paso del tiempo a 0.05 millones de años, con el fin de asegurar la convergencia de la solución.

Observando las figuras 3, 4, 5 y 6, se puede apreciar que las soluciones de $a(t)$, $m(t)$ y $s(t)$ para el tercer caso en adelante, comienzan a tener un comportamiento periódico.

3.2. Parte b)

Para analizar mejor estos planos de fases, primero debemos comprender que significa la evolución hacia un estado estacionario y la evolución hacia un ciclo límite. La evolución hacia un estado estacionario, se refiere a un estado donde las derivadas de las variables asociadas al sistema valgan cero, lo que es equivalente a que las variables se mantengan constantes. Una evolución hacia un ciclo límite se produce cuando en un plano de fases, las trayectorias convergen a una trayectoria definida cuando el tiempo converge a infinito. Una vez comprendida estas definiciones, pasemos a analizar lo obtenido en cada caso.

- Caso 1: Se observa de la figura 7 una curva que converge a cero, lo cual nos permite concluir que el sistema evoluciona hacia un estado estacionario. Esto es coherente con la solución del sistema, pues se observa en la figura 1 que las variables del sistema se mantienen constante pasado cierto tiempo.
- Caso 2: Se aprecia en la figura 8 una trayectoria cerrada la cual da una única vuelta. No se puede tener mucha certeza si evoluciona hacia un ciclo límite o no, pues da una única vuelta en el plano de fases, luego no se sabe con certeza si converge a esa trayectoria efectivamente. De la figura 2 se puede apreciar que la solución del sistema se mantiene constante por un periodo de tiempo, pero cada cierto tiempo varia. Por estas razones, no se tiene total certeza si converge a un ciclo límite o no.
- Caso 3: Se aprecia de la figura 9 una trayectoria similar a la del caso anterior, pero presentando 2 vueltas. Al igual que antes, no se puede tener mucha certeza si evoluciona hacia un ciclo límite o no. No obstante, de la figura se aprecia una solución periódica, la cual sugiere que es más probable que el estado evolucione hacia un ciclo límite.
- Caso 4: En este caso, se aprecia en la figura 10 que la trayectoria del plano de fases evoluciona hacia una trayectoria cerrada en el límite. Con esto podemos concluir que el estado evoluciona hacia un ciclo límite, lo cual es coherente con la solución periodica obtenida (figura 4).

- Caso 5: Al igual que el caso anterior, se observa en la figura 11 que la trayectoria del plano de fases evoluciona hacia una trayectoria cerrada en el límite, pero presentando menos vueltas que el caso anterior. De igual manera, podemos concluir que el estado evoluciona hacia un ciclo límite, lo cual es coherente con la solución periódica obtenida para este caso (figura 5).
- Caso 6: Nuevamente, en este caso se observa de la figura 12 que la trayectoria del plano de fases evoluciona hacia una trayectoria cerrada en el límite, pero presentando menos vueltas que los últimos 2 casos. No obstante, por el hecho de converger a una trayectoria definida, podemos concluir que el estado evoluciona hacia un ciclo límite. Esto contiene relación con la solución periódica obtenida en este caso (figura 6).

3.3. Parte c)

Para los distintos valores de α seleccionados se logró resolver el sistema y calcular el periodo límite, no obstante, se debió utilizar distintos largos de intervalo de tiempo para algunos casos, lo cual pudo provocar pequeños errores de cálculo. Cabe mencionar que obtener el periodo límite nos sirve para obtener la frecuencia de reproducción de las estrellas, pues la frecuencia corresponde a el inverso del periodo. Analizando el gráfico de la figura 13, se puede apreciar que comienza en un valor pequeño de 5 millones de años para $\alpha=1.3$, luego asciende a un valor cercano a 30 millones de años en $\alpha=1.4$ y para los valores siguientes comienza a descender el valor del periodo. De esto se puede desprender que el periodo límite, en función de α , es una función decreciente para valores de α entre 1.4 y 1.9.

3.4. Parte d)

Al igual que la parte anterior, se logró resolver el sistema y calcular el periodo límite para los distintos valores de α seleccionados, no obstante, se debió utilizar distintos largos de intervalo de tiempo para algunos casos, lo cual pudo provocar pequeños errores de cálculo. Tras analizar el gráfico de la figura 14, se observa que para $\alpha=1.3$ el periodo límite tiene un valor un poco menor a 4 millones de años, luego asciende a un valor cercano a 18 millones de años para $\alpha=1.4$ y para los valores posteriores de α , el periodo límite comienza a decrecer. De estos valores y el gráfico, se puede concluir que el periodo límite, en función de α , es una función decreciente para valores de α entre 1.4 y 1.9. Cabe mencionar que se obtuvo un comportamiento similar a lo obtenido en la parte c, pero los valores del periodo límite fueron menores.

3.5. Parte e)

Nuevamente, se logró resolver el sistema y calcular el periodo límite para los distintos valores de α seleccionados, no obstante, se debió utilizar distintos largos de intervalo de tiempo para algunos casos, lo cual pudo provocar pequeños errores de cálculo. Analizando el gráfico de la figura 15, se obtuvo una función muy similar a la obtenida en la parte d, donde comienza con un valor cercano a 4 millones de años para el primer valor de α , luego obtiene un valor cercano a 18

millones de años para el segundo valor de α y finalmente comienza a decrecer para los siguientes valores de α . Nuevamente, con este método se puede concluir que el periodo límite, en función de α , es una función decreciente para valores de α entre 1.4 y 1.9.

Analicemos ahora la comparación entre los 3 métodos para encontrar el periodo límite. En todos los métodos se logró obtener una respuesta mas o menos similar, donde sus diferencias se producen debido a las diferentes precisiones que pueden tener los métodos. Un ejemplo de esto, es la diferencia que existe entre el método de Euler progresivo y el de Runge Kutta orden 4, donde se sabe que el de Runge Kutta es más preciso que el de Euler progresivo, ya que este último posee un orden menor de 1. Analizando la figura 16, se aprecia que el método de Runge Kutta y el utilizado por la función `odeint` presentan una solución casi idéntica, mientras que la de Euler progresivo presenta un comportamiento similar, pero con valores mayores. Dado que el metodo de Runge Kutta es más preciso que el de Euler progresivo, seria mas prudente considerar este como la solución del problema. Además, se puede concluir que como el método implementado por la función `odeint` obtuvo una solución casi idéntica a la de Runge Kutta, este método presenta una buena aproximación para resolver ecuaciones diferenciales.

3.6. Conclusiones generales

Tras resolver este modelo de formación de estrellas, se logró entender la importancia que tienen las ecuaciones diferenciales para resolver problemas que se puedan presentar en el mundo científico. Además se pudo concluir que los métodos numéricos utilizados, permitieron obtener una buena aproximación de la solución del sistema de ecuaciones diferenciales.

4. Bibliografía

- Osses, A. (2018). ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS. (Apunte del curso)
- Laurie, D. P. (1997). CALCULATION OF GAUSS-KRONROD QUADRATURE RULES.
- Cambridge University Press. (2012). Cambridge 2 Unit Mathematics.
- Christopher, C., Li, C. (2007). Limit Cycles of Differential Equations.