

(ЗО) Самостоятельная работа № 5

Позиционные системы счисления

Цель: знакомство с понятием позиционной системы счисления и приобретение навыков перевода чисел из одной позиционной системы счисления в другую.

Задание. Выполнить пять переводов чисел, заданных в таблицах 1 и 2. Задание выполнить *подробно* в соответствии с методическими указаниями (по образцу).

Краткие теоретические сведения и пример выполнения заданий приведены после таблицы с заданиями.

Решения заданий рекомендуется выполнить на бумаге ручкой, а в docx-файл отчета вставить скан-копии или хорошо читаемые фотографии выполненных заданий.

Отчет следует начать с титульного листа.

Далее привести цель и общее задание на всю работу.

Затем привести индивидуальное задание i и решение индивидуального задания i ($i = 1, 2, \dots, n$; n – количество заданий в данной работе). *Обязательно произвести проверку полученного числа путем обратного перевода в исходную систему счисления.*

В конце отчета поместить вывод.

Таблица 1 – Задания 1, 2, 3

Вариант	Задание		
	1	2	3
1	$10011,1011_2 = __{10}$	$25,8125_{10} = __2$	$3131232,3202_4 = __2$
2	$1230,21_4 = __{10}$	$108,5625_{10} = __4$	$33556,704_8 = __2$
3	$142,13_5 = __{10}$	$39,84_{10} = __5$	$376e,e2_{16} = __2$
4	$245,3_6 = __{10}$	$203,5_{10} = __6$	$603f2,564_{16} = __4$
5	$137,26_8 = __{10}$	$158,1875_{10} = __8$	$12301213,231_4 = __2$
6	$1ea,c_{16} = __{10}$	$379,5_{10} = __{16}$	$66147,55_8 = __2$
7	$11001,1101_2 = __{10}$	$22,25_{10} = __2$	$6c67,b4_{16} = __2$
8	$232,12_4 = __{10}$	$57,8125_{10} = __4$	$2d55a7,9ed_{16} = __4$
9	$234,14_5 = __{10}$	$47,32_{10} = __5$	$3333000,132_4 = __2$
10	$153,3_6 = __{10}$	$69,5_{10} = __6$	$37700,36_8 = __2$
11	$215,62_8 = __{10}$	$141,78125_{10} = __8$	$3fc0,78_{16} = __2$
12	$17b,8_{16} = __{10}$	$725,625_{10} = __{16}$	$16abf5,5ac_{16} = __4$
13	$10110,01_2 = __{10}$	$15,625_{10} = __2$	$1003320,321_4 = __2$
14	$321,31_4 = __{10}$	$58,4375_{10} = __4$	$10370,71_8 = __2$
15	$124,41_5 = __{10}$	$195,68_{10} = __5$	$10f8,e4_{16} = __2$
16	$535,3_6 = __{10}$	$77,5_{10} = __6$	$1b6ef9,be_{16} = __4$
17	$236,14_8 = __{10}$	$102,875_{10} = __8$	$1132222,1112_4 = __2$
18	$2d5,a_{16} = __{10}$	$495,3125_{10} = __{16}$	$13652,254_8 = __2$
19	$1111,101_2 = __{10}$	$28,375_{10} = __2$	$17aa,56_{16} = __2$
20	$322,13_4 = __{10}$	$103,125_{10} = __4$	$556aa,ffc_{16} = __4$
21	$1240,32_5 = __{10}$	$148,44_{10} = __5$	$110133,311_4 = __2$
22	$314,3_6 = __{10}$	$118,5_{10} = __6$	$7525,52_8 = __2$
23	$237,4_8 = __{10}$	$159,5_{10} = __8$	$1223113,2322_4 = __2$
24	$1a8,f_{16} = __{10}$	$424,9375_{10} = __{16}$	$15327,564_8 = __2$
25	$11100,011_2 = __{10}$	$19,6875_{10} = __2$	$1ad7,ba_{16} = __2$
26	$1213,02_4 = __{10}$	$46,375_{10} = __4$	$1be48,63_{16} = __4$
27	$1043,21_5 = __{10}$	$69,36_{10} = __5$	$1320013,333_4 = __2$
28	$205,3_6 = __{10}$	$101,5_{10} = __6$	$17007,77_8 = __2$
29	$146,7_8 = __{10}$	$95,34375_{10} = __8$	$1e07,fc_{16} = __2$
30	$1ef,5_{16} = __{10}$	$490,75_{10} = __{16}$	$100af5,6f8_{16} = __4$

Таблица 2 – Задания 4, 5

Вариант	Задание	
	4	5
1	$1101011010111, 1011101_2 = ___4$	$1223113, 2322_4 = ___8$
2	$1101011010111, 1011101_2 = ___8$	$3131232, 3202_4 = ___8$
3	$1101011010111, 1011101_2 = ___{16}$	$66147, 55_8 = ___4$
4	$123321020, 1203_4 = ___{16}$	$33556, 704_8 = ___{16}$
5	$11011101101110, 1110001_2 = ___4$	$12301213, 231_4 = ___8$
6	$11011101101110, 1110001_2 = ___8$	$3333000, 132_4 = ___8$
7	$11011101101110, 1110001_2 = ___{16}$	$1003320, 321_4 = ___8$
8	$1200033302, 11121_4 = ___{16}$	$1320013, 333_4 = ___8$
9	$110110001100111, 101101_2 = ___4$	$10370, 71_8 = ___{16}$
10	$110110001100111, 101101_2 = ___8$	$17007, 77_8 = ___{16}$
11	$110110001100111, 101101_2 = ___{16}$	$13652, 254_8 = ___{16}$
12	$23111112213, 213231_4 = ___{16}$	$37700, 36_8 = ___4$
13	$11111111000000, 01111_2 = ___4$	$10370, 71_8 = ___4$
14	$11111111000000, 01111_2 = ___8$	$17007, 77_8 = ___4$
15	$11111111000000, 01111_2 = ___{16}$	$13652, 254_8 = ___4$
16	$11222233311, 11223_4 = ___{16}$	$15327, 564_8 = ___{16}$
17	$1000011111000, 111001_2 = ___4$	$1ad7, ba_{16} = ___8$
18	$1000011111000, 111001_2 = ___8$	$376e, e2_{16} = ___8$
19	$1000011111000, 111001_2 = ___{16}$	$6c67, b4_{16} = ___8$
20	$12312323321, 2332_4 = ___{16}$	$1132222, 1112_4 = ___8$
21	$1111000000111, 111111_2 = ___4$	$15327, 564_8 = ___4$
22	$1111000000111, 111111_2 = ___8$	$33556, 704_8 = ___4$
23	$1111000000111, 111111_2 = ___{16}$	$66147, 55_8 = ___{16}$
24	$10000223311, 12332_4 = ___{16}$	$37700, 36_8 = ___{16}$
25	$1011110101010, 0101011_2 = ___4$	$3fc0, 78_{16} = ___8$
26	$1011110101010, 0101011_2 = ___8$	$10f8, e4_{16} = ___8$
27	$1011110101010, 0101011_2 = ___{16}$	$1e07, fc_{16} = ___8$
28	$1111122222, 33333_4 = ___{16}$	$17aa, 56_{16} = ___8$
29	$10100011111, 110101_2 = ___4$	$3333000, 132_4 = ___8$
30	$111101010101, 10101_2 = ___8$	$13652, 254_8 = ___4$

Краткие теоретические сведения

Системой счисления (СС) называется совокупность приёмов наименования и записи чисел [1]. СС называется *позиционной*, если вес каждой цифры зависит от её положения в последовательности цифр, изображающих число. *Основанием* K позиционной СС называется число единиц какого-либо разряда, заменяемых единицей старшего разряда.

Позиционная СС с основанием K называется *K -ичной* СС. Для записи чисел в K -ичной СС используются K цифр, обозначающих числа $0, 1, \dots, K-1$. В таблице 3 представлены первые шестнадцать целых неотрицательных чисел в позиционных системах счисления с некоторыми основаниями.

Под *переводом* числа из P -ичной системы счисления в Q -ичную понимается преобразование исходного P -ичного представления числа в представление этого же числа в Q -ичной СС. Такой перевод будем обозначать схематично в виде $P \rightarrow Q$.

Рассмотрим различные варианты перевода чисел из одной системы счисления в другую.

1. При переводе $P \rightarrow 10$ (из некоторой P -ичной системы счисления в 10-ичную) сначала исходную запись числа представляют в виде полинома. Затем в полиноме все P -ичные представления чисел заменяют 10-ичными и вычисляют значение этого полинома средствами десятичной арифметики.

2. Перевод $10 \rightarrow P$ (из 10-ичной СС в P -ичную) осуществляют средствами десятичной арифметики, причём целую и дробную части числа переводят отдельно. Целую часть переводят делением на P нацело с остатком до достижения частного, равного нулю. Дробную часть переводят умножением на P с отделением целой части произведения до достижения дробной части произведения, равной нулю. Каждый остаток от деления и каждую целую часть произведения представляют одной P -ичной цифрой. Результаты перевода целой и дробной частей объединяют.

3. Если необходимо выполнить перевод $P \rightarrow Q$ при $P \neq 10$ и $Q \neq 10$, то действуют по схеме $P \rightarrow 10 \rightarrow Q$, т. е. последовательно выполняют переводы $P \rightarrow 10$ и $10 \rightarrow Q$. Однако, когда значения P и Q определённым образом взаимосвязаны, перевод можно выполнить с меньшими трудозатратами.

4. Так, например, если $P^1 = Q^n$ (n – натуральное число), то для выполнения перевода достаточно каждую P -ичную цифру исходного числа представить соответствующим n -значным Q -ичным числом. Если же $P^n = Q^1$, то при переводе каждое выделенное в исходном представлении n -значное число можно заменить соответствующей Q -ичной цифрой.

5. Наконец, если $P^1 = R^n$ и $R^m = Q^1$ (R, n, m – натуральные числа), то перевод целесообразно осуществить по схеме $P \rightarrow R \rightarrow Q$ с последовательным применением двух рассмотренных выше способов.

Таблица 3 – Целые числа от 0 до 16 в системах счисления с основанием K

K	Представления чисел															
2	0	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111
3	0	1	2	10	11	12	20	21	22	100	101	102	110	111	112	120
4	0	1	2	3	10	11	12	13	20	21	22	23	30	31	32	33
5	0	1	2	3	4	10	11	12	13	14	20	21	22	23	24	30
6	0	1	2	3	4	5	10	11	12	13	14	15	20	21	22	23
8	0	1	2	3	4	5	6	7	10	11	12	13	14	15	16	17
10	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
16	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d	e	f

Пример выполнения заданий

1а. Выполнить перевод $10111,111_2 = __{10}$.

Решение.

Для выполнения перевода $2 \rightarrow 10$ (из двоичной СС в десятичную) исходную запись числа представим в виде полинома, заменим в нём все двоичные представления чисел десятичными (см. табл. 2.2) и вычислим значение этого полинома средствами десятичной арифметики:

$$\begin{array}{ccccccccc} 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & & -1 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & , & 1 & 1 & 1 \end{array}_2 = 1_2 \cdot 10_2^4 + 0_2 \cdot 10_2^3 + 1_2 \cdot 10_2^2 + 1_2 \cdot 10_2^1 + 1_2 \cdot 10_2^0 +$$
$$+ 1_2 \cdot 10_2^{-1} + 1_2 \cdot 10_2^{-2} + 1_2 \cdot 10_2^{-3} = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} +$$
$$+ 1 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} = 1 \cdot 16 + 0 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1/2 + 1 \cdot 1/4 + 1 \cdot 1/8 =$$
$$= 16 + 4 + 2 + 1 + 0,5 + 0,25 + 0,125 = 23,875.$$

Ответ: $23,875_{10}$.

1б. Выполнить перевод $214,24_5 = __{10}$.

Решение.

Для выполнения перевода $5 \rightarrow 10$ (из пятеричной СС в десятичную) исходную запись числа представим в виде полинома, заменим в нём все пятеричные представления чисел десятичными (см. табл. 2.2) и вычислим значение полинома средствами десятичной арифметики:

$$\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{array}, \begin{array}{ccc} -1 & -2 & \\ 2 & 4 & \end{array}_5 = 2_5 \cdot 10_5^2 + 1_5 \cdot 10_5^1 + 4_5 \cdot 10_5^0 + 2_5 \cdot 10_5^{-1} + 4_5 \cdot 10_5^{-2} =$$
$$= 2 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5^1 + 4 \cdot 5^0 + 2 \cdot 5^{-1} + 4 \cdot 5^{-2} = 2 \cdot 25 + 1 \cdot 5 + 4 \cdot 1 + 2 \cdot 1/5 +$$
$$+ 4 \cdot 1/25 = 50 + 5 + 4 + 0,4 + 0,16 = 59,56.$$

Ответ: $59,56_{10}$.

1в. Выполнить перевод $1f9_{16} = __{10}$.

Решение.

Для выполнения перевода $16 \rightarrow 10$ (из шестнадцатеричной СС в десятичную) исходную запись числа представим в виде полинома, заменим в нём все шестнадцатеричные представления чисел десятичными (см. табл. 2.2) и вычислим значение полинома средствами десятичной арифметики:

$$2 \ 1 \ 0 \ -1$$

$$1 \ f \ 9, \ c_{16} = 1_{16} \cdot 10_{16}^2 + f_{16} \cdot 10_{16}^1 + 9_{16} \cdot 10_{16}^0 + c_{16} \cdot 10_{16}^{-1} =$$

$$= 1 \cdot 16^2 + 15 \cdot 16^1 + 9 \cdot 16^0 + 12 \cdot 16^{-1} = 1 \cdot 256 + 15 \cdot 16 + 9 \cdot 1 + 12 \cdot 1/16 =$$

$$= 256 + 240 + 9 + 0,75 = 505,75.$$

Ответ: $505,75_{10}$.

2а. Выполнить перевод $75,515625_{10} = __4$.

Решение.

Перевод $10 \rightarrow 4$ (из десятичной СС в четверичную) осуществим средствами десятичной арифметики, причём целую и дробную часть числа переведём отдельно.

Целую часть переведём делением на 4 нацело с остатком до достижения частного, равного нулю, и каждый остаток от деления представим четверичной цифрой:

$$\begin{array}{r} 7 \ 5 \ \overline{)4} \\ 4 \\ \hline 3 \ 5 \\ 3 \ 2 \\ \hline 3 \\ 3 = 3_4 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 \ 8 \ \overline{)4} \\ 1 \ 6 \ 4 \\ \hline 2 = 2_4 \end{array} \quad \begin{array}{r} 4 \ \overline{)4} \\ 4 \ 1 \\ \hline 0 = 0_4 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 \ \overline{)4} \\ 0 \ 0 \\ \hline 1 = 1_4 \end{array}$$

$$75_{10} = 1023_4.$$

Дробную часть переведём умножением на 4 с отделением целой части произведения до достижения дробной части произведения, равной нулю, и каждую целую часть полученных произведений представим четверичной цифрой:

$$\begin{array}{ll} 0,515625 \cdot 4 = 2,0625, & 2 = 2_4, \\ 0,0625 \cdot 4 = 0,25, & 0 = 0_4, \\ 0,25 \cdot 4 = 1,0, & 1 = 1_4, \end{array}$$

$$0,515625_{10} = 0,201_4.$$

Объединив результаты перевода целой и дробной части, получим $75,515625_{10} = 1023,201_4$.

Ответ: $1023,201_4$.

2б. Выполнить перевод $134,453125_{10} = __8$.

Решение.

Перевод $10 \rightarrow 8$ (из десятичной СС в восьмеричную) осуществим средствами десятичной арифметики, причём целую и дробную части числа переведём отдельно.

Целую часть переведём делением на 8 нацело с остатком до достижения частного, равного нулю, и каждый остаток от деления представим восьмеричной цифрой:

$$\begin{array}{r} 1\ 3\ 4 \overline{)8} \\ \underline{8} \\ 5\ 4 \\ \underline{4\ 8} \\ 6 = 6_8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1\ 6 \overline{)8} \\ \underline{1\ 6\ 2} \\ 0 = 0_8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \overline{)8} \\ \underline{0\ 0} \\ 2 = 2_8 \end{array}$$

$$134_{10} = 206_8.$$

Дробную часть переведём умножением на 8 с отделением целой части произведения до достижения дробной части произведения, равной нулю, и каждую целую часть полученных произведений представим восьмеричной цифрой:

$$\begin{aligned} 0,453125 \cdot 8 &= 3,625, & 3 &= 3_8, \\ 0,625 \cdot 8 &= 5,0, & 5 &= 5_8, \end{aligned}$$

$$0,453125_{10} = 0,35_8.$$

Объединив результаты перевода целой и дробной части, получим

$$134,453125_{10} = 206,35_8.$$

Ответ: $206,35_8$.

2в. Выполнить перевод $2983,875_{10} = ___{16}$.

Решение.

Перевод $10 \rightarrow 16$ (из десятичной СС в восьмеричную) осуществим средствами десятичной арифметики, причём целую и дробную части числа переведём отдельно.

Целую часть переведём делением на 16 нацело с остатком до достижения частного, равного нулю, и каждый остаток от деления представим шестнадцатеричной цифрой:

$$\begin{array}{r} 2\ 9\ 8\ 3 \overline{)1\ 6} \\ \underline{1\ 6} \\ 1\ 3\ 8 \\ \underline{1\ 2\ 8} \\ 1\ 0\ 3 \\ \underline{9\ 6} \\ 7 = 7_{16} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1\ 8\ 6 \overline{)1\ 6} \\ \underline{1\ 6} \\ 2\ 6 \\ \underline{1\ 6} \\ 1\ 0 = a_{16} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1\ 1 \overline{)1\ 6} \\ \underline{0\ 0} \\ 1\ 1 = b_{16} \end{array}$$

$$2983_{10} = ba7_{16}.$$

Дробную часть переведём умножением на 16 с отделением целой части произведения до достижения дробной части произведения, равной нулю, и каждую целую часть полученных произведений представим шестнадцатеричной цифрой:

$$0,875 \cdot 16 = 14,0,$$

$$14 = e_{16},$$

$$0,875_{10} = 0, e_{16}.$$

Объединив результаты перевода целой и дробной частей, получим $2983,875_{10} = ba7, e_{16}$.

Ответ: $ba7, e_{16}$.

3а. Выполнить перевод $25701,14_8 = __2$.

Решение.

Заметим, что $8^1 = 2^3$. Поэтому при выполнении перевода каждую восьмеричную цифру представим соответствующим трёхзначным двоичным числом (см. табл. 2.1):

$$2_8 = 10_2 = 010_2,$$

$$5_8 = 101_2,$$

$$7_8 = 111_2,$$

$$0_8 = 0_2 = 000_2,$$

$$1_8 = 1_2 = 001_2,$$

$$4_8 = 100_2,$$

$$25701,14_8 = \boxed{010} \boxed{101} \boxed{111} \boxed{000} \boxed{001} , \boxed{001} \boxed{100}_2.$$

Отбросим у полученного двоичного числа слева и справа незначащие нули:

$$010101111000001,001100_2 = 10101111000001,0011_2.$$

Ответ: $10101111000001,0011_2$.

3б. Выполнить перевод $1b49e,0f6_{16} = __4$.

Решение.

Заметим, что $16^1 = 4^2$. Поэтому при выполнении перевода каждую шестнадцатеричную цифру представим соответствующим двузначным четверичным числом (см. табл. 2.1):

$$1_{16} = 1_4 = 01_4,$$

$$b_{16} = 23_4,$$

$$4_{16} = 10_4,$$

$$9_{16} = 21_4,$$

$$e_{16} = 32_4,$$

$$0_{16} = 0_4 = 00_4,$$

$$f_{16} = 33_4,$$

$$6_{16} = 12_4,$$

$$1b49e,0f6_{16} = \boxed{01} \boxed{23} \boxed{10} \boxed{21} \boxed{32} , \boxed{00} \boxed{33} \boxed{12}_4.$$

Отбросим у полученного двоичного числа слева незначащий нуль:

$$0123102132,003312_4 = 123102132,003312_4.$$

Ответ: $123102132,003312_4$.

4. Выполнить перевод $11000111001101,1111001_2 = __{16}$.

Решение.

Заметим, что $2^4 = 16^1$. Поэтому добавим слева и справа к заданному двоичному числу незначащие нули до достижения в целой и дробной частях количеств цифр, кратных четырём:

$$11000111001101,1111001_2 = 0011000111001101,11110010_2.$$

Выделим в полученном представлении четырёхзначные двоичные числа:

$$0011000111001101,11110010_2 = \boxed{0011}\boxed{0001}\boxed{1100}\boxed{1101}, \boxed{1111}\boxed{0010}_2.$$

Каждое выделенное четырёхзначное двоичное число заменим одной соответствующей шестнадцатеричной цифрой (см. табл. 2.1):

$$\begin{array}{lll} 0011_2 = 1_{16} = 3_{16}, & 0001_2 = 1_2 = 1_{16}, & 1100_2 = c_{16}, \\ 1101_2 = d_{16}, & 1111_2 = f_{16}, & 0010_2 = 10_2 = 2_{16}, \end{array}$$

$$\boxed{0011}\boxed{0001}\boxed{1100}\boxed{1101}, \boxed{1111}\boxed{0010}_2 = 31cd,f2_{16}.$$

Ответ: $31cd,f2_{16}$.

5. Выполнить перевод $5a0b,c1_{16} = ___8$.

Решение.

Заметим, что $16^1 = 2^4$ и $2^3 = 8^1$. Поэтому перевод осуществим по схеме $16 \rightarrow 2 \rightarrow 8$.

Переведём исходное число в двоичную систему счисления путём замены каждой шестнадцатеричной цифры соответствующим четырёхзначным двоичным числом (см. табл. 2.1):

$$\begin{aligned} 5a0b,c1_{16} &= \boxed{0101}\boxed{1010}\boxed{0000}\boxed{1011}, \boxed{1100}\boxed{0001}_2 = \\ &= 101101000001011,11000001_2. \end{aligned}$$

Переведём полученное двоичное число в восьмеричную систему счисления путём замены каждого выделенного трёхзначного двоичного числа соответствующей восьмеричной цифрой (см. табл. 2.1):

$$\begin{aligned} 101101000001011,11000001_2 &= 101101000001011,110000010_2 = \\ &= \boxed{101}\boxed{101}\boxed{000}\boxed{001}\boxed{011}, \boxed{110}\boxed{000}\boxed{010}_2 = 55013,602_8. \end{aligned}$$

Ответ: $55013,602_8$.

Библиографический список

1. Острейковский, В. А. Информатика: учеб. для вузов / В. А. Острейковский. – М. : Высш. шк., 1999. – 511 с.