BANCO CENTRAL DE RESERVA DEL PERÚ

CURSO DE EXTENSIÓN EN FINANZAS AVANZADAS (CEFA)

Tópicos de Portafolios – Administración de Portafolios de Reservas

Febrero de 2024

DEMOSTRACIONES IMPORTANTES DEL CURSO.

A continuación, una guía con las demostraciones más importantes del curso.

1. LECCIÓN 1 INTRODUCCIÓN AL PROCESO DE CIENCIA DE DATOS.
2. LECCIÓN 2 HIPOTESIS DEL MERCADO EFICIENTE

PRUEBA DESCOMPOSICIÓN DE SESGO-VARIANZA

Descomposición del sesgo y la varianza.

Tomando en cuenta que y

Podemos adicionalmente descomponer este término de error reducible entre *sesgo* y *varianza*,

Los términos y corresponden al sesgo (¿Qué tan diferente es la función de la función real en valor esperado?) y la varianza (¿Qué tanto varia la función estimada según los inputs?). Por último, solo nos queda demostrar que el término es cero:

1. LECCIÓN 3: ESTIMACIÓN DE RETORNOS Y ESTIMACIÓN DE COVARIANZA.
2. LECCIÓN 4: FACTORES DE RIESGO

PRUEBA DE QUE MAXIMIZAR LA VARIANZA EQUIVALE A OBTENER LOS VALORES PROPIOS MÁS GRANDES:

Problema de optimización:

Tomando de referencia algunas normas de derivación de matrices:

De esta manera:

De esta manera, queda claro que los w son los vectores propios de la matriz de varianza y los lambdas son los valores propios.

PRUEBA DE LA DESCOMPOSICIÓN DE VALORES SINGULARES.

TEOREMAS Y DEFINICIONES NECESARIOS PARA LA DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE LA DESCOMPOSICIÓN DE VALORES SINGULARES.

MATRIZ ORTOGONAL:

Se dice que una matriz de es ortogonal si las columnas del vector de Q forman un conjunto ortonormal en

DEFINICIÓN 1:

Si las vectores columnas de forman un conjunto ortonormal y el conjunto de vectores , entonces .

DEFINICIÓN 2:

Espacio columna: subespacio de formado por los vectores columnas de .

TEOREMA 1: Las matrices simétricas son siempre ortogonalmente diagonalizables.

TEOREMA 2: La norma al cuadrado de vector columna se puede expresar convenientemente como:

TEOREMA 3: Se dice que es un valor propio o valor característico de , si existe un vector distinto de cero, que cumpla que:

TEOREMA 4 es ortogonal si y solo si . También se cumple que:

DEFINICIÓN Si A es diagonalizable entonces existe una matriz no singular X y una matriz diagonal tal que:

TEOREMA 6: Si es diagonalizable si y solo si A tiene n vectores propios linealmente independientes.

Se puede verificar también que los valores de son los valores propios

TEOREMA 7: El rango de es el mismo que de

TEOREMA DE LA DESCOMPOSICIÓN DE VALORES SINGULARES

Si A es una matriz de . Tiene una descomposición de valores singulares. Lo que implica que:

Mientras que es una matriz ortogonal de , es una matriz ortogonal de

PRUEBA.

PARTE I: Los valores propios de la matriz son positivos.

Por el teorema 1 sabemos que las matrices simétricas son siempre ortogonalmente diagonalizables. Esto implica que todos sus valores propios son reales y que tiene una matriz ortogonal diagonal .

Sea un valor propio de la matriz y un vector propio de la matriz , podemos comprobar el siguiente calculo . Usando el teorema 2.

Usando el teorema 3 y sabiendo que es un vector propio de .

PARTE 2: ¿Cómo estan conformadas las matrices:?

V lo tomaremos de la diagonalización. Sabemos por tanto que es una matriz ortogonal.

Sobre sigma la definiremos como:

Definiremos sus elementos como .

Sea el rango de la matriz A. La matriz también tendrá un rango . Siendo que es simétrica, su rango es igual al número de valores propios distintos de cero.

Entonces:

y

La misma relación se ha de cumplir con los valore singulares.

y

Ahora llámese:

Y

La columna de vectores son los valores propios de que pertenecen a .

Entonces

Y por tanto teniendo en cuenta que .

Las vectores columnas de son los vectores propios de que pertenecen a . Entonces:

Y consecuentemente las vectores columnas de forma una base ortonormal para . Entonces:

Como V es una matriz ortogonal se cumple:

Hasta el momento hemos demostrado como construir las matrices y . Para completar la prueba únicamente debemos determinar como debe ser la matriz U que cumpla que:

O de forma equivalente:

Comparando las primeras r columnas de cada lado, obtenemos que:

con

Por tanto, si se define las vectores columnas de la matriz :

con

Entonces se tienen fácilmente que:

Las vectores columna de forman un conjunto ortonormal puesto que (Bajo la definición 1):

Si

Como es un vector propio de A

Cuando como y son vectores ortogonales:

Como son vectores propios su norma es 1:

Es claro que cada , está en el espacio columna de A (es una solución de A). Por ende la dimensión del espacio columna de A es r, por lo tanto forman una base ortonormal para . Buscaremos entonces que el resto de los vectores de formen una base ortonormal de A .

Usando ambos resultados:

1. LECCIÓN 5: Introducción al proceso de ciencia de datos en Finanzas
2. LECCIÓN 6: Modelos de factores de Carga.
3. LECCIÓN 7: Interpolación de la curva de rendimientos por B-Splines.
4. LECCIÓN 8: Enfoque de Risk Parity.
5. LECCIÓN 9: Aplicaciones de AI generativa.