Curso. “Aplicaciones de Inteligencia Artificial para Gestión de Portafolios”

Instructores: Jorge Esteban Camargo Forero y Antonio Candia Torres.

Iteraciones: Algoritmo de Hierarchical Risk Parity.

1. **Inicialización.**
   1. Configurar un conjunto de conjuntos donde llamado L, inicialmente L estará conformando por solo un conjunto L_0 que contiene todos los activos desde el 1 hasta el N $\{1, 2, \ldots, N\}$.
   2. Asumir un peso unitario para cada activo:
$$w_n = 1 \ \forall \ n \in N$$
2. **Verificar Detención.**

   Si cada subconjunto de L $L_i \in L$, tiene solo un elemento ($|L_i| = 1 \ \forall \ L_i \in L$, entonces detener las iteraciones del algoritmo.

3. **Bisección.**

   Para cada subconjunto de $L_i \in L$ que tiene más de un elemento proceder con los siguientes pasos.

   A. Realizar la bisección de L_i en dos conjuntos: $L_i^1 \cup L_i^2 = L_i$, donde $|L_i^1| = int|\frac{1}{2}|L_i||$, y el orden se preserva.

   B. Definir la varianza del subconjunto $L_i^{(j)}, j = 1{,}2$ con la siguiente formula cuadrática:

$$\tilde{V}_i^j = \left(\tilde{w}_i^j\right)^T V_{[i,i]}\left(\tilde{w}_i^j\right) \ \forall \ j \in \{1{,}2\}$$

   Donde los pesos $\tilde{w}$ se obtienen solucionando el problema de ‘Inverse Variance Portfolio’.

   El cual se puede expresar en notación matricial empleando los siguientes operadores.

$$\tilde{w}_i^j = \frac{diag\left(V_i^j\right)^{-1}}{tr\left(diag\left(V_i^j\right)^{-1}\right)}$$

Donde el operador de traza lo definimos de la siguiente manera, para una matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

$$diag(A) = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

C. Computamos el factor de reponderación para los pesos del portafolio de la siguiente manera:

$$\alpha_i = 1 - \frac{\widetilde{V_1}^{(1)}}{\widetilde{V_1}^{(1)} + \widetilde{V_1}^{(2)}}$$

De tal manera que $0 \leq \alpha_i \leq 1$

D. Re-escalar entonces los pesos w_n por los factores de reponderación $\alpha_i$que obtuvimos en el inciso C $\forall n \in L_i^{(1)}$.

E. Re-escalar entonces los pesos w_n por los factores de reponderación α_i que obtuvimos en el inciso C $\forall n \in L_i^{(2)}$.

4. Repetir en ‘loop’ el paso 2.

DESARROLLO:

1. INICIALIZACIÓN
   a. CONFIGURAR CONJUNTO

$$L = \{L_0\}$$

Trabajamos con N activos.

Activos = {‘Tes. 0-1’, ‘Tes. 1-5’, ‘Tes. 5-10’, ‘TIPS 1-5’, ‘Corp. 1-5’, ‘SSA’}

Por facilidad en la notación usemos la siguiente notación:

{‘1’, ‘2’, ‘3’, ‘4’, ‘5’, ‘6’, ‘7’}

b. INICIALIZAR LOS PESOS DEL PORTAFOLIO:

$$w_n = \{1,1,1,1,1,1,1\}$$

$$w_n = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7\}$$

Trabajamos con N activos.

Activos = {'Tes. 0-1', 'Tes. 1-5', 'Tes. 5-10', 'TIPS 1-5', 'Corp. 0-1', 'Corp. 1-5', 'SSA'}

Matriz de Covarianzas Original

	Tes. 0-1	Tes. 1-5	TIPS 1-5	Corp 1-5	SSA	MBS
Tes. 0-1	8.8E-06	3.9E-05	3.1E-05	2.9E-05	3.7E-05	4.2E-05
Tes. 1-5	3.9E-05	4.4E-04	3.8E-04	4.0E-04	4.1E-04	6.1E-04
TIPS 1-5	3.1E-05	3.8E-04	7.4E-04	4.4E-04	3.6E-04	6.0E-04
Corp 1-5	2.9E-05	4.0E-04	4.4E-04	6.0E-04	3.8E-04	6.4E-04
SSA	3.7E-05	4.1E-04	3.6E-04	3.8E-04	4.0E-04	5.7E-04
MBS	4.2E-05	6.1E-04	6.0E-04	6.4E-04	5.7E-04	1.4E-03

Matriz de Covarianzas Reordenada.

	Tes. 0-1	TIPS 1-5	MBS	Corp 1-5	Tes. 1-5	SSA
Tes. 0-1	8.8E-06	3.9E-05	3.1E-05	2.9E-05	3.7E-05	4.2E-05
TIPS 1-5	3.9E-05	4.4E-04	3.8E-04	4.0E-04	4.1E-04	6.1E-04
MBS	3.1E-05	3.8E-04	7.4E-04	4.4E-04	3.6E-04	6.0E-04
Corp 1-5	2.9E-05	4.0E-04	4.4E-04	6.0E-04	3.8E-04	6.4E-04
Tes. 1-5	3.7E-05	4.1E-04	3.6E-04	3.8E-04	4.0E-04	5.7E-04
SSA	4.2E-05	6.1E-04	6.0E-04	6.4E-04	5.7E-04	1.4E-03

ITERACIÓN 0

2. VERIFICAR DETENCIÓN.

Verificamos que el algoritmo no se detenga esto implica revisar que halla al menos un conjunto con más de un elemento.

$$L = \{L_0\}$$

Como todavía hay al menos un elemento procedemos con la iteración del algoritmo.

3. Bisección.

Para cada subconjunto $L_i \in L$ que tiene más de un elemento proceder con los siguientes pasos.

A. Bisección de L_i en dos conjuntos L_i

$$L_i = \{[0,3,4],[6,2,1,5]\}$$

Luego de usar estos dos

$$L_i = \{[0,3,4],[6,2,1,5]\}$$

En Python por como esta programado la función de Integer el orden en el que se acabe formando el algoritmo va a depender de la magnitud del entero.

Si son cinco activos en el grupo se acaba redondeando al menor entero (5/2 redondea a 2) de la misma manera que (7/2 redondea a 3) en Python list[:3] significa los primero tres elementos por lo que la lista final queda de la forma:

Procedemos entonces con la bisección de los elementos de acuerdo con la formula

$$L_i = \left\{L_1^{(1)} \cup L_2^{(2)}\right\}$$

$$L_i = \{(0,2,5) \cup (3,1,4)\}$$

De esta manera procedemos entonces a computar las formas cuadráticas para los sets que tenemos, la matriz de varianzas y covarianzas en puntos básicos es la siguiente:

	Tes. 0-1	Tes. 1-5	TIPS 1-5	Corp 1-5	SSA	MBS
Tes. 0-1	8.83E-06	3.93E-05	3.10E-05	2.94E-05	3.73E-05	4.21E-05
Tes. 1-5	3.93E-05	0.000437	0.000376	0.000399	0.000408	0.000607
TIPS 1-5	3.10E-05	0.000376	0.000737	0.000436	0.00036	0.000598
Corp 1-5	2.94E-05	0.000399	0.000436	0.000596	0.000384	0.000643
SSA	3.73E-05	0.000408	0.00036	0.000384	0.000403	0.000565
MBS	4.21E-05	0.000607	0.000598	0.000643	0.000565	0.001429

Obtenemos entonces los pesos $\widetilde{w}$ de las variables resolviendo el problema de *inverse variance portfolio* para la primera partición:

$$w_{Tes.\ 0-1} = \frac{\frac{1}{\sigma^2_{Tes.\ 0-1}}}{\left(\frac{1}{\sigma^2_{Tes.\ 0-1}} + \frac{1}{\sigma^2_{TIPS\ 1-5}} + \frac{1}{\sigma^2_{MBS}}\right)} = \frac{\left(\frac{1}{8.83E-06}\right)}{\left(\frac{1}{8.83E-06} + \frac{1}{4.4\ E-04} + \frac{1}{7.4E-04}\right)} = 97\%$$

$$w_{TIPS\ 1-5} = \frac{\frac{1}{\sigma^2_{TIPS\,1-5}}}{\frac{1}{\sigma^2_{Tes.\ 0-1}} + \frac{1}{\sigma^2_{TIPS\,1-5}} + \frac{1}{\sigma^2_{MBS}}} = 2\%$$

$$w_{MBS} = \frac{\frac{1}{\sigma^2_{TIPS\,1-5}}}{\frac{1}{\sigma^2_{Tes.\ 0-1}} + \frac{1}{\sigma^2_{TIPS\,1-5}} + \frac{1}{\sigma^2_{MBS}}} = 1\%$$

$$\tilde{V}_i^{(j)}$$
$$= (\tilde{w}_{Tes.\ 0-1} \quad \tilde{w}_{TIPS\,1-5} \quad \tilde{w}_{MBS}) \begin{pmatrix} 8.83E-06 & 3.93E-05 & 3.10E-05 \\ 3.93E-05 & 4.74E-04 & 3.76E-04 \\ 3.10\,E-05 & 3.76E-04 & 7.37E-04 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{w}_{Tes.\ 0-1} \\ \tilde{w}_{TIPS\,1-5} \\ \tilde{w}_{MBS} \end{pmatrix}$$
$$= 1.09122E-05$$

Obtenemos los $\tilde{w}$ de las variables resolviendo el problema de *inverse variance portfolio* para la segunda partición.

$$w_{Corp.\ 1-5} = \frac{\frac{1}{\sigma^2_{Corp.\ 1-5}}}{\left(\frac{1}{\sigma^2_{Corp.\ 1-5}} + \frac{1}{\sigma^2_{Tes.\ 1-5}} + \frac{1}{\sigma^2_{SSA}}\right)}$$
$$= \frac{\left(\frac{1}{8.83E-06}\right)}{\left(\frac{1}{8.83E-06} + \frac{1}{4.4\,E-04} + \frac{1}{7.4E-04}\right)} = 35\%$$

$$w_{Tes.\ 1-5} = \frac{\frac{1}{\sigma^2_{Corp.\ 1-5}}}{\left(\frac{1}{\sigma^2_{Corp.\ 1-5}} + \frac{1}{\sigma^2_{Tes.\ 1-5}} + \frac{1}{\sigma^2_{SSA}}\right)} = \frac{\left(\frac{1}{8.83E-06}\right)}{\left(\frac{1}{8.83E-06} + \frac{1}{4.4\,E-04} + \frac{1}{7.4E-04}\right)}$$
$$= 51\%$$

$$w_{SSA} = \frac{\frac{1}{\sigma^2_{SSA}}}{\left(\frac{1}{\sigma^2_{Corp.\ 1-5}} + \frac{1}{\sigma^2_{Tes.\ 1-5}} + \frac{1}{\sigma^2_{SSA}}\right)} = \frac{\left(\frac{1}{8.83E-06}\right)}{\left(\frac{1}{8.83E-06} + \frac{1}{4.4\,E-04} + \frac{1}{7.4E-04}\right)}$$
$$= 14\%$$

$$\tilde{V}_i^{(j)}$$
$$= (\tilde{w}_{Corp.\ 1-5} \quad \tilde{w}_{SSA} \quad \tilde{w}_{MBS}) \begin{pmatrix} 6.0\,E-06 & 3.8\,E-04 & 6.4\,E-05 \\ 3.8\,E-05 & 4.0\,E-04 & 5.7\,E-04 \\ 6.4\,E-05 & 5.7\,E-04 & 1.4\,E-04 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{w}_{Corp.\ 1-5} \\ \tilde{w}_{SSA} \\ \tilde{w}_{MBS} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{V}_i^{(j)} = 0.0004886$$

Encontramos entonces los pesos óptimos para las variables:

Tenemos entonces que definir las siguientes matrices definidas para cada conjunto $L_1^{(1)}$:

$$\alpha_1 = 1 - \frac{\tilde{V}_1^{(1)}}{\tilde{V}_1^{(1)} + \tilde{V}_1^{(2)}} = 1 - \frac{0.000488674}{1.09122E - 05 + 0.0004886}$$

$$\alpha_1 = 97.816\%$$

$$\alpha_2 = 2.184\%$$

D. Responderar los pesos de acuerdo a los factores de reponderación obtenidos.

$$w = (97.816\%, 97.816\%, 97.816\% ,2.184\%, 2.184\%, 2.184\%)$$

ITERACIÓN 2

2. VERIFICAR DETENECIÓN.

$$L = \{(0,2,5) \cup (3,1,4)\}$$

Como podemos verificar la magnitud de la norma de los conjuntos es superior a 1.

3. BISECCIÓN:

En este caso ya hay más de un subconjunto por lo que es necesario aplicar las iteraciones sobre cada subconjunto:

Bisección subconjunto: $(0,2,5)$. Se aplica la bisección sobre el conjunto $(0,2,5)$ aplicando la siguiente bisección: $\big(0,(2,5)\big)$. La varianza del subconjunto 0 es simplemente la varianza del activo de tesoros 0-1: $Var(UST\ 0-1) = 0.000596$. La varianza del subconjunto $(2,5)$ la obtenemos resolviendo el problema del 'Inverse Variance Portfolio' para obtener los pesos de ambas clases de activos: $\big(w_{TIPS_{1-5}} = 66\%, w_{MBS} = 34\%\big)$. Con estos pesos obtenemos una varianza de 0.0007545. Podemos entonces finalmente obtener los factores de reponderación con estas varianzas.

$$\alpha_1 = \frac{0.000883}{0.000883 + 0.0007545} = 98.844\%$$

$$\alpha_2 = 1.156\%$$

Bisección subconjunto: $(3,1,4)$. Se aplica la bisección sobre el conjunto $(3,1,4)$ aplicando la siguiente bisección: $\left(3,(1,4)\right)$. La varianza del subconjunto de 3 es

$$\alpha_1 = 1 - \left(\frac{5.96E-04}{5.96E-04+0.0004136}\right) = 40.967\%$$

$$\alpha_2 = 59.033\%$$

Actualizamos los pesos con los factores de reponderación encontrados.

$$w = (97.816\%, 1.129\%, 1.129\% ,0.95600\%, 1.37758\%, 1.37758\%)$$

Note que ya hemos llegado a los pesos finales del algoritmo.

ITERACIÓN 3

2. VERIFICAR DETENCIÓN.

$$L = \{0 \cup (2,5) \cup 3 \cup (1,4)\}$$

Como podemos verificar la magnitud de la norma de los conjuntos es superior a 1. Por ende, el algoritmo todavía no se detiene.

3. BISECCIÓN.

En este caso ya hay más de un subconjunto por lo que es necesario aplicar las iteraciones sobre cada subconjunto:

$$L = \{0 \cup (2,5) \cup 3 \cup (1,4)\}$$

Bisección subconjunto: $(2,5)$. La varianza del activo 2 es: 0.62774, mientras que la varianza del activo 5 es: 0.3722592. Obtenemos con estas varianzas los siguientes factores de reponderación: $(0.62774, 0.372259)$.

Bisección subconjunto: (3,4) obtenemos con estas varianzas los siguientes factores de reponderación: $48.01\%, 51.99\%$

$$w = (96.5340\%, 0.7090\%, 0.4204\% ,0.9560\%, 0.6614\%, 0.7162\%)$$