2do llamado 2023

Espacio muestral:

Dado un experimento aleatorio, diremos que S es un espacio muestral si podemos asociar cada resultado del experimento con un elemento de S, de modo que a elementos diferentes le correspondan resultados diferentes.

S entonces es el conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio.

Supongamos un experimento que consiste en medir, en minutos, desde que se atiende a un cliente y luego a otro cliente.

(a) El espacio muestral es continuo, ya que el tiempo se puede medir con presicion arbitraria tanto como se quiera, tomando así valores, dentro del campo de los numeros reales entre $[0, \infty)$. No existe en este ejemplo un conjunto ~~de valores~~ discreto y finito de valores posibles.

(b) El espacio muestral apropiado para este experimento podría ser $S = \{ X / X \geq 0 \}, X \in \mathbb{R}$

- Eventos complementarios

C = 10 minutos o menos

C' = más de 10 minutos

- Eventos excluyentes

$E_1 = 0 < x \leq 1$

$E_2 = 1 < x \leq 2$

(c) El modelo más apropiado es el exponencial.
La distribución exponencial se utiliza comunmente para modelar el tiempo entre eventos en un proceso Poisson, donde los eventos ocurren de manera continua e independiente a una tasa constante.

Parámetro: λ = tasa de ocurrencia de eventos por unidad de tiempo.

Formula de densidad

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$$

Formula de distribución acumulada

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

Esperanza

$$E(x) = \frac{1}{\lambda}$$

Varianza

$$Var(x) = \frac{1}{\lambda^2}$$

(d) Un supervisor sostiene que en su ventanilla el número promedio entre la atención de un cliente y el otro es de 4 minutos, los clientes sostienen que es mayor a 4 minutos.
Realice una prueba de hipótesis apropiada
(i) Escriba formalmente la hipotesis a contrastar
(ii) Describa paso a paso el procedimiento a utilizar, consideraciones y supuestos a tener en cuenta, justificando la elección del estadístico.
(iii) Que significa en este ejemplo concreto cometer un error del tipo 1 y 2

d) ① Hipotesis a contrastar

Supongamos que μ es el tiempo promedio entre la atención de un cliente y otro. Las hipotesis a contrastar son las siguientes:

- Hipotesis nula (H_0): $\mu = 4$ minutos
- Hipotesis alternativa (H_1): $\mu > 4$ minutos

⑪ Procedimiento y consideraciones

Para contrastar estas hipotesis, se podría realizar una prueba t de una muestra. El procedimiento sería el siguiente:

① Establecer las hipotesis

- $H_0: \mu = 4$
- $H_1: \mu > 4$

② Seleccionar el nivel de significancia (α)

. Por ejemplo $\alpha = 0.05$

③ Seleccionar el estadístico de prueba:

. Dado que estamos comparando la media de una muestra con un valor específico y no conocemos la desviación estandar poblacional, se usaría la prueba t. El estadístico de prueba sería:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

donde $\bar{x}$ = la media muestral, μ_0 = es el valor bajo la hipotesis nula, s = la desviacion estandar muestral, y n = el tamaño de la muestra.

④ Determinar la región crítica

En este caso al ser una prueba unidireccional (mayor que), la region critica estaría en el extremo derecho de la distribucion t con n-1 grados de libertad.

⑤ Calcular el estadístico de prueba y compararlo con el valor crítico.

Si el estadístico de prueba cae en la región crítica, rechazaríamos la hipótesis nula.

(III) Errores de tipo 1 y 2

Error de tipo 1 (falso positivo)

Significa rechazar incorrectamente la hipótesis nula cuando es verdadera

Error de tipo 2 (falso negativo)

Significa no rechazar la hipótesis nula cuando es falsa

2) a) Defina una función de distribución de una variable aleatoria, tanto discreta como continua, enuncie sus propiedades y relaciónelas con el cálculo de la probabilidad de un suceso descrito por la variable aleatoria.

2) b) Pruebe que si F es función de una v.a. X $a < b \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$

2) c) Enuncie formalmente la regla de la probabilidad total. Dé un ejemplo que no esté en el apunte.

3) Suponga que quiere confeccionar una tabla de frecuencias con un cierto conjunto de realizaciones de una variable de interés. En qué caso agruparía estos datos en intervalos?

Cómo se calcula la varianza?

Funcion de distribución

v.a. discreta $\qquad$ FPM $\qquad$ v.a. continua $\qquad$ fd

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{x_i \le x} P(x_i) \qquad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)\,ds$$

Propiedades

① $0 \le F(x) \le 1 \; , \forall x \in \mathbb{R}$

② si $a \le b \Rightarrow F(a) \le F(b)$

③ $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$; $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$

④ $\lim_{x \to a^+} F(x) = F(a)$; $\lim_{x \to a^-} F(x) = F(a) - P(X = a)$

Relación con el calculo de la probabilidad. ⊛ Ver Teorema 4.1

. Dada la definicion de $F(x) = P(X \le x)$, podemos usarla para calcular la probabilidad de que X esté dentro de un cierto intervalo $(a, b]$.

$$\Rightarrow P(a < X \le b) = P(X \le b) - P(X \le a) = F(b) - F(a)$$

Ejemplo:

Un experimento consiste en lanzar un dado numerado (equilibrado) y anotar la cara que dá hacia arriba.

A_i = evento de cara "i" hacia arriba ; $i = 1, 2 \ldots, 6$.

$P(A_i) = 1/6$

$$P(2 < X \le 4) = P(X \le 4) - P(X \le 2) = P(X = 3) + P(X = 4) = F(4) - F(2)$$

$$4/6 - 2/6 = 1/6 + 1/6 = 4/6 - 2/6 = 2/6$$

	$0 < x \le 1$	$1/6$
	$1 < x \le 2$	$2/6$
	$2 < x \le 3$	$3/6$
$F(x)$	$3 < x \le 4$	$4/6$
	$4 < x \le 5$	$5/6$
	$5 < x \le 6$	1

© Teorema de la probabilidad total:

Sea S el espacio muestral, y $A_1, A_2, \ldots, A_n$ una partición aleatoria de S tal que: $P(A_i) > 0$; $(A_i \cap A_j) = \emptyset$ con $i \neq j$ y $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = S$.

Para cualquier evento B se verifica:

$$P(B) = P(B/A_1).P(A_1) + P(B/A_2).P(A_2) + \ldots + P(B/A_n).P(A_n)$$

Demostración:

$$B = B \cap S$$

$$B = B \cap (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)$$

⊛ aplicamos distributiva

$$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup (\ldots) \cup (B \cap A_n)$$

⊛ Como A_i son eventos disjuntos, $B \cap A_i$ también

=> ~~Dado que A y B son eventos~~

Sean A y B dos eventos disjuntos $\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$$\Rightarrow P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \ldots + P(B \cap A_n)$$

$$P(B) = P(B/A_1).P(A_1) + P(B/A_2).P(A_2) + \ldots$$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B/A_i).P(A_i)$$

Ejemplo:

Tenemos 3 cajas, en cada caja hay bolas rojas y verdes. La probabilidad de sacar una bola roja de la caja 1 es $P(Rojo/Caja_1) = 1/2$, $P(Rojo/Caja_2) = 1/3$ y $P(Rojo/Caja_3) = 1/4$

Entonces la probabilidad total de sacar una bola roja está dada por:

$$P(Rojo) = P(Rojo/Caja_1).P(Caja_1) + P(Rojo/Caja_2).P(Caja_2) + P(Rojo/Caja_3).P(Caja_3)$$

$$P(Rojo) = 1/2 \;.\; 1/3 + 1/3 \;.\; 1/3 + 1/4 \;.\; 1/3$$

$$P(Rojo) = 11/36$$