Trabajo Práctico N°4: Variables Aleatorias Unidimensionales. Momentos Ordinarios y Centrales

1. De un lote que contiene 25 artículos, tres de los cuales son de muy buena calidad, se eligen 4 artículos al azar.

   Sea X una variable aleatoria que denota el número de artículos de muy buena calidad presentes en la muestra.

   a) Obtenga la distribución de probabilidad de X si los artículos se eligen aleatoriamente con reemplazo y calcular:

   $P(X=4)$; $P(X>2)$; $P(1 \leq X \leq 3{,}5)$; $E(X)$; σ_X^2; σ_X.

   b) Obtenga la distribución de probabilidad de X si los artículos se eligen aleatoriamente sin reemplazo y calcular:

   $P(X \geq 1)$; $P(X=4)$; $P(X>2)$; $E(X)$; σ_X^2; σ_X.

2. De una partida de 8 calculadoras científicas, hay 3 que tienen algún tipo de defecto. Se seleccionan al azar, una calculadora por vez y se la prueba, hasta que aparezca una calculadora no defectuosa.

   Sea X la variable aleatoria que indica el número de extracciones necesarias para obtener una calculadora no defectuosa.

   a) Obtenga la distribución de probabilidad y la función de distribución correspondiente.

   b) Represente las funciones de masa y de distribución.

   c) Calcule:

   $P(X \geq 2)$; $P(0 < X \leq 5)$; $P(X=0)$; $F(3)$; $F(-1)$; $F(3{,}5)$.

   d) Calcule el número esperado de extracciones necesarias para obtener una calculadora no defectuosa.

   e) Calcule σ_X^2, σ_X y γ.

3. Sea X una variable aleatoria discreta. Determine el valor de k para que la función $p(x) = k/x$, con $x = 1, 2, 3, 4$, sea la función de probabilidad de X. Calcule: $P(1 \leq X \leq 3)$.

4. Una firma de inversiones, ofrece a sus clientes bonos municipales que vencen después de diferentes números de años. Dada la función de distribución de X, el número de años para el vencimiento de un bono seleccionado aleatoriamente es:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 1 \\ 1/4 & \text{si} \quad 1 \leq x < 3 \\ 1/2 & \text{si} \quad 3 \leq x < 5 \\ 3/4 & \text{si} \quad 5 \leq x < 7 \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 7 \end{cases}.$$

   a) Represente gráficamente $F(x)$.

   b) Obtenga la distribución de probabilidad de X.

5. Una rueda de ruleta tiene 37 aberturas igualmente espaciadas con los números $0, 1, 2, \ldots, 36$. Un jugador puede apostar \$1 a un número. Se hace girar la ruleta y se deja caer una bolita en ella mientras está dando vueltas.

   Si la bolita se detiene en el número que el jugador ha apostado, recibe \$35 más su apuesta de \$1; de lo contrario, pierde su peso.

   a) ¿Cuál es su ganancia esperada?

   b) ¿Le es favorable el juego?

   c) Calcule σ_X^2 y σ_X.

6. Una máquina puede tener un cierto número de fallas por día, no superior a 3. La probabilidad de que la máquina produzca exactamente tres fallas es 0,20.

   Sea X la variable aleatoria que denota el número de fallas que produce dicha máquina por día. Si se sabe que $P(X \leq 1) = 0{,}5$ y $E(X) = 1{,}3$, obtenga:

a) La distribución de probabilidad de la variable aleatoria X;

b) La función de distribución $F(x)$ y grafíquela;

c) La varianza de X.

7. Una compañía de seguros debe determinar la cuota anual a cobrarse por un seguro de \$50000 para hombres cuyas edades se encuentran entre 30 y 35 años. Se sabe que la proporción de fallecimientos en ese grupo es de 5 por mil. Si X es la variable aleatoria que indica la ganancia de la compañía, determine el monto de la cuota anual para que la compañía no pierda a pesar de tener un número grande de asegurados.

8. Una variable aleatoria X es tal que verifica que $E\left[(X-1)^2\right] = 10$ y $E\left[(X-2)^2\right] = 6$. Calcule:

   a) $E(X)$ y σ_X^2.

   b) I) $E(3X-2)$; II) σ^2_{3X-2}; III) σ_{3X-2}; IV) σ^2_{-X}; V) σ_{-X}.

9. Un examinador formula a un estudiante preguntas suplementarias. La probabilidad de que el estudiante responda correctamente a cualquier pregunta formulada es igual a 0,9. El profesor interrumpe el examen apenas el estudiante manifiesta el desconocimiento de la pregunta hecha.

   a) Obtenga la distribución de probabilidades de la variable aleatoria X que indica el número de preguntas suplementarias.

   b) Determine si la siguiente información es verdadera o falsa:

      1) el número más probable de preguntas suplementarias hechas al estudiante es 2.
      2) $P(X > 5) \cong 0{,}59$;
      3) $P(1 < X \leq 3) = 0{,}171$.

   c) ¿Cómo calcularía el número esperado de respuestas suplementarias formuladas al estudiante?

10. Una variable aleatoria X, tiene distribución uniforme en $[3;6]$

    a) Calcule:

       1) $P(X=3)$; 2) $P(X<3)$; 3) $P(|X| \leq 4)$; 4) $P(|X-2| \leq 3)$

    b) Halle el valor de t para que $P(X \geq t) = 1/3$.

    c) Represente gráficamente las funciones de densidad y distribución.

    d) Calcule los momentos ordinarios de orden menor o igual que 3.

    e) Calcule la varianza y el coeficiente asimetría.

11. El tiempo de vida útil, en días, de frascos de cierta medicina, es una variable aleatoria que tiene función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{20000}{(x+100)^3} & \text{si } 0 < x \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

    a) Obtenga la función de distribución de la variable aleatoria X.

    b) Calcule la probabilidad de que un frasco de este medicamento tenga una vida útil de:

       1) 200 días
       2) al menos 200 días
       3) cualquier duración entre 80 y 120 días
       4) entre 80 y 120 días, si se sabe que dura más de 80 días

12. Sea X una variable aleatoria continua cuya función de distribución es:

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{12}+kx & \text{si } 0<x<a\\ 0 & \text{si } x\leq 0\\ 1 & \text{si } x\geq a\end{cases}$$

y se sabe que $P(X\geq 2)=1/2$. Calcule:

a) el valor de k;

b) el extremo superior del intervalo;

c) la función de densidad de probabilidad;

d) la esperanza, la varianza y la desviación típica de la variable aleatoria X.

13. El período de funcionamiento hasta su primera falla, en cientos de horas, para cierto transistor, es una variable aleatoria con función de distribución dada por:

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-x^2} & \text{si } x>0\\ 0 & \text{si } x\leq 0\end{cases}$$

a) Obtenga $f(x)$ y esboce la gráfica de $F(x)$.

b) Calcule: $P(X>2/X\leq 1)$;

c) Halle la probabilidad de que el transistor trabaje:

1) 350 horas antes de sufrir su primera falla;
2) Por lo menos durante 100 horas, pero no alcance las 250 horas de funcionamiento, hasta tener su primera falla.

14. Sea X la variable aleatoria con función de densidad:

$$f(x)=\begin{cases}ax & \text{si } 0\leq x\leq 1\\ a & \text{si } 1<x\leq 2\\ 0 & \text{en otro caso.}\end{cases}.$$

a) Determine el valor de la constante a.

b) Determine $F(x)$.

c) Calcule: $P(X<2/3)$; $P(X<1{,}5)$.

15. Una gasolinera tiene dos bombas, que pueden bombear cada una hasta 10000 galones de gasolina por mes. La cantidad total de gasolina bombeada en un mes es una variable aleatoria Y (expresada en diez miles de galones), con una función de probabilidad dada por:

$$f(y)=\begin{cases}y & \text{si } 0<y<1\\ 2-y & \text{si } 1\leq y<2\\ 0 & \text{en otro caso.}\end{cases}.$$

a) Grafique $f(y)$.

b) Obtenga $F(y)$ y construir su gráfica.

c) Calcule la probabilidad de que la gasolinera bombee entre 8000 y 12000 galones.

16. Sea X una variable aleatoria con la siguiente distribución de probabilidad:

X	-5	2	3	4
$P(X)$	0,4	0,3	0,1	0,2

Calcule la probabilidad de que X asuma un valor que difiera de su media en más de 4 unidades.