02/10/02 **PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA** **TEMA 1**

MATEMÁTICAS ESPECIALES

RECUPERATORIO DEL PRIMER PARCIAL

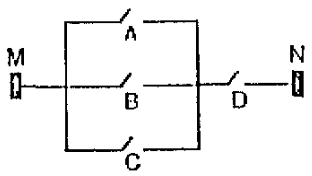
Alumno: .... **L.U.:**..........................

Materia: .... **Carrera:** ....

1) A, B, C y D representan interruptores que se abren y cierran automáticamente, permitiendo el paso de la corriente eléctrica cuando están cerrados, y actúan en forma independiente. A, B y C permiten el paso de la corriente (interruptores cerrados) con probabilidad 0,9 en cada caso, y D tiene probabilidad 0,8 de permitir el paso de la corriente eléctrica.

a) Calcular la probabilidad de que excitando los interruptores, haya pasaje de corriente entre M y N:

b) Si se sabe que pasa corriente entre M y N, calcular la probabilidad de que lo haga a través de un solo interruptor cerrado, entre los ubicados en paralelo.



2) Un ratón huye de un gato y al hacerlo puede entrar por tres callejones distintos A, B ó C, de modo tal que la probabilidad de que escoja los callejones A ó B es el triple de que elija el C. Además, la probabilidad de que escoja el callejón B, es el cuádruplo de elegir el A. En cada uno de ellos, el gato puede alcanzarlo o no, siendo la probabilidad de cazarlo en cada uno, 0,4 ; 0,6 y 0,01, respectivamente.

a) Calcular la probabilidad de que el gato cace al ratón.

b) Si al rato llega el gato con el ratón en las fauces, ¿en cuál de los tres callejones es más probable que lo haya cazado?.

3) La proporción de televidentes, que miran determinado programa de televisión, es una variable aleatoria continua con función de densidad de probabilidad:

$$f(x)=\begin{cases} k(x+2) & si\ \ 0<x<1 \\ 0 & en\ \ otro\ caso \end{cases}$$

a) Determinar el valor de k.

b) Hallar F(x) y E(X) , si existe.

c) Calcular la probabilidad de que:

i) más de un tercio, pero menos de la mitad de televidentes, vean este programa de televisión.

ii) no vean el programa, la tercera parte de los televidentes.

iii) vean el programa, como mínimo, las dos terceras partes de los televidentes.

4) Un establecimiento tiene tres teléfonos públicos. La probabilidad de que ninguno de los teléfonos esté ocupado un lunes cualquiera a las 8 de la tarde es 0,1; la probabilidad de que esté ocupado exactamente uno de los teléfonos es 0,2; y la de que estén ocupados exactamente dos de los mismos, es 0,4. Sean X e Y las variables aleatorias que indican el número de teléfonos ocupados a las 20 horas, en dos lunes diferentes, respectivamente.

Obtener:

a) la distribución de probabilidades conjuntas de X e Y.

c) las probabilidades marginales.

d) Calcular: i) $P(X = Y)$; ii) $P(X > Y ; Y < 2)$; iii) $P(X > 2 / Y \leq 1)$; iv) $E(X.Y)$

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA. MATEMÁTICAS ESPECIALES. (2002)

RECUPERATORIO DEL PRIMER PARCIAL TEMA 1.

1) a) llamo M al suceso se establece corriente entre M y N. Se establece corriente para los siguientes casos:

ABCD ; A'BCD ; AB'CD ; ABC'D ; A'B'CD ; A'BC'D ; AB'C'D ∴

$P(M) = 0{,}8\,(0{,}9^3 + 3\cdot 0{,}9^2\cdot 0{,}1 + 3\cdot 0{,}9\cdot 0{,}1^2) = \underline{0{,}7992}$.

b) N: se establece corriente a través de un solo interruptor cerrado (en paralelo)

$P(N/M) = \dfrac{P(N \cap M)}{P(M)} = \dfrac{3\cdot 0{,}1^2\cdot 0{,}9\cdot 0{,}8}{0{,}7992} = \dfrac{0{,}0216}{0{,}7992} = \underline{0{,}0\widehat{27}}$

2) $P(A\cup B) = 3P(C) \Rightarrow P(A)+P(B) = 3P(C) \Rightarrow P(A)+4P(A) = 3P(C) \therefore \underline{P(C) = \frac{5}{3}P(A)}$

$\underline{P(B) = 4P(A)}$

además $P(A)+P(B)+P(C) = 1 \therefore P(A)+4P(A)+\frac{5}{3}P(A) = 1 \Rightarrow P(A)\left(5+\frac{5}{3}\right) = 1 \Rightarrow \boxed{P(A) = \frac{3}{20}}$

luego $\boxed{P(B)} = 4\cdot\frac{3}{20} = \boxed{12/20}$ ∧ $\boxed{P(C)} = \frac{5}{3}\cdot\frac{3}{20} = \boxed{1/4}$

$P(D/A) = 0{,}4$; $P(D/B) = 0{,}6$; $P(D/C) = 0{,}01$.

a) $P(D) = 0{,}4\cdot\frac{3}{20} + 0{,}6\cdot\frac{12}{20} + 0{,}01\cdot\frac{1}{4} = 0{,}06 + \overset{(*)}{0{,}36} + 0{,}0025 = \underline{0{,}4225}$

b) $P(A|D) = \dfrac{0{,}06}{0{,}4225} = \underline{0{,}142011834}$; $P(B|D) = \dfrac{0{,}36}{0{,}4225} = \underline{0{,}852071005}$;

$P(C|D) = \dfrac{0{,}0025}{0{,}4225} = \underline{0{,}0059171597}$ ∴ es más probable que lo haya cazado en el callejón B; lo cual se puede ver claramente en (*)

3) a) $k\int_0^1 (x+2)\,dx = 1 \Rightarrow k\left[\left(\frac{x^2}{2}\right)_0^1 + 2(x)_0^1\right] = 1 \Rightarrow k\cdot\frac{5}{2} = 1 \Rightarrow \underline{k = 2/5}$.

b) $F(x) = \int_0^x \frac{2}{5}(x+2)\,dx = \frac{2}{5}\left(\frac{x^2}{2}\right)_0^x + \frac{4}{5}(x)_0^x = \frac{x^2+4x}{5}$ ∴ $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \le 0 \\ \frac{x^2+4x}{5} & \text{si } 0<x<1 \\ 1 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

$E(X) = \frac{2}{5}\int_0^1 x(x+2)\,dx = \frac{2}{5}\cdot\left(\frac{x^3}{3}\right)_0^1 + \frac{4}{5}\left(\frac{x^2}{2}\right)_0^1 = \frac{2}{15} + \frac{2}{5} = \underline{\frac{8}{15}}$

c) i) $P(1/3 < X < 1/2) = F(1/2) - F(1/3) = \dfrac{\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{2}}{5} - \dfrac{\frac{1}{9}+4\cdot\frac{1}{3}}{5} = \frac{9}{20} - \frac{13}{45} = \frac{29}{180} = 0{,}16\overline{1}$

ii) $P(X = 2/3) = \underline{0}$; iii) $P(X \ge 2/3) = \int_{2/3}^1 2/5\,(x+2)\,dx = \frac{2}{5}\left(\frac{x^2}{2}\right)_{2/3}^1 + \frac{4}{5}(x)_{2/3}^1 = \underline{\frac{17}{45}}$

4) a) y b)

Y \ X	0	1	2	3	p.r
0	0,01	0,02	0,04	0,03	0,1
1	0,02	0,04	0,08	0,06	0,2
2	0,04	0,08	0,16	0,12	0,4
3	0,03	0,06	0,12	0,09	0,3
p.u.	0,1	0,2	0,4	0,3	1

c) i) $P(X=Y) = 0{,}01+0{,}04+0{,}16+0{,}09 = \underline{0{,}3}$

ii) $P(X>Y\,;\,Y<2) = 0{,}02+0{,}04+0{,}03+0{,}08+0{,}06 = \underline{0{,}23}$

iii) $P(X>2/Y\le 1) = \dfrac{P[(X>2)\cap(Y\le 1)]}{P(Y\le 1)} = \dfrac{0{,}06+0{,}03}{0{,}3} = \underline{0{,}3}$

o bien como X e Y son independientes:

$P(X>2/Y\le 1) = P(X>2) = \underline{0{,}3}$.

iv) $E(X.Y) = E(X).E(Y)$ porque X e Y son v.a. independientes.

$E(X) = 0.0{,}1+1.0{,}2+2.0{,}4+3.0{,}3 = 1{,}9 = E(Y)$ ∴ $E(X.Y) = (1{,}9)^2 = \underline{3{,}61}$.

02/10/02 **PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA** **TEMA 2**

MATEMÁTICAS ESPECIALES

RECUPERATORIO DEL PRIMER PARCIAL

Alumno: .... **L.U.:**........................

Materia: .... **Carrera:** ....

1) Cada vez que un cliente compra un tubo de pasta de dientes, elige la marca A ó la B. Supóngase que en cada compra, después de la primera, la probabilidad de que elija la misma marca que escogió en la compra anterior es 1/3, y la probabilidad de que cambie de marca, es 2/3. Si es igualmente probable que en su primera compra, elija la marca A ó la B, ¿cuál es la probabilidad de que ese cliente:

a) en la primera y la segunda compra, elija la marca A;
b) en la tercera y cuarta compra, elija la marca B;
c) en las cuatro primeras compras, alterne las marcas?.

2) Una planta recibe reguladores de voltaje de dos proveedores diferentes A y B. El 75% de los reguladores se compró al proveedor A, y el resto a B. Se sabe que en el envío, el 8% de los reguladores remitidos por A son defectuosos y que, en el envío de B, son defectuosos el 10% de los reguladores. Se extrae al azar un regulador del envío total. Calcular la probabilidad de que:

a) el regulador funcione correctamente;
b) si no funciona correctamente, se lo haya comprado al proveedor B.

3) Determinado aparato que se usa en un juego contiene monedas de igual forma y tamaño, de acuerdo con el siguiente detalle: 10 son de \$50; 10 son de \$100; 15 son de \$250 y 15 son de \$500. En cada jugada, una esfera gira y cae una sola moneda que es observada e inmediatamente se introduce en el aparato antes de realizar la segunda girada, procediéndose así en todos los casos (con reposición).

a) Calcular la probabilidad de que en una jugada caiga una moneda de \$100.
b) Hallar el *valor esperado* en pesos, en la primera jugada de este juego.
c) Calcular la probabilidad de obtener monedas por un valor total de \$500 o más, en las dos primeras jugadas.

4) Sea

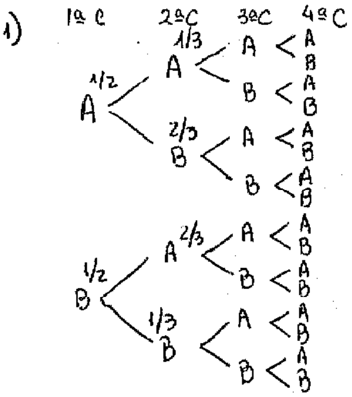
$$f(x;y)=\begin{cases} c(x+y^2) & si\ \ 0\le x\le 1 \ \wedge\ 0\le y\le 1 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

a) Determinar el valor de c para que $f(x;y)$ sea función de densidad de probabilidad.
b) Obtener: i) $F(x;y)$; ii) $f_X(x)$; iii) $f_Y(y)$.
c) Calcular: i) la probabilidad de que X asuma un valor máximo de 1/2 e Y, un valor máximo de 3/4.
ii) P(X=3/4 ; Y=1/4);
iii) P(X < 1/2 / Y< 3/4).
d) ¿Son independientes las variables aleatorias X e Y?. Justifique su respuesta.

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA - MATEMÁTICAS ESPECIALES. (2002)

RECUPERATORIO DEL PRIMER PARCIAL. TEMA 2 -

1)



a) C: en la primera y segunda compra elija la marca A (A,A)

$P(C) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

b) D: en la tercera y cuarta elija la B.

$D = \{(AABB); (ABBB); (BABB); (BBBB)\}$

$P(D) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{9}{54} = 1/6$

c) F: alterne las marcas en las cuatro primeras compras.

$F = \{(ABAB); (BABA)\} \therefore P(F) = \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\right)\cdot 2 = \frac{8}{27}$

2) DATOS

$P(A) = 0{,}75$; $P(D/A) = 0{,}08$

$P(B) = 0{,}25$; $P(D/B) = 0{,}1$

a) $P(F) = 1 - P(D) = 1 - [P(D/A)\cdot P(A) + P(D/B)\,P(B)] = 1 - (0{,}08\cdot 0{,}75 + 0{,}1\cdot 0{,}25) = 1 - 0{,}085 = 0{,}915$

b) $P(B/D) = \frac{P(D/B)\,P(B)}{P(D)} = \frac{0{,}1\cdot 0{,}25}{0{,}085} = 0{,}294117647$

3) Sea X: la v.a que indica el valor en $ que figura en la moneda.

X	$50	$100	$250	$500
P(X=r)	10/50	10/50	15/50	15/50

a) $P(X=100) = \frac{10}{50} = 1/5.$

b) $E(X) = 50\cdot\frac{1}{5} + 100\cdot\frac{1}{5} + 250\cdot\frac{15}{50} + 500\cdot\frac{15}{50} = 10 + 20 + 75 + 150 = \$255.$

c) Sea Y: la v.a que denota la suma en pesos de los valores que figuran en las monedas.

1º M	2º M	Y	
50	50	100	
	100	150	
	250	300	
	500	550	*
100	50	150	
	100	200	
	250	350	
	500	600	*
250	50	300	
	100	350	
	250	500	*
	500	750	*
500	50	550	*
	100	600	*
	250	750	*
	500	1000	*

$P(Y \geq 500) = 4\cdot\frac{10}{50}\cdot\frac{15}{50} + 4\cdot\frac{15}{50}\cdot\frac{15}{50} = \frac{600}{2500} + \frac{900}{2500} = \frac{15}{25} = 3/5.$

4) a) $\int_0^1\int_0^1 c(x+y^2)\,dy\,dx = c\int_0^1 [x(y)_0^1 + (y^3/3)_0^1]\,dx = c\left[\left(\frac{x^2}{2}\right)_0^1 + \frac{1}{3}(x)_0^1\right] = c\cdot\frac{5}{6} = 1 \Rightarrow c = 6/5$

b) $\boxed{F(x;y)} = \int_0^x\int_0^y \frac{6}{5}x + \frac{6}{5}y^2\,dy\,dx = \int_0^x \frac{6}{5}x(y)_0^y + \frac{6}{5}\frac{(y^3)_0^y}{3}\,dx = \int_0^x \frac{6}{5}xy + \frac{2}{5}y^3\,dx = \frac{6}{5}\left(\frac{x^2}{2}\right)y + \frac{2}{5}y^3(x)_0^x =$

$= \boxed{\frac{3x^2y + 2y^3x}{5}}$

iii) $f_Y(y) = \int_0^1 \frac{6}{5}(x+y^2)\,dx = \frac{6}{5}\frac{(x^2)_0^1}{2} + y^2(x)_0^1\cdot\frac{6}{5} = \frac{6y^2+3}{5}$; ii) $f_X(x) = \int_0^1 \frac{6}{5}(x+y^2)\,dy =$

$= \frac{6}{5}\left(x(y)_0^1 + \left(\frac{y^3}{3}\right)_0^1\right) = \frac{6}{5}x + \frac{6}{5}\cdot\frac{1}{3} = \frac{6x+2}{5}$

c) i) $P(X<1/2;\,Y<3/4) = F(1/2;\,3/4) = \frac{\frac{9}{16}+\frac{27}{64}}{5} = 63/320 = 0{,}196875$

ii) $P(X=3/4;\,Y=1/4) = 0.$ iii) $\boxed{P(X<1/2 \,/\, Y<3/4)} = \frac{P[(X<1/2)\cap(Y<3/4)]}{P(Y<3/4)} = \frac{63/320}{F_Y(3/4)} =$

$= \frac{63/320}{99/160} = \boxed{\frac{7}{22}}$ $\left(F_Y(y) = \int_0^y (3/5 + 6/5\,y^2)\,dy = \frac{3y+2y^3}{5}\right)$

d) X e Y no son independientes pues $f_X(x)\cdot f_Y(y) = \left(\frac{6x+2}{5}\right)\left(\frac{6y^2+3}{5}\right) \neq f(x,y)$