27/09/2024

Probabilidad y Estadística - **Primer Parcial Teórico- Matemática**

Apellido y Nombre: **DNI:**

1. 3p

   (a) ¿Qué es un espacio de probabilidad? Defina cuidadosamente y en detalle cada uno de los elementos que lo componen.

   (b) Dado un conjunto S, pruebe que $\mathcal{A} = \{\emptyset, S\}$ es la menor σ-álgebra en sentido de inclusión, que puede definirse sobre S.

   (c) Sea $\mathcal{A}$ una σ-álgebra sobre S y $x_0 \in S$. Se define:

$$\mu_{x_0} : \mathcal{A} \to \mathbb{R} / \mu_{x_0}(A) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x_0 \in A \\ 0 & \text{si} \quad x_0 \notin A \end{cases}$$

   ¿Es μ_{x_0} una función medida? ¿y una función de probabilidad?

2. (a) ¿Qué condiciones deben satisfacer dos eventos para afirmar que son independientes? 0.5p

   (b) Defina dos eventos que sean dependientes y mutuamente excluyentes. 0.5p

   (c) Enuncie y demuestre la Ley de Probabilidad Total. Ejemplifique. 1.5p

3. (a) Sea X una variable aleatoria definida sobre un espacio de probabilidad y sea F su función de distribución acumulada. Si $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, ¿cómo puede calcular $P(a \leq X < b)$?. Demuestre. 1p

   (b) Suponiendo que X es una v.a. continua y que sólo conoce la función de **densidad**, f, ¿ cómo puede calcular $P(a < X \leq b)$? 1p

   (c) Si f es la densidad de una v.a. continua, ¿cómo calcularía σ_X^2? 0.5

4. Sea (X, Y) un vector aleatorio continuo, con densidad conjunta $f(x, y)$. 2p

   (a) Sea $a \in \mathbb{R}$, ¿cómo puede calcular $P(X \leq a)$?

   (b) ¿Es siempre válido que si X e Y son variables aleatorias independientes, entonces $Cov(X, Y) = 0$? Justifique