Ejercicios Resueltos – Primer Parcial

ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA

1) TEMA 1 Y 4 (LSI)

Una empresa está realizando el tendido de fibra óptica en distintas zonas de la ciudad de Corrientes y lleva un registro de la cantidad en mtrs. de cables tendidos por día. La siguiente tabla de frecuencias absolutas acumuladas se realizó con los datos de los 30 primeros días de trabajo del año 2020:

Mts de fibra óptica	F_a
(650,700]	3
(700,750]	7
(750,800]	14
(800,850]	25
(850,900]	29
(900,950]	30

a) Determinar la población, y variable en estudio

Población: Cables tendidos por la empresa

Variable en estudio: cantidad de cables tendidos por día

(b) Complete la tabla de frecuencias.

Metros de fibra óptica		fi	ri	pi	Fi	Ri	Pi
[650 ; 700)	675	3	0,1	10%	3	0,1	1%
[700 ; 750)	725	4	0,13	13%	7	0,23	23%
[750 ; 800)	775	7	0,23	23%	14	0,46	46%
[800 ; 850)	825	11	0,37	37%	25	0,83	83%
[850 ; 900)	875	4	0,13	13%	29	0,96	96%
[900 ; 950)	925	1	0,03	3%	30	1	100%
		30	1	100			

(c) ¿Qué porcentaje de días se tendieron entre 800 y 850 mts de cable?

El 37%

(d) Calcular las medidas de tendencia central e interpretarlas.

$$\bar{X} = \frac{23{,}850}{30} = 795$$

$$Me = 800 + \frac{\frac{30}{2} - 14}{11} \times 50 = 804{,}54$$

$$Mo = 800 + \frac{11 - 7}{(11 - 4) + (11 - 7)} \times 50 = 818{,}18$$

(e) Graficar el polígono de frecuencias acumuladas.

1) **TEMA 2 Y 3 (LSI)**

La siguiente tabla muestra una distribución de la carga máxima (en toneladas) que soportan ciertos cables producidos por una compañía.

Carga máxima	Cables
[9.3,9.8)	2
[9.8,10.3)	5
[10.3,10.8)	12
[10.8,11.3)	17
[11.3,11.8)	14
[11.8,12.3)	6
[12.3,12.8)	3

(a) ¿Cuál es la población en estudio?, ¿Cuál es la variable en estudio?

Población: cables producidos por la compañía

Variable en Estudio: Carga máxima

(b) Complete la tabla de frecuencias

Carga Máxima		Cables fi	ri	pi	Fi	Ri	Pi
[9,3 ; 9,8)	9,55	2	0,03	3%	2	0,03	3%
[9,8 ; 10,3)	10,05	5	0,08	8%	7	0,11	11%
[10,3 ; 10,8)	10,55	12	0.20	20%	19	0,31	31%
[10,8 ;11,3)	11,05	17	0.29	29%	36	0,60	60%
[11,3 ;11,8)	11,55	14	0,24	24%	50	0,84	84%
[11.8 ; 12,3)	12,05	6	0,10	10%	56	0,94	94%
[12,3 ; 12,8)	12,55	3	0,05	5%	59	1	100%
		59	1	100			

(c) ¿Qué porcentaje de cables soportan más de 11.8 toneladas?

El 15%

(d) Grafique el histograma y el polígono de frecuencias de la frecuencia absoluta simple

(e) Calcule medidas de tendencia central e interprete.

$$\bar{X} = \frac{655{,}45}{59} = 11{,}109$$

$$Me = 10{,}08 + \frac{\frac{59}{2} - 19}{17} \times 0{,}5 = 11{,}108$$

$$Mo = 10{,}8 + \frac{17 - 12}{(17 - 12) + (17 - 14)} \times 0{,}5 = 11{,}1125$$

PROBABILIDAD CONDICIONAL

2) TEMA 1 (MAT)

Cierta compañía envía 40% de sus paquetes de correspondencia nocturna vía un servicio de correo Express E1, 50% de los paquetes nocturnos se envían vía servicio de correo Express E2 y el 10% restante se envía por E3. De los paquetes enviados por E1, 2% llegan después del tiempo de entrega garantizado; mientras que de los paquetes enviados vía E2, sólo 1% llegan demorados, en tanto que 95% de los paquetes manejados por E3 llegan a tiempo.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que un paquete seleccionado al azar llegue demorado?

(b) Si un paquete seleccionado al azar llegó a tiempo, ¿cuál es la probabilidad de que no fue mandado vía E1?

Resolución. Consideremos el evento:

T: El paquete llega después del tiempo garantizado. Por lo que, $P(E_1) = 0{,}4; P(E_2) = 0{,}5; P(E_3) = 0{,}1; P(T/E_1) = 0{,}02; P(T/E_2) = 0{,}01; P(T'/E_3) = 0{,}95$.

a) $P(T) = P(T/E_1) \cdot P(E_1) + P(T/E_2) \cdot P(E_2) + P(T/E_3) \cdot P(E_3) = 0{,}018$

La probabilidad de que un paquete seleccionado al azar llegue demorado es 0,018.

b) $P(E_1'/T') = 1 - P(E_1/T') 1 - \dfrac{P(T'/E_1) \cdot P(E_1)}{P(T')} = 1 - \dfrac{0{,}98 \cdot 0{,}4}{1 - 0{,}018} = 0{,}6008.$

Si un paquete seleccionado al azar llegó a tiempo, la probabilidad de que no fue mandado vía E_1 es 0,6008.

2) TEMA 2 Y 4 (MAT)

Una fábrica utiliza tres líneas de producción para fabricar latas de cierto tipo. La tabla adjunta da porcentajes de latas que no cumplen con las especificaciones, categorizadas por tipo de incumplimiento de las especificaciones, para cada una de las tres líneas durante un periodo particular.

	Línea 1	Línea 2	Línea 3
Manchas	15	12	20
Grietas	50	44	40
Problemas con la Argolla	21	28	24
Defecto Superficial	10	8	15
Otros	4	8	2

Durante este periodo, la línea 1 produjo 500 latas fuera de especificación, la 2 produjo 400 latas como esas y la 3 fue responsable de 600 latas fuera de especificación. Suponga que se selecciona al azar una de estas 1500 latas.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que la lata la produjo la línea 1?

(b) Si la lata seleccionada provino de la línea 1, ¿cuál es la probabilidad de que tenía una mancha?

(c) Dado que la lata seleccionada mostró un defecto superficial, ¿cuál es la probabilidad de que provino de la línea 1?

Demostración. a) $P(L_1) = \dfrac{500}{1500} = \dfrac{1}{3}$.

$P(G) = P(G/L_1) \cdot P(L_1) + P(G/L_2) \cdot P(L_2) + P(G/L_3) \cdot P(L_3) \cong 0{,}5273$

La probabilidad de que la lata la produjo la línea 1 es de 1/3; mientras que la probabilidad de que la razón del incumplimiento de la especificación sea una grieta es aproximadamente 0,5273.

b) $P(M/L_1) = 0{,}15$. Si la lata seleccionada provino de la línea 1, la probabilidad de que tuviera una mancha es de 0,15.

c) $P(L_1/DS) = \dfrac{P(DS/L_1) \cdot P(L_1)}{P(DS)} = \dfrac{P(DS/L_1) \cdot P(L_1)}{P(DS/L_1) \cdot P(L_1) + P(DS/L_2) \cdot P(L_2) + P(DS/L_3) \cdot P(L_3)} \cong 0{,}2907$

Dado que la lata seleccionada mostró un defecto superficial, la probabilidad de que provenga de la línea 1 es aprox. 0,2907.

2) TEMA 3 (MAT)

En una estación de servicio el 40% de los clientes utilizan gasoil, 35% usan nafta plus y 25% utilizan nafta Premium. De los clientes que utilizan gasoil, sólo 30% llenan sus tanques. De los clientes que utilizan plus, 60% llenan sus tanques, mientras que los que utilizan Premium, 50% llenan sus tanques.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente pida nafta plus y llene el tanque?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente llene el tanque?

(c) Si un cliente llena el tanque, ¿cuál es la probabilidad que pida gasoil?

Resolución. Consideremos los siguientes eventos:

A: El cliente utiliza gasolina regular. $\rightarrow P(A) = 0{,}4$

B: El cliente utiliza gasolina plus. $\rightarrow P(B) = 0{,}35$

C: El cliente utiliza gasolina premium. $\rightarrow P(C) = 0{,}25$

D: El cliente llena el tanque. $\rightarrow P(D/A) = 0{,}3; P(D/B) = 0{,}6; P(D/C) = 0{,}5$

a) $P(B \cap D) = P(D/B) \cdot P(B) = 0{,}21.$

La probabilidad de que el siguiente cliente pida gasolina plus y llene el tanque es 0,21.

b) $P(D) = P(D/A) \cdot P(A) + P(D/B) \cdot P(B) + P(D/C) \cdot P(C) = 0{,}455.$

La probabilidad de que el siguiente cliente llene el tanque es 0,455

c) $P(A/D) = \dfrac{P(D/A) \cdot P(A)}{P(D)} = \dfrac{24}{91} \cong 0{,}2637.$

Si el siguiente cliente llena el tanque, la probabilidad que pida gasolina regular es de aproximadamente 0,2637.

Variables Aleatorias Unidimensionales Discretas y Continuas

1) **Tema 2 y 3 (Mat) Tema 1 y 4 (LSI)**
Muchos fabricantes cuentan con programas de control de calidad que incluyen la inspección de los materiales recibidos en busca de defectos. Suponga que un fabricante de computadoras recibe tarjetas madre en lotes. Suponga que en cada lote de cinco hay 2 tarjetas defectuosas. Se define X como el número de tarjetas defectuosas observadas de 3 tarjetas tomadas al azar (una por extracción).

a) Obtener la distribución de probabilidades.

X	0	1	2
P(X)	$\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{10}$	$3\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{3}{5}$	$3\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{3}{10}$
F(X)	$\frac{1}{10}$	$\frac{7}{10}$	1

b) Obtener la función de distribución de la variable X.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ \frac{1}{10} & si\ 0 \leq x < 1 \\ \frac{7}{10} & si\ 1 \leq x < 2 \\ 1 & si\ 2 \leq x \end{cases}$$

c) ¿Cuántas placas defectuosas se espera encontrar en ese lote?

$$E(x) = 0.\frac{1}{10} + 1.\frac{3}{5} + 2.\frac{3}{10} = \frac{6}{5} = 1{,}2$$

d) Calcular:

i) $P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - 1 = 0$

ii) $P(X = 3.5) = 0$

iii) $P(X \leq 3) = P(X \leq 2) = F(2) = 1$

2) Tema 3 (LSI)

La duración en horas de un componente electrónico, es una variable aleatoria cuya función de distribución acumulativa es: $F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{100}}$ si $x > 0$

a) Determinar la función de densidad de X.

$$f(x) = F'(x) = \left(1 - e^{-\frac{x}{100}}\right)' = -\left(-e^{-\frac{x}{100}}\right)' = -\left(\left(-\frac{x}{100}\right)' . e^{-\frac{x}{100}}\right) = -\left(-\frac{1}{100} . e^{-\frac{x}{100}}\right) = \frac{e^{-\frac{x}{100}}}{100}$$

Luego $f(x) = \frac{e^{-\frac{x}{100}}}{100}$ $si\ x > 0$

b) Determinar la probabilidad que el componente trabaje más de 200 horas.

$$P(X > 200) = 1 - P(X \leq 200) = 1 - F(200) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{200}{100}}\right) = e^{-2} = 0{,}135$$

c) Determinar la probabilidad que el componente trabaje 500 horas.

$$P(X = 500) = 0$$

d) Determinar la probabilidad que el componente trabaje entre 200 y 400 horas.

$$P(200 \leq X \leq 400) = F(400) - F(200) = \left(1 - e^{-\frac{400}{100}}\right) - \left(1 - e^{-\frac{200}{100}}\right) = 0{,}117$$

3) Tema 1 y 4 (Mat) Tema 2 (LSI)

Dentro de un programa de crédito, se le asigna a la empresa un scoring (Z) que es una variable aleatoria con la siguiente función de densidad:

$$f(\mathrm{x}) = \begin{cases} 3\mathrm{x}^4 & \text{para } 0 \leq \mathrm{x} \leq 1 \\ 0 & en\ cualquier\ otro\ punto \end{cases}$$

a) Verifique si $f(\mathrm{x})$ es función de densidad y si no lo es, transfórmela para que lo sea.

Se sabe que la función de densidad cumple la siguiente propiedad:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{f(x)dx} = 1$$

Dada entonces la función de la actividad se tiene que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{f}(x)\mathrm{dx} = \int_{-\infty}^{0} 0\ \mathrm{dx} + \int_{0}^{1} 3\mathrm{x}^4\ \mathrm{dx} + \int_{1}^{\infty} 0\ \mathrm{dx} = 3\left.\frac{\mathrm{x}^5}{5}\right|_0^1 = 3.\frac{1}{5} = \frac{3}{5} \neq 1$$

Por lo tanto, esta no es función de densidad de la variable x. Para que lo sea debe ser:

$$f(x) = \begin{cases} 5.\mathrm{x}^4, & \text{para } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & en\ cualquier\ otro\ punto \end{cases}$$

Pues, si verificamos la propiedad antes mencionada se tiene que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{f(x)dx} = \int_{-\infty}^{0} 0\ \mathrm{dx} + \int_{0}^{1} 5\mathrm{x}^4\ \mathrm{dx} + \int_{1}^{\infty} 0\ \mathrm{dx} = 5\left.\frac{\mathrm{x}^5}{5}\right|_0^1 = 5.\frac{1}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

b) Determinar la función de distribución de la variable X.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \mathrm{f(x)dx} = \int_{0}^{x} 5\mathrm{x}^4\ \mathrm{dx} = 5\left.\frac{\mathrm{x}^5}{5}\right|_0^{\mathrm{x}} = x^5$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ x^5 & si\ 0 \leq \mathrm{x} \leq 1 \\ 1 & si\ \ x > 1 \end{cases}$$

c) Toda empresa con un scoring menor a 0,30 se excluye del programa. ¿Cuál es la probabilidad de que eso ocurra?

Para calcular esta probabilidad tendremos que:

$$P(x < 0{,}3) = \int_{-\infty}^{0{,}3} \mathrm{f(x)dx} = \int_{-\infty}^{0} 0\ \mathrm{dx} + \int_{0}^{0{,}3} 5\mathrm{x}^4\ \mathrm{dx} = 5\left.\frac{\mathrm{x}^5}{5}\right|_0^{0{,}3} = 5.\frac{0{,}3^5}{5} = 0{,}3^5$$
$$= 0{,}00243$$

La probabilidad de que una empresa se excluya del programa es de 0,00243.

d) ¿Cuál es el scoring que se espera que tenga una empresa?

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{x}\,.\,\mathrm{f(x)dx} = \int_{0}^{1} \mathrm{x}.\,5\mathrm{x}^4\ \mathrm{dx} = \int_{0}^{1} 5\mathrm{x}^5\ \mathrm{dx} = 5\left.\frac{\mathrm{x}^6}{6}\right|_{0}^{1} = \frac{5}{6}$$

Variables Aleatorias Bidimensionales Discretas y Continuas

4) Tema 3 y 6 (LSI)

Los contratos para dos trabajos de desarrollo de software a medida se asignan aleatoriamente a una o más de tres empresas A, B y C. Sea X la variable aleatoria que indica el número de contratos asignados a la empresa A, e Y la variable aleatoria que indica el número de contratos asignados a la empresa B.

a) Obtenga la distribución conjunta de probabilidad de las variables aleatorias X e Y.
b) Obtenga las distribuciones de probabilidades marginales de X y de Y.

y/x	0	1	2	$p_{.v}$	$F_y(y)$
0	1/9	2/9	1/9	4/9	4/9
1	2/9	2/9	0	4/9	8/9
2	1/9	0	0	1/9	1
$P_{u.}$	4/9	4/9	1/9	1	
$F_x(x)$	4/9	8/9	1		

c) Calcule:

I) $F(1,2) = \frac{8}{9}$

II) $E(Y/\,X = 1) = \frac{1}{2}$

d) ¿Son X e Y variables aleatorias independientes? Justifique
No son independientes.

4) Tema 1 y 4 (Mat) Tema 2 y 5 (LSI)

Una moneda se lanzó dos veces. Sea X = número de caras en el primer lanzamiento e Y = número total de caras en los 2 lanzamientos. Si la moneda no está equilibrada y una cara tiene una probabilidad de ocurrencia de 40%.

a) Obtenga la distribución de probabilidad conjunta de las variables aleatorias X e Y.
b) Obtenga las distribuciones de probabilidades marginales de X y de Y.

y/x	0	1	$p_{.v}$	$F_y(y)$
0	0,36	0	0,36	0,36
1	0,24	0,24	0,48	0,84
2	0	0,16	0,16	1
$P_{u.}$	0,60	0,40	1	
$F_x(x)$	0,60	1		

c) Calcule la probabilidad de que ocurra al menos 1 cara.

$$P(Y \geq 1) = 0{,}64$$

d) Calcule:

I) $F_y(1) = 0{,}84$

II) $E(XY) = 0{,}56$

III) $P(X + Y > 1) = 0{,}40$

4) Tema 2 y 3 (Mat) Tema 1 y 4 (LSI)

Un restaurante tiene que vender sus comidas dando un servicio a los clientes que retiran en el local y en repartos con delivery. El tiempo de llegada de la comida a los clientes, en un día elegido al azar, están representados por las variables X para los que retiran en el local e Y para los repartos con delivery, representados por la siguiente función de densidad conjunta:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{3}(x+2y) & 0 \leq x \leq 1\,, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & c.c \end{cases}$$

a) Obtenga las funciones de densidad marginales de las variables X e Y.

$$f_x(x) = \frac{2}{3}(x+1)$$

$$f_y(y) = \frac{1}{3}(1+4y)$$

b) ¿Son X e Y v. a. independientes? Justifique su respuesta.

No son independientes

c) Obtenga la función de densidad condicionada de Y por X.

$$f(y\ /\ x)\ = \frac{(x+2y)}{x+1}$$

d) Calcule

$$E(Y\ /\ X\ = 1) = \frac{7}{12}$$