

Variables Aleatorias Bidimensionales

Vectores aleatorios

Consideremos los siguientes experimentos aleatorios:

- ① Registrar Temperatura (T), Humedad ambiente (H), Precipitación (P) cada hora en un determinado punto de una ciudad.
- ② En un centro asistencial se registran ciertas variables socioeconómicas, X_1, X_2, \dots, X_n de quienes asisten al mismo.

En estos casos, un conjunto de resultados podría especificarse como la intersección de los eventos:

- ① $(a \leq T \leq b), (c \leq H \leq d), (e \leq P \leq f)$
- ② $(X_1 = x_1), (X_2 = x_2), \dots, (X_n = x_n)$

Para hacer inferencias sobre la población necesitamos conocer la probabilidad de intersección de esos eventos.

Vectores Aleatorios

Definición 5.1: Vectores Aleatorios

Sea $(\mathbf{S}, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad y sea $n \in \mathbb{N}$. Un **Vector Aleatorio n-dimensional** (X_1, X_2, \dots, X_n) es una aplicación del espacio muestral \mathbf{S} en $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$, es decir:

$$\begin{aligned}\mathbf{S} &\rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \dots \times \mathbb{R} \\ \omega &\rightarrow (X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega))\end{aligned}$$

Cada componente del vector aleatorio es una variable aleatoria unidimensional.

Observación: En este curso sólo trabajaremos con vectores aleatorios **bidimensionales**, es decir, $n = 2$ en la definición anterior, y los llamaremos **Variables Aleatorias Bidimensionales**.

Variables Aleatorias Discretas

Definición 5.2: Función probabilidad de masa conjunta

Sea $(\mathbf{S}, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad, X e Y variables aleatorias unidimensionales discretas, que toman un número finito o infinito numerable de valores $\{x_1, x_2, \dots\}$, $\{y_1, y_2, \dots\}$, respectivamente. Se define la **función probabilidad de masa conjunta de (X, Y)** como

$$p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j), \forall i, j$$

que satisface:

① $0 \leq p_{ij} \leq 1; \forall i, j$

② $\sum_i \sum_j p_{ij} = 1$

Función de distribución conjunta

Sea $(\mathbf{S}, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad, (X, Y) variable aleatoria bidimensional discreta. La **función de distribución conjunta** de (X, Y) está dada por:

$$\begin{aligned} F(x, y) &= P(X \leq x, Y \leq y) \\ &= \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_i \leq y} P(X = x_i, Y = y_j) \\ &= \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_i \leq y} p_{ij} \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ejemplo 1

En un supermercado hay tres cajas registradoras. Dos clientes llegan a las cajas en momentos diferentes cuando no hay otros clientes en ellas. Cada cliente elige una caja al azar, independientemente del otro. Sea $Y_1 =$ número de estos clientes que elige caja 1, $Y_2 =$ número de estos clientes que eligen caja 2.

- a) Encontrar la probabilidad de masa conjunta de Y_1, Y_2 .
- b) Calcular la probabilidad que los dos clientes elijan la caja 1.
- c) Calcular $F(0,5; 2)$.

Variables Aleatorias Continuas

Definición 5.3: Función de densidad conjunta

Sea $(\mathbf{S}, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad, X e Y variables aleatorias unidimensionales continuas. Se define la **función de densidad conjunta de (X, Y)** a la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ que verifica:

- ① $f(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$
- ② $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1.$

Función de distribución conjunta

Sea $(\mathbf{S}, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad, X e Y variables aleatorias unidimensionales continuas. La **Función de distribución conjunta de (X, Y)** viene dada por la función $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$ definida por

$$\begin{aligned} F(x, y) &= P(X \leq x, Y \leq y) \\ &= \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f(s, t) \, ds dt; \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Bajo ciertas condiciones, la función de densidad conjunta de una variable aleatoria bidimensional continua se obtiene a partir de la de distribución según

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$$

Ejemplo 2

- a) Sea (X, Y) v.a. bidimensional con densidad

$$f(x, y) = \begin{cases} xy, & 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Encuentre la función de distribución conjunta de (X, Y) .

- b) Supongamos

$$F(x, y) = 1 - e^{-x} - e^{-y} + e^{-(x+y)}, \quad x > 0, y > 0$$

es la función de distribución de la va bidimensional (X, Y) .
Encuentre la función de densidad conjunta de (X, Y)

Propiedades de la Función de distribución conjunta

Si $F(x, y)$ es la función de distribución conjunta de la v.a (X, Y) entonces:

- ① F es monótona no decreciente tanto en x como en y .
- ② F es continua a derecha tanto en x como en y .
- ③ $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x, y) = \lim_{y \rightarrow -\infty} F(x, y) = 0$
- ④ $\lim_{x, y \rightarrow \infty} F(x, y) = 1$

Además, si $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ con $a < b; c < d$ se satisface:

$$P(a < X \leq b; c < Y \leq d) = F(b, d) - F(a, d) - F(b, c) + F(a, c)$$

Distribuciones Marginales

Si bien (X, Y) es un “vector aleatorio”, tanto X como Y son variables aleatorias unidimensionales, y como tales, tienen su propia distribución.

Definición 5.4: Distribuciones Marginales

Dada $F(x, y)$ función de distribución conjunta de (X, Y) se define la **función de distribución marginal de X** como

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(X \leq x, Y \leq +\infty), \quad x \in \mathbb{R}$$

Análogamente, se define la **función de distribución marginal de Y** como

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X \leq +\infty, Y \leq y), \quad y \in \mathbb{R}$$

Distribución marginal: caso discreto

Dada una v.a. bidimensional (X, Y) con función de probabilidad de masa conjunta $p_{ij} = P(X = x_i; Y = y_j)$ se define la **función de probabilidad de masa marginal de X** como

$$p_{i \cdot} = P(X = x_i) = \sum_j P(X = x_i; Y = y_j)$$

Análogamente, se define la **función de probabilidad de masa marginal de Y** como

$$p_{\cdot j} = P(Y = y_j) = \sum_i P(X = x_i; Y = y_j)$$

Así, las **distribuciones marginales** resultan

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p_{i \cdot}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = \sum_{y_j \leq y} p_{\cdot j}, \quad y \in \mathbb{R}$$



Distribución marginal: caso continuo

Dada una v.a. bidimensional (X, Y) con función de densidad conjunta $f(x, y)$. Las **funciones de densidad marginales de X e Y** están dadas por:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx \quad y \in \mathbb{R}$$

Las **funciones de distribución marginales de X e Y** vienen dadas por:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{\infty} f(s, t) dt \ ds; \quad x \in \mathbb{R},$$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^{\infty} f(s, t) ds \ dt; \quad y \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 3

- a) Calcular las distribuciones marginales en ejemplo 1.
 - i) Calcular $p_{1.}, F_X(2)$ e interpretar.

- b) Calcular densidades y distribuciones marginales en el ejemplo 2.

Distribuciones Condicionadas

Definición 5.5: Distribuciones Condicionadas Discretas

Sea (X, Y) una v.a. bidimensional discreta. Se define la **función de probabilidad de masa de X condicionada al valor y_j de Y** como:

$$P_{X/Y}(x_i/y_j) = p_{i/j} = P(X = x_i / Y = y_j) = \frac{P(X = x_i \cap Y = y_j)}{P(Y = y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$$

Análogamente, se define la **función de probabilidad de masa de Y condicionada al valor x_i de X** como

$$P_{Y/X}(y_j/x_i) = p_{j/i} = P(Y = y_j / X = x_i) = \frac{P(X = x_i \cap Y = y_j)}{P(X = x_i)} = \frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}$$

Observaciones:

Las funciones de probabilidad de masa condicionadas, son funciones de probabilidad de masa, y como tales satisfacen:

$$\textcircled{1} \quad p_{i/j} \geq 0, \sum_i p_{i/j} = 1$$

$$\textcircled{2} \quad p_{j/i} \geq 0, \sum_j p_{j/i} = 1$$

Definición 5.6: Distribuciones Condicionadas Continuas

Sea (X, Y) una v.a. bidimensional discreta. Se definen la **función de densidad de X condicionada al valor y de Y** (y fijo) como:

$$f(x/y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}; \quad x \in \mathbb{R}$$

y la **función de densidad de Y condicionada al valor x de X** (x fijo) como

$$f(y/x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}; \quad y \in \mathbb{R}$$

donde $f_X(x)$ y $f_Y(y)$ son las densidades marginales de X e Y , respectivamente.

Observaciones:

- $f(x/y) \geq 0, \int_{-\infty}^{+\infty} f(x/y) dx = 1$
- $f(y/x) \geq 0, \int_{-\infty}^{+\infty} f(y/x) dy = 1$
- las **funciones de distribución condicionadas** son

$$F(x/y) = P(X \leq x | Y = y) = \int_{-\infty}^x \frac{f(s,y)}{f_Y(y)} ds, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$F(y/x) = P(Y \leq y | X = x) = \int_{-\infty}^y \frac{f(x,t)}{f_X(x)} dt, \quad y \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 4:

La función de probabilidad de masa conjunta de las variables (Y_1, Y_2)

Ejemplo 1, es:

Y_1/Y_2	0	1	2	
0	1/9	2/9	1/9	$p_{0\cdot} = 4/9$
1	2/9	2/9	0	$p_{1\cdot} = 4/9$
2	1/9	0	0	$p_{2\cdot} = 1/9$
	$p_{\cdot 0} = 4/9$	$p_{\cdot 1} = 4/9$	$p_{\cdot 2} = 1/9$	

- ① Calcular la probabilidad que sólo un cliente elija la caja 1, sabiendo que ninguno eligió la caja 2.
- ② ¿Cuál es la probabilidad que al menos un cliente elija la caja 2, sabiendo que ninguno eligió la caja 1?

Ejemplo 5:

La función de densidad conjunta de (X, Y) presentada en el Ejemplo 2, es

$$f(x, y) = \begin{cases} xy, & 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}$$

y sus funciones de densidad marginales, (Ejemplo 3b), son:

$$f_X(x) = \begin{cases} x/2, & 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} 2y, & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Calcular las densidades condicionadas $f(x|y)$ y $f(y|x)$.

Independencia de Variables Aleatorias

Recordemos (**Unidad 3**) que dos eventos $A; B$ son **independientes** si se cumple que $P(A/B) = P(A)$, $P(B/A) = P(B)$ y en consecuencia: $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Definición 5.7: Independencia de v.a.

Diremos que dos variables aleatorias X e Y son independientes si:

- $P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij} = p_{i \cdot} \cdot p_{\cdot j}$ **caso discreto**.
- $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$ **caso continuo**.

Observaciones:

La definición es equivalente a decir que $F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$ y por lo tanto, si **X e Y son v.a. independientes** se satisface:

$$P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d) = P(a \leq X \leq b)P(c \leq Y \leq d)$$

Ejemplo 6:

- a) ¿Son las variables Y_1, Y_2 del Ejemplo 1 independientes?

- b) ¿Son las variables X, Y del Ejemplo 2 independientes?

Esperanza Condicional

Definición 5.8 Esperanza condicional

Sea $(X; Y)$ v.a. bidimensional, se define la **Esperanza condicional de X dado que $Y = y$** como:

- $E(X/Y = y_j) = \sum_i x_i p_{i/j}$ caso discreto.
- $E(X/Y = y) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x/y)dx$ caso continuo.

De manera análoga se define la esperanza condicional de Y dado X en los casos discreto y continuo.

Definición 5.9:

Sea $(X; Y)$ v.a. bidimensional, $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ se define la **Esperanza de $g(X, Y)$** como:

- $E[g(X, Y)] = \sum_i \sum_j g(x_i, y_j) p_{ij}$ **caso discreto.**
- $E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) f(x, y) dx dy$ **caso continuo.**

Propiedades:

- ① $E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c.$
- ② Si X e Y son independientes, entonces $E(XY) = E(X)E(Y).$

Definición 5.10: Momentos bidimensionales

Sea $(X; Y)$ v.a. bidimensional, se definen los

- **Momento de orden (r,s) :** $\alpha_{rs} = E[X^r Y^s]$.
- **Momento centrado de orden (r,s) :**
 $\mu_{rs} = E[(X - E[X])^r (Y - E[Y])^s]$.

Definición 5.11: Covarianza entre X e Y

Sea $(X; Y)$ v.a. bidimensional, al momento centrado de orden $(1,1)$ se lo llama **Covarianza** entre X e Y y se lo denota por:

$$\sigma_{XY} = \text{Cov}(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])] = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Observaciones:

- ① Si $\sigma_{XY} = 0$ se dice que X e Y son **no correlacionadas o incorreladas**.
- ② Se define la correlación entre X e Y como $\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$.
 ρ_{XY} indica el grado de relación lineal entre las variables X e Y .
- ③ Si X e Y son independientes, entonces son no correlacionadas. (La recíproca no es cierta, ver Ejemplo 6c)

Propiedades:

- ① Si $Z = aX + bY + c$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$ entonces
 $Var(Z) = a^2 Var(X) + b^2 Var(Y) + 2abCov(X, Y)$.
- ② $Cov(X, Y) = 0 \Leftrightarrow E(XY) = E(X)E(Y)$.

Ejemplo 7:

- a) Calcular $\text{Cov}(Y_1, Y_2)$ donde Y_1, Y_2 son las v.a. del Ejemplo 1.
- b) Calcular $\text{Cov}(X, Y)$ donde X, Y son las v.a. del Ejemplo 2.
- c) La siguiente tabla define la función de probabilidad de masa conjunta del vector aleatorio (X, Y) .

X/Y	-1	0	1
0	0	1/2	0
1	1/4	0	1/4

- i) Calcular $\text{Cov}(X, Y)$.
- ii) ¿Son X e Y independientes?