Variables Aleatorias Bidimensionales

Vectores aleatorios

Consideremos los siguientes experimentos aleatorios:

1. Registrar Temperatura (T), Humedad ambiente (H), Precipitación (P) cada hora en un determinado punto de una ciudad.
2. En un centro asistencial se registran ciertas variables socioeconómicas, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de quienes asisten al mismo.

Vectores aleatorios

Consideremos los siguientes experimentos aleatorios:

1. Registrar Temperatura (T), Humedad ambiente (H), Precipitación (P) cada hora en un determinado punto de una ciudad.
2. En un centro asistencial se registran ciertas variables socioeconómicas, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de quienes asisten al mismo.

En estos casos, un conjunto de resultados podría especificarse como la intersección de los eventos:

1. $(a \leq T \leq b), (c \leq H \leq d), (e \leq P \leq f)$
2. $(X_1 = x_1), (X_2 = x_2), \ldots, (X_n = x_n)$

Para hacer inferencias sobre la población necesitamos conocer la probabilidad de intersección de esos eventos.

Vectores Aleatorios

Definición 5.1: Vectores Aleatorios

Sea $(\mathbf{S}, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad y sea $n \in \mathbb{N}$. Un Vector Aleatorio n-dimensional $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ es una aplicación del espacio muestral **S** en $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$, es decir:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &\to \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ldots \times \mathbb{R} \\ \omega &\to (X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega)) \end{aligned}$$

Cada componente del vector aleatorio es una variable aleatoria unidimensional.

Vectores Aleatorios

Definición 5.1: Vectores Aleatorios

Sea $(\mathbf{S}, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad y sea $n \in \mathbb{N}$. Un Vector Aleatorio n-dimensional $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ es una aplicación del espacio muestral $\mathbf{S}$ en $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$, es decir:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &\rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ldots \times \mathbb{R} \\ \omega &\rightarrow (X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega)) \end{aligned}$$

Cada componente del vector aleatorio es una variable aleatoria unidimensional.

Observación: En este curso sólo trabajaremos con vectores aleatorios **bidimensionales**, es decir, $n = 2$ en la definición anterior, y los llamaremos *Variables Aleatorias Bidimensionales*.

Variables Aleatorias Discretas

Definición 5.2: Función probabilidad de masa conjunta

Sea $(\mathbf{S}, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad, X e Y variables aleatorias unidimensionales discretas, que toman un número finito o infinito numerable de valores $\{x_1, x_2, \ldots\}$, $\{y_1, y_2, \ldots\}$, respectivamente. Se define la **función probabilidad de masa conjunta de** (X, Y) como

$$p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j), \forall i, j$$

que satisface:

1. $0 \leq p_{ij} \leq 1; \forall i, j$
2. $\sum_i \sum_j p_{ij} = 1$

Función de distribución conjunta

Sea $(\mathbf{S}, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad, (X, Y) variable aleatoria bidimensional discreta. La **función de distribución conjunta** de (X, Y) está dada por:

$$\begin{aligned} F(x,y) =& P(X \leq x, Y \leq y) \\ =& \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} P(X = x_i, Y = y_j) \\ =& \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} p_{ij} \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ejemplo 1

En un supermercado hay tres cajas registradoras. Dos clientes llegan a las cajas en momentos diferentes cuando no hay otros clientes en ellas. Cada cliente elige una caja al azar, independientemente del otro. Sea $Y_1 =$ número de estos clientes que elige caja 1, $Y_2 =$ número de estos clientes que eligen caja 2.

a) Encontrar la probabilidad de masa conjunta de Y_1, Y_2.
b) Calcular la probabilidad que los dos clientes elijan la caja 1.
c) Calcular $F(0{,}5; 2)$.

Variables Aleatorias Continuas

Definición 5.3: Función de densidad conjunta

Sea $(\mathbf{S}, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad, X e Y variables aleatorias unidimensionales continuas. Se define la **función de densidad conjunta de** (X, Y) a la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ que verifica:

1. $f(x, y) \geq 0 \ \forall x, y \in \mathbb{R}$.
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx \ dy = 1$.

Función de distribución conjunta

Sea $(\mathbf{S}, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad, X e Y variables aleatorias unidimensionales continuas. La **Función de distribución conjunta de** (X, Y) viene dada por la función $F : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ definida por

$$\begin{aligned} F(x,y) =& P(X \leq x, Y \leq y) \\ =& \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(s,t)\; dsdt; \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Función de distribución conjunta

Sea $(\mathbf{S}, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad, X e Y variables aleatorias unidimensionales continuas. La **Función de distribución conjunta de** (X, Y) viene dada por la función $F : \mathbb{R}^2 \to [0, 1]$ definida por

$$\begin{aligned} F(x, y) =& P(X \leq x, Y \leq y) \\ =& \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f(s, t)\ dsdt; \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Bajo ciertas condiciones, la función de densidad conjunta de una variable aleatoria bidimensional continua se obtiene a partir de la de distribución según

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$$

Ejemplo 2

a) Sea (X, Y) v.a. bidimensional con densidad

$$f(x,y) = \begin{cases} xy, & 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Encuentre la función de distribución conjunta de (X, Y).

Ejemplo 2

a) Sea (X, Y) v.a. bidimensional con densidad

$$f(x,y) = \begin{cases} xy, & 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Encuentre la función de distribución conjunta de (X, Y).

b) Supongamos

$$F(x,y) = 1 - e^{-x} - e^{-y} + e^{-(x+y)},\ x > 0,\ y > 0$$

es la función de distribución de la va bidimensional (X, Y). Encuentre la función de densidad conjunta de (X, Y)

Propiedades de la Función de distribución conjunta

Si $F(x, y)$ es la función de distribución conjunta de la v.a (X, Y) entonces:

1. F es mononóta no decreciente tanto en x como en y.
2. F es continua a derecha tanto en x como en y.
3. $\lim_{x \to -\infty} F(x, y) = \lim_{y \to -\infty} F(x, y) = 0$
4. $\lim_{x,y \to \infty} F(x, y) = 1$

Propiedades de la Función de distribución conjunta

Si $F(x, y)$ es la función de distribución conjunta de la v.a (X, Y) entonces:

1. F es monónota no decreciente tanto en x como en y.
2. F es continua a derecha tanto en x como en y.
3. $\lim_{x \to -\infty} F(x, y) = \lim_{y \to -\infty} F(x, y) = 0$
4. $\lim_{x,y \to \infty} F(x, y) = 1$

Además, si $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ con $a < b; c < d$ se satisface:

$$P(a < X \leq b; c < Y \leq d) = F(b, d) - F(a, d) - F(b, c) + F(a, c)$$

Distribuciones Marginales

Si bien (X, Y) es un "vector aleatorio", tanto X como Y son variables aleatorias unidimensionales, y como tales, tienen su propia distribución.

Distribuciones Marginales

Si bien (X, Y) es un "vector aleatorio", tanto X como Y son variables aleatorias unidimensionales, y como tales, tienen su propia distribución.

Definición 5.4: Distribuciones Marginales

Dada $F(x, y)$ función de distribución conjunta de (X, Y) se define la **función de distribución marginal de** X como

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(X \leq x, Y \leq +\infty), \quad x \in \mathbb{R}$$

Distribuciones Marginales

Si bien (X, Y) es un "vector aleatorio", tanto X como Y son variables aleatorias unidimensionales, y como tales, tienen su propia distribución.

Definición 5.4: Distribuciones Marginales

Dada $F(x, y)$ función de distribución conjunta de (X, Y) se define la **función de distribución marginal de** X como

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(X \leq x, Y \leq +\infty), \quad x \in \mathbb{R}$$

Análogamente, se define la **función de distribución marginal de** Y como

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X \leq +\infty, Y \leq y), \quad y \in \mathbb{R}$$

Distribución marginal: caso discreto

Dada una v.a. bidimensional (X, Y) con función de probabilidad de masa conjunta $p_{ij} = P(X = x_i; Y = y_j)$ se define la **función de probabilidad de masa marginal de** X como

$$p_{i\cdot} = P(X = x_i) = \sum_j P(X = x_i; Y = y_j)$$

Distribución marginal: caso discreto

Dada una v.a. bidimensional (X, Y) con función de probabilidad de masa conjunta $p_{ij} = P(X = x_i; Y = y_j)$ se define la **función de probabilidad de masa marginal de** X como

$$p_{i\cdot} = P(X = x_i) = \sum_j P(X = x_i; Y = y_j)$$

Análogamente, se define la **función de probabilidad de masa marginal de** Y como

$$p_{\cdot j} = P(Y = y_j) = \sum_i P(X = x_i; Y = y_j)$$

Así, las **distribuciones marginales** resultan

$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p_{i\cdot} \;\; x \in \mathbb{R}$,

$F_Y(y) = P(Y \leq y) = \sum_{y_j \leq y} p_{\cdot j} \;\; y \in \mathbb{R}$

Distribución marginal: caso continuo

Dada una v.a. bidimensional (X, Y) con función de densidad conjunta $f(x, y)$. Las **funciones de densidad marginales de** X **e** Y están dadas por:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy, \;\; x \in \mathbb{R}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx \;\; y \in \mathbb{R}$$

Distribución marginal: caso continuo

Dada una v.a. bidimensional (X, Y) con función de densidad conjunta $f(x, y)$. Las **funciones de densidad marginales de** X **e** Y están dadas por:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy, \;\; x \in \mathbb{R}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx \;\; y \in \mathbb{R}$$

Las **funciones de distribución marginales de** X **e** Y vienen dadas por:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{\infty} f(s, t)dt \; ds; \;\; x \in \mathbb{R},$$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{\infty} f(s, t)ds \; dt; \;\; y \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 3

a) Calcular las distribuciones marginales en ejemplo 1.
   i) Calcular $p_{1.}, F_X(2)$ e interpretar.

b) Calcular densidades y distribuciones marginales en el ejemplo 2.

Distribuciones Condicionadas

Definición 5.5: Distribuciones Condicionadas Discretas

Sea (X, Y) una v.a. bidimensional discreta. Se define la **función de probabilidad de masa de** X **condicionada al valor** y_j **de** Y como:

$$P_{X/Y}(x_i/y_j) = p_{i/j} = P(X = x_i/Y = y_j) = \frac{P(X = x_i \cap Y = y_j)}{P(Y = y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$$

Análogamente, se define la **función de probabilidad de masa de** Y **condicionada al valor** x_i **de** X como

$$P_{Y/X}(y_j/x_i) = p_{j/i} = P(Y = y_j/X = x_i) = \frac{P(X = x_i \cap Y = y_j)}{P(X = x_i)} = \frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}$$

Observaciones:

Las funciones de probabilidad de masa condicionadas, son funciones de probabilidad de masa, y como tales satisfacen:

1. $p_{i/j} \geq 0$, $\sum_i p_{i/j} = 1$
2. $p_{j/i} \geq 0$, $\sum_j p_{j/i} = 1$

Definición 5.6: Distribuciones Condicionadas Continuas

Sea (X, Y) una v.a. bidimensional discreta. Se definen la **función de densidad de** X **condicionada al valor** y **de Y** (y fijo) como:

$$f(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}; \quad x \in \mathbb{R}$$

y la **función de densidad de** Y **condicionada al valor** x **de** X (x fijo) como

$$f(y/x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}; \quad y \in \mathbb{R}$$

donde $f_X(x)$ y $f_Y(y)$ son las densidades marginales de X e Y, respectivamente.

Observaciones:

- $f(x/y) \geq 0, \; \int_{-\infty}^{+\infty} f(x/y)\; dx = 1$
- $f(y/x) \geq 0, \; \int_{-\infty}^{+\infty} f(y/x)\; dy = 1$
- las **funciones de distribución condicionadas** son

$$F(x/y) = P\left(X \leq x/Y = y\right) = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(s,y)}{f_Y(y)} ds, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$F(y/x) = P\left(Y \leq y/X = x\right) = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(x,t)}{f_X(x)} dt, \quad y \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 4:

La función de probabilidad de masa conjunta de las variables (Y_1, Y_2) Ejemplo 1, es:

Y_1/Y_2	**0**	**1**	**2**	
0	$1/9$	$2/9$	$1/9$	$p_{0\cdot} = 4/9$
1	$2/9$	$2/9$	0	$p_{1\cdot} = 4/9$
2	$1/9$	0	0	$p_{2\cdot} = 1/9$
	$p_{\cdot 0} = 4/9$	$p_{\cdot 1} = 4/9$	$p_{\cdot 2} = 1/9$	

1. Calcular la probabilidad que sólo un cliente elija la caja 1, sabiendo que ninguno eligió la caja 2.
2. ¿Cuál es la probabilidad que al menos un cliente elija la caja 2, sabiendo que ninguno eligió la caja 1?

Ejemplo 5:

La función de densidad conjunta de (X, Y) presentada en el Ejemplo 2, es

$$f(x, y) = \begin{cases} xy, & 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}$$

y sus fuciones de densidad marginales, (Ejemplo 3b), son:

$$f_X(x) = \begin{cases} x/2, & 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} 2y, & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Calcular las densidades condicionadas $f(x/y)$ y $f(y/x)$.

Independencia de Variables Aleatorias

Recordemos (**Unidad 3**) que dos eventos $A; B$ son independientes si se cumple que $P(A/B) = P(A)$, $P(B/A) = P(B)$ y en consecuencia: $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Independencia de Variables Aleatorias

Recordemos (**Unidad 3**) que dos eventos A; B son independientes si se cumple que $P(A/B) = P(A)$, $P(B/A) = P(B)$ y en consecuencia: $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Definición 5.7: Independencia de v.a.

Diremos que dos variables aleatorias X e Y son independientes si:

- $P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij} = p_{i\cdot}.p_{\cdot j}$ caso discreto.
- $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$ caso continuo.

Independencia de Variables Aleatorias

Recordemos (**Unidad 3**) que dos eventos A; B son independientes si se cumple que $P(A/B) = P(A)$, $P(B/A) = P(B)$ y en consecuencia: $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Definición 5.7: Independencia de v.a.

Diremos que dos variables aleatorias X e Y son independientes si:

- $P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij} = p_{i\cdot}p_{\cdot j}$ caso discreto.
- $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$ caso continuo.

Observaciones:

La defineción es equivalente a decir que $F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$ y por lo tanto, si X e Y son v.a. independientes se satisface:

$$\mathbf{P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d) = P(a \leq X \leq b)P(c \leq Y \leq d)}$$

Ejemplo 6:

a) ¿Son las variables Y_1, Y_2 del Ejemplo 1 independientes?

b) ¿Son las variables X, Y del Ejemplo 2 independientes?

Esperanza Condicional

Definición 5.8 Esperanza condicional

Sea $(X;Y)$ v.a. bidimensional, se define la Esperanza condicional de X dado que $Y=y$ como:

- $E(X/Y=y_j)=\sum_i x_i p_{i/j}$ caso discreto.
- $E(X/Y=y)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x/y)dx$ caso continuo.

De manera análoga se define la esperanza condicional de Y dado X en los casos discreto y continuo.

Definición 5.9:

Sea $(X;Y)$ v.a. bidimensional, $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ se define la Esperanza de $g(X,Y)$ como:

- $E\left[g(X,Y)\right]=\sum_i\sum_j g(x_i,y_j)p_{ij}$ caso discreto.
- $E\left[g(X,Y)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)f(x,y)dx\,dy$ caso continuo.

Propiedades:

1. $E(aX+bY+c)=aE(X)+bE(Y)+c$.
2. Si X e Y son independientes, entonces $E(XY)=E(X)E(Y)$.

Definición 5.10: Momentos bidimensionales

Sea $(X; Y)$ v.a. bidimensional, se definen los

- **Momento de orden (r,s)**: $\alpha_{rs} = E[X^r Y^s]$.
- **Momento centrado de orden (r,s)**: $\mu_{rs} = E\left[(X - E[X])^r (Y - E[Y])^s\right]$.

Definición 5.10: Momentos bidimensionales

Sea $(X;Y)$ v.a. bidimensional, se definen los

- **Momento de orden (r,s)**: $\alpha_{rs} = E[X^r Y^s]$.
- **Momento centrado de orden (r,s)**: $\mu_{rs} = E\left[(X - E[X])^r (Y - E[Y])^s\right]$.

Definición 5.11: Covarianza entre X e Y

Sea $(X;Y)$ v.a. bidimensional, al momento centrado de orden (1,1) se lo llama **Covarianza** entre X e Y y se lo denota por:

$$\sigma_{XY} = Cov(X,Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])] = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Observaciones:

1. Si $\sigma_{XY} = 0$ se dice que X e Y son no correlacionadas o incorreladas.

Observaciones:

1. Si $\sigma_{XY} = 0$ se dice que X e Y son no correlacionadas o incorreladas.
2. Se define la correlación entre X e Y como $\rho_{XY} = \dfrac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$.
   ρ_{XY} indica el grado de relación lineal entre las variables X e Y.

Observaciones:

1. Si $\sigma_{XY} = 0$ se dice que X e Y son no correlacionadas o incorreladas.
2. Se define la correlación entre X e Y como $\rho_{XY} = \dfrac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$.
   ρ_{XY} indica el grado de relación lineal entre las variables X e Y.
3. Si X e Y son independientes, entonces son no correlacionadas. (La recíproca no es cierta, ver Ejemplo 6c)

Observaciones:

1. Si $\sigma_{XY} = 0$ se dice que X e Y son no correlacionadas o incorreladas.
2. Se define la correlación entre X e Y como $\rho_{XY} = \dfrac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$.
   ρ_{XY} indica el grado de relación lineal entre las variables X e Y.
3. Si X e Y son independientes, entonces son no correlacionadas. (La recíproca no es cierta, ver Ejemplo 6c)

Propiedades:

1. Si $Z = aX + bY + c$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$ entonces
   $Var(Z) = a^2 Var(X) + b^2 Var(Y) + 2abCov(X, Y)$.
2. $Cov(X, Y) = 0 \Leftrightarrow E(XY) = E(X)E(Y)$.

Ejemplo 7:

a) Calcular $Cov(Y_1, Y_2)$ donde Y_1, Y_2 son las v.a. del Ejemplo 1.

b) Calcular $Cov(X, Y)$ donde X, Y son las v.a. del Ejemplo 2.

c) La siguiente tabla define la función de probabilidad de masa conjunta del vector aleatorio (X, Y).

X/Y	**-1**	**0**	**1**
0	0	$1/2$	0
1	$1/4$	0	$1/4$

i) Calcular $Cov(X, Y)$.

ii) ¿Son X e Y independientes?