Variables Aleatorias

Variables Aleatorias

Consideremos los siguientes experimentos aleatorios:

1. Arrojar un dado equilibrado y observar el puntaje obtenido.
2. Arrojar una moneda equilibrada y observar la cara que presenta al caer al piso.
3. Arrojar una moneda 3 veces y observar los resultados obtenidos.

Los espacios muestrales de estos experimentos son, respectivamente:

1. $\mathbf{S}_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
2. $\mathbf{S}_2 = \{$cara, ceca$\}$
3. $\mathbf{S}_3 =\{$ccc; ccs; csc; scc; ssc; scs, css, sss$\}$ c: cara, s: ceca

Variables Aleatorias

- En algunos experimentos aleatorios es suficiente describir el espacio muestral
- En otras situaciones es más útil asociar un número con cada uno de los posibles resultados del experimento.
- El resultado del experimento no se conoce de antemano $\Rightarrow$ el número que se le asigna a ese resultado tampoco se conoce de antemano.
- A dos o más resultados del experimento se les puede asignar el mismo número.

Informalmente, una *variable aleatoria* es una característica numérica de un evento aleatorio.

Variables Aleatorias

Definición 4.1

Sea $(\mathbf{S}, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad. Una Variable Aleatoria (v.a.) unidimensional es una regla o función X, que asigna a cada elemento de $\mathbf{S}$ un número (real), esto es, $X : \mathbf{S} \to \mathbb{R}$. Además $\forall x \in \mathbb{R}, \{\omega \in \mathbf{S} : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}$

Notación:

- Variables aleatorias se denotan por letras mayúsculas (ej: X, Y, Z)
- El resultado de un experimento se representa con la letra griega ω.
- $X(\omega)$ representa el número real que la v.a X asocia al resultado ω

Ejemplos

1. Experimento 1: Arrojar un dado equilibrado y observar el número de puntos obtenidos. Podemos considerar X: "número observado", esto es, $X(\omega) = \omega, \omega = 1, 2, 3, 4, 5, 6$
2. Experimento 2: Se controlan los productos que salen de una máquina hasta que sale el primer producto defectuoso. $\mathbf{S} = \{D, BD, BBD, BBBD, \ldots\}$. Si $X=$ número de productos examinados hasta que sale el primer producto defectuoso: $X(D) = 1, X(BD) = 2, X(BBD) = 3, \ldots$.
3. Experimento 3: Arrojar una moneda honesta y observar el resultado. $\mathbf{S} = \{c, s\}$. X "puede" definirse
   - $X(\omega) = 0$ si $\omega = s$
   - $X(\omega) = 1$ si $\omega = c$
4. Experimento 4: Medir la temperatura máxima diaria de Corrientes durante el mes de enero. $\mathcal{S} = (20, 45)$.
   Sea $X=$ temperatura máxima diaria en Corrientes durante el mes de enero. X puede asumir cualquier valor del intervalo $(20, 45)$.

La mayor parte de las veces se ignora el espacio muestral **S** del experimento y se trabaja directamente con la variable aleatoria que lo describe, esto es, con el rango de X y la distribución de probabilidades de X.

- En el ejemplo 1, el análisis se focalizará sobre los números $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y la probabilidad que X asuma alguno de esos valores.
- En el ejemplo 2, el análisis se focalizará sobre los números $\mathbb{N}$ y la probabilidad que X asuma alguno de esos valores.
- En el ejemplo 3, el análisis se focalizará sobre el conjunto $\{0, 1\}$
- En el ejemplo 4, el análisis se focalizará en el intervalo $(20, 45)$ y la probabilidad que X tome valores en un intervalo contenido en $(20, 45)$.

Notación

- Si $x \in \mathbb{R}$, el conjunto de todos los $\omega \in \mathbf{S}$ tales que $X(\omega) = x$ se representa brevemente poniendo $X = x$.
- La probabilidad de ese suceso se denota $P(X = x)$ $(P(\{X(\omega) = x\}))$.
- El evento "$X = a$" o "$X = b$" es la unión de los sucesos "$X = a$" y "$X = b$"; $P(X = a \ \cup \ X = b)$ representa la probabilidad de esa unión.
- El evento "$a < X \leq b$" es el conjunto de todos los puntos ω tales que $X(\omega) \in (a, b]$. $P(a < X \leq b)$ representa la probabilidad de ese evento.

Ejemplo 1

Experimento: Arrojar un dado equilibrado.

$\mathbf{S} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathcal{E})$, $\omega_i = \{i\}$, $i = 1, \ldots, 6$.

Se define $X(\omega_i) = i$.

$P(X = 1) = P(\{\omega / X(\omega) = 1\}) = P(\{1\}) = 1/6$
$P(X = 2) = P(\{\omega / X(\omega) = 2\}) = P(\{2\}) = 1/6$
$P(X = 3) = P(\{\omega / X(\omega) = 3\}) = P(\{3\}) = 1/6$
$P(X = 4) = P(\{\omega / X(\omega) = 4\}) = P(\{4\}) = 1/6$
$P(X = 5) = P(\{\omega / X(\omega) = 5\}) = P(\{5\}) = 1/6$
$P(X = 6) = P(\{\omega / X(\omega) = 6\}) = P(\{6\}) = 1/6$

ω	1	2	3	4	5	6
$X(\omega)$	1	2	3	4	5	6
$P(X(\omega))$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

En forma resumida:

x	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Distribución de Probabilidad

Definición 4.2

Sea $(\mathbf{S}, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad y sea X una v.a. definida sobre dicho espacio. La función $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ definida por

$$F(x) = P(X \leq x)$$

es llamada Función de distribución (de probabilidades) de X

Continuación Ejemplo 1

En el ejemplo del dado equilibrado...

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 & [X \leq x] = \emptyset \\ 1/6 & 1 \leq x < 2 & [X \leq x] = \{\omega_1\} \\ 2/6 & 2 \leq x < 3 & [X \leq x] = \{\omega_1, \omega_2\} \\ 3/6 & 3 \leq x < 4 & [X \leq x] = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\} \\ 4/6 & 4 \leq x < 5 & [X \leq x] = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\} \\ 5/6 & 5 \leq x < 6 & [X \leq x] = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\} \\ 1 & 6 \leq x & [X \leq x] = \mathbf{S} \end{cases} \tag{1}$$

Propiedades de F

Teorema 4.1: Propiedades de F

Sea $(\mathbf{S}, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad, F la función de distribución de una variable aleatoria unidimensional X definida sobre dicho espacio. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$.

i $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$

ii $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) + P(X = a)$

iii $P(a \leq X < b) = F(b) - F(a) - P(X = b) + P(X = a)$

iv $P(a < X < b) = F(b) - F(a) - P(X = b)$

Propiedades de F

Teorema 4.2

Sea $(\mathbf{S}, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad, F la función de distribución de una variable aleatoria unidimensional X definida sobre dicho espacio. Sean $a, b \in \mathbb{R}$.

i $0 \leq F(x) \leq 1, \ \forall x \in \mathbb{R}$

ii F es monótona creciente, esto es, si $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b \Rightarrow F(a) \leq F(b)$

iii $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$

iv $\lim_{x \to a^+} F(x) = F(a)$, $\lim_{x \to a^-} F(x) = F(a) - P(X = a)$ (F es continua por la derecha)

Ejemplo 2

En una urna hay 9 bolillas, 4 rojas y 5 blancas. Se extraen bolillas al azar, una por vez, hasta que aparezca una bolilla roja. Sea X la variable aleatoria que indica el número de extracciones necesarias para extraer una bolilla roja.

- Obtenga la distribución de probabilidad y la función de distribución correspondiente y grafíquelas.
- Calcule:
  $P(X \leq 3); P(X = 1); P(X = 0); P(X \geq 5); F(2); F(2.5)$

Definición 4.3: Variables Aleatorias Discretas

Si una v.a X definida sobre un espacio de probabilidad sólo puede asumir un número finito o infinito numerable de valores distintos, entonces decimos que X es una v.a discreta.

Ejemplos de variables discretas son:

1. El número de bacterias por unidad de volumen de cierto alimento, en un control bromatológico.
2. El número de equipos defectuosos en un lote de 100 equipos.
3. Número de partículas radioactivas emitidas por minuto por cierto aparato.

En estos casos, los eventos de interés son numéricos y es necesario conocer las probabilidades de estos eventos. La probabilidad para cada valor de una variable aleatoria recibe el nombre de distribución de probabilidad de la variable aleatoria discreta.

Definición 4.4: Función de probabilidad de masa (f.p.m)

Sea X v.a. discreta que puede asumir los distintos valores $x_1, x_2, \ldots x_n$ (o $x_1, x_2, \ldots$ si X puede asumir una cantidad infinita numerable de valores distintos) .

La función de probabilidad de masa de X es una función $p : I \subseteq \mathbb{R} \to [0, 1]$ que satisface:

1. $p(x_i) = P(X = x_i) = P(\{\omega \ \in \mathbf{S} : X(\omega) = x_i\})$
2. $p(x_i) \geq 0, \forall i$
3. $\sum_{i=1} p(x_i) = 1$

Ejemplo 3

En algunas situaciones se especifica la f.p.m haciendo una lista de los posibles valores que asume la v.a. discreta X con la probabilidad que la variable asuma dicho valor. En otros casos es más conveniente expresar la f.p.m mediante una fórmula matemática.

Consideremos el experimento arrojar dos monedas equilibradas, y sea $X =$ número de caras observadas.

x	**0**	**1**	**2**
$p(x)$	0.25	0.5	0.25

Ejemplo 4

En el ejemplo: $X =$ número de equipos examinados hasta encontrar el primer equipo defectuoso, X puede asumir valores en $\{1, 2, \ldots\}$.
Si además se sabe que la probabilidad que un equipo sea defectuoso es 0.01 y que los equipos son independientes entre sí,

$$P(X = i) =$$

Función de Distribución Acumulada

En los ejemplos anteriores:
Preguntas:

1. ¿Cuál será la probabilidad de observar al menos una cara?, es decir, $P(X \geq 1) =?$
2. ¿Cuál será la probabilidad de examinar menos de tres equipos hasta encontrar el primer artículo defectuoso?, es decir, $P(X < 3) =?$
3. ¿Cuál será la probabilidad de examinar más de dos equipos hasta encontrar uno defectuoso? es decir, $P(X > 2) =?$

Función de Distribución Acumulada

Respuestas:

1. $P(X \geq 1) = P(\{X = 1\} \cup \{X = 2\}) =$
   $P(X = 1) + P(X = 2) = p(1) + p(2) = 0.5 + 0.25 = 0.75$

2. $P(X < 3) = P(X \leq 2) = P(\{X = 1\} \cup \{X = 2\})$
   $= p(1) + p(2) = 0.01 + 0.0099 = 0.0199$

3. $P(X > 2) = P(X \geq 3) = \sum_{i=3}^{\infty} P(X = i)$ .....
   pero $P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - 0.0199 = 0.9801$

Función de Distribución Acumulada

La Función de Distribución Acumulada de una v.a. discreta X , denotada por $F(x)$, está definida por

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{\{x_i \leq x\}} P(X = x_i) = \sum_{\{x_i \leq x\}} p(x_i)$$

donde $p(x)$ es la función de probabilidad de masa de X.

Ejemplo 5

Una determinada raza de perros tiene tres cachorros por camada. Si la probabilidad que un cachorro sea macho es 0.55 y se define $X =$número de machos en una camada:

1. Calcular la función de probabilidad de masa de X.
2. Calcular la función de distribución acumulada de X.
3. Graficar ambas funciones.

Variables Aleatorias Continuas

Informalmente, una v.a X que puede tomar cualquier valor en un intervalo (su rango de valores incluye un intervalo $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$) se denomina *continua*.

Ejemplos:

1. $X =$ temperatura máxima diaria en la ciudad de Corrientes en el mes de enero (X asume valores en $(20^o, 45^o)$).
2. $X =$ vida útil, en años, de un dispositivo de almacenamiento portátil.

Es imposible asignar probabilidades diferentes de cero a "todos" los puntos de un intervalo de recta y satisfacer, al mismo tiempo, el requisito de que las probabilidades de los distintos valores posibles "sumen" a 1.

Pregunta: ¿Cómo describir la distribución de probabilidad para una variable aleatoria continua?.

Variables Aleatorias Continuas

Definición 4.5:

Sea X v.a definida en $(\mathbf{S}, \mathcal{A}, P)$, F_X la función de distribución de X ($F_X(x) = P(X \leq x)$).
Si existe una función $f(x) \geq 0$ tal que
$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)ds, \ \forall x \in \mathbb{R}$ entonces se dice que la v.a. X es absolutamente continua y f recibe el nombre de función de densidad (de probabilidades) de la v.a. X.

Afirmación: F_X es continua si y sólo si $P(X = x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$
Demostración: Ejercicio (LyPM).

Variables Aleatorias Continuas

Observaciones:

- f es integrable, pero no necesariamente continua.
- F_X es continua y "seccionalmente diferenciable", y en tal caso $F'_X(x) = f(x)$ (en los puntos donde $F'_X(x)$ esté definida, que es en "casi todo punto")

<u>Ejemplo</u> : Sea $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$

Variables Aleatorias Continuas

Una función f definida en $\mathbb{R}$ que satisface:

1. $f(x) \geq 0$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$

es la densidad de alguna variable aleatoria X cuya función de distribución está dada por

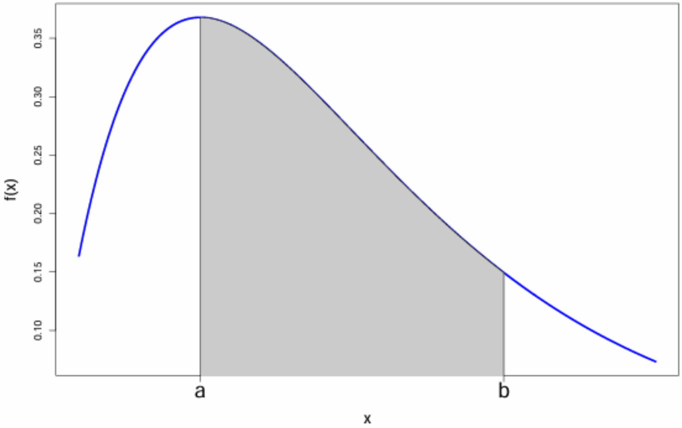
$$F_x(x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)ds$$

Observación: $P(X = x) = 0, \forall x$

Variable Aleatoria Continua

Sea X variable aleatoria continua con función de densidad $f(x)$. Entonces para todo a, b:

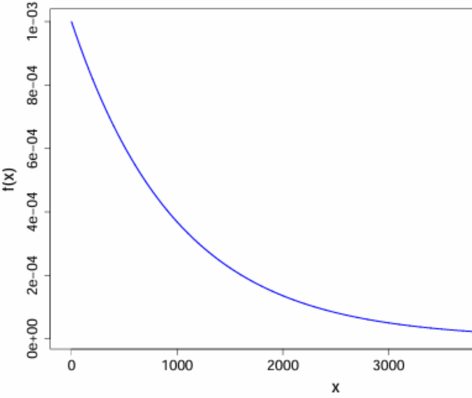
$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b)$$



Ejemplo 6

La función de densidad de probabilidades del tiempo de falla(en horas) de una componente electrónica de una copiadora es $f(x) = \frac{e^{-x/1000}}{1000}$ para $x > 0$. Encontrar la probabilidad que:

1. La componente dure más de 3000 horas
2. La componente dure entre 1000 y 2000 horas
3. La componente dure menos de 1000 horas



Ejemplo 7:

1. Sea X una variable aleatoria cuya función de distribución viene dada por: $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0.1, & 0 \leq x < 2 \\ 0.5, & 2 \leq x < 7 \\ 1, & x \geq 7 \end{cases}$
   1.1 ¿X es continua o discreta? Justifique.
   1.2 Calcule la probabilidad de que la variable aleatoria tome un valor menor o igual que 6.
2. Sea X una variable aleatoria discreta. Determine el valor de k para que la función $p(x) = k/x$, con $x = 1, 2, 3, 4$, sea la función de probabilidad de X. Determine $P(1 \leq X \leq 3)$

Ejemplo 8

La temperatura X (en grados Fahrenheit), para la cual un interruptor eléctrico controlado por un termostato se cierra (activa el circuito) tiene una función de densidad de probabilidad dada por la siguiente expresión: $f(x) = \begin{cases} c, & 59 \leq x \leq 61 \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}$

1. Encontrar el valor de c que haga que $f(x)$ sea una función de densidad.
2. Obtener la función de distribución acumulada de X, $F_X(x)$
3. Calcular $P(58 < X < 60.5)$
4. ¿ Cuál es la probabilidad que la temperatura para la cual el circuito se activa sea superior a 60^o?

Esperanza de una variable aleatoria discreta

Definción 4.6:

Sea X una variable aleatoria discreta con rango R_x y función de probabilidad de masa p tal que

$$\sum_{x \in R_x} |x| p(x) < \infty$$

Entonces se define la media o Esperanza de X, denotada por μ o $E(X)$ como

$$E(X) = \sum_{x \in R_x} x p(x)$$

Esperanza de una v.a. discreta

Si $\sum_{x \in R_x} |x| p(x) = \infty$, denotemos
$R_X^+ = \{x \in R_X : x > 0\}, \ R_X^- = \{x \in R_X : x < 0\}$
Entonces:

1. Si $\sum_{x \in R_x^+} xp(x) = \infty$ y $\sum_{x \in R_x^-} xp(x) < -\infty \Rightarrow$ se define $E(X) = \infty$
2. Si $\sum_{x \in R_x^+} xp(x) < \infty$ y $\sum_{x \in R_x^-} xp(x) = -\infty \Rightarrow$ se define $E(X) = -\infty$
3. Si $\sum_{x \in R_x^+} xp(x) = \infty$ y $\sum_{x \in R_x^-} xp(x) = -\infty \Rightarrow E(X)$ NO está definida.

Esperanza de una v.a

En general, si X es una v.a. con función de distribución F, tal que $\int_{-\infty}^{\infty} |x| dF < \infty$, entonces se define la Esperanza de X como

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x)$$

donde $\int_{-\infty}^{\infty} x dF(x)$ denota la integral de *Riemman-Stieltjes* de la función identidad $id(x) = x$ respecto a la distribución F.

Definición 4.7

Si X es una v.a. continua, F su función de distribución y f su función de densidad, entonces

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

es la Esperanza o media de X.

Esperanza de una v.a. continua

Si $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx = \infty$,
Entonces:

1. Si $\int_{0}^{\infty} x f(x) dx = \infty$ y $\int_{-\infty}^{0} x f(x) dx < -\infty \Rightarrow$ se define $E(X) = \infty$
2. Si $\int_{0}^{\infty} x f(x) dx < \infty$ y $\int_{-\infty}^{0} x f(x) dx = -\infty \Rightarrow$ se define $E(X) = -\infty$
3. Si $\int_{0}^{\infty} x f(x) dx = \infty$ y $\int_{-\infty}^{0} x f(x) dx = -\infty \Rightarrow E(X)$ NO está definida.

Ejemplo 9

1- Un comercio que vende compuestos químicos tiene en stock 100 kgs de un cierto compuesto, que vende fraccionado en potes de 5 kgs cada uno. Sea $X =$ número de potes pedidos por un cierto comprador, y suponga que X tiene una f.p.m dada por:

x	**1**	**2**	**3**	**4**
$p(x)$	0.2	0.4	0.3	0.1

a ¿Cuál es la probabilidad que cierto comprador pida exactamente 1 pote?

b ¿Qué pida más de 1 y menos de 4?

c ¿Cuántos potes se espera que pida un comprador ?

Ejemplo 10

2- La radiación solar total diaria (medida en cientos de calorías) en el mes de mayo para una determinada ciudad tiene una función de densidad dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{32}(x-2)(x-6) & 2 \leq x \leq 6 \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

a Encontrar la radiación solar diaria esperada para el mes de mayo

b ¿Cuál es la probabilidad que la radiación solar en un determinado día de mayo sea mayor que 5?

Propiedades de la Esperanza

1. Si $X = c, c \in \mathbb{R}$ $(X(\omega) = c \forall \omega \in \mathbf{S})$ entonces $E(X) = c$
2. Si $X < Y$ entonces $E(X) < E(Y)$, siempre que las esperanzas estén bien definidas (ambas finitas, o $E(X) = \infty$ ó $E(Y) = -\infty$)
3. Si $E(X)$ está bien definida, entonces $E(aX + b) = aE(X) + b$, $\forall\ a, b \in \mathbb{R}$,
4. $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$, $\forall\ a, b \in \mathbb{R}$, siempre que el término de la derecha de la igualdad tenga sentido.
5. Si X v.a. discreta con f.p.m p, g una función real (medible) e $Y = g(X)$, entonces $E(Y) = E(g(X)) = \sum_{x \in R_X} g(x)p(x)$
6. Si X v.a. absolutamente continua con densidad f, g una función real (medible) e $Y = g(X)$, entonces $E(Y) = E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$

Ejemplo 11

En el ejemplo 9, calcular la cantidad esperada de kilos del compuesto que quedan en stock después que haya sido enviado el pedido del primer cliente.

Varianza

Definición 4.8

Sea X variable aleatoria con media (o esperanza $E(X) = \mu$)

- La varianza de X, denotada por σ^2 o $Var(X)$ ($D^2(X)$) es

$$\sigma^2 = Var(X) = E(X - \mu)^2 = E(X^2) - \mu^2$$

- La desviación estándar de X es $\sigma = \sqrt{Var(X)}$

Ejemplo 12

Calcular las varianzas de las variables aleatorias de los Ejemplos 9 y 10 de la sección anterior.

Momentos

Definición 4.9

Sea X v.a.

i El valor $E((X-b)^k)$, si existe, es llamado el k-ésimo momento de X en torno a b, $b \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$

ii $E(X^k)$ es el k-ésimo momento de X o momento de orden k de X.

iii $\mu_k = E((X - E(X))^k)$ es el k-ésimo momento central de X

Observaciones:

1. El primer momento es la esperanza de X, $E(X)$, y el primer momento central es cero.
2. La $Var(X)$ es el segundo momento central de X.
3. $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$

Medidas de forma : Coeficiente de asimetría

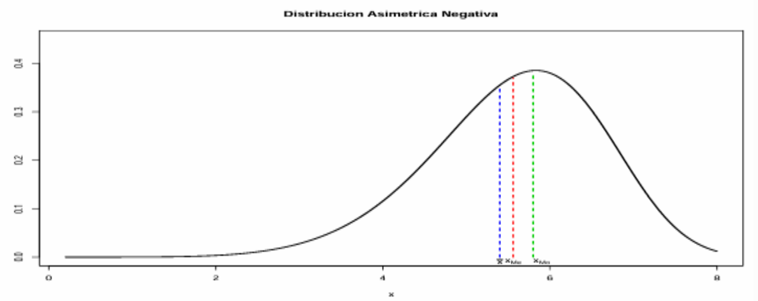
Mide el grado de simetría de una distribución respecto a su media.Una distribución puede ser:

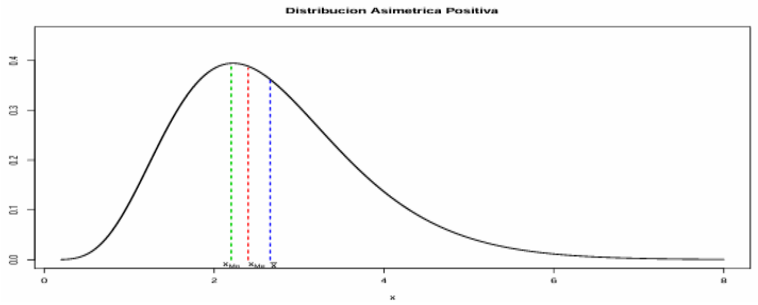
- **simétrica**
- **asimétrica positiva**
- **asimétrica negativa**

Definición 4.9:Se define el coeficiente de asimetría de Fisher como $\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$.
donde μ_3 es el tercer momento central, σ la desviación estándar.

- $\gamma_1 > 0 \Rightarrow$ distribución asimétrica positiva.
- $\gamma_1 < 0 \Rightarrow$ distribución asimétrica negativa.

Coeficiente de Asimetría





Medidas de Forma : Curtosis

Se aplica a distribuciones unimodales simétricas o ligeramente asimétricas, ya que representa la elevación o achatamiento de una distribución comparada con la distribución normal.

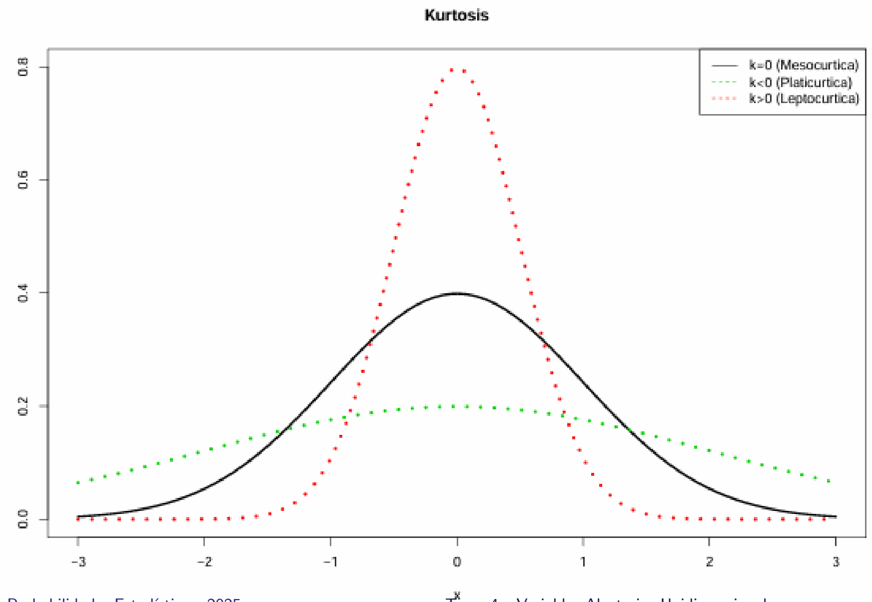
Definición 4.10: Sea X v.a., con distribución F. Se define el coeficiente de curtosis de F como

$$k = \frac{\mu_4}{s^4} - 3$$

donde μ_4 es el momento central de orden 4 y σ la desviación estándar

- $k = 0 \Rightarrow$ mismo grado de elevación que distribución normal (Mesocúrtica)
- $k > 0 \Rightarrow$ más apuntamiento que distribución normal (Leptocúrtica)
- $k < 0 \Rightarrow$ menor grado de elevación que distribución normal (Platicúrtica)

Coeficiente de Curtosis



Normalización o Estandarización

Lema 4.1: Sea X v.a con esperanza μ y desviación estándar σ. Entonces:

1. $E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = 0$
2. $Var\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = 1$

Observación: La transformación de X a $\frac{X-\mu}{\sigma}$ se llama normalización o estandarización

Desigualdad de Chebyshev

Teorema 4.3: Sea $(\mathbf{S}, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad, sea X una variable aleatoria definida sobre dicho espacio tal que $E(X) = \mu$, $Var(X) = \sigma^2$. Entonces para cada $t \geq 1$ se satisface

$$P\left(|X - \mu| \geq t\sigma\right) \leq \frac{1}{t^2}$$

Ejemplo

Ciertos transistores de alto rendimiento tienen una esperanza de vida $E(V) = 5$ años con una $Var(T) = 0.16$ años^2.

1. ¿Qué se puede decir sobre la probabilidad que estos transistores duren entre 3 y 7 años?
2. ¿Qué se puede decir sobre la probabilidad que estos transistores duren entre más de 8 años?