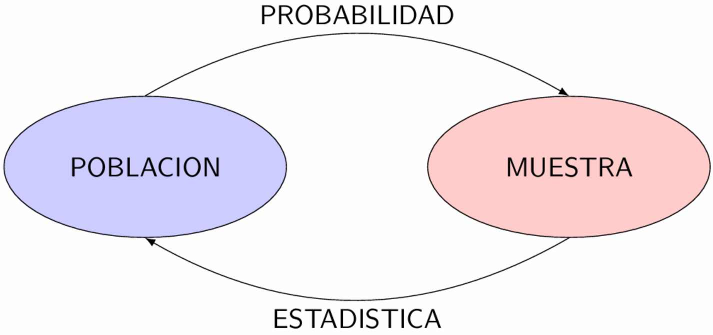


Definición (antigua) La Probabilidad es una rama de la matemática que trata de los efectos del azar.
Azar: Experimentos o fenómenos aleatorios.

Introducción

Un experimento es cualquier acción o procedimiento que, generalmente y bajo ciertas condiciones y reglas rigurosamente controladas, genere observaciones. Decimos que es:

- **Determinístico:** si repetido en condiciones semejantes se obtienen resultados esencialmente idénticos.
- **Aleatorio:** repetido en condiciones semejantes se obtienen resultados diferentes. Si se repiten esos experimentos bajo las mismas condiciones, y aún siendo muy cuidadosos, los resultados variarán. Tienen una componente aleatoria, son experimentos aleatorios En algunos casos las magnitudes de estas variaciones serán pequeñas, en otros no.

Ejemplos de experimentos

1. Desde una determinada altura, una persona libera un objeto. Repetido en las mismas condiciones...
   1.1 El experimento consiste en observar qu ´e sucede con el objeto (siempre cae) $\Rightarrow$
   1.2 El experimento consiste en medir el tiempo que tarda en llegar al piso $\Rightarrow$
2. Medir voltaje de una batería para autos. $\Rightarrow$
3. Medir temperatura máxima en un cierto lugar $\Rightarrow$
4. Contar la cantidad de bacterias por centímetro cúbico en un vaso de leche. $\Rightarrow$
5. Lanzar un dado y observar el resultado $\Rightarrow$
6. Lanzar una moneda y observar el resultado $\Rightarrow$

Definición 2.1: Experimentos Aleatorios

La teoría de la Probabilidad es una rama de la Matemática que crea, investiga, propone MODELOS que describen a los fenómenos o experimentos aleatorios. Uno de sus objetivos es entender, cuantificar y modelar el tipo de variaciones que se pueden presentar.

Un modelo es una versión simplificada de la realidad, que involucra operaciones y funciones matemáticas, **variables y parámetros**

Definición 2.2: Espacio Muestral

Dado un experimento aleatorio diremos que un conjunto S es un **Espacio Muestral** para el experimento si podemos asociar a cada resultado posible del experimento un elemento de S, de modo que a resultados diferentes le correspondan elementos diferentes de S. Esto es, es espacio muestral S es el conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio.

El espacio muestral se define, a menudo, en base a los objetivos del análisis

Ejemplos de espacios muestrales

1. Ejemplo: medir el voltaje de una batería
   1.1 $S = \mathbb{R}^+$
   1.2 Si sabemos que a lo sumo medirá 13V: $S = (0, 13V)$
   1.3 Si el estudio consiste en medir el voltaje de cada batería que sale de una línea de producción hasta que el voltaje caiga fuera de esos límites, y si denotamos por
   $F =$ voltaje de batería cae fuera de los límites,
   $E =$ voltaje de batería cae dentro de los límites
   $S = \{F, EF, EEF, \ldots\}$
2. Temperatura: $S = (10^\circ C, 50^\circ C)$
3. Bacterias: $S = \{1, 2, 3, \ldots\}$
4. Dado: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
5. Moneda: $S = \{C, X\}$

Espacios Muestrales Discretos y Continuos

- **Discreto:** Si consiste de un número finito, o infinitamente numerable de resultados posibles. Cada uno de estos posibles resultados se denomina punto muestral.
- **Continuo:** Si contiene al menos un intervalo (acotado o no) de números reales.

Definición 2.4: Eventos

- **Evento aleatorio:** (o suceso aleatorio) es cualquier subconjunto del espacio muestral S. Se denotan por letras mayúsculas (A, E, etc)
- **Evento imposible:** es aquel que no ocurre nunca. Se lo denota por $\varnothing$.
- **Evento seguro:** es el que ocurre siempre, coincide con el espacio muestral..

Si el espacio muestral es **discreto:**

- **Evento simple:** (elemental) si consiste solamente de un punto muestral. Lo denotaremos E_i.
- **Evento compuesto:** si consiste de más de un punto muestral.

Ejemplo con un dado

Se arroja un dado numerado del 1 al 6 y se observa el resultado.

- $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $A = \{2, 4, 6\}$ (par, evento compuesto)
- $B = \varnothing$ (mayor que 6, imposible)

Relaciones entre eventos

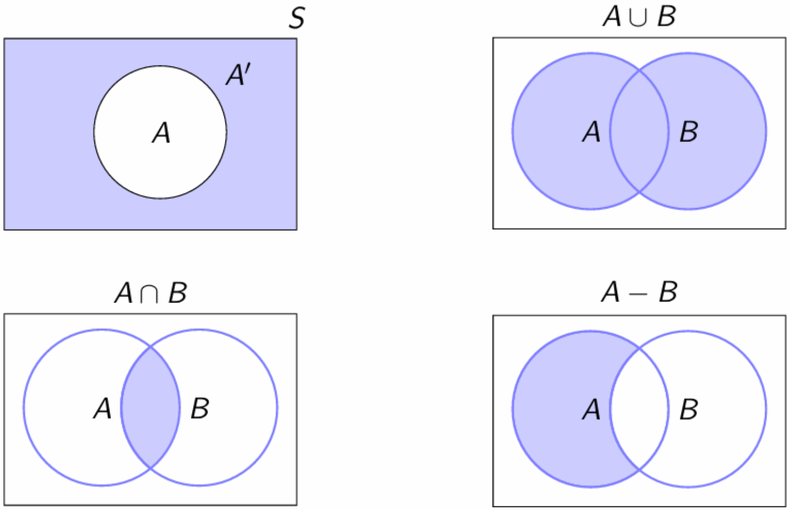
- Si los eventos A y B pueden ocurrir simultanemante, decimos que son eventos compatibles.
- Si los eventos A y B no pueden presentarse simultanemante, decimos que son eventos incompatibles, excluyentes o disjuntos..
- Decimos que dos eventos son opuestos si:
  - no pueden presentarse simultaneamente
  - la NO ocurrencia de uno implica la ocurrencia del otro.

  El opuesto o complemento de un evento A, denotado por A' es el conjunto formado por todos los elementos de S que no están en A.

Operaciones entre eventos

Como los eventos son subconjuntos de un espacio muestral, se puede "operar" con ellos usando teoría de conjuntos para así definir nuevos eventos. Sean A, B eventos aleatorios de un mismo espacio muestral.

- $A \cup B$ **(unión)** es el evento que está formado por todos los resultados que están en A ó en B.
- $A \cap B$: **(intersección)** es el evento que está formado por todos los resultados que están contenidos en ambos eventos.
- $A - B$: **(diferencia)** entre A y B (en ese orden) es el evento formado por todos los resultados presentes en A que no esten presentes en B.



S
A′
A
A ∪ B
A
B
A ∩ B
A
B
A − B
A
B

Definición 2.5: Clases de Conjuntos

Un conjunto A cuyos elementos son conjuntos es una **clase** o **familia** de conjuntos.

Ejemplo: Supongamos $S = \{a, b, c\}$, entonces:
$P(S)$ es su conjunto de partes.

Definición 2.6: Álgebra de Boole

Una clase $A \neq \varnothing$, formada por subconjuntos de S, que es cerrada para la unión y complemento de conjuntos, se denomina **álgebra booleana de conjuntos**.

Si además se satisface que

$$A_i \in \mathcal{A}, \ \forall i = 1, 2, 3, \ldots \ \Rightarrow \ \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i;$$

entonces $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra de conjuntos.

Ejemplo:

La clase $\mathcal{P}(S)$ es un álgebra booleana de conjuntos.

Espacio de probabilidad

La descripción de los experimentos aleatorios se representa por la terna $(S, \mathcal{P}(S), P)$ donde:

- S: espacio muestral asociado al experimento.
- $\mathcal{A}$: álgebra de conjuntos.
- P: función de probabilidad.

La función de probabilidad P es una función $P : \mathcal{P}(S) \to [0, 1]$ que cuantifica la verosimilitud o posibilidad de ocurrencia de un evento aleatorio perteneciente a $\mathcal{P}(S)$.

En lo que resta denotaremos por $\mathcal{A} = \mathcal{P}(S)$.

Probabilidad - Definición Axiomática

Se dice que una función $P : \mathcal{A} \to [0,1]$ es una función de probabilidad si verifica los siguientes axiomas:

Axioma 1: $P(A) \geq 0, \ \forall A \in \mathcal{A}$

Axioma 2: $P(S) = 1$

Axioma 3:

a) Si $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ es una colección finita de eventos mutuamente excluyentes $\Rightarrow \ P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

b) Si $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{A}$ es una colección infinita de eventos mutuamente excluyentes $\Rightarrow \ P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Diremos que tal P es una probabilidad finitamente aditiva si satisface los axiomas 1,2 y 3a, mientras que diremos que es una probabilidad si satisface los axiomas 1,2 y 3b.

Propiedades (I)

Sea $(S, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad, sean A, B eventos $\in \mathcal{A}$

1. $P(A) = 1 - P(A')$.
2. $P(\varnothing) = 0$.
3. Si A, B son eventos incompatibles $\Rightarrow P(A \cap B) = 0$.
4. Si $A \subseteq B \;\Rightarrow\; P(A) \leq P(B)$ y $P(B - A) = P(B) - P(A)$.
5. Para cualquier par de eventos A, B en $\mathcal{A}$:

$$P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$$

Propiedades (II)

Continuación:

6. Para cualquier par de eventos A, B en $\mathcal{A}$:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

7. Si A, B, C son eventos en $\mathcal{A}$,

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap$$

8. **(Subaditividad)**

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i), \quad A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$$

Una función de probabilidad **debe** satisfacer esos axiomas, pero ¿Cómo se asignan probabilidades a eventos?
En este curso sólo introduciremos dos maneras:

- **Método clásico** (espacios muestrales discretos)
- **Método estadístico o frecuentista.**

Definición clásica o sistemática (I)

Supondremos: **S discreto y finito**, $E_1, \ldots, E_n$ sus eventos simples.

1. Se asignan probabilidades a los $E_i, \; i = 1, \ldots, n$, de manera tal que

$$P(E_i) \geq 0 \; \forall i, \quad \sum_{i=1}^{n} P(E_i) = 1$$

Si A es un evento compuesto, A es la unión (disjunta) de algunos de esos E_i,

$$P(A) = \sum_{E_i \subseteq A} P(E_i)$$

Definición clásica o sistemática (II)

Continuación:

2. Si pueden considerarse los E_i, $i = 1, \ldots, n$ equiprobables $\Rightarrow$ se asigna

$$P(E_i) = \frac{1}{n}$$

y de esta manera se satisfacen los axiomas (simetría o indiferencia).

Si A es un evento compuesto, y $N(A)$ es el número de resultados favorables al evento A,

$$P(A) = \sum_{E_i \subseteq A} P(E_i) = \sum_{E_i \subseteq A} \frac{1}{n} = \frac{N(A)}{n}$$

donde $n = \#S$ es el número de resultados posibles, y $N(A)$ el número de resultados favorables a A. (Laplace)

Definición Frecuentista

Sea **S** el espacio muestral asociado a un experimento aleatorio, $A \subseteq S$ un evento.

- Se repite n veces el experimento.
- Se define $F(A) = \#$ de veces que ocurre A en las n repeticiones.

  $F(A) =$ frecuencia absoluta de ocurrencia de A.
- Se define $f(A) = \dfrac{F(A)}{n}$ como la frecuencia relativa de ocurrencia de A.

Si el experimento se repite en forma independiente e idéntica una cantidad considerable de veces, se observará que $f(A)$ tiende a estabilizarse en un número a medida que n crece.

Ese número se define como:

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} f(A).$$