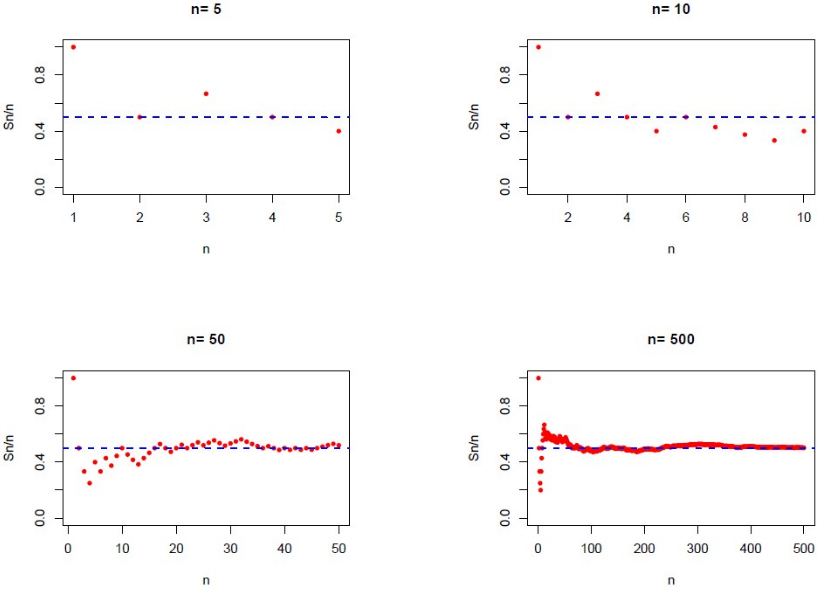
Leyes de los Grandes Números

Teoremas sobre Límites

Experimento: Lanzar una moneda honesta, n veces. Sea $Sn =$ número "caras" obtenidas en los n lanzamientos. Intuitivamente (definición frecuentista de la probabilidad) $S_n/n \cong 1/2$ y $\lim_{n\to\infty} S_n/n = 1/2$.

Este resultado es una consecuencia de una de las Leyes de los Grandes Números.

Estas leyes son una serie de teoremas donde se demuestra cuál es el *límite* o que propiedades satisfacen en el *límite* combinaciones de v.a.
Las hipótesis planteadas y el tipo de convergencia darán lugar a distintos teoremas.


n= 5
n= 10
n= 50
n= 500
Sn/n
n
0.0
0.4
0.8

Tipos de Convergencia

Sean $Y, Y_1, Y_2, \ldots$ v.a. definidas sobre un mismo espacio de probabilidad $(\mathcal{E}, \mathcal{A}, P)$

- Se dice que Y_n converge a Y en probabilidad si $\forall \epsilon > 0$ $P(|Y_n - Y| \geq \epsilon) \to 0$ cuando $n \to \infty$, se denota por $Y_n \underset{\to}{P} Y$
- Se dice que Y_n converge a Y casi ciertamente, casi en todo punto (p.p, a.e) si $P(Y_n \to Y) = 1$ cuando $n \to \infty$. Esto es, $P(\{\omega : Y_n(\omega) \to Y(\omega)\}) = 1$
- Sean $Y, Y_1, Y_2, \ldots$ v.a. con funciones de distribución $F, F_1, F_2, \ldots$. Y_n converge en distribución a Y cuando $n \to \infty$ si $F_n(x) \to F(x)$ para todo x punto de continuidad de F. Se denota por $Y_n \underset{\to}{D} Y$.

Preliminares

Desigualdad de Chebyshev

Sea X va con $E(X) = \mu$, $Var(X) = \sigma^2$, y sea $a > 0$.
Entonces

$$P(|X - \mu| > a) \leq \frac{\sigma^2}{a^2}$$

Observaciones

- Esta desigualdad provee una cota para esa probabilidad que sólo depende de la varianza de X. No es necesario conocer la distribución de la variable aleatoria, sólo su media y su varianza.
- Esta cota puede ser grosera, o no informativa (considerar el caso $\sigma^2 > a^2$)

Expresiones equivalentes:

1. $\forall a > 0,\ P(|X - \mu| \leq a) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{a^2}$
2. $\forall k \geq 0,\ P(|X - \mu| > k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$
3. $\forall k \geq 1,\ P(|X - \mu| \leq k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$

Observación

Las dos útimas expresiones nos informan cómo la desviación estandar mide cuan "concentradas" está la distribución alrededor de μ.

Ejemplo: El número de descargas diarias de una aplicación móvil es una variable aleatoria con media $\mu = 50$ y una desviación estándar $\sigma = 8$. ¿Cuál es la probabilidad que haya entre 34 y 66 descargas en un día?

Teorema 9.1: Ley débil de Chebyshev

Sean $X_1, X_2, \dots$ v.a. independientes, supongamos que $\exists c < \infty$ tal que $\forall n,\ \mathrm{Var(X_n) < c}$. Si $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, entonces S_n satisface la Ley Débil de los grandes números:

$$\frac{S_n - E(S_n)}{n} \xrightarrow{P} 0$$

Ley débil de los grandes números (Teo. de Khintchin)

Teorema 9.2: Teorema de Khintchin

Si $X_1, X_2, \ldots$ son v.a. independientes, idénticamente distribuidas, tales que $E(X_i) = \mu$, $\mathrm{Var(X_i)} = \sigma^2$. Sea $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Entonces

$S_n/n \to \mu$ en probabilidad.

Observación

Este resultado nos dice que el promedio de un número finito de observaciones (realizaciones de las X_i) es una buena aproximación a la estimación de la media poblacional μ.

Corolario 9.1: Teorema de Bernoulli (1713)

Consideremos una sucesión de ensayos Bernoulli independientes, con la misma probabilidad p de éxito en cada ensayo. Sea S_n la variable aleatoria que indica el número de éxitos en los primeros n ensayos. Entonces

$S_n/n \to p$ en probabilidad.

Teorema 9.3: Ley Fuerte de Kolmogorov

Si $X_1, X_2, \ldots$ son v.a. independientes, idénticamente distribuidas, tales que $E(X_i) = \mu$, entonces

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \to \mu \text{ casi ciertamente}$$

(sin demostración)