# Probabilidad Condicional

# Probabilidad Condicional

**Situaciones:**

1. Sea $A$ el evento que denota que un individuo padece cierta enfermedad. Sea $B$ el evento que denota que cierto individuo presenta determinados síntomas.
2. Sea $A$ el evento que denota que un producto es defectuoso. Sea $B$ el evento que denota que el producto ha sido fabricado por cierta máquina que se sabe no funciona bien.
3. Sea $A$ el evento mañana lloverá. Sea $B$ el evento viene un frente de tormenta.

En todos estos ejemplos, si sabemos de antemano que el evento $B$ ha ocurrido entonces la probabilidad de ocurrencia del evento $A$ se verá afectada.

# Ejemplo 1

En una fábrica se ensamblan los productos utilizando dos líneas diferentes, $L_1$ y $L_2$. Un día particular uno de los ingenieros de control de calidad detectó que de los 10 productos ensamblados por la línea $L_1$, 4 eran defectuosos, mientras que de los 15 productos ensamblados por la línea $L_2$ sólo uno era defectuoso.

El jefe de la planta, sin estar avisado de esto, seleccionó un producto al azar y resultó ser defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad que ese producto haya sido ensamblado por la línea $L_1$?

# En general...

Sean $E$ un experimento aleatorio, **S** su espacio muestral asociado, y sean $A, B$ eventos en **S**. Supongamos se repite el experimento $n$ veces.

$$f(A) = \frac{F(A)}{n}, \quad f(B) = \frac{F(B)}{n}, \quad f(A \cap B) = \frac{F(A \cap B)}{n}$$

donde $f(\cdot)$ y $F(\cdot)$ denotan las frecuencias relativas y absolutas (de un evento).

Supongamos que "ha ocurrido el evento B"

$\frac{F(A \cap B)}{F(B)}$ indica la frecuencia relativa del evento $A$ condicionado a la ocurrencia del evento $B$.

$$f(A/B) = \frac{F(A \cap B)}{F(B)} = \frac{\frac{F(A \cap B)}{n}}{\frac{F(B)}{n}}$$

Usando la definición frecuencial de la probabilidad:

$$\frac{F(A \cap B)}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} P(A \cap B); \frac{f(B)}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} P(B)$$

$$P(A/B) = \lim_{n \to \infty} f(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

# Probabilidad Condicional

**Defininción 3.1:**

Sea $(\mathbf{S}, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad y consideremos $B \in \mathcal{A}$ tal que $P(B) \neq 0$. Entonces la función:

$$\tilde{P}(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

es una de probabilidad y es llamada Probabilidad Condicional del evento A, dado el evento B.
$\tilde{P}(A)$ se denota por $P(A/B)$ y resulta

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Ejercicio (LyPM): Probar que $\tilde{P}$ es una función de probabilidad.

**Observaciones:**

1. Si $P(B) = 0$ se define $P(A/B) = P(A), \forall A \in \mathcal{A}$
2. $P(A/B) \cdot P(B) = P(A \cap B) = P(B/A) \cdot P(A)$
3. Si $P(B) \neq 0 \Rightarrow \; P(A/B) + P(A'/B) = 1$

# Ejemplo 2:

Los empleados de la compañía *Nuevo Horizonte* se encuentran separados en tres divisiones: administración, operación de planta y ventas. LA siguiente tabla indica el número de empleados en cada división clasificados por sexo:

| | **Mujer (M)** | **Hombre (H)** |
|---|---|---|
| **Administración (A)** | 20 | 30 |
| **Operación de planta (O)** | 60 | 140 |
| **Ventas (V)** | 100 | 50 |

Si se elige aleatoriamente un empleado:

1. ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer?
2. ¿Cuál es la probabilidad de que trabaje en ventas?
3. ¿Cuál es la probabilidad de que sea hombre y trabaje en la división de administración?

# Ejemplo 2: Continuación

| | **Mujer (M)** | **Hombre (H)** |
|---|---|---|
| **Administración (A)** | 20 | 30 |
| **Operación de planta (O)** | 60 | 140 |
| **Ventas (V)** | 100 | 50 |

4. ¿Cuál es la probabilidad de que trabaje en la división de operación de planta, si es mujer?
5. ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer si trabaja en la división de operación de planta?
6. Determine las siguientes probabilidades:
   1. $P(A \cup M)$.
   2. $P(A \cup M')$.
   3. $P(O \cap A)$.
   4. $P(M/A)$.

# Ejemplo 3:

Supóngase que de todos los individuos que compran cierta cámara digital, 60 % incluye una tarjeta de memoria opcional en su compra, 40 % incluyen una batería extra y 30 % incluyen tanto una tarjeta como una batería.

1. Dado que el individuo seleccionado adquirió una batería extra, ¿cuál es la probabilidad de que una tarjeta opcional también sea adquirida?
2. Si lo que se sabe es que el individuo adquirió una tarjeta de memoria opcional, ¿cuál es la probabilidad de que también haya sido adquirida una batería extra?

# Regla de la Multiplicación (Producto)

**Teorema 3.1: Regla de la multiplicación**

Sea $(\mathbf{S}, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad. Entonces

1. $P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B) = P(B/A) \cdot P(A)$; $A, B \in \mathcal{A}$
2. $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) =$
$P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n/A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})$;
$A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$.

# Ejemplo 4

1. Se extraen 3 cartas sin reposición de un mazo de Poker (honesto). ¿Cuál es la probabilidad de obtener 3 reyes?
2. De acuerdo con los registros de un médico clínico, el 60 % de sus pacientes son mujeres; el 30 % de sus pacientes son mujeres con sobrepeso y el 10 % de las pacientes con sobrepeso tienen hipotiroidismo. Se elige al azar un paciente de este médico. Calcular la probabilidad de que sea mujer, tenga sobrepeso y padezca de hipotiroidismo.

# Ejemplo 5: Analicemos el siguiente caso

En una gasolinería, 40 % de los clientes utilizan gasolina regular, 35 % usan gasolina plus y 25 % utilizan premium. De los clientes que utilizan gasolina regular, sólo 30 % llenan sus tanques. De los clientes que utilizan plus, 60 % llenan sus tanques, mientras que los que utilizan premium, 50 % llenan sus tanques.

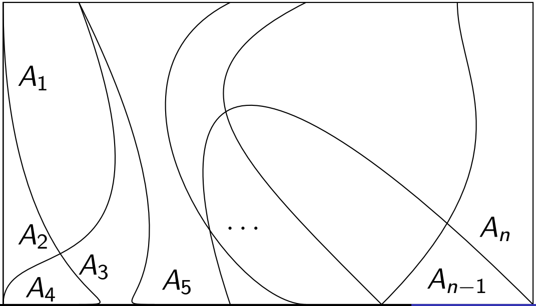
1. ¿Cuál es la probabilidad de que el siguiente cliente pida gasolina plus y llene el tanque?
2. ¿Cuál es la probabilidad de que el siguiente cliente llene el tanque?
3. Si el siguiente cliente llena el tanque, ¿cuál es la probabilidad que pida gasolina regular?

# Partición Aleatoria

## Definición 3.2:

Sea $(\mathbf{S}, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad. Se dice que una colección de eventos $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \subseteq \mathbf{S}$ es una partición aleatoria de $\mathbf{S}$ si:

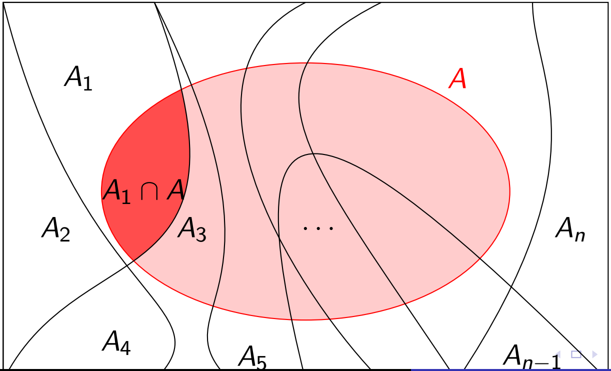
1. $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \mathbf{S}$
2. $A_i \cap A_j = \varnothing, \forall i \neq j.$



## **Teorema 3.2**: Regla de la Probabilidad Total

Si $A$ es un evento de **S** y $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \subseteq$ **S** es una partición aleatoria de **S**, entonces

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A/A_i) \cdot P(A_i)$$



**Teorema 3.3**: Teorema de Bayes

Sea $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\} \subseteq \mathbf{S}$ una partición aleatoria de $\mathbf{S}$, $P(A_i) > 0, \forall i = 1, \ldots, k$. Entonces para cualquier evento $A \in \mathcal{A}$ con $P(A) > 0$ se satisface

$$P(A_j/A) = \frac{P(A_j \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A/A_j)P(A_j)}{\sum_{i=1}^{k} P(A/A_i)P(A_i)}$$

- $P(A_j/A)$ es la probabilidad a posteriori.
- $P(A_j)$ es la probabilidad a priori.
- $P(A/A_j)$ es la probabilidad condicional.

# Demostración Teorema de Bayes

Sean $A_i, i = 1 \ldots, n; A$ como en las hipótesis del Teorema.
Por definición de probabilidad condicional,

$$P(A_j/A) = \frac{P(A_j \cap A)}{P(A)} \qquad (1)$$

Como los $A_i, i = 1, \ldots, n$ forman una partición aleatoria de **S**, usando la Regla de la Probabilidad Total podemos escribir $P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(A/A_i)$.
y reemplazando $P(A)$ por esta última expresión en la ec. (1), se tiene que:

$$P(A_j/A) = \frac{P(A_j \cap A)}{\sum_{i=1}^{k} P(A/A_i)P(A_i)}$$

# Ejemplo 6

1. Siguiendo con el ejemplo de la gasolinería. Si el siguiente cliente no llena el tanque, ¿qué gasolina es más probable que haya cargado?
2. En una caja hay tres monedas, 2 honestas y una con dos caras. El experimento consiste en extraer al azar una moneda y luego arrojarla. Informan que el resultado del lanzamiento es “cara”. ¿Cuál es la probabilidad que, sabiendo que salió cara, haya sido extraída la moneda deshonesta?

# Independencia

**Definición 3.3:**

Sea $(\mathbf{S}, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad, sean $A, B \in \mathcal{A}$. Se dice que los eventos $A, B$ son **independientes** si $P(A/B) = P(A)$.

Observaciones: Sea $(\mathbf{S}, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad, sean $A, B \in \mathcal{A}$

1. $A$ y $B$ son independientes $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
2. $P(A/B) = P(A) \Leftrightarrow P(B/A) = P(B)$

Ejemplo 7:

Se lanza un dado numerado (honesto). Sea $A =$ se observa un número par, $B = \{2, 3\}$. Calcular $P(B/A)$, $P(A)$, $P(B)$, $P(A/B)$

Sea $(\mathbf{S}, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad, sean $A, B \in \mathcal{A}$. Entonces:

## Observaciones

1. Si $A \in \mathcal{A}$ y $P(A) = 0$ ó $P(A) = 1$, entonces $A$ es independiente de cualquier otro evento.
2. Si $A$ y $B$ son eventos excluyentes con $P(A) > 0$ y $P(B) > 0$, entonces $A$ y $B$ no son independientes.
3. $A$ y $A'$ no son independientes
4. Si $A$ y $B$ son independientes, entonces $A$ y $B'$;$A'$ y $B$, $A'$ y $B'$ son independientes.

# Independencia de a pares

**Definición 3.4:**

Los eventos $\{A_i\}_{i \in I}$, I conjunto de índices son:

- independientes de a pares (2 a 2) si y sólo si:

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j), \forall i \neq j, i, j \in I$$

- independientes si para cualquier subconjunto de eventos $A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{ik}$ se satisface

$$P(A_{i1} \cap A_{i2} \cap \ldots A_{ik}) = P(A_{i1}) \cdot P(A_{i2}) \cdot \ldots \cdot P(A_{ik})$$

Independencia de tres sucesos:

Los sucesos $A_1, A_2, A_3 \in \mathcal{A}$, con $P(A_i) > 0, \forall i$, son independientes si se verifican las siguientes expresiones

1. $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1).P(A_2)$; $P(A_1 \cap A_3) = P(A_1).P(A_3)$; $P(A_2 \cap A_3) = P(A_2).P(A_3)$
2. $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1).P(A_2).P(A_3)$

# Ejemplo 9:

Sea $\mathbf{S} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Consideremos $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbf{S})$ y sea $P(e_i) = \frac{1}{4}$, $\forall i = 1, \ldots, 4$

Sean $A_1 = \{e_1, e_2\}$, $A_2 = \{e_1, e_3\}$, $A_3 = \{e_1, e_4\}$.

Pregunta: ¿Son los $A_i$ independientes de a pares? ¿Son independientes?

# Ejemplo 10:

Se transmiten 3 bits por un canal de comunicación digital. Cada bit puede ser recibido distorsionado o sin distorsión. Si $A_i$ es el evento que el i-ésimo bit llegó distorsionado, $i = 1,2,3$:

1. Describa el espacio muestral para este experimento.
2. Describa los eventos $A_i$.
3. Si la función de probabilidad definida sobre este espacio muestral es la que considera a los eventos simples equiprobables, ¿son los $A_i$ independientes?