20/09/02 PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA TEMA 1

MATEMÁTICAS ESPECIALES

PRIMER PARCIAL

Alumno: .... **L.U.:**..........................

Materia: .... **Carrera:** ....

1) Se sacan tres discos compactos de sus cajas y después de haberlos escuchado, se introducen al azar, en las tres cajas vacías. Calcular la probabilidad de que:

a) ningún disco sea introducido en su propio estuche;
b) al menos uno de los discos sea introducido en su caja;
c) exactamente dos discos, sean introducidos en sus propias cajas.
d) Los tres discos estén en sus cajas, si se sabe que al menos uno de los discos fue colocado en el estuche que le corresponde.

2) Dos chicos A y B lanzan una pelota a un blanco. Supóngase que la probabilidad de que el chico A de en el blanco es 1/3, y la probabilidad de que el chico B de en el blanco es 1/4. Supóngase también que el chico A lanza primero y que los dos chicos se van turnando para lanzar.
Calcular la probabilidad de que:

a) el primer lanzamiento que de en el blanco sea el tercero del chico B;
b) habiéndose lanzado tres tiros en total, el chico A de en el blanco antes de que el chico B lo haga;
c) el chico B haga blanco en su primer tiro, sabiendo que A no acertó.

3) Una urna contiene 12 bolillas numeradas de 1 al 12. Sea $\mathcal{E}$ el experimento que consiste en extraer una bolilla de la urna. Sea X la variable aleatoria que indica el número de divisiores positivos del número obtenido.

a) Obtener la distribución de probabilidad de la variable aleatoria X.
b) Obtener y graficar F(x).
c) Hallar la esperanza de X.
d) Calcular:
   i) La bolilla extraída tenga un número que admite exactamente 5 divisores positivos, o entre 2 y 4 divisores positivos, inclusive.
   ii) P(X=2,5)
   iii) F(1,6)

4) Supóngase que la calificación X de una persona en una prueba de aptitud matemática, es un número entre 0 y 1, y que su calificación Y, en una prueba de aptitud musical, es también un número entre 0 y 1. Supóngase además que en la población de todos los estudiantes de Polimodal de la República Argentina, las calificaciones X e Y se distribuyen de acuerdo con la siguiente función:

$$f(x;y)=\begin{cases} k(2x+3y) & para \quad 0\leq x\leq 1 \quad \wedge \quad 0\leq y\leq 1 \\ 0 & en \quad otro \; caso \end{cases}$$

a) Hallar k para que $f(x;y)$ sea función de densidad de probabilidad.
b) Calcular:
   i) la probabilidad de que un estudiante obtenga la misma calificación en ambas pruebas de aptitud;
   ii) la proporción de estudiantes que obtienen una calificación mayor que 0,8 en la prueba de Matemática;
   iii) F(0,5 ; 0,8).
c) ¿Son X e Y variables aleatorias independientes?. Justifique su respuesta.

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA - MATEMÁTICAS ESPECIALES - 2002

PRIMER PARCIAL - TEMA 1.

1) casos posibles : $P_3 = 6$.

a) A: ningún disco sea introducido en su propio estuche. cpA: $c_3c_1c_2$; $c_2c_3c_1$

$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

b) $P(A') = 1 - P(A) = 1 - 1/3 = 2/3$.

c) B: exactamente dos discos sean introducidos en su propio estuche.

$P(B) = 0$.

d) C: los tres discos esten en sus cajas.

$P(C/A') = \frac{P(C \cap A')}{P(A')} = \frac{1/6}{2/3} = 1/4$

2) $P(A) = 1/3 \Rightarrow P(A') = 2/3$. $P(B) = 1/4 \Rightarrow P(B') = 3/4$.

a) $(A'B'A'B'A'B) \Rightarrow P(C) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$ (C: el primer lanzamiento que de en el blanco es el 3º de B)

b) D: A de en el blanco antes que B si se lanzaron tres tiros en total.

$P(D) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{6} = 1/2$ (A ó A'B'A)

c) B haga blanco en su primer tiro, sabiendo que A no acertó

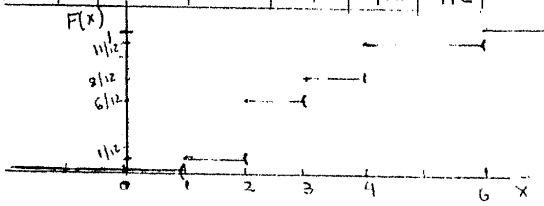
$P(B/A') = P(B) = 1/4$

3) bolillas

bolillas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
divisores positivos	1	1-2	1-3	1-2-4	1-5	1-2-3-6	1-7	1-2-4-8	1-3-9	1-2-5-10	1-11	1-2-3-4-6-12

a)

X	1	2	3	4	6
P(x)	1/12	5/12	2/12	3/12	1/12



b) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1/12 & \text{si } 1 \le x < 2 \\ 6/12 & \text{si } 2 \le x < 3 \\ 8/12 & \text{si } 3 \le x < 4 \\ 11/12 & \text{si } 4 \le x < 6 \\ 1 & \text{si } x \geq 6 \end{cases}$

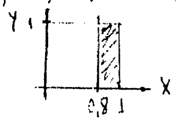
c) $E(X) = 1/12 + 10/12 + 6/12 + 12/12 + 6/12 = 35/12 = 2{,}91\dot{6}$

d) i) $P(X=5) + P(2 \le X < 4) = 0 + 10/12 = 10/12$; ii) $P(X = 2{,}5) = 0$; iii) $F(1{,}6) = P(X \le 1{,}6) = 1/12$

4) a) $\int_0^1 \int_0^1 k(2x+3y)\,dy\,dx = 1 \Rightarrow k \cdot \left[\int_0^1 \left(2x(y)_0^1 + 3/2(y^2)_0^1\right) dx\right] = k \cdot \left[\cancel{2}\left(\frac{x^2}{\cancel{2}}\right)_0^1 + \frac{3}{2}(x)_0^1\right] = 1 \Rightarrow k \cdot \frac{5}{2} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow k = 2/5$.

b) i) $P(X = Y) = 0$; ii) $P(X > 0{,}8) = \int_0^1 \int_{0,8}^1 \frac{2}{5}(2x+3y)\,dx\,dy = \int_0^1 \frac{2}{5}(x^2)_{0,8}^1 + \frac{6}{5}y(x)_{0,8}^1\,dy =$



$= \int_0^1 \left(\frac{2}{5} \cdot 0{,}36 + 0{,}24y\right) dy = 0{,}144(y)_0^1 + \frac{0{,}24}{2}(y^2)_0^1 = 0{,}264$

iii) $F(0{,}5; 0{,}8) = \int_0^{0,5}\int_0^{0,8} \frac{2}{5}(2x+3y)\,dy\,dx = \int_0^{0,5}\left(\frac{4}{5} \cdot 0{,}8x + 0{,}384\right) dx = 0{,}64 \cdot \left(\frac{x^2}{2}\right)_0^{0,5} + 0{,}384(x)_0^{0,5} =$

$= 0{,}08 + 0{,}192 = 0{,}272$.

c) NO SON INDEPENDIENTES PORQUE: $f_X(x) = \int_0^1 \frac{2}{5}(2x+3y)\,dy = 4/5\,x + 3/5$; $f_Y(y) = \int_0^1 \frac{2}{5}(2x+3y)\,dx =$

$= \frac{6}{5}y + \frac{2}{5}$; $\left(\frac{4x+3}{5}\right) \cdot \left(\frac{6y+2}{5}\right) \neq \frac{2}{5}(2x+3y) = f(x;y)$

20/09/02 | PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA | TEMA 2

MATEMÁTICAS ESPECIALES

PRIMER PARCIAL

Alumno: .... L.U.:.............................

Materia: .... Carrera: ....

1) Los boletos de autobus de una ciudad pequeña, tienen cuatro números U, V, W, X en ese orden. Es igualmente probable que cada uno de estos números sea cualquiera de los diez dígitos 0, 1, ... , 9. Calcular la probabilidad de que, un pasajero obtenga:

a) el boleto que tiene el número 2943;
b) un boleto cuyo número sea capicua tal que $U \neq V$;
c) un boleto cuyos dígitos verifiquen $U+V = W+X = 3$.

2) La probabilidad de que cualquier niño de una familia determinada tenga ojos azules es 1/4 y esta característica es heredada por cada niño de la familia independientemente de los demás. Si hay cuatro niños en la familia, cuál es la probabilidad de que:

a) al menos tres de los niños tengan ojos azules, si al menos uno de ellos tiene ojos azules.;
b) si se sabe que el niño más pequeño de la familia tiene ojos azules, al menos tres de los niños tengan ojos azules?.
c) Explique por qué son distintas estas probabilidades.

3) La concentración de una sustancia química particular en un elemento es una variable aleatoria cuya función de distribución es:

$$F(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3}{8} & si\ 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & si\ x<0 \\ 1 & si\ x>2 \end{cases}$$

Calcular:

a) $E(X)$ y $D^2(X)$.
b) $P(|X-m|>0,5)$
   i) en forma exacta.
   ii) en forma aproximada, haciendo uso de la Desigualdad de Tchevichev.
c) i) $P(1/3 \leq X < 1/2)$
   ii) La probabilidad de que la concentración sea 1,5

4) Un dado tiene dos de sus caras marcadas con un uno, dos de sus caras marcadas con un dos, y las otras dos, marcadas con un tres. Se lo tira tres veces consecutivas y se definen las variables aleatorias X e Y de la siguiente manera: Sea X la variable aleatoria que indica la cantidad de números pares e Y, se define como la variable que le hace correponder a cada resultado posible del experimento, el menor o igual de los números que salieron.

a) Obtener la distribución de probabilidad conjunta de X e Y.
b) Obtener las distribuciones marginales.
c) Calcular:
   i) $P(X=Y)$; ii) $P(Y>X)$; iii) $F(1;3)$; iv) $P(X \leq 2 ; Y > 3)$; v) $F_Y(2;8)$
d) ¿Son X e Y variables aleatorias independientes?. Justifique su respuesta.

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA . MATEMÁTICAS ESPECIALES . (2002)

PRIMER PARCIAL - TEMA 2 .

1) a) A : el boleto tiene el número 2143 .

$$P(A) = \frac{1}{A^{10}_{4,r}} = \frac{1}{10.000}$$

b) B : un boleto cuyo número sea capicúa tal que $U \neq V$; $P(B) = \frac{A^{10}_{2}}{A^{10}_{4,r}} = \frac{90}{10.000} = \frac{9}{1.000}$

c) C : un boleto cuyos dígitos verifiquen $U+V = W+X = 3$.

$$\underline{U}\ \underline{V}\ \underline{W}\ \underline{X} \quad C^{2}_{3,r} = C^{4}_{3} = 4 \Rightarrow P(C) = \frac{4^2}{10.000} = \frac{16}{10.000}$$

U	V
3	0
0	3
1	2
2	1

2) a) $A = \{(a,a,a,a') ; (a,a,a',a) ; (a,a',a,a) ; (a',a,a,a) ; (a,a,a,a)\}$

$P(A) = 4.(1/4)^3 . 3/4 + (1/4)^4 = 13/256$.

$B' = \{(a',a',a',a')\} \Rightarrow P(B) = 1 - P(B') = 1 - (3/4)^4 = 175/256$.

$$\therefore P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \overset{A \subset B}{=} \frac{P(A)}{P(B)} = 13/175 .$$

b) $C = \{(a,a,a,a) ; (a,a,a',a) ; (a,a',a,a) ; (a',a,a,a) ; (a',a',a,a) ; (a,a',a',a) ; (a',a,a',a) ; (a',a',a',a)\}$

$P(C) = (1/4)^4 + 3(1/4)^3 . 3/4 + 3(1/4)^2.(3/4)^2 + 1/4.(3/4)^3 = 64/256 = 1/4$ ó mejor $P(C) = 1/4$ directamente, por independ.

$(A \cap C)$

$$P(A/C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{256} + \frac{9}{256}}{64/256} = 10/64 .$$

c) porque los sucesos B y C son distintos.

3) $f(x) = \begin{cases} 3/8\ x^2 & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$

a) $E(X) = \int_0^2 3/8\ x^2 . x\ dx = 3/8 (x^4/4)_0^2 = 3/32 (16 - 0) = 3/2$.

$D^2(X) = \alpha_2 - \alpha_1^2$; $\alpha_2 = \int_0^2 \frac{3}{8} x^4 dx = \frac{3}{8} . \frac{1}{5} (x^5)_0^2 = \frac{12}{5} \therefore D^2(X) = \frac{12}{5} - \frac{9}{4} = \frac{3}{20} = 0,15$

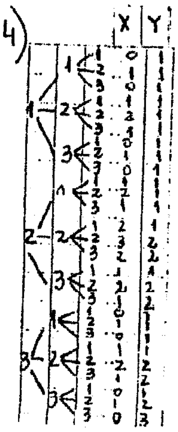
b) i) $P(|X - 3/2| > 0,5) = 1 - P(|X - 3/2| \le 0,5) = 1 - P(-0,5 \le X - 3/2 \le 0,5) = 1 - P(1 \le X \le 2) =$

$= 1 - [F(2) - F(1)] = 1 - \frac{(8-1)}{8} = \frac{1}{8} = 0,125$.

ii) $P(|X - 3/2| > 0,5) \le \frac{0,15}{0,25} = 0,6$.

c) i) $P(1/3 \le X < 1/2) = F(1/2) - F(1/3) = \frac{(\frac{1}{2})^3}{8} - \frac{(1/3)^3}{8} = 0,010995$; ii) $P(X = 1,5) = 0$.

4)



Y \ X	0	1	2	3	p.v
1	7/27	9/27	3/27	0	19/27
2	0	3/27	3/27	1/27	7/27
3	1/27	0	0	0	1/27
pu.	8/27	12/27	6/27	1/27	1

c) i) $P(X=Y) = (9+3)/27 = 12/27$

ii) $P(Y>X) = (7+1+3)/27 = 11/27$

iii) $F(1;3) = F_X(1) = (8+12)/27 = 20/27$

iv) $P(X \le 2 ; Y > 3) = 0$

v) $F_Y(2,8) = P(Y \le 2,8) = \frac{(19+7)}{27} = \frac{26}{27}$

d) X e Y no son independientes pues $0 \neq 1/27 \cdot 1/27$