# Trabajo Práctico Nº5: Variables Aleatorias Bidimensionales. Momentos Ordinarios y Centrales

1. Si la distribución de probabilidad conjunta de $X$ e $Y$ es:

$$P(X=x;Y=y)=\frac{x+y}{30} \text{ para } \begin{cases} x=0,1,2,3. \\ y=0,1,2 \end{cases}$$

   a) Complete la siguiente tabla:

| $XY$ | 0 | 1 | 2 | $\mathbf{p_{u.}}$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | |
| 1 | | | | |
| 2 | | | | |
| 3 | | | | |
| $\mathbf{p_{.v}}$ | | | | |

   b) Represente gráficamente la distribución de probabilidad.

   c) Obtenga las distribuciones marginales de $X$ e $Y$.

   d) Calcule:

      I) $P(X\leq 2;Y=1)$; II) $P(X>2;Y\leq 1)$; III) $P(X>Y)$; IV) $P(X+Y=4)$.

2. a) Determine el valor de $c$ de tal manera que la siguiente función represente una distribución de probabilidad conjunta de las variables aleatorias $X$ e $Y$.

$$P(x;y)=c\,|x-y| \text{ para } \begin{cases} x=-2,0,2. \\ y=-2,3 \end{cases}$$

   b) Obtenga la distribución de probabilidad condicional de $X$ dado que $Y=3$.

   c) Calcule:

      I) $P(X\leq 0;Y\geq 3)$; II) $P(X=0;Y=0)$; III) $P(X\leq 0/Y=3)$; IV) $E(X/Y=3)$.

   d) Para las variables aleatorias $X$ e $Y$, calcule los momentos ordinarios y centrales de primer y segundo orden y la covarianza.

3. Se seleccionan dos repuestos al azar y sin reposición para una lapicera de una caja que contiene tres repuestos azules, dos rojos y tres verdes. Sea $X$ la variable aleatoria que indica el número de repuestos azules seleccionados e $Y$ la variable aleatoria que indica el número de rojos.

   a) Obtenga la distribución conjunta de probabilidad

   b) Obtenga las distribuciones de probabilidad marginales

   c) Obtenga la covarianza: $\text{COV}(X;Y)$.

   d) Calcule: $P(X+Y\leq 1)$; $F_X(1)$; $F(0;2)$; $P(X\leq 1/Y\geq 1)$

   e) ¿Son independientes las variables aleatorias $X$ e $Y$? Justifique la respuesta.

4. Si $X$ representa el número de caras e $Y$ el número de caras menos el de cruces cuando se lanzan 3 monedas equilibradas:

   a) Encuentre la distribución de probabilidad conjunta de $X$ e $Y$.

   b) Obtenga las distribuciones de probabilidades marginales.

   c) Obtenga la $\text{COV}(X;Y)$.

d) Calcule $P(X+Y \leq 2)$.

5. Todas las mañanas debe ajustarse cierto sistema de instrumentos pertenecientes a dos laboratorios A y B. Cada puesta a punto matutina requiere una cantidad aleatoria $X$ de ensayos, nunca mayor que 4 en el laboratorio A, e independiente del ajuste realizado en B y una cantidad aleatoria $Y$ de ensayos, nunca mayor que 3, en el laboratorio B, cuyas probabilidades son:

| $X=r$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X=r)$ | 0,32 | 0,55 | $q$ | 0,03 |

| $Y=r$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $P(Y=r)$ | $p$ | 0,53 | 0,15 |

a) Obtenga la distribución de probabilidad conjunta $X$ e $Y$.

b) Calcule: $\mathrm{COV}(X;Y)$; $E(X)$; $E(X;Y)$; $P(X>2/Y\leq 2)$.

c) Halle la probabilidad de que el número de ensayos para ajustar el sistema de instrumentos del laboratorio A, sea menor que el número de ensayos necesarios para ajustar el sistema del laboratorio B.

6. Sean $A$ y $B$ dos sucesos tales que $P(A)=1/4, P(A/B)=1/2$ y $P(B/A)=1/2$. Se definen las variables aleatorias $X$ e $Y$ de la siguiente manera: $X$ es 1 ó 0 según que haya ocurrido o no el suceso $A$; $Y$ es igual a 1 ó 0 según que haya ocurrido o no el suceso $B$ (es decir que $X$ e $Y$ son indicadores de $A$ y $B$, respectivamente).

a) Obtenga la distribución conjunta $(X;Y)$.

b) Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas justificando su respuesta:

I) $X$ e $Y$ son variables aleatorias independientes.

II) $P\left(X^2+Y^2=1\right)=1/4$.

III) $P\left(X\cdot Y=X^2\cdot Y^2\right)=1$.

IV) $\mathrm{COV}(X;Y)<0$.

7. Sea la función: $f(x,y)=\begin{cases} kxy+y^2 & \text{si } 0<x<2; 0<y<1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

a) Determine el valor de la constante $k$ para que $f(x,y)$ sea la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria bidimensional $(X,Y)$.

b) Obtenga: $F(x,y)$; $f_X(x)$; $f_Y(y)$; $f(y/x)$.

c) Calcule: $P(X\leq 1; Y\leq 2)$; $P(X>1)$; $P(X=0;Y=1)$; $P(Y<1/2/X=1)$.

d) Obtenga: $E(X)$; $E(Y)$; $\mathrm{COV}(X,Y)$; $E(Y/X)$.

e) ¿Son independientes las variables aleatorias $X$ é $Y$? Justifique la respuesta.

8. Se sabe que el tiempo de vida en años, de cierto producto alimenticio perecedero empacado en cajas de cartón, es una variable aleatoria cuya función de densidad de probabilidad es:

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Si $X_1$ y $X_2$ representan las vidas de dos de tales cajas seleccionadas independientemente:

a) Determine la función de densidad conjunta de probabilidad de las variables aleatorias $X_1$ y $X_2$.

b) Determine la función de distribución conjunta de las variables aleatorias $X_1$ y $X_2$.

c) Calcule: $P(X_1<1; X_2<2)$; $P(X_1+X_2=2)$; $P(X_1>2/X_2\leq 3)$; $P(X_1<1-X_2)$.

d) Para las variables aleatorias $X_1$ y $X_2$, calcule los momentos ordinarios y centrales de primer y segundo orden y la covarianza.

9. Una compañía tabacalera produce mezclas de tabaco de tal modo que cada una contiene diferentes proporciones de tabacos turcos y de la región. Envasa este producto en cajas guardando la proporción indicada. Las proporciones de tabaco turco y de la región en una mezcla son variables aleatorias con función de densidad conjunta ($X$: turco ; $Y$: regional).

$$f(x,y)=\begin{cases} kxy & \text{si } x>0; y>0; x+y<1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

*a*) Calcule el valor de la constante $k$.

*b*) Obtenga $F(x, y)$.

*c*) Obtenga la función de densidad marginal para la proporción de tabaco turco.

*d*) Obtenga la función de densidad marginal para la proporción de tabaco regional.

*e*) Calcule la probabilidad de que en una caja determinada, la proporción de tabaco turco sea mayor que el doble de la proporción de tabaco regional.

10. La función de densidad conjunta de las variables $X$ e $Y$ es:

$$f(x, y) = \begin{cases} cx & \text{si } 0 < x < 1; 0 < y < 1 - x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

*a*) Calcule el valor de la constante $c$.

*b*) Determine si $X$ e $Y$ son independientes, justificando su respuesta.

*c*) Calcule: $E(X \cdot Y)$; $\quad P(X < 0{,}3; Y < 0{,}6)$.

11. Un restaurante tiene que vender sus comidas dando un servicio a los clinetes que retiran en el local y en repartos con delivery. El tiempo de llegada de la comida a los clientes (en horas), en un día elegido al azar, están representados por las variables $X$ para los que retiran en el local e $Y$ para los repartos con delivey, representados por la siguiente función de densidad conjunta:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{3}(x + 2y) & \text{si } 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1; \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

*a*) Calcule $\quad P(X \leq 0{,}5; Y \leq 0{,}25)$.

*b*) Obtenga las funciones de densidad marginales de las variables aleatorias $X$ e $Y$ ¿Son $X$ e $Y$ independientes? .

*c*) Obtenga la función de densidad condicionada de $Y$ por $X$.

*d*) Calcule $\quad E(Y/X = 1)$.