Pruebas de Hipótesis

Situación

Una empresa afirma que la carga media de rotura de un tipo determinado de cables de acero que producen es de 150 kN

Sin embargo han recibido quejas de un gran número de clientes quienes aseguran que la carga media de rotura de esos cables es inferior a lo que afirma la empresa.

¿Qué puede hacer la empresa para determinar si efectivamente el la carga media de rotura de ese tipo de cables es de 150 kN?

Es decir, ¿cómo puede determinar si su HIPOTESIS: *"la carga media de rotura de nuestros cables es de 150 kN"* es verdadera o falsa?.

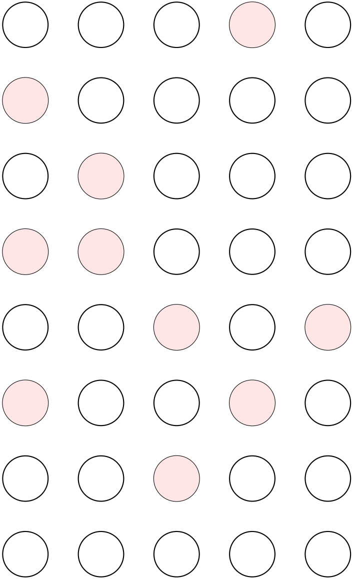
Situación

Una empresa afirma que la carga media de rotura de un tipo determinado de cables de acero que producen es de 150 kN

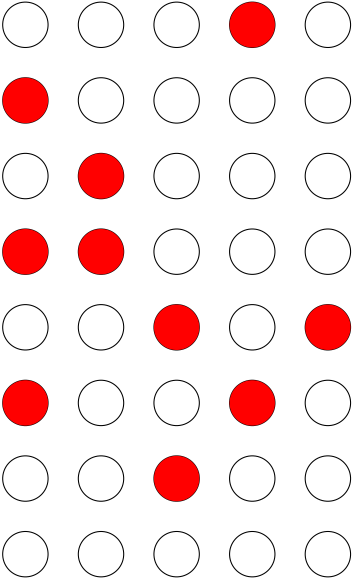
Sin embargo han recibido quejas de un gran número de clientes quienes aseguran que la carga media de rotura de esos cables es inferior a lo que afirma la empresa.

¿Qué puede hacer la empresa para determinar si efectivamente el la carga media de rotura de ese tipo de cables es de 150 kN?

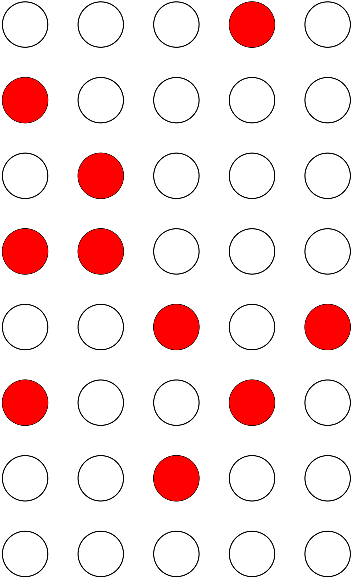
Es decir, ¿cómo puede determinar si su HIPOTESIS: *"la carga media de rotura de nuestros cables es de 150 kN"* es verdadera o falsa?.



- Evidentemente, no pueden analizar toda la *población* de cables, pues se quedarían sin productos
- Deberán tomar, mediante un procedimiento adecuado, una muestra de cables, que serán analizados y probados para determinar su carga media de rotura.
- Si se toma una decisión en base a datos muestrales (aleatorios), debe tenerse en cuenta que la carga media de rotura de esta muestra puede resultar mayor (o menor) que la carga media de rotura real (media poblacional), por causa del azar.



- Evidentemente, no pueden analizar toda la *población* de cables, pues se quedarían sin productos
- Deberán tomar, mediante un procedimiento adecuado, una muestra de cables, que serán analizados y probados para determinar su carga media de rotura.
- Si se toma una decisión en base a datos muestrales (aleatorios), debe tenerse en cuenta que la carga media de rotura de esta muestra puede resultar mayor (o menor) que la carga media de rotura real (media poblacional), por causa del azar.



- Evidentemente, no pueden analizar toda la *población* de cables, pues se quedarían sin productos
- Deberán tomar, mediante un procedimiento adecuado, una muestra de cables, que serán analizados y probados para determinar su carga media de rotura.
- Si se toma una decisión en base a datos muestrales (aleatorios), debe tenerse en cuenta que la carga media de rotura de esta muestra puede resultar mayor (o menor) que la carga media de rotura real (media poblacional), por causa del azar.

El procedimiento para determinar si es verdadera o falsa la afirmación de la empresa:

La carga media de rotura de los cables es de 150 kN

es una PRUEBA DE HIPOTESIS.

donde la afirmación cuya veracidad se quiere probar es la Hipótesis

Prueba de Hipótesis

Objetivo del estudio: Decidir cual de dos hipótesis contradictorias sobre una característica de una población es “correcta”. Una Hipótesis Estadística es una afirmación que se hace sobre una característica de una o más poblaciones: algún parámetro poblacional, forma de la distribución de la población, etc., que están sujetas a verificación

Ejemplos:

1. La vida útil de una cierta lámpara de bajo consumo es de 2000h
2. Un nuevo método de producción produce menos artículos defectuosos que el método anterior.
3. El diámetro de los caños de PVC fabricados por una compañía es $\mu = 1/2$ pulgada.
4. La droga A es más eficiente en el tratamiento de una enfermedad que la droga B

En los ejemplos anteriores las hipótesis contradictorias podrían ser:

1. $t = 2000$ hrs vs. $t < 2000$ hrs
2. $p = 0.01$ vs $p < 0.01$
3. $\mu = 1/2$ pulgada vs $\mu \neq 1/2$ pulgada.
4. $\mu_A = \mu_B$ vs $\mu_A \neq \mu_B$ (o equivalentemente $\mu_A - \mu_B \neq 0$).

Prueba de hipótesis

Procedimiento basado en teoría de probabilidad y en la "evidencia"(información) presentada por una muestra para determinar cuál de esas dos hipótesis contradictorias es la más razonable.

- Inicialmente se favorece una de las dos hipótesis.
- No se rechaza esa hipótesis en favor de la otra a menos que la muestra presente evidencia suficiente para contradecirla.

En general:

- La hipótesis que inicialmente se favorece se denomina Hipótesis Nula, se denota como H_o. Se identifica con la hipótesis que no se produce ningun cambio, mejora, etc.
- La hipótesis contradictoria, se denomina Hipótesis alternativa, se denota como H_1 ó H_a y está identificada con la hipótesis que se desea apoyar con base a la información contenida en una muestra

Continuación Ejemplo

¿De qué debe preocuparse la empresa?: De que la carga media de rotura de sus cables sea inferior a lo que ellos afirman (150 kN)

Si se rechaza la hipótesis nula

H_o:la carga media de rotura de sus cables es 150 kN

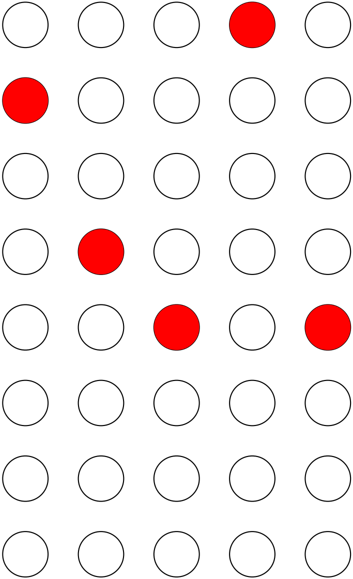
dentro del contexto de esta situación en particular, se estaría apoyando la hipótesis alternativa

H_1:la carga media de rotura de sus cables es inferior a 150 kN

Simbólicamente

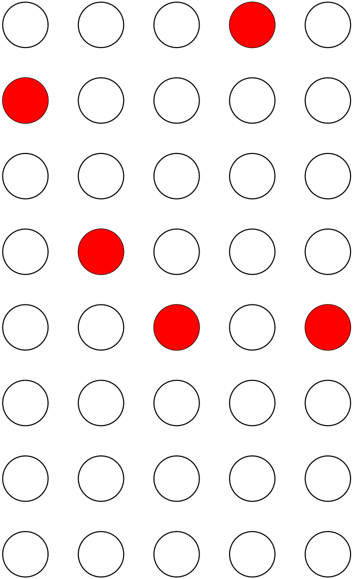
$H_o : \mu = 150$ vs $H_1 : \mu < 150$

Continuación ejemplo



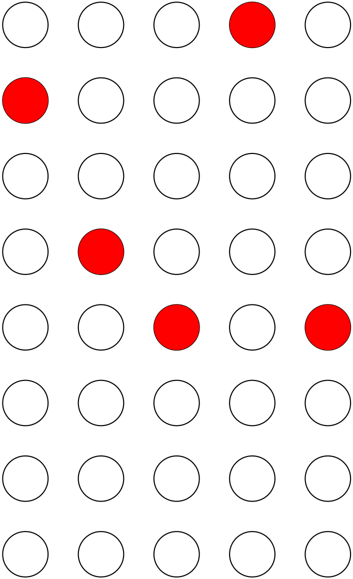
- La empresa toma una muestra de 20 cables y midio la carga media de rotura de cada uno de ellos. Obtuvo $\bar{x} = 141.9$ kN
- ¿Es suficiente esta información para concluir que la la carga media de rotura de los cables es inferior a 150 kN?
- La hipótesis nula H_o sólo se rechaza si los datos ofrecen evidencia suficiente para no considerarla verdadera.
- ¿Qué es evidencia suficiente para no considerarla verdadera?.

Continuación ejemplo



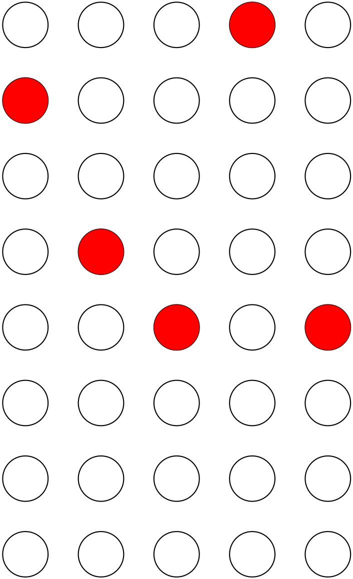
- La empresa toma una muestra de 20 cables y midio la carga media de rotura de cada uno de ellos. Obtuvo $\bar{x} = 141.9$ kN
- ¿Es suficiente esta información para concluir que la la carga media de rotura de los cables es inferior a 150 kN?
- La hipótesis nula H_o sólo se rechaza si los datos ofrecen evidencia suficiente para no considerarla verdadera.
- ¿Qué es evidencia suficiente para no considerarla verdadera?.

Continuación ejemplo

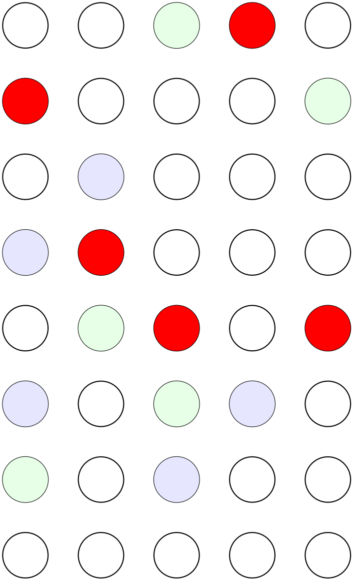


- La empresa toma una muestra de 20 cables y midio la carga media de rotura de cada uno de ellos. Obtuvo $\bar{x} = 141.9$ kN
- ¿Es suficiente esta información para concluir que la la carga media de rotura de los cables es inferior a 150 kN?
- La hipótesis nula H_o sólo se rechaza si los datos ofrecen evidencia suficiente para no considerarla verdadera.
- ¿Qué es evidencia suficiente para no considerarla verdadera?.

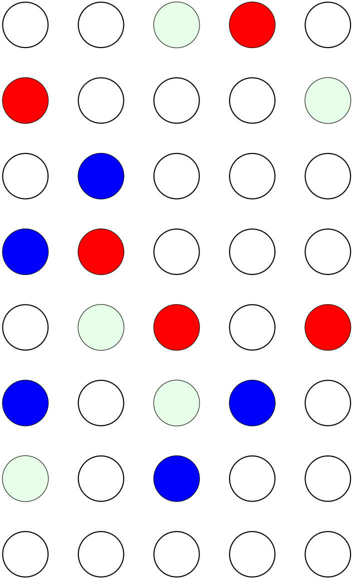
Continuación ejemplo



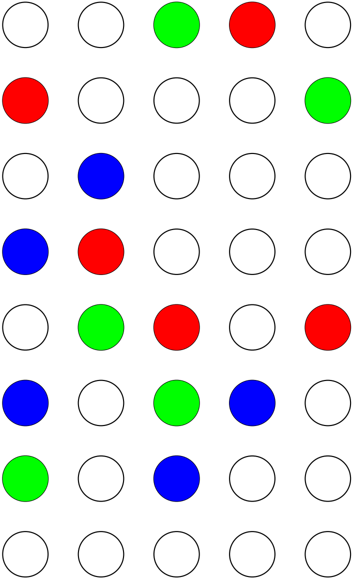
- La empresa toma una muestra de 20 cables y midio la carga media de rotura de cada uno de ellos. Obtuvo $\bar{x} = 141.9$ kN
- ¿Es suficiente esta información para concluir que la la carga media de rotura de los cables es inferior a 150 kN?
- La hipótesis nula H_o sólo se rechaza si los datos ofrecen evidencia suficiente para no considerarla verdadera.
- ¿Qué es evidencia suficiente para no considerarla verdadera?.



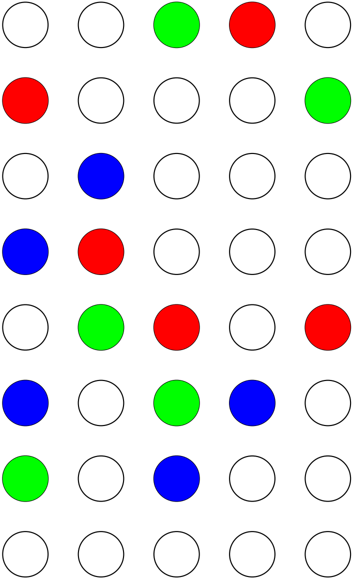
- La empresa toma una muestra de 20 cables y midio la carga media de rotura de cada uno de ellos. Calculo el promedio y obtuvo $\bar{x} = 141.9$ kN
- Con una segunda muestra de 20 cables, obtuvo $\bar{x} = 154.8$ kN
- Con una tercera muestra de 20 cables,obtuvo $\bar{x} = 167.7$ kN
- Las muestras se eligen aleatoriamente, por lo que se espera que las diferencias entre esos promedios se atribuyan al azar y no a problemas en la fabricación de los cables



- La empresa toma una muestra de 20 cables y midio la carga media de rotura de cada uno de ellos. Calculo el promedio y obtuvo $\bar{x} = 141.9$ kN
- Con una segunda muestra de 20 cables, obtuvo $\bar{x} = 154.8$ kN
- Con una tercera muestra de 20 cables,obtuvo $\bar{x} = 167.7$ kN
- Las muestras se eligen aleatoriamente, por lo que se espera que las diferencias entre esos promedios se atribuyan al azar y no a problemas en la fabricación de los cables



- La empresa toma una muestra de 20 cables y midio la carga media de rotura de cada uno de ellos. Calculo el promedio y obtuvo $\bar{x} = 141.9$ kN
- Con una segunda muestra de 20 cables, obtuvo $\bar{x} = 154.8$ kN
- Con una tercera muestra de 20 cables,obtuvo $\bar{x} = 167.7$ kN
- Las muestras se eligen aleatoriamente, por lo que se espera que las diferencias entre esos promedios se atribuyan al azar y no a problemas en la fabricación de los cables



- La empresa toma una muestra de 20 cables y midio la carga media de rotura de cada uno de ellos. Calculo el promedio y obtuvo $\bar{x} = 141.9$ kN
- Con una segunda muestra de 20 cables, obtuvo $\bar{x} = 154.8$ kN
- Con una tercera muestra de 20 cables,obtuvo $\bar{x} = 167.7$ kN
- Las muestras se eligen aleatoriamente, por lo que se espera que las diferencias entre esos promedios se atribuyan al azar y no a problemas en la fabricación de los cables

Nivel de significancia

Nivel de significancia

Es la probabilidad de rechazar la hipótesis nula H_o cuando es verdadera.
Se denota por α

Fijado el nivel de significancia α y usando probabilidades, podremos construir un criterio para determinar si la muestra presenta *evidencia suficiente* para rechazar la hipótesis nula H_o.

En nuestro ejemplo, rechazar H_o equivale a rechazar que la diferencia en 9 kN se debe al azar

Nivel de significancia

Nivel de significancia

Es la probabilidad de rechazar la hipótesis nula H_o cuando es verdadera.
Se denota por α

Fijado el nivel de significancia α y usando probabilidades, podremos construir un criterio para determinar si la muestra presenta *evidencia suficiente* para rechazar la hipótesis nula H_o.

En nuestro ejemplo, rechazar H_o equivale a rechazar que la diferencia en 9 kN se debe al azar

Errores en una prueba de Hipótesis

En general, no se desea que la probabilidad de rechazar la hipótesis nula cuando es verdadera sea demasiado alta. Suele elegirse α igual al 10%, 5% , 1%.

¿Qué errores podemos cometer al tomar decisiones respecto a H_o?

	H_o V	H_o F
Rechaza H_o	Error Tipo I	Decisión correcta
No Rechaza H_o	Decisión correcta	Error Tipo II

α = P(error tipo I) = P(rechazar H_o/H_o es verdadera) es el nivel de significancia, o error α.

β = P(error tipo II) = P(no rechazar H_o/H_o es falsa)

Continuación ejemplo

Error tipo I

La carga media de rotura de la muestra (aleatoria) fue muy baja (por efectos del azar) y se rechaza la Hipótesis nula H_o que la carga media de rotura de la población es de 150 kN, siendo verdadera esta hipótesis.

Consecuencia: La empresa deberá revisar todo el proceso de producción de esos cables, ajustar máquinas, etc., cuando en realidad esto no sería necesario.

Error tipo II

La carga media de rotura de la muestra (aleatoria) fue muy alta (por efectos del azar) y no se rechaza la Hipótesis nula H_o que la carga media de rotura (de la población) es de 150 kN, siendo falsa esta hipótesis.

Consecuencia: La empresa serguirá produciendo y vendiendo cables que no satisfacen ciertos estándares.

Analogía con el sistema de justicia

"Toda acusado se presume inocente, hasta tanto se demuestre lo contrario"

- $H_o =$ el acusado no es culpable
- $H_1 =$ el acusado es culpable
- Prueba de Hipótesis: juicio con pruebas (evidencia) presentadas por la defensa y la acusación. El jurado (regla de decisión) toma la decisión de decidir si el acusado es "culpable" (rechaza H_o) o "no culpable" (no rechaza H_o)
- Importante: Que no haya suficientes pruebas o evidencia para declararlo culpable, no significa que el acusado sea inocente. Solamente se puede concluir que las pruebas presentadas no alcanzan para declararlo culpable.

Objetivo del jucio = Objetivo de Prueba de hipótesis: determinar si la evidencia reunida es suficiente para declararlo culpable (rechazar H_o)

Estadístico de la prueba

Por el momento hemos mencionado/definido:

- el nivel de significancia de la prueba (α)
- H_o y H_1

Pero debe elegirse un estadístico de prueba

Estadístico de prueba

Estadístico (función de una muestra aleatoria) que se utiliza para ser contrastado contra el valor crítico, que está determinado por el nivel de significancia de la prueba y la distribución de probabilidad apropiada.

Con todos estos elementos se construye una regla de decisión para rechazar, o no, la hipótesis nula.

Elementos de una prueba de Hipótesis

1. Elegir nivel de significancia α
2. Identificar parámetro de interés
3. Determinar parámetro nulo y proponer H_o
4. Proponer H_1 apropiada.
5. Determinar el estadístico de la prueba: función de los datos muestrales en los que se basará la decisión de rechazar o no H_o. Dar la fórmula sin reemplazar aún los valores muestrales
6. Establecer la Región de Rechazo o Región Crítica: conjunto de todos los valores del estadístico para los cuales se rechazará la hipótesis H_o para el nivel de significancia elegido
7. Calcular cantidades necesarias,
8. Decidir si H_o se rechaza o no y dar una conclusión en el contexto del problema.

Prueba de Hipótesis - Test para media muestral

Caso I: población normal con σ conocida.

Posibles hipótesis alternativas:

$$H_o : \mu = \mu_o \qquad \text{vs} \qquad \begin{cases} a) H_1 : \mu > \mu_o \\ b) H_1 : \mu < \mu_o \\ c) H_1 : \mu \neq \mu_o \end{cases}$$

Sea $X_1, \ldots, X_n$ muestra aleatoria de tamaño n,

$\mu_{\bar{X}} = \mu, \sigma_{\bar{X}} = \sigma/\sqrt{n}$

El estadístico de la prueba es $Z = \frac{\bar{X}-\mu_o}{\sigma/\sqrt{n}}$.

Region de rechazo para nivel α

$$\begin{cases} a) H_1 : \mu > \mu_o \\ b) H_1 : \mu < \mu_o \\ c) H_1 : \mu \neq \mu_o \end{cases} \qquad \begin{cases} a) z \geq z_\alpha \\ b) z \leq -z_\alpha \\ c) z \geq z_{\alpha/2} \ o \ z \leq -z_{\alpha/2} \end{cases}$$

Región de Rechazo

La región de rechazo de una prueba está determinada por el nivel de significancia y el valor crítico de la prueba.
Supongamos que debemos tomar una determinación en una prueba de cola inferior, es decir:

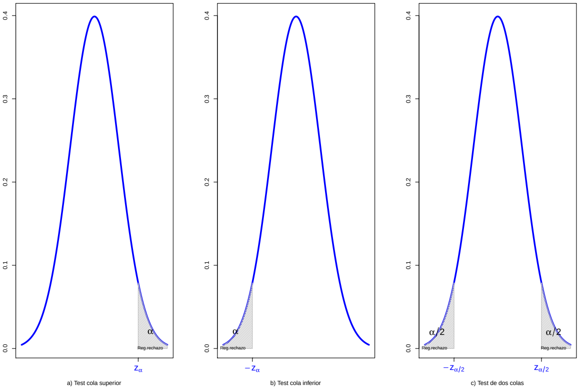
$$H_o : \mu = \mu_o \qquad \text{vs} \qquad H_1 : \mu < \mu_o$$

En este caso, la región de rechazo , a un nivel de significancia α, ses $z < -z_\alpha$. Es decir:

$RR = \{z \in \mathbb{R} : z < -z_\alpha\}$

Como $z = \frac{\bar{x}-\mu_o}{\sigma/\sqrt{n}}$, entonces esa región de rechazo RR es equivalente a :

$$RR = \{\bar{x} \in \mathbb{R} : \bar{x} < -z_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \mu_o\}$$


0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
α
Reg.rechazo
z_α
a) Test cola superior
α
Reg.rechazo
$-z_\alpha$
b) Test cola inferior
α/2
Reg.rechazo
α/2
Reg.rechazo
$-z_{\alpha/2}$
$z_{\alpha/2}$
c) Test de dos colas

Continuación ejemplo

Supongamos $\alpha = 0.05$, y supongamos que sabemos que $\sigma = 20$
Queremos contrastar

$$H_o : \mu = \mu_o \text{ vs } H_1 : \mu < \mu_o$$

- Parámetro nulo $\mu_o = 150$ kN
- Estadístico de prueba: $Z = \frac{\bar{X} - \mu_o}{\sigma/\sqrt{n}}$
- Región de rechazo: RR$=\{z \in \mathbb{R} : z \leq -z_\alpha\} = \{z \in \mathbb{R} : z \leq -z_{0.05}\} = \{z \in \mathbb{R} : z \leq -1.64\}$
- $z = \frac{\bar{x} - \mu_o}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{141.9 - 150}{20/\sqrt{20}} = -1.82$
- Como $-1.82 \in$ RR, entonces concluimos que la muestra presenta evidencia suficiente para rechazar la afirmación del fabricante que sus caños tienen una carga media de rotura de 150 kN
- Si hubiéramos usado RR $= \{\bar{x} \in \mathbb{R} : \bar{x} < -z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \mu_o\}$, entonces comparamos $\bar{x}$=141.9 con $-z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \mu_o = -1.64 \cdot \frac{20}{\sqrt{20}} + 150 = 142.7$. Y Como $\bar{x} = 141.9 < 142.7$ entonces se rechaza H_o

Prueba de Hipótesis - Test para media muestral

Caso II: Muestras grandes.
Si n es grande no es necesario hacer supuestos sobre la distribución de los datos (Teorema Central del Límite). El estadístico de la prueba es $Z = \frac{\bar{X} - \mu_o}{s/\sqrt{n}}$

$$H_o : \mu = \mu_o$$

$$\begin{cases} a) H_1 : \mu > \mu_o \\ b) H_1 : \mu < \mu_o \\ c) H_1 : \mu \neq \mu_o \end{cases}$$

Region de rechazo para nivel α

$$\begin{cases} a) z \geq z_{\alpha} \\ b) z \leq -z_{\alpha} \\ c) z \geq z_{\alpha/2} o z \leq -z_{\alpha/2} \end{cases}$$

Prueba de Hipótesis - Test para media muestral

Caso III: Muestras pequeñas población normal (σ desconocida).
Si n es pequeǹo pero la población es normal, entonces $T = \frac{\bar{X}-\mu_o}{s/\sqrt{n}}$ tiene distribución t con $n-1$ grados de libertad.

$$H_o : \mu = \mu_o, t = \frac{\bar{x} - \mu_o}{s/\sqrt{n}}$$

$$\begin{cases} a) H_1 : \mu > \mu_o \\ b) H_1 : \mu < \mu_o \\ c) H_1 : \mu \neq \mu_o \end{cases}$$

Region de rechazo para nivel α

$$\begin{cases} a) t \geq t_{\alpha,n-1} \\ b) t \leq -t_{\alpha,n-1} \\ c) t \geq t_{\alpha/2,n-1} o t \leq -t_{\alpha/2,n-1} \end{cases}$$

Ejercicios

1. Suponga que las ventas de un artículo pueden modelizarse satisfactoriamente por una distribución normal con media 300 unidades y varianza 900 unidades. Con el objeto de aumentarlas se contrata una campaña publicitaria obteniéndose una venta media por parte de 25 clientes de 350 unidades. ¿Puede decirse al nivel de significación del 5% que la campaña publicitaria fue efectiva? ¿Y si las ventas hubieran sido de 308 unidades?

2. Un fabricante de sistemas rociadores utilizados como protección contra incendios en edificios de oficinas afirma que la temperatura de activación del sistema promedio verdadera es de 130^{o}F. Una muestra de 9 sistemas, cuando se somete a prueba, da una temperatura de activación promedio muestral de 131,08^{o}F. Si la distribución de los tiempos de activación es normal con desviación típica de 1,5^{o}F, ¿contradicen los datos la afirmación del fabricante a un nivel de significación $\alpha = 0{,}01$?

3. Se ha probado la duración de 9 baterías de cierta marca, para ordenadores portátiles. Los tiempos, que siguen una distribución normal, obtenidos (en horas) son:

11,7; 12,2; 10,9; 11,4; 11,3; 12; 11,1; 10,7; 11,6.

Según el fabricante de las baterías, su duración promedio es de 12,1 horas. Se quiere saber con el 99% de certeza si las baterías de esta marca tienen una duración promedio significativamente inferior a 12,1 horas.

4. El propietario de un automóvil sospecha que su vehículo tiene un consumo medio de combustible en carretera superior a los 5,6 litros por cada 100 km, que es lo que el fabricante indica en su publicidad. Para apoyar empíricamente su sospecha observa el consumo medio en 11 viajes seleccionados aleatoriamente entre todos los que realiza en el año, obteniendo los siguientes resultados:

6,1; 6,5; 5,1; 6; 5,9; 5,2; 5,8; 5,3; 6,2; 5,9; 6,3

(Suponga que el consumo medio del automóvil sigue una distribución normal). Apoyándose en estos datos, ¿están fundadas las sospechas del propietario a un nivel de significación del 1%?

Ejemplo

El dueño de un local de cómida rápida instaló en su negocio una nueva máquina de gaseosas. Según las especificaciones, la máquina fue ajustada de manera tal que la cantidad de bebida que sirva esté distribuida de forma aproximadamente normal con una media de 200 ml y una desviación estándar de 15 ml. Luego de probarla en repetidas oportunidades, tanto el dueño del negocio como empleados y clientes sospechan que el contenido de bebida que sirve la máquina no es igual a 200 ml.

¿Cuán factible es que si $X =$ contenido de gaseosa por vaso, entonces $X \sim \mathcal{N}(200, (15)^2)$?

- $\mu_o = 200$ ml
- $H_o : \mu = \mu_o$ vs $H_1 : \mu \neq \mu_o$.
  Equivalentemente, $H_o : \mu = 200ml$ vs $H_1 : \mu \neq 200ml$

Ejemplo

El dueño de un local de cómida rápida instaló en su negocio una nueva máquina de gaseosas. Según las especificaciones, la máquina fue ajustada de manera tal que la cantidad de bebida que sirva esté distribuida de forma aproximadamente normal con una media de 200 ml y una desviación estándar de 15 ml. Luego de probarla en repetidas oportunidades, tanto el dueño del negocio como empleados y clientes sospechan que el contenido de bebida que sirve la máquina no es igual a 200 ml.

¿Cuán factible es que si $X =$ contenido de gaseosa por vaso, entonces $X \sim \mathcal{N}(200, (15)^2)$?

- $\mu_o = 200$ ml
- $H_o : \mu = \mu_o$ vs $H_1 : \mu \neq \mu_o$.
  Equivalentemente, $H_o : \mu = 200ml$ vs $H_1 : \mu \neq 200ml$

Continuación ejemplo

Supongamos se quiere contrastar las hipótesis

$$H_o : \mu = 200ml \text{ vs } \mathrm{H}_1 : \mu \neq 200\mathrm{ml}$$

a un nivel de significancia $\alpha = 0.1$

Se sirven 25 vasos de gasesosa y se obtiene $\bar{x} = 195\text{ml}$.

- Se supone normalidad en las observaciones, con σ conocida, entonces podemos utilizar un estadístico $Z = \frac{\bar{X} - \mu_o}{\sigma/\sqrt{(n)}}$.
- $RR = \{z \in \mathbb{R} : z \geq z_{\alpha/2} \text{ o } z \leq -z_{\alpha/2}\} = (-\infty, -z_{\alpha/2}) \cup (z_{\alpha/2}, +\infty) = (-\infty, -1.64) \cup (1.64, +\infty)$
- El estadístico basado en la muestra, $z = \frac{\bar{x} - \mu_o}{\sigma/\sqrt{(n)}} = \frac{195 - 200}{15/\sqrt{25}} = -1.67 \in RR \Rightarrow$ se rechaza H_o a un nivel de significancia del 10%

Continuación ejemplo

Supongamos se quiere contrastar las hipótesis

$$H_o : \mu = 200ml \text{ vs } \mathrm{H}_1 : \mu \neq 200\mathrm{ml}$$

a un nivel de significancia $\alpha = 0.1$

Se sirven 25 vasos de gasesosa y se obtiene $\bar{x} = 195\text{ml}$.

- Se supone normalidad en las observaciones, con σ conocida, entonces podemos utilizar un estadístico $Z = \frac{\bar{X} - \mu_o}{\sigma/\sqrt{(n)}}$.
- $RR = \{z \in \mathbb{R} : z \geq z_{\alpha/2} \text{ o } z \leq -z_{\alpha/2}\} = (-\infty, -z_{\alpha/2}) \cup (z_{\alpha/2}, +\infty) = (-\infty, -1.64) \cup (1.64, +\infty)$
- El estadístico basado en la muestra, $z = \frac{\bar{x} - \mu_o}{\sigma/\sqrt{(n)}} = \frac{195-200}{15/\sqrt{25}} = -1.67 \in RR \Rightarrow$ se rechaza H_o a un nivel de significancia del 10%

Continuación ejemplo

Supongamos se quiere contrastar las hipótesis

$$H_o : \mu = 200ml \text{ vs } \mathrm{H}_1 : \mu \neq 200\mathrm{ml}$$

a un nivel de significancia $\alpha = 0.1$

Se sirven 25 vasos de gasesosa y se obtiene $\bar{x} = 195\text{ml}$.

- Se supone normalidad en las observaciones, con σ conocida, entonces podemos utilizar un estadístico $Z = \frac{\bar{X} - \mu_o}{\sigma / \sqrt{(n)}}$.
- RR $= \{z \in \mathbb{R} : z \geq z_{\alpha/2} \text{ o } z \leq -z_{\alpha/2}\} = (-\infty, -z_{\alpha/2}) \cup (z_{\alpha/2}, +\infty) = (-\infty, -1.64) \cup (1.64, +\infty)$
- El estadístico basado en la muestra, $z = \frac{\bar{x} - \mu_o}{\sigma / \sqrt{(n)}} = \frac{195 - 200}{15/\sqrt{25}} = -1.67 \in RR \Rightarrow$ se rechaza H_o a un nivel de significancia del 10%

Continuación ejemplo

Supongamos se quiere contrastar las hipótesis

$$H_o : \mu = 200ml \text{ vs } \mathrm{H}_1 : \mu \neq 200\mathrm{ml}$$

a un nivel de significancia $\alpha = 0.1$

Se sirven 25 vasos de gasesosa y se obtiene $\bar{x} = 195\text{ml}$.

- Se supone normalidad en las observaciones, con σ conocida, entonces podemos utilizar un estadístico $Z = \frac{\bar{X} - \mu_o}{\sigma / \sqrt{(n)}}$.
- $RR = \{z \in \mathbb{R} : z \geq z_{\alpha/2} \text{ o } z \leq -z_{\alpha/2}\} = (-\infty, -z_{\alpha/2}) \cup (z_{\alpha/2}, +\infty) = (-\infty, -1.64) \cup (1.64, +\infty)$
- El estadístico basado en la muestra, $z = \frac{\bar{x} - \mu_o}{\sigma / \sqrt{(n)}} = \frac{195 - 200}{15/\sqrt{25}} = -1.67 \in RR \Rightarrow$ se rechaza H_o a un nivel de significancia del 10%

Continuación ejemplo

Supongamos ahora que $\alpha = 0.05$, y que se van a contrastar las hipótesis anteriores utilizando la misma muestra que dió $\bar{x} = 195ml$.

¿ Dónde afectaría ese cambio de nivel de significancia en el procedimiento anterior?

- El estadístico es $Z = \frac{\bar{X} - \mu_o}{\sigma/\sqrt{(n)}}$.
- $RR = \{z \in \mathbb{R} : z \geq z_{\alpha/2} \ \text{ o } z \leq -z_{\alpha/2}\} = (-\infty, -z_{\alpha/2}) \cup (z_{\alpha/2}, +\infty) = (-\infty, -1.96) \cup (1.96, +\infty)$
- El estadístico basado en la muestra, $z = \frac{\bar{x} - \mu_o}{\sigma/\sqrt{(n)}} = \frac{195 - 200}{15/\sqrt{25}} = -1.67 \ \notin RR \Rightarrow$ NO se rechaza H_o a un nivel de significancia del 5%

Continuación ejemplo

Supongamos ahora que $\alpha = 0.05$, y que se van a contrastar las hipótesis anteriores utilizando la misma muestra que dió $\bar{x} = 195ml$.

¿ Dónde afectaría ese cambio de nivel de significancia en el procedimiento anterior?

- El estadístico es $Z = \frac{\bar{X}-\mu_o}{\sigma/\sqrt{(n)}}$.
- $RR = \{z \in \mathbb{R} : z \geq z_{\alpha/2} \ \text{ o } z \leq -z_{\alpha/2}\} = (-\infty, -z_{\alpha/2}) \cup (z_{\alpha/2}, +\infty) = (-\infty, -1.96) \cup (1.96, +\infty)$
- El estadístico basado en la muestra, $z = \frac{\bar{x}-\mu_o}{\sigma/\sqrt{(n)}} = \frac{195-200}{15/\sqrt{25}} = -1.67 \ \notin RR \Rightarrow$ NO se rechaza H_o a un nivel de significancia del 5%

Continuación ejemplo

Supongamos ahora que $\alpha = 0.05$, y que se van a contrastar las hipótesis anteriores utilizando la misma muestra que dió $\bar{x} = 195ml$.

¿ Dónde afectaría ese cambio de nivel de significancia en el procedimiento anterior?

- El estadístico es $Z = \frac{\bar{X} - \mu_o}{\sigma/\sqrt{(n)}}$.
- RR $= \{z \in \mathbb{R} : z \geq z_{\alpha/2} \;\; \text{o} \; z \leq -z_{\alpha/2}\} = (-\infty, -z_{\alpha/2}) \cup (z_{\alpha/2}, +\infty) = (-\infty, -1.96) \cup (1.96, +\infty)$
- El estadístico basado en la muestra, $z = \frac{\bar{x} - \mu_o}{\sigma/\sqrt{(n)}} = \frac{195-200}{15/\sqrt{25}} = -1.67 \;\; \notin RR \Rightarrow$ NO se rechaza H_o a un nivel de significancia del 5%

Continuación ejemplo

Supongamos ahora que $\alpha = 0.05$, y que se van a contrastar las hipótesis anteriores utilizando la misma muestra que dió $\bar{x} = 195ml$.

¿ Dónde afectaría ese cambio de nivel de significancia en el procedimiento anterior?

- El estadístico es $Z = \frac{\bar{X}-\mu_o}{\sigma/\sqrt{(n)}}$.
- $RR = \{z \in \mathbb{R} : z \geq z_{\alpha/2} \ \text{ o } z \leq -z_{\alpha/2}\} = (-\infty, -z_{\alpha/2}) \cup (z_{\alpha/2}, +\infty) = (-\infty, -1.96) \cup (1.96, +\infty)$
- El estadístico basado en la muestra, $z = \frac{\bar{x}-\mu_o}{\sigma/\sqrt{(n)}} = \frac{195-200}{15/\sqrt{25}} = -1.67 \ \notin RR \Rightarrow$ NO se rechaza H_o a un nivel de significancia del 5%

Prueba de Hipótesis - Valor p

- Hasta ahora la conclusión de un test de hipótesis es: Se rechaza H_o o no se rechaza H_o a un nivel de significancia α.
- No se dice cuán cerca o lejos está el estadístico basado en la muestra del valor crítico.
- Diferentes criterios respecto a las consecuencias de rechazar o no H_o

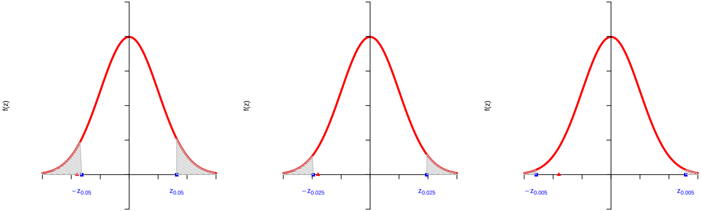
Prueba de Hipótesis - Valor p

$$H_o : \mu = 200ml \ vs \ H_1 : \mu \neq 200ml$$

H_o se rechaza si $z \leq -z_{\alpha/2}$ ó $z \geq z_{\alpha/2}$. Supongamos se toma una muestra y resulta $\bar{x} = 195$ (y por lo tanto $z = -1.67$)

¿Cuándo se rechazará H_o?

$\alpha/2$	Región de Rechazo	Conclusión
0.05	$z \leq -1.645$ ó $z \geq 1.645$	rechaza H_o
0.025	$z \leq -1.96$ ó $z \geq 1.96$	no rechaza H_o
0.005	$z \leq -2.58$ ó $z \geq 2.58$	no rechaza H_o



Prueba de Hipótesis - Valor p

Si α decrece, z_α crece, la región de rechazo se hace más pequeña y en algún momento no se rechaza H_o

P-valor

El Valor p de un test de hipótesis es el menor nivel de significancia para el cual H_o debería ser rechazada al realizar un test de hipótesis con un dado conjunto de datos.

Fijado α (máxima probabilidad de error de tipo I) y una vez determinado el *valor p* la conclusión resulta de comparar este valor con α.

1. valor p $\leq \alpha \Rightarrow$ rechazar H_o a un nivel de significancia α
2. valor p $> \alpha \Rightarrow$ no rechazar H_o a un nivel de significancia α

Prueba de Hipótesis - Valor p para un test z

$$\text{p-valor} = \qquad \text{p} = \qquad \begin{cases} 1-\Phi(z) & \text{test cola superior} \\ \Phi(z) & \text{test cola inferior} \\ 2(1-\Phi(|z|)) & \text{test de dos colas} \end{cases}$$

En nuestro ejemplo,

$$p = 2(1-\Phi(1.67)) = 0.095$$

Seguimos con el ejemplo....

$$H_o : \mu = 200ml \ vs \ H_1 : \mu \neq 200ml$$

La decisión es:

- Rechazar H_o si $\frac{\bar{X}-\mu_o}{\sigma/\sqrt{n}} \in (-\infty, -z_{\alpha/2}) \cup (z_{\alpha/2}, +\infty)$
- NO rechazar H_o si $\frac{\bar{X}-\mu_o}{\sigma/\sqrt{n}} \notin (-\infty, -z_{\alpha/2}) \cup (z_{\alpha/2}, +\infty)$, esto es,
  NO rechazar H_o si $\frac{\bar{X}-\mu_o}{\sigma/\sqrt{n}} \in (-z_{\alpha/2}, z_{\alpha/2})$ (1)

Supongamos NO se rechaza H_o, (1) nos dice que

$$-z_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{X}-\mu_o}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z_{\alpha/2}$$

Despejando μ_o esto es equivalente a

$$\bar{X} - z_{\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n} \leq \mu_o \leq \bar{X} + z_{\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n}$$

(2)

La desigualdad (2) de la diapositiva anterior equivale a decir que

$$\mu_o \in (\bar{X} - z_{\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n}; \bar{X} + z_{\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n})$$

Este último intervalo es el Intervalo de Confianza del $(1 - \alpha\%)$ que se construiría para el verdadero parámetro μ

La regla de decisión quedaría:

- Rechazar H_o si $\mu_o \notin (\bar{X} - z_{\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n}; \bar{X} + z_{\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n})$
- NO rechazar H_o si $\mu_o \in (\bar{X} - z_{\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n}; \bar{X} + z_{\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n})$

Errores en una prueba de Hipótesis

En general, no se desea que la probabilidad de rechazar la hipótesis nula cuando es verdadera sea demasiado alta. Suele elegirse α igual al 10%, 5% , 1%.

¿Qué errores podemos cometer al tomar decisiones respecto a H_o?

	H_o V	H_o F
Rechaza H_o	Error Tipo I	Decisión correcta
No Rechaza H_o	Decisión correcta	Error Tipo II

α = P(error tipo I) = P(rechazar H_o/H_o es verdadera) es el nivel de significancia, o error α.

β = P(error tipo II) = P(no rechazar H_o/H_o es falsa)

Continuación ejemplo máquinas bebidas

Supongamos ahora que hay serias sospechas que la máquina está sirviendo menos de 200ml por vaso. En este nuevo contexto las hipótesis a contrastar son:

$$H_o : \mu = 200ml \text{ vs } \mathrm{H}_1 : \mu < 200\mathrm{ml}$$

El dueño del negocio decide que va a rechazar la afirmación de la empresa que esa máquina sirve en promedio 200ml de gaseosa por vaso si, dada una muestra aleatoria, $\bar{X} < 190$.

Supongamos $X_i \sim N(\mu, 15^2), i = 1, \ldots, 9 \Rightarrow \bar{X} \sim N(\mu, 15^2/9)$
$\alpha =$ P(rechazar H_o/ H_o es V)

$$= P(\bar{X} < 190/\mu = 200) = P(\frac{\bar{X}-200}{15/\sqrt{9}} < \frac{190-200}{15/3})$$

$$= P(Z < -2) = 0.023$$

Error tipo II - Ejemplo

β = P(error tipo II) = P(no rechazar H_o / H_o es falsa)

Para calcular β debe especificarse la hipótesis alternativa, pues estamos diciendo que H_o es falsa.
En el ejemplo, supongamos que se justifica reparar la máquina cuando el contenido promedio de bebida por vaso es inferior a 185ml, esto es se rechaza la hipótesis $\mu = 200$ ml, cuando $\mu = 185$

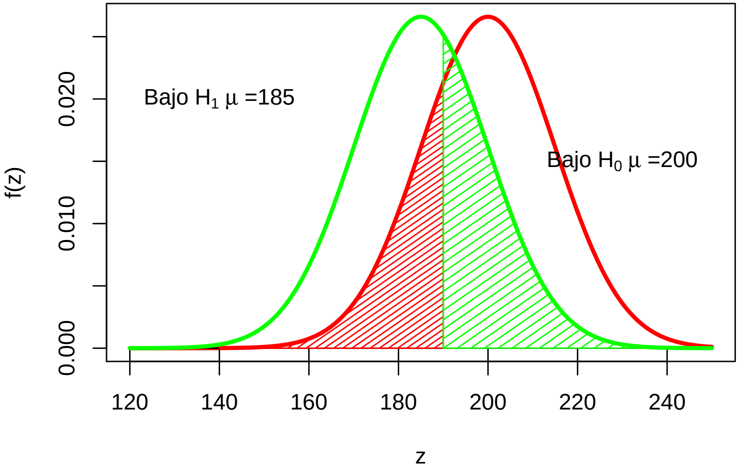
$$\beta(185) = P(\bar{X} \geq 190/\mu = 185) = P(\frac{\bar{X} - 185}{15/3} \geq \frac{190 - 185}{15/3})$$

$$= 1 - P(Z < 1) = 1 - 0.84 = 0.16$$

Error de tipo II

En esta prueba unilateral,
$\beta(\mu) = P(\frac{\bar{X}-\mu}{15/\sqrt{9}} \geq \frac{\mu_o-\mu}{15/\sqrt{9}}) = 1 - \Phi(\frac{\mu_o-\mu}{15/\sqrt{9}})$

Error tipo I vs Error tipo II



Prueba de Hipótesis - Test para proporciones

Sea p la proporción de individuos u objetos de una población que posee cierta propiedad (autos que satisfacen una norma específica, animales afectados por cierta enfermedad, fumadores que eligen cierta marca de cigarrillos, etc.)

Si n grande $\Rightarrow$ pruebas de hipótesis relacionadas a p son un caso especial del caso más general para muestras grandes utilizando la relación que existe entre las distribuciones Binomial y Normal (n grande).

$$H_o : p = p_o, z = \frac{\hat{p} - p_o}{\sqrt{p_o(1-p_o)/n}}$$

$$\begin{cases} a) H_1 : p > p_o \\ b) H_1 : p < p_o \\ c) H_1 : p \neq p_o \end{cases}$$

Region de rechazo para nivel α

$$\begin{cases} a) z \geq z_\alpha \\ b) z \leq -z_\alpha \\ c) z \geq z_{\alpha/2} o z \leq -z_{\alpha/2} \end{cases}$$

Ejemplo: Ej 5 TP11

Se desea determinar la proporciónn de familias que poseen ordenador personal con conexión a Internet en Corrientes. Para ello, se toma una muestra aleatoria de 400 familias que poseen ordenador y se observa que de ella 188 poseen conexión a Internet.
a) Contrastar para un nivel de significancia $\alpha = 0,05$ si se puede afirmar que el 50% de los correntinos que poseen ordenador tienen conexión a Internet.

Ejercicio 6 TP 11

Cierta empresa fabricante de partes de computadoras está estudiando la oferta de un proveedor para renovar la máquina que fabrica las partes. Para tomar la decisión de adquirir o no la máquina ofrecida se va a utilizar la siguiente regla de decisión: si necesitan retocarse el 1% o menos de las partes fabricadas por la máquina, ésta será adquirida; en caso contrario, se rechaza la máquina. Se selecciona una muestra de 500 partes, de las cuales 7 necesitan retocarse. A partir de estos datos, ¿cuál es la decisión que debería tomar la dirección de la empresa? Utilice un nivel de significacia del 5%.

Ejercicio complementario

Sea p la proporción real de fanáticos de la Coca Cola que realmente pueden distinguir una Coca Cola de una Pepsi. Los de Pepsi afirman que $p = 0.5$. Si $X =$ número de identificaciones correctas en una muestra de 100 bebedores de Coca Cola y se observa $x = 60$, que se puede decir a un nivel de significancia del 0.05 sobre la afirmación de la Pepsi?

Prueba de Hipótesis - Diferencia de Medias de Poblaciones Normales

Situaciones:

1. Un gastroenterólogo desea comparar dos dietas para curar una úlcera
2. Un agrónomo compara dos fertilizantes A y B aplicados sobre una variedad de soja
3. Un ingeniero compara la resistencia de dos materiales A y B al calor.

En cada una de estas situaciones se desea comparar las Medias de dos distribuciones. Esto es, se quiere probar la hipótesis $H_o : \mu_A - \mu_B = \Delta_0$ vs alguna hipótesis apropiada:
a) $H_1 : \mu_1 - \mu_2 > \Delta_0$, b)$H_1 : \mu_1 - \mu_2 < \Delta_0$, c) $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \Delta_0$.

Prueba de Hipótesis - Diferencia de Medias de Poblaciones Normales

Supuestos:

- $X_1, \ldots, X_n$ muestra aleatoria de una población con media μ_1 y varianza σ_1^2
- $Y_1, \ldots, Y_m$ muestra aleatoria de una población con media μ_2 y varianza σ_2^2
- Las muestras X e Y son independientes entre sí

Un estimador "natural" de $\mu_1 - \mu_2$ es $\bar{X} - \bar{Y}$,

$$\sigma_{\bar{X}-\bar{Y}} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}$$

Prueba de Hipótesis - Diferencia de Medias de Poblaciones Normales

Caso I: Varianzas poblacionales (σ_1^2, σ_2^2) conocidas, es decir, $X_i \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y_i \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ con σ_1, σ_2 conocidas. Entonces:

- $\bar{X} \sim N(\mu_1, \sigma_1^2/m)$, $\bar{Y} \sim N(\mu_2, \sigma_2^2/n)$ y son independientes entre sí.
- $Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}} \sim N(0, 1)$

$H_o : \mu_1 - \mu_2 = \Delta_0$ y el estadístico de la prueba es $z = \frac{\bar{x} - \bar{y} - \Delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}}$

Hipótesis alternativa	Región crítica para nivel α
$H_1 : \mu_1 - \mu_2 > \Delta_0$	$z \geq z_\alpha$
$H_1 : \mu_1 - \mu_2 < \Delta_0$	$z \leq -z_\alpha$
$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \Delta_0$	$z \geq z_{\alpha/2}$ ó $z \leq -z_{\alpha/2}$

Caso II: Si los tamaños de las muestras son grandes ($m \geq 30$ y $n \geq 30$) , el Teorema Central del Límite dice que $\bar{X} - \bar{Y}$ tiene aproximadamente distribución normal. Si no se conocen σ_1 y σ_2, s_1 y s_2 son buenas aproximaciones.

En este caso

$$z = \frac{\bar{x} - \bar{y} - \Delta_0}{\sqrt{\frac{s_1^2}{m} + \frac{s_2^2}{n}}}$$

es el estadístico de prueba , $H_o : \mu_1 - \mu_2 = \Delta_0$ y

Hipótesis alternativa	Región crítica para nivel α
$H_1 : \mu_1 - \mu_2 > \Delta_0$	$z \geq z_\alpha$
$H_1 : \mu_1 - \mu_2 < \Delta_0$	$z \leq -z_\alpha$
$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \Delta_0$	$z \geq z_{\alpha/2}$ ó $z \leq -z_{\alpha/2}$

Situaciones:

- Al menos una de las muestras no es lo suficientemente grande, (no es válido el TCL)
- Varianzas poblacionales desconocidas

Supondremos muestras independientes con distribuciones normales.

Para decidir si las varianzas poblacionales son iguales o distintas, se usa la Prueba de homogeneidad de Varianzas, que escapa a los contenidos de este curso.

Ejercicio 1

Se realizó un experimento para comparar la fuerza de adhesión de cemento Portland modificado vs la del cemento Portland sin modificar y se obtuvo $\bar{x} = 18.12 kgf/cm^2$ para el cemento modificado (m = 40), e $\bar{y} = 16.87 kgf/cm^2$ para el cemento no modificado (n = 32). Si $\mu_1,\ \mu_2$ son las verdaderas fuerzas de adhesión para los cementos modificados y sin modificar, respectivamente,

- suponiendo $\sigma_1 = 1.6, \sigma_2 = 1.4$, probar $H_o : \mu_1 - \mu_2 = 0$ vs $H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 0$ a un nivel de significancia $\alpha = 0.01$
- ¿cuál sería la conclusión del ejercicio anterior si $\sigma_1 y \sigma_2$ fueran desconocidos pero $s_1 = 1.6$ y $s_2 = 1.4$?

Ejercicio 2

$\mu_1 y \mu_2$ representan las verdaderas distancias promedio de frenado a 70km/h de un mismo tipo de auto equipado con sistema de frenos ABS vs autos equipados con frenos convencionales. Suponiendo normalidad en las mediciones, ¿ qué puede concluir a un nivel $\alpha = 0.01$ si quiere probar las hipótesis $H_o : \mu_1 - \mu_2 = -10$ vs $H_1 : \mu_1 - \mu_2 < -10$ para los siguientes datos?:
$m = 32,\ \bar{x} = 115.7,\ s_1 = 5.03,\ n = 30, \bar{y} = 129.3\ s_2 = 5.38$

Prueba de Hipótesis - Diferencia de Proporciones muestras grandes

Supuestos:

- $X_1, \ldots, X_n$ muestra aleatoria de una población $\mathrm{B}(p_1, n)$
- $Y_1, \ldots, Y_m$ muestra aleatoria de una población $\mathrm{B}(p_2, m)$
- Las muestras X e Y son independientes entre sí

Entonces

$$Z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1 q_1}{n} + \frac{p_2 q_2}{m}}}$$

tiene, aproximadamente, distribución normal estándar.

- $H_o : p_1 - p_2 = 0$,
- El estadístico de prueba es $z = \frac{\hat{p_1} - \hat{p_2}}{\sqrt{\frac{\hat{p_1}\hat{q_1}}{n} + \frac{\hat{p_2}\hat{q_2}}{m}}}$

$$\begin{cases} a) H_1 : p_1 - p_2 > 0 \\ b) H_1 : p_1 - p_2 < 0 \\ c) H_1 : p_1 - p_2 \neq 0 \end{cases}$$

Region de rechazo para nivel α

$$\begin{cases} a) z \geq z_{\alpha} \\ b) z \leq -z_{\alpha} \\ c) z \geq z_{\alpha/2} o z \leq -z_{\alpha/2} \end{cases}$$

Ejemplo:

Se desea probar si la proporción de perros enfermos de leishmaniasis en dos regiones, consideradas geográficamente distintas, son estadísticamente diferentes.

Se tomaron al azar 400 perros de la región 1, y se encontró que 190 de ellos estaban enfermos. En la región 2 se tomó una muestra de 800 perros, de los cuales 300 estaban enfermos. Tomando $\alpha = 0.05$, ?' que puede decir acerca de la hipótesis planteada?

Pruebas de Bondad de Ajuste

<u>Situación</u>:

Se contó el número de defectos que tenían 60 circuitos eléctricos, obteniéndose la siguiente tabla:

Número de	**Frecuencia**
Defectos	**Observada**
0	32
1	15
2	9
3	4

Si $X =$ número de defectos por circuito, ¿Qué distribución tendrá X?

Pruebas de Bondad de Ajuste

Para determinar si un conjunto de datos experimentales tienen una distribución teórica determinada, puede realizarse un Test de Bondad de Ajuste. En este curso sólo veremos el Test de Pearson, basado en el estadístico χ^2

Ejemplo: Se lanza una moneda 100 veces, bajo el supuesto que la moneda es equilibrada. Se obtienen los siguientes resultados:

Frecuencias	**CARA**	**SECA**
Observadas	70	30
Esperadas	50	50

Bajo el supuesto teórico que la moneda es equilibrada, se "espera" observar 50 caras en los 100 lanzamientos de la moneda.
Se propone la hipótesis H_o: $X \sim B(100, 0.5)$ vs H_1: $X \not\sim B(100, 0.5)$

Teorema 12.1: Si $X_1, X_2, \ldots, X_k$ es un vector aleatorio multinomial que puede tomar valores $v_1, \ldots, v_k$ (conocidos) con parámetros $n, p_1, p_2, \ldots, p_k$ entonces $\sum_{i=1}^{k} \frac{(X_i - np_i)^2}{np_i}$ converge en distribución a una v.a. con distribución χ^2 con $k-1$ grados de libertad.

Observaciones:

- Hay k clases distintas, la probabilidad de éxito en cada clase es p_i
- X_i denota la cantidad de observaciones en la clase i. Suele representarse como O_i (frecuencia observada en la clase i)
- $e_i = np_i$ es la "frecuencia esperada" en la clase i, bajo H_o
- Si existiera concordancia entre las frecuencias observadas (O_i) y las esperadas (E_i), la suma $\sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \approx 0$. Dicha suma es el estadístico que se usa en algunas pruebas de bondad de ajuste.
- Si el número de grados de libertad es menos que 1, y $n < 50$ se recomienda aplicar la corrección de Yates por continuidad y que consiste en considerar: $\chi^2_{ob} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(o_i - e_i - 0.5)^2}{e_i}$
- Si en la tabla de frecuencias esperadas, en algunas de las celdas la frecuencia es menor que 5, entonces esa fila debe combinarse con una de las filas contiguas, formando una sola categoría antes de calcular las diferencias entre las frecuencias observadas y las esperadas. El cálculo del número de grados de libertad debe efectuarse después del reagrupamiento.

Pruebas de Bondad de Ajuste

Procedimiento:

El procedimiento requiere de una muestra aleatoria de tamaño n de la población cuya distribución está bajo cuestionamiento.

1. Fijado un nivel de signficiancia α,
2. se formulan las hipótesis:H_o: la población tiene determinada distribución vs H_a: la población no tiene la distribución indicada en H_o
3. Se clasifican estas n observaciones en k categorías disjuntas, siendo O_i el número de observaciones en la categoría i-ésima, i $=$ 1,...,k.
4. Se calcula E_i: la frecuencia que se esperaría observar en la clase i bajo H_o.
5. Se calcula el estadístico del test: $\chi^2_O = \sum_{i=1}^{k} \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i}$
6. Se determina $\chi^2_{\alpha,k-1}$ (teórico) en función del valor de significación y de los grados de libertad (k-1), donde k es el número de clases o categorías.
7. Se formula la regla de decisión: Rechazar H_o si $\chi^2_{ob} > \chi^2_{\alpha,k-1}$
8. Conclusión

Pruebas de Bondad de Ajuste

Observaciones:

1. En estas pruebas de hipótesis, si se rechaza H_o se puede decir que, en base a la evidencia presentada por la muestra y a un nivel de significancia del $100 \cdot \alpha\%$ la distribución de los datos NO es la propuesta en H_o.
2. Si no se rechaza H_o, NO se puede concluir que los datos tienen la distribución propuesta en H_o. Sólo alcanza para concluir que la muestra no presenta evidencia suficiente para decir, con un nivel de significancia de $100 \cdot \alpha\%$ que la distribución sea distinta a la propuesta en H_o.

Ejemplo:

1. ¿ Qué se puede decir de la moneda del segundo ejemplo?
2. Estamos en condiciones de decir algo sobre la distribución de la v.a. del ejemplo 1?.
   - $X \sim Poisson$
   - No conocemos el valor de λ

Teorema 12.2: Si X es una v.a. con distribución F_X que satisface ciertas condiciones de regularidad, con parámetros $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r$. Sea $A_1, A_2, \ldots, A_k$ (k>r+1) una partición de R_X (rango de la v.a.), y sean $\hat{\Theta}_1, \hat{\Theta}_2, \ldots, \hat{\Theta}_r$ los estimadores de máxima verosimilitud de los parámetros, basados en una muestra aleatoria de tamaño n de X. Sea $P_i = P(X \in A_i), i = 1, \ldots, k$, donde los parámetros han sido reemplazados por sus estimaciones. Entonces ,

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{(Y_i - nP_i)^2}{nP_i}$$

converge en distribución a una v.a. con distribución χ^2 con $k - r - 1$ grados de libertad, Y_i es la cantidad de veces que $X \in A_i$ en la muestra.

Aplicación al caso de v.a. continuas

El tiempo de vuelo de una aerolínea comercial entre las ciudades de Corrientes y Buenos Aires, medido desde el momento que despega hasta que aterriza, es una v.a. X. En base a experiencias realizadas bajo condiciones similares (aeronave, condiciones climáticas, etc) se espera que X siga una distribución normal. Se midió el tiempo (en minutos) de 80 de estos vuelos, obteniéndose los siguientes resultados:

Continuación Ejemplo

Tiempo de vuelo	Cantidad de vuelos
$t \leq 70$	10
$70 < t \leq 80$	22
$80 < t \leq 90$	25
$90 < t \leq 100$	18
$t > 100$	5

Si además informan que los estimadores de máxima verosimilitud de μ y σ son $\hat{\mu} = 82$ y $\hat{\sigma} = 10$ respectivamente, ¿ qué se puede decir de la distribución del tiempo de vuelo entre Corrientes y Buenos Aires, con un nivel de significancia del $100 * \alpha\%$?

Aplicación variables categóricas

Se sabe que en un país la distribución del grupo sanguíneo de los habitantes es: A: 35%, B: 10%, AB: 6%, O: 49%. Se extrae una muestra aleatoria de 200 personas de una localidad de ese país y se obtienen las siguientes frecuencias: A: 50, B: 30, AB: 18 y O: 102. ¿ Puede afirmarse que la distribución del grupo sanguíneo de los habitantes de esa localidad es igual a la distribución del país? ($\alpha = 0.05$).

- Hasta ahora se consideró una única variable cuyas observaciones en una o mś poblaciones dan lugar a la formulación de hipótesis que se contrastan empleando un test apropiado.
- Dadas dos variables medidas sobre los mismos individuos: ¿existirá alguna relación entre ellas?, ¿los valores que toma una, estarán condicionados por los que toma la otra?
  1. Variables cuantitativas: Análisis de regresión y correlación (Unidad 13): tratan de determinar si existe algun tipo de relación funcional entre variables y la intensidad de dicha relación. Ejemplo: Estatura y peso de personas adultas, estarán relacionados?
  2. Variables cualitativas: Pruebas de independencia (tablas de contingencia). Ejemplo: Habitos de sedentarismo y Alta presión arterial están relacionados?

Ejemplo:

En un experimento que se realizó a los efectos de estudiar si existe relación entre el hábito de fumar y la hipertensión se tomó una muestra aleatoria de 180 individuos que fueron clasificados en la siguiente *tabla de contingencia*

/Hábito de fumar Hipertensión /	No Fuma	Fumador moderado moderado	Fumador en exceso en exceso	Total
Con Hipertensión	21	36	30	87
Sin Hipertensión	48	26	19	93
Totales	69	62	49	180

Pregunta: ¿La hipertensión está asociada con el hábito de fumar?

Prueba de Hipótesis

H_o: La hipertensión es independiente del hábito de fumar, vs
H_1: La hipertensión no es independiente del hábito de fumar.

Procedimiento:
Sean A y B dos características que poseen los individuos de una población. Se extrae de ella una muestra al azar de tamaño n y se anotan en la tabla de contingencia $(r \times s)$ las frecuencias observadas. A esta tabla de frecuencias observadas corresponde una tabla de frecuencias esperadas que se obtienen bajo el supuesto de independencia de las características A y B.

Frecuencias Observadas

A / B	c_1 c_2 ...	Totales
c_1	o_{11} c_{12} ...	$f_{1.}$
c_2	o_{21} c_{22} ...	$f_{2.}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
c_r	o_{r1} c_{r2} ...	$f_{r.}$
Totales	$c_{.1}$ $c_{.2}$ ...	n

Frecuencias Esperadas

A / B	c_1 c_2 ... c_s	Totales
c_1	e_{11} e_{12} $\ldots_{1s}$	$f_{1.}$
c_2	e_{21} e_{22} $\ldots_{2s}$	$f_{2.}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
c_r	e_{r1} e_{r2} $\ldots_{rs}$	$f_{r.}$
Totales	$c_{.1}$ $c_{.2}$ ...	n

- Sea e_{ij}: frecuencia esperada de la celda ubicada en la intersección de la fila i y la columna j.
- La probabilidad de ocurrencia del suceso que tiene esa frecuencia es, (definición frecuencial de la probabilidad) $p_{ij} = e_{ij}/n$.
- Si las características A y B son independientes $\Rightarrow \quad p_{ij} = p_{i.} \cdot p_{.j}$ y $e_{ij} = n \cdot \frac{f_{i.}}{n} \cdot \frac{c_{.j}}{n} = \frac{f_{i.} c_{.j}}{n}$.
- Se calcula $\chi^2_{ob} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i}$
- Fijado el nivel de significancia α, se contrasta χ^2_{ob} contra el estadístico del test, que es $\chi^2_{ngl,\alpha}$ donde ngl = (s-1)x(r-1).
- Se formula la regla de decisión, Rechazar H_o si $\chi^2_{ob} > \chi^2_{ngl,\alpha}$

Resolver ejemplo usando $\alpha = 0.05$

- Situación: r poblaciones en estudio, cada una de ellas dividida en las mismas c categorías.
- Pregunta: Las proporciones en las c categorías, serán las mismas para todas las poblaciones?
- Prueba: H_o: poblaciones son homogéneas respecto a las categorías vs H_1: poblaciones no son homogénas respecto a las categorías
- Procedimiento: Similar al de Pruebas de Independencia.

Ejemplo

Se seleccionan al azar muestras de 300 personas adultas de la ciudad A, 200 de la ciudad B y 200 de la ciudad C y se las consulta sobre su intención de voto. La tabla de frecuencias observadas es la siguiente:

partido / Ciudad	A	B	C	Totales
Blanco	98	75	76	249
Rojo	50	45	30	125
Azul	90	60	68	218
NS/NC	62	20	26	108
Totales	300	200	200	

Pregunta: A un nivel de significancia $\alpha = 0.01$ Son homogéneas las intenciones de voto en las tres ciudades para los distintos partidos?

Frecuencias Esperadas

partido / Ciudad	A	B	C	Totales
Blanco	106.70	71.15	71.15	249
Rojo	53.60	35.70	35.70	125
Azul	93.40	62.30	62.30	218
NS/NC	46.30	30.85	30.85	108
Totales	300	200	200	

ngl = (3-1)x(4-1) = 6

$\chi^2_{ob} = 15.46$