

MODELOS PROBABILÍSTICOS DISCRETOS

Ya hemos visto en capítulos anteriores que en la naturaleza existen básicamente dos tipos de fenómenos: los determinísticos y los probabilísticos. Los primeros responden a una relación de causa a efecto, es decir una determinada acción produce siempre la misma reacción, son los fenómenos físicos. A modo de ejemplos, cuando se pone a calentar agua, ésta hervirá siempre a 100°C; si se arroja una piedra hacia arriba, indefectiblemente caerá a tierra por acción de la fuerza de gravedad; si se mezcla un poco de pintura amarilla con otro de pintura azul se obtiene pintura verde. Estos y otros fenómenos del mismo tipo generalmente son estudiados por la Física; para ello se diseñan modelos, determinísticos.

Los fenómenos probabilísticos se caracterizan porque, aun cuando se repitan en las mismas condiciones no arrojan los mismos resultados; a modo de ejemplo:

1) Para predecir la cantidad de lluvia que caerá en una región se tiene en cuenta varios factores, como la presión atmosférica, la temperatura, el grado de humedad, la dirección e intensidad de los vientos, entre otros factores, pese a tener suficiente información en este sentido, no es posible predecir con exactitud la cantidad de lluvia que caerá en esa región, debido a que se trata de un fenómeno que no es determinístico, sino probabilístico.

2) Es frecuente trabajar en los laboratorios con material radiactivo, y suele ser de interés determinar la cantidad de partículas emitidas por una fuente radiactiva en un período de tiempo. También en este caso la experiencia no tiene características determinísticas sino probabilísticas.

Para el estudio de este tipo de fenómenos se proponen modelos probabilísticos.

A continuación veremos algunos modelos probabilísticos, que son modelos matemáticos que se elaboran para estudiar los resultados de un experimento o fenómeno aleatorio o para predecir futuros resultados cuando el experimento se repite cierto número de veces, para ello se formula un conjunto de supuestos, entendiendo por tales las condiciones bajo las cuales éstos se realizan.

Al modelar fenómenos probabilísticos entran en juego variables aleatorias. En el primero de los ejemplos mencionados la variable es continua, en el segundo es discreta.

Ahora presentaremos los siguientes modelos probabilísticos discretos: Binomial, Multinomial, Geométrico, Binomial negativo, Hipergeométrico, Hipergeométrico generalizado, Poisson.

Modelo Bernoulli

El más sencillo de todos los modelos discretos es el modelo de Bernoulli. A pesar de que no se constituye en una herramienta importante para la solución de problemas, ofrece una base fundamental para derivar el modelo binomial.

No es una herramienta importante para la solución de problemas, por cuanto corresponde a experimentos sencillos que pueden ser solucionados con el conocimiento básico de probabilidades, sin hacer referencia a modelos.

En este modelo se tiene en cuenta los siguientes supuestos:

- 1) Un experimento aleatorio se realiza una vez. Es un experimento aleatorio simple.
- 2) Los resultados del experimento se clasifican en dos categorías o sucesos excluyentes denominados arbitrariamente “éxito” y “fallo” o “fracaso”.

Resultados dicotómicos: Los resultados de la prueba se pueden clasificar en “éxito” si verifican cierta condición, o “fracaso” en el caso contrario. No importa el tipo de magnitud clínica que se trate; al efectuarla la determinación en el laboratorio, siempre se podrá ver si el resultado obtenido en la muestra del paciente verifica o no cierto atributo. Y entonces, siempre se podrán clasificar los resultados en forma dicotómica.

Ejemplos:

- Lanzar una moneda y que salga cara.
 $p = 1/2$
- Elegir una persona de la población y que esté enfermo.
 $p = 1/1000$ = prevalencia de la enfermedad
- Aplicar un tratamiento a un enfermo y que éste se cure.
 $p = 95\%$, probabilidad de que el individuo se cure

En este modelo la variable aleatoria X es el número de éxitos.

En este tipo de experimento denominado ensayo de Bernoulli, consideramos un experimento aleatorio con 2 resultados posibles, éxito y fracaso, donde la probabilidad de obtener un éxito es p y la de obtener fracaso $1-p$, por lo que definimos la variable aleatoria $X = \begin{cases} 1 & \text{si se obtiene éxito} \\ 0 & \text{si se obtiene fracaso} \end{cases}$

La función de probabilidad puntual de la variable aleatoria X resulta

- $p(0) = P(X = 0) = 1 - p$
- $p(1) = P(X = 1) = p$

o bien

$$\bullet \quad p(x) = P(X = x) = p^x(1 - p)^{1-x} \text{ con } x \in \{0, 1\}$$

Definición. Sea X una variable aleatoria sobre un espacio de probabilidad (S, \mathcal{A}, P) , diremos que X tiene distribución de Bernoulli de parámetro p , $p \in (0; 1)$, y lo indicamos $X \sim B(p)$ si su función de probabilidad puntual es

$$p(x) = P(X = x) = p^x(1 - p)^{1-x} \text{ con } x \in \{0, 1\}$$

Observación. Claramente p es una función de probabilidad puntual ya que es no negativa para todo x y además $p(0) + p(1) = (1 - p) + p = 1$

Esperanza matemática y Varianza

$$E(X) = \sum_j x_j p_j = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$$

$$D^2(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = p - p^2 = p \cdot (1 - p)$$

Desviación típica

$$D(X) = +\sqrt{p \cdot (1 - p)}$$

Las pruebas de Bernoulli dan lugar a otros modelos de probabilidad muy utilizados como la distribución binomial, la geométrica y la binomial negativa.

MODELO BINOMIAL

Para obtener la ley de probabilidad correspondiente a una esta variable aleatoria binomial se tiene en cuenta los siguientes supuestos:

- 1) Sea ε una prueba compuesta que consiste en n repeticiones independientes de una misma prueba simple ε_1 .

$$\varepsilon : \varepsilon_1, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_1, \text{ (n veces } \varepsilon_1\text{)}$$

Independencia de las pruebas: El resultado de una prueba cualquiera es independiente del resultado obtenido en la prueba anterior, y no incide en el resultado de la prueba siguiente. Esto se cumple en los juegos de azar como al lanzar una moneda o un dado, y en la extracción de barajas, si se realizan con reposición luego de cada extracción.

- 2) Los resultados de cada prueba ε_1 se clasifican en dos categorías o sucesos opuestos.

Estas categorías o sucesos se llaman arbitrariamente “éxito” y “fracaso”

A	A'
---	----

S_1

S_1 : espacio muestral
 A : suceso éxito
 A' : suceso fracaso
 $A \cup A' = S_1$
 $A \cap A' = \emptyset$

- 3) La probabilidad de éxito $P(A) = p$ permanece constante en cada prueba. La probabilidad de fracaso es $P(A') = q$. Se verifica que $p + q = 1$, entonces: $q = 1 - p$. Se supone que $0 < p < 1$.

Estabilidad de las pruebas: La probabilidad p de obtener un resultado considerado como un éxito se mantiene constante a lo largo de toda la serie de pruebas. Análogamente, para la probabilidad q de obtener un fracaso.

Como los resultados son dicotómicos, el universo de resultados aparece particionado por ambos sucesos, entonces $p + q = 1 = P(S)$.

La tirada de una moneda o de un dado es el ejemplo clásico de este proceso. Se debe notar que eso no cambia si la moneda o el dado están viciados. Si un dado cargado tiene una probabilidad de $2/6$ de sacar un as, como esa probabilidad se mantiene constante e independiente a lo largo de la serie de pruebas, se cumplen las condiciones anteriores.

- 4) En cada una de las realizaciones de la prueba ε_1 interesa saber si el éxito ocurrió o no.

Se define la variable aleatoria X que indica el número de veces que se presentó el suceso A en las n repeticiones del experimento ε_1 . Esta variable aleatoria se llama binomial, es discreta y asume $n+1$ valores: $0, 1, 2, \dots, n$.

Con el objeto de obtener la función de probabilidad se plantea la siguiente cuestión: si un experimento simple se repite n veces de acuerdo con los supuestos enunciados ¿Cuál es la probabilidad de que el suceso éxito aparezca exactamente x veces? Es decir interesa obtener $P(X = x)$. Una secuencia favorable a este suceso es:

$$\underbrace{AAA\dots A}_x \quad \underbrace{A'A'A'\dots A'}_{n-x}$$

Con x éxitos y $n-x$ fracasos. La probabilidad de esta secuencia es por los supuestos 1) y 3):

$$P(AA\dots AA' A' \dots A') = \underbrace{P(A).P(A)\dots P(A)}_{x \text{ veces}} \underbrace{P(A').P(A')\dots P(A')}_{n-x \text{ veces}} = \underbrace{pp\dots p}_{x} \underbrace{qq\dots q}_{n-x} = p^x \cdot q^{n-x}$$

Otra secuencia favorable es:

$$A'AA\dots AA'A'\dots A$$

que se compone también de exactamente x éxitos y $n-x$ fracasos, y difiere de la anterior en el orden en que se presentan los resultados éxito y fracaso. Esta secuencia es incompatible con la anterior, pues no pueden ocurrir simultáneamente.

Evidentemente todas las n -uplas favorables al suceso ($X = x$) tienen la misma probabilidad, pues sólo difiere una de la otra en el orden en que aparecen los x éxitos.

Dado que el suceso ($X = x$) es la unión de todas las secuencias favorables, que son incompatibles, por aplicación del teorema de la adición, la probabilidad de este suceso es la suma de las probabilidades de todas las secuencias favorables.

$$\text{Entonces: } P(X = x) = N \cdot p^x q^{n-x} \quad (1)$$

El número de secuencias favorables N , es el número de ordenaciones diferentes posibles que contienen A en x lugares y A' en $n-x$ lugares. Es decir N es el número de permutaciones de n elementos, con x elementos A y

$$n-x \text{ elementos } A'. \text{ Entonces es: } N = P_{x,n-x}^n = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

Por lo tanto reemplazando en (1) se obtiene:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x} \quad (2)$$

El nombre de modelo binomial deriva del hecho que (2) es un término del desarrollo de $(p+q)^n$.

Definición. Sea X una variable aleatoria sobre un espacio de probabilidad (S, \mathcal{A}, P) , diremos que X tiene distribución binomial de parámetros n y p , $n \in \mathbb{N}$; $p \in (0; 1)$ y lo denotamos $X \sim Bi(n, p)$, si su función de probabilidad puntual es

$$p(x) = P(X=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \text{ con } x \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$$

Observación. Si $X \sim Bi(n, p)$ entonces $p(x)$ es una función de probabilidad. En efecto:

$$1. \quad p(x) \geq 0 \quad \forall x \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$$

$$2. \quad \sum_{x=0}^n p(x) = \sum_{x=0}^n \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = (p + (1-p))^n = 1$$

Esperanza matemática y Varianza

Para calcular la esperanza matemática y la varianza correspondientes a una variable $\text{Bi}(n, p)$ se usará el siguiente teorema:

Teorema:

Sean X_1, X_2, \dots, X_n , variables aleatorias independientes binomiales de parámetros 1 y p .

Entonces la variable aleatoria Z es $\text{Bi}(n, p)$ si y solo si $Z = \sum_{i=1}^n X_i$

Por lo tanto usando este teorema, si X es $\text{Bi}(n, p)$ se tiene $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ donde X_i es $\text{Bi}(1, p)$ $\forall i = 1, 2, \dots, n$

De donde la esperanza matemática de X es:

$$E(X) = E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n) = \underbrace{p + p + \dots + p}_{n \text{ sumandos}} = n \cdot p$$

La varianza de X es:

$$D^2(X) = D^2(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = D^2(X_1) + D^2(X_2) + \dots + D^2(X_n) = \underbrace{p \cdot q + p \cdot q + \dots + p \cdot q}_{n \text{ sumandos}} = n \cdot p \cdot q$$

La desviación típica de X es: $D(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$

Ejemplo. La probabilidad de que un satélite, después de colocado en órbita, funcione de manera adecuada es 0,9. Supóngase que 5 de éstos se colocan en órbita y operan de manera independiente. Calcular la probabilidad de que:

- a) El 80% de los satélites funcionen adecuadamente.
- b) El número de satélites que no funcionan adecuadamente es 2.
- c) Funcionen adecuadamente al menos 4 satélites.
- d) Funcionen adecuadamente por lo menos 2.

Datos: $n = 5$

X variable aleatoria que indica el número de satélites puestos en órbita que funcionan adecuadamente.

$p = 0,9$ $q = 0,1$

- a) $P(X=4) = \binom{5}{4} 0,9^4 0,1^{5-4} = 0,32805$
- b) $P(X=3) = \binom{5}{3} 0,9^3 0,1^{5-3} = 0,0729$
- c) $P(X \leq 4) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) = 1 - P(X=5) =$
 $= 1 - \binom{5}{5} 0,9^5 0,1^{5-5} = 1 - 0,59049 = 0,40951$
- d) $P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - [P(X=0) + P(X=1)] = 0,9995$

MODELO MULTINOMIAL

La distribución multinomial es aplicable en las mismas circunstancias que la binomial, con la excepción de que el resultado de cada prueba, en lugar de ser dicotómico puede ocurrir de k maneras distintas.

Supuestos

- 1) Sea ε una prueba compuesta que consiste en n repeticiones independientes de la misma prueba simple ε_1 .
 $\varepsilon : \varepsilon_1, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_1$, (n veces ε_1)
- 2) Los resultados de cada prueba ε_1 se clasifica en k categorías o sucesos A_1, A_2, \dots, A_k , mutuamente excluyentes y cuya unión es igual al espacio muestral $S_1, A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k = S_1$

A_1	A_2	A_k
-------	-------	------	-------

S_1 : espacio muestral de ε_1
 $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k = S_1$
 $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$

- 3) Las probabilidades correspondientes a los sucesos A_1, A_2, \dots, A_k se indican de la siguiente manera: $P(A_1) = p_1, P(A_2) = p_2, \dots, P(A_k) = p_k$. Estas probabilidades permanecen constantes en cada prueba y cumplen con la condición: $p_1 + p_2 + \dots + p_k = 1$.
- 4) Interesa al cabo de las n repeticiones del experimento \mathcal{E}_1 que el suceso A_1 se presente x_1 veces, el suceso A_2 se presente x_2 veces y el suceso A_k se presente x_k veces. Los números x_1, x_2, \dots, x_k deben verificar $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$.

En estas condiciones definimos las siguientes variables aleatorias:

X_1 variable aleatoria que indica el número de veces que se presentó A_1 al cabo de las n repeticiones.

X_2 variable aleatoria que indica el número de veces que se presentó A_2 al cabo de las n repeticiones.

.....

X_k variable aleatoria que indica el número de veces que se presentó A_k al cabo de las n repeticiones.

Con el objeto de obtener la ley de probabilidad se plantea la siguiente cuestión: si un experimento aleatorio simple se repitió n veces de acuerdo con los supuestos enunciados, ¿Cuál es la probabilidad de que A_1 se presente x_1 veces, A_2 se presente x_2 veces y A_k se presente x_k veces?

Interesa, entonces, obtener $P(X_1 = x_1; X_2 = x_2; \dots; X_k = x_k)$ con la condición $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$.

Observemos que una secuencia favorable al suceso $(X_1 = x_1; X_2 = x_2; \dots; X_k = x_k)$ es:

$$\left(\underbrace{A_1 A_1 \dots A_1}_{x_1} \underbrace{A_2 A_2 \dots A_2}_{x_2} \dots \underbrace{A_k A_k \dots A_k}_{x_k} \right)$$

La probabilidad de esta secuencia es por aplicación de los supuestos 1) y 3)

$$\underbrace{p_1 p_1 \dots p_1}_{x_1} \underbrace{p_2 p_2 \dots p_2}_{x_2} \dots \underbrace{p_k p_k \dots p_k}_{x_k} = p_1^{x_1} \cdot p_2^{x_2} \dots p_k^{x_k}$$

Otra secuencia favorable es:

$$\underbrace{A_k A_k \dots A_k}_{x_k} \cdot \underbrace{A_1 A_1 \dots A_1}_{x_1} \dots \underbrace{A_2 A_2 \dots A_2}_{x_2}$$

De la comparación de esta secuencia con la anterior surge que son incompatibles, pues no pueden presentarse simultáneamente.

Resulta obvio que todas las secuencias favorables al suceso considerado tienen la misma probabilidad, pues sólo difieren en el orden en que se presentan los sucesos A_1, A_2, \dots, A_k .

El suceso $(X_1 = x_1; X_2 = x_2; \dots; X_k = x_k)$ es la unión de todas las secuencias favorables, como éstas son incompatibles, por aplicación del teorema de la adición, la probabilidad de este suceso es la suma de las probabilidades de todas las secuencias favorables.

Resulta entonces $P(X_1 = x_1; X_2 = x_2; \dots; X_k = x_k) = N \cdot p_1^{x_1} \cdot p_2^{x_2} \dots p_k^{x_k}$

Siendo N el número de secuencias favorables, es decir N es el número de maneras diferentes en que se puede elegir entre el total de n lugares de nuestra n -upla los x_1 lugares en donde escribimos A_1 , los x_2 lugares en donde escribimos A_2, \dots , los x_k lugares en donde escribimos A_k . Por lo tanto, N es el número de permutaciones de n elementos, con x_1 elementos idénticos entre sí, x_2 elementos idénticos entre sí y x_k elementos idénticos entre sí.

$$P(X_1 = x_1; X_2 = x_2; \dots; X_k = x_k) = \frac{n!}{x_1! x_2! \dots x_k!} p_1^{x_1} \cdot p_2^{x_2} \dots p_k^{x_k}$$

Definición. Sea $X = (X_1, X_2, \dots, X_k)$ un vector aleatorio sobre un espacio de probabilidad (S, \mathcal{A}, P) , diremos que X tiene distribución multinomial de parámetros $n, p_1, p_2, \dots, p_{k-1}$, donde $n \in \mathbb{N}$; $p_i \in (0; 1)$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ y lo indicamos $X \sim M(n, p_1, p_2, \dots, p_{k-1})$, si su función de probabilidad puntual conjunta es:

$$p(x_1, x_2, \dots, x_k) = \frac{n!}{x_1! x_2! \dots x_k!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \dots p_k^{x_k}$$

con $\sum_{i=1}^k x_i = n$ y $\sum_{i=1}^k p_i = 1$

Observación. Si $X \sim M(n, p_1, p_2, \dots, p_{k-1})$ entonces $p(x_1, x_2, \dots, x_k)$ es una función de probabilidad. En efecto:

$$1. p(x_1, x_2, \dots, x_k) \geq 0$$

$$2. \sum p(x_1, x_2, \dots, x_k) = \sum \frac{n!}{x_1! x_2! \dots x_k!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \dots p_k^{x_k} = 1$$

Nota: Si se consideran individualmente las variables aleatorias X_1, X_2, \dots, X_k es posible calcular esperanza matemática, varianza de cada una de ellas.

O sea, si cada una de las variables X_i ($i = 1, 2, \dots, k$) se considera individualmente, es una binomial. Entonces,

$$E(X_i) = n \cdot p_i$$

$$D^2(X_i) = n \cdot p_i \cdot (1 - p_i)$$

Ejemplo. Se sabe que las bombas de gasolina para autos existentes en el mercado se pueden clasificar en:
40% de rendimiento excelente.

20% de rendimiento bueno.

30% de rendimiento regular.

10% de rendimiento malo.

Se selecciona una muestra de 9 bombas mediante proceso aleatorio. ¿Cuál será la probabilidad de que 3 sean de excelente rendimiento, 3 bueno, 1 regular y 2 de malo rendimiento?

X_E : v.a. que indica el número de bombas de rendimiento excelente

X_B : v.a. que indica el número de bombas de rendimiento bueno

X_R : v.a. que indica el número de bombas de rendimiento regular

X_M : v.a. que indica el número de bombas de rendimiento malo

$$p_E = 0,4 \quad p_B = 0,2 \quad p_R = 0,3 \quad p_M = 0,1$$

$$n = 9$$

$$p(x_1, x_2, \dots, x_k) = \frac{n!}{x_1! x_2! \dots x_k!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \dots p_k^{x_k}$$

$$P(X_E=3, X_B=3, X_R=1, X_M=2) = \frac{9!}{3!3!1!2!} 0,4^3 \cdot 0,2^3 \cdot 0,3^1 \cdot 0,1^2 = 0,007741$$

¿Cuál será la probabilidad de que 3 sean de excelente rendimiento?

$$p_E = 0,4 \quad q_E = 0,4 \quad X_E \sim Bi(9, 0,4)$$

$$P(X_E=3) = \binom{9}{3} 0,4^3 \cdot 0,6^6 = 0,250823$$

MODELO GEOMETRICO

La variable aleatoria con distribución de probabilidad geométrica estás asociada con un experimento que comparte algunas de las características de un experimento binomial. Este experimento también comprende pruebas idénticas e independientes, cada una de las cuales puede arrojar uno de dos resultados: éxito o fracaso. La probabilidad de éxito es igual a p y es constante de una prueba a otra. No obstante, en lugar del número de éxitos que se presentan en n pruebas, la variable aleatoria geométrica X es el número de prueba en la que ocurre el primer éxito. Entonces, el experimento podría terminar con la primera prueba si se observa un éxito en la misma o el experimento podría continuar de manera indefinida.

Supuestos

- 1) Sea ε un experimento aleatorio que consiste en repeticiones independientes de una misma prueba simple ε_1 .
- 2) Los resultados de cada prueba ε_1 se clasifican en dos categorías o sucesos opuestos, llamados arbitrariamente "éxito" y "fallo" o "fracaso".

A	A'
-----	------

S_1

S_1 : espacio muestral de ε_1

A : suceso éxito

A' : suceso fracaso

$$A \cup A' = S_1 \quad A \cap A' = \emptyset$$

- 3) La probabilidad de éxito $P(A) = p$, permanece constante en cada prueba. La probabilidad de fallo es $P(A') = q$. Se verifica: $p + q = 1$, entonces: $q = 1 - p$. Se supone que $0 < p < 1$.
- 4) En cada una de las repeticiones de la prueba ε_1 interesa saber si el suceso éxito ocurrió o no.
- 5) La prueba ε_1 se repite hasta que el suceso éxito A ocurre por primera vez.

Se define la variable aleatoria X que indica el número de repeticiones necesarias hasta obtener la primera ocurrencia del suceso A .

Esta variable aleatoria es discreta y asume los valores: $1, 2, 3, \dots, n, \dots$

Para obtener la función de probabilidad de esta variable, se plantea la siguiente cuestión: Si un experimento simple se repite de acuerdo con los supuestos enunciados, ¿Cuál es la probabilidad de que el suceso éxito se presente por primera vez en la x -ésima repetición?

Interesa entonces obtener: $P(X = x)$.

Evidentemente X toma el valor x si y solo si en las primeras $(x - 1)$ repeticiones de ε_1 ocurre A' y en la x -ésima repetición ocurre A . Es decir, si se da la secuencia:

$$\underbrace{A A' \dots \dots A A'}_{x-1 \text{ veces}} A$$

La probabilidad de esta secuencia es: $\underbrace{q \cdot q \dots \dots q}_{x-1 \text{ veces}} \cdot p = q^{x-1} \cdot p$

Por lo tanto: $P(X = x) = q^{x-1} \cdot p$ con $x = 1, 2, 3, \dots$

Definición. Sea X una variable aleatoria sobre un espacio de probabilidad (S, \mathcal{A}, P) , diremos que X tiene distribución geométrica de parámetro p , $p \in (0; 1)$ y lo denotamos $X \sim G(p)$, si su función de probabilidad puntual es

$$p(x) = P(X=x) = (1-p)^{x-1} p \quad \text{con } x \in \{1, 2, 3, \dots\}$$

Observación. Si $X \sim G(p)$ entonces $p(x)$ es una función de probabilidad. En efecto:

$$1. \quad p(x) \geq 0 \quad \forall x \in \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$2. \quad \sum_{x=1}^{\infty} p(x) = \sum_{x=1}^{\infty} p(1-p)^{x-1} = p + p \cdot q + p \cdot q^2 + p \cdot q^3 + \dots = p(1 + q + q^2 + q^3 + \dots) = p \sum_{i=0}^{\infty} q^i \quad (3)$$

Pero $\sum_{i=0}^{\infty} q^i$ es la suma de una progresión geométrica de razón q por lo tanto: $\sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}$

Reemplazando en (3) se obtiene:

$$\sum_{x=1}^{\infty} p(x) = p \cdot \frac{1}{1-q} = p \cdot \frac{1}{p} = 1$$

Esperanza Matemática y varianza

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

Observación. Intuitivamente, el resultado obtenido $E(X) = \frac{1}{p}$ es interesante, pues establece que cuanto menor sea $p = P(A)$, mayor será el número de repeticiones necesarias para que ocurra el suceso “éxito”.

A partir de la definición de varianza, se puede probar que: $D^2(X) = \frac{q}{p^2}$.

Para la distribución geométrica se verifica la siguiente propiedad

Teorema

Sea X una variable aleatoria con distribución geométrica. Entonces para dos enteros positivos cualesquiera s y t :
 $P(X \geq s + t / X > s) = P(X \geq t)$

Observación

Este teorema indica, intuitivamente, que la distribución geométrica "no tiene memoria", pues la información de que el suceso éxito no ha ocurrido durante las primeras " s " repeticiones del experimento, no es utilizada para determinar la probabilidad de que deban realizarse por lo menos " t " repeticiones más para observar la primera ocurrencia de A .

Esto significa que si intentamos repetir el experimento hasta el primer éxito, entonces, dado que el primer éxito todavía no ha ocurrido, la distribución de probabilidad condicional del número de ensayos adicionales no depende de cuantos fallos se hayan observado. El dado o la moneda que uno lanza no tienen "memoria" de estos fallos. La distribución geométrica es de hecho la única distribución discreta sin memoria.

Ejemplo. Se sabe que en cierto proceso de fabricación uno de cada 100 artículos, en promedio, resulta defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que el quinto artículo que se inspecciona, en un grupo de 100, sea el primer defectuoso que se encuentra?

Sea X : v.a. que indica el número de artículos necesarios hasta obtener el primer artículo defectuoso.

$$p = 0,01 \quad X \sim G(0,01)$$

$$P(X=5) = 0,99 \cdot 0,99 \cdot 0,99 \cdot 0,99 \cdot 0,01 = (1-0,01)^{5-1} \cdot 0,01 = 0,0096$$

MODELO HIPERGEOMETRICO

Supongamos que queremos conocer la probabilidad de encontrar el número de personas (X) a favor de un proyecto de ley en una muestra de " n " personas seleccionadas aleatoriamente de una población total de " N " personas de las cuales " N_1 " están a favor y por lo tanto " $N - N_1$ " en contra del mismo. Este experimento implica que cada vez que se selecciona una persona para conocer su opinión, el total de personas que conforman la población " N " se irá reduciendo cada vez en una unidad, puesto que no hay reemplazo después de cada ensayo, ya que si lo hubiera, según el ejemplo significaría que una persona seleccionada, tendría la posibilidad de ser seleccionada otra vez, para que diera su opinión nuevamente.

De acuerdo con lo anterior, el máximo número de ensayos posibles será " N ".

La probabilidad de que la primera persona seleccionada esté a favor será: N_1/N , pero en la segunda selección la probabilidad de que la persona seleccionada esté a favor será: $(N_1-1)/(N-1)$ ó $N_1/(N-1)$, dependiendo de que en la primera selección la persona seleccionada haya estado ó no respectivamente a favor del proyecto y así sucesivamente. Es decir, la probabilidad de éxito en cada selección, depende de lo que haya sucedido en las anteriores selecciones, significando con esto, que los ensayos son dependientes y que la probabilidad de éxito es cambiante de ensayo a ensayo. Lo anterior, significa además, que no se cumplen dos de las condiciones básicas de la distribución Binomial a saber: ensayos independientes y probabilidad de éxito estacionaria o lo que es lo mismo constante de ensayo a ensayo. Sin embargo si se cumple que en cada ensayo existen dos resultados posibles (éxito y fracaso), opuestos entre sí.

Supuestos

- 1) Se tiene una población finita de N elementos clasificados en dos categorías excluyentes que denominamos "éxito" y "fallo" o "fracaso". Sea N_1 el número de elementos de la categoría "éxito" y N_2 el número de elementos de la categoría "fallo" o "fracaso". N_1 y N_2 cumplen con la siguiente relación $N_1 + N_2 = N$.
- 2) Se extrae una muestra al azar de tamaño n , sin reposición, de dicha población, la muestra $n \leq N$.
- 3) Interesa que en la muestra de tamaño n aparezcan x elementos de la categoría "éxito" ($x \leq N_1$).

Nota: Las extracciones se hacen sin reposición, por lo tanto la probabilidad de obtener un elemento de la categoría éxito varía de una prueba a otra.

La variable aleatoria X que indica el número de elementos de la categoría éxito presentes en la muestra se denomina hipergeométrica y es discreta.

Queremos calcular $P(X = x)$, o sea, ¿cuál será la probabilidad de que la categoría éxito se presente exactamente x veces y de que la categoría fracaso se presente $n - x$ veces?

Para ello se considera una muestra favorable, es decir una muestra que contiene x elementos de la categoría “éxito” y $n - x$ elementos de la categoría “fallo” o “fracaso”. Se indica con A la presencia de un elemento de la categoría “éxito” y con A' la presencia de un elemento de la categoría “fallo” o “fracaso”. Entonces $\underbrace{AAA\dots A}_{x}$

$\underbrace{A'A'A'\dots A'}_{n-x}$ es una muestra favorable que contiene x éxitos y $n - x$ fracasos.

Todas las muestras favorables tendrán el mismo valor, todas deben tener x éxitos y $n - x$ fracasos.

Encontraremos la probabilidad pedida mediante una aplicación directa de la definición clásica de probabilidad. Los casos posibles son todos los grupos de n elementos que pueden formarse con los N elementos de la población finita. El número de estos grupos es $\binom{N}{n}$.

Los casos favorables se obtienen eligiendo de todas las formas posibles un grupo de x entre los N_1 elementos de la categoría éxito y combinando cada uno de tales subgrupos con todos los grupos posibles de $n - x$ elegidos entre los N_2 elementos de la categoría fracaso.

Entonces, la probabilidad de tener x éxitos y $n - x$ fracasos, será:

$$P(X = x) = \frac{\binom{N_1}{x} \binom{N_2}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

Si el número de elementos de la categoría “éxito” N_1 es menor o igual que n , entonces x puede asumir los valores $0, 1, 2, \dots, N_1$.

Definición. Sea X una variable aleatoria sobre un espacio de probabilidad (S, \mathcal{A}, P) , diremos que X tiene distribución hipergeométrica de parámetros $N, N_1, n \in \mathbb{N}$, siendo $N_1 \leq N$, $n \leq N$ y lo denotaremos $X \sim H(N, N_1, n)$, si su función de probabilidad puntual es

$$p(x) = P(X = x) = \frac{\binom{N_1}{x} \binom{N_2}{n-x}}{\binom{N}{n}} \quad \text{máx}\{0, n + N_1 - N\} \leq x \leq \min\{n, N_1\}$$

Observación. Si $X \sim H(N, N_1, n)$ entonces $p(x)$ es una función de probabilidad. En efecto:

$$1. \quad P(X = x) = \frac{\binom{N_1}{x} \cdot \binom{N_2}{n-x}}{\binom{N}{n}} \geq 0, \quad \forall x \in \{0, 1, \dots, n\} \text{ debido a que el cociente entre dos números reales no negativos es otro número real no negativo (se advierte que: } \binom{N}{n} \neq 0).$$

$$\begin{aligned} 2. \quad P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + \dots + P(X=n) &= \sum_{x=0}^n P(X = x) = \sum_{x=0}^n \frac{\binom{N_1}{x} \binom{N_2}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \\ &= \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{x=0}^n \binom{N_1}{x} \binom{N_2}{n-x} = \frac{1}{\binom{N}{n}} \binom{N}{n} = 1 \end{aligned}$$

Nota: se ha hecho uso de la siguiente propiedad de los números combinatorios: $\binom{n+m}{1} = \sum_{x=0}^l \binom{n}{x} \binom{m}{l-x}$

Esperanza matemática y Varianza

$$E(X) = n \cdot \frac{N_1}{N} \quad D^2(X) = n \left(\frac{N_1}{N} \right) \left(\frac{N_2}{N} \right) \underbrace{\left(\frac{N-n}{N-1} \right)}_{\text{factor de corrección}}$$

Ejemplo. En un laboratorio se tiene 5 balanzas idénticas en apariencia, pero con distintas precisiones, 3 con precisión 0,01 mg y 2 con precisión 0,05 mg. Se asignan al azar 3 balanzas a un grupo de alumnos. Interesa calcular la probabilidad de que se hayan elegido 2 de precisión 0,01 mg. El modelo hipergeométrico es apropiado para resolver este problema.

Definamos la variable aleatoria X como la que indica el número de balanzas de precisión 0,01 mg seleccionadas. Calculamos la probabilidad de obtener 2 balanzas de precisión 0,01 mg en la muestra de tamaño 3.

$$N=5, N_1=3, n=3 \text{ y } r=2$$

$$\text{Entonces } P(X=2) = \frac{\binom{3}{2} \binom{2}{1}}{\binom{5}{3}} = 0,60$$

RELACIÓN ENTRE EL MODELO HIPERGEOMÉTRICO Y EL BINOMIAL

Sabemos que el modelo probabilístico binomial es apropiado para el muestreo con reemplazo, mientras que la distribución hipergeométrica es adecuada para modelizar el muestreo sin reemplazo. Sin embargo, si la cantidad de elementos N disponibles para la extracción de la muestra es grande y el tamaño de la muestra n es chico de modo que $\frac{N_1}{N}$ permanezca prácticamente constante aunque no se repongan los elementos extraídos, los resultados no difieren mucho si se utiliza el modelo binomial en lugar del hipergeométrico.

Proposición. (Aproximación binomial a la hipergeométrica). Sea $X \sim H(N, N_1, n)$ entonces

$$P(X=x) = \frac{\binom{N_1}{x} \binom{N_2}{n-x}}{\binom{N}{n}} \cong \binom{n}{x} \left(\frac{N_1}{N} \right)^x \left(\frac{N_2}{N} \right)^{n-x}$$

Si se toma una muestra muy pequeña de una población muy grande, entonces la falta de reemplazo (el modelo hipergeométrico) y el reemplazo (el modelo binomial) dan resultados aproximadamente idénticos.

Esta aproximación mejora, dada n , a medida que N aumenta. Cuando N se vuelve infinita, las probabilidades binomial e hipergeométrica se tornan idénticas. Debido a ellos se dice que el modelo binomial es el límite del modelo hipergeométrico a medida que N se aproxima a infinito.

Observación. La aproximación es buena si $N > 50$ y $\frac{n}{N} \leq 0,1$.

Ejemplo. De los 100 enfermos de un hospital quirúrgico, 20 presentaron un proceso infeccioso. Si se toman 5 enfermos al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sólo uno de ellos presente dicho proceso?

Se considera que la muestra es pequeña respecto de la población dada, por lo que podemos resolver el problema utilizando el modelo binomial.

$$N = 100 < 50 \quad N_1 = 20 \quad p = N_1/N = 20/100 = 0,2 \\ \frac{n}{N} = 0,05 \leq 0,1.$$

$$P(X=1) = \binom{5}{1} \cdot (0,2)^1 \cdot (0,8)^{5-1} = 0,4096$$

MODELO HIPERGEOMETRICO GENERALIZADO

Como indica el nombre es una generalización del modelo hipergeométrico. Los siguientes supuestos permiten construir el modelo.

- 1) Sea una población finita de N elementos, clasificados en k categorías mutuamente excluyentes, siendo:

N_1 : número de elementos de la categoría 1.

N_2 : número de elementos de la categoría 2.

.....

N_k : número de elementos de la categoría k .

$$\text{donde } N_1 + N_2 + \dots + N_k = N$$

- 2) Se extrae una muestra al azar de tamaño n , sin reposición, de la población ($n \leq N$)

- 3) Interesa que en la muestra de tamaño n se hallen presentes x_1 elementos de la categoría 1; x_2 elementos de la categoría 2; ...; x_k elementos de la categoría k .

Se hace notar que se debe establecer las siguientes relaciones:

$$x_1 \leq N_1; x_2 \leq N_2; x_k \leq N_k \text{ y } x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$$

Las extracciones se hacen sin reposición, por lo tanto la probabilidad de obtener un elemento de cualquier categoría varía de una prueba a otra.

Se definen las siguientes variables aleatorias: $X_1; X_2; \dots, X_k$ de la siguiente manera:

X_1 : indica el número de elementos de la categoría 1 presentes en la muestra.

X_2 : indica el número de elementos de la categoría 2 presentes en la muestra.

.....

X_k : indica el número de elementos de la categoría k presentes en la muestra.

Interesa obtener la probabilidad del suceso: $(X_1 = x_1; X_2 = x_2; \dots; X_k = x_k)$. La probabilidad de este suceso se calcula aplicando la definición clásica.

$$P(X_1 = x_1; X_2 = x_2; \dots; X_k = x_k) = \frac{\binom{N_1}{x_1} \binom{N_2}{x_2} \cdots \binom{N_k}{x_k}}{\binom{N}{n}}$$

Definición. Sea $X = (X_1, X_2, \dots, X_k)$ un vector aleatorio sobre un espacio de probabilidad (S, \mathcal{A}, P) , diremos que X tiene distribución hipergeométrica gereralizada de parámetros $N, N_1, N_2, \dots, N_{k-1}, n \in \mathbb{N}$; y lo indicamos $X \sim HG(N, N_1, N_2, \dots, N_{k-1}, n)$, si su función de probabilidad puntual conjunta es:

$$p(x_1, x_2, \dots, x_k) = \frac{\binom{N_1}{x_1} \binom{N_2}{x_2} \cdots \binom{N_k}{x_k}}{\binom{N}{n}} \quad \text{con } \sum_{i=1}^k x_i = n \text{ y } \sum_{i=1}^k N_i = N$$

Ejemplo. Un profesor da clase en tres secciones S_1, S_2 y S_3 de una facultad, la primera con 20 alumnos, la segunda y la tercera con 25 alumnos cada una. Para evaluar el rendimiento de sus alumnos les tomó un test escrito a los 70 alumnos. Antes de proceder a su evaluación el profesor ordenó los escritos al azar y luego tomó los 15 primeros trabajos, planteándose la pregunta acerca de la probabilidad de haber seleccionado 8 de la primera sección, 3 de la segunda y 4 de la tercera.

Definamos las variables aleatorias:

X_1 : variable aleatoria que indica el número de alumnos de la sección S_1 presentes en la muestra.

X_2 : variable aleatoria que indica el número de alumnos de la sección S_2 presentes en la muestra.

X_3 : variable aleatoria que indica el número de alumnos de la sección S_3 presentes en la muestra.

$$N = 70; N_1 = 20; N_2 = 25; N_3 = 25 \text{ y } n = 15$$

$$P(X_1 = 8; X_2 = 3; X_3 = 4) = \frac{\binom{20}{8} \binom{25}{3} \binom{25}{4}}{\binom{70}{15}} \approx 5,080 \cdot 10^{-3}$$

MODELO DE POISSON

Existen eventos que no se presentan como resultado de repetir una prueba cierto número de veces, sino que ocurren en puntos aleatorios de tiempo, espacio, volumen, superficie, etc., en la que cada punto representa una ocurrencia del evento.

Ejemplos de este tipo de evento, son:

- las llegadas de camiones y automóviles a una caseta de cobro de peaje
- el número de accidentes registrados en cierta intersección de calles.
- El número de microorganismos en una muestra de suelo.
- El número de pacientes que llegan a un servicio de emergencia en un intervalo de tiempo.
- El número de partículas emitidas por una fuente radiactiva en un intervalo de tiempo.

El modelo de Poisson resulta apropiado para estudiar este tipo de eventos.

La ley de Probabilidad para el modelo de Poisson se determina de acuerdo con el siguiente conjunto de supuestos:

- 1) El número de eventos que ocurre en un intervalo de tiempo o región espacial es independiente del número de eventos que ocurre en cualquier otro intervalo disjunto de tiempo o región espacial.
 - 2) La probabilidad de n ocurrencias del evento en intervalos de igual longitud (áreas o volúmenes) es la misma. Es decir la distribución de probabilidad depende sólo de la longitud de los intervalos y no del origen de los mismos.
- En consecuencia, la tasa media de ocurrencia del evento por unidad de tiempo, espacio, volumen, etc., es constante. No importa cómo se han seleccionado los infinitos intervalos de amplitud unidad, usados para calcularla.
- μ_p : denota el número promedio de ocurrencias del evento por unidad de tiempo, espacio, volumen, etc. y es siempre un valor constante y positivo.
- 3) La probabilidad de que ocurra exactamente un evento en un intervalo muy corto de tiempo o en una región pequeña es directamente proporcional a la longitud del intervalo o al tamaño de la región.
 - 4) La probabilidad de que se produzcan dos o más eventos en un intervalo de tiempo muy corto o en una región pequeña es despreciable.
 - 5) La tasa media de ocurrencias del evento en un intervalo de tiempo o región espacial es constante. Se denota con λ .
- $\lambda = \mu_p \cdot \Delta_t$ donde Δ_t es el intervalo de tiempo o región espacial considerado. ($\lambda > 0$).

Definimos la variable aleatoria X que indica el número de eventos que ocurre en un intervalo de tiempo o región espacial.

X es discreta y asume los valores: 0, 1, 2, 3....

Definición. Sea X una variable aleatoria sobre un espacio de probabilidad (S, \mathcal{A}, P) , diremos que X tiene distribución de Poisson de parámetro λ , $\lambda > 0$, y lo denotamos $X \sim P(\lambda)$, si su función de probabilidad puntual es

$$p(x) = P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \quad \text{con } x \in \mathbb{N}_0$$

Observación. Si $X \sim P(\lambda)$ entonces $p(x)$ es una función de probabilidad. En efecto:

$$1. p(x) = P(X = x) > 0 \quad \text{para } x \in \mathbb{N}_0$$

$$2. \sum_{x=0}^{\infty} P(X = x) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1$$

$$\text{Recordemos: } \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^r}{r!} = e^x$$

Esperanza matemática y Varianza. $E(X) = \lambda$

$$D^2(X) = \lambda$$

La igualdad de la esperanza y la varianza es útil en el caso de que se trate de determinar el modelo, al que responde un conjunto de datos observados de una variable. Si la esperanza y la varianza se estiman a partir de los valores observados y resultan aproximadamente iguales, podría pensarse que puede ajustarse el modelo de Poisson al conjunto de los datos.

Ejemplo. El número promedio de máquinas en reparación en un día es 5. Se sabe que la variable aleatoria X que denota el número de máquinas en reparación sigue la ley de Poisson.

Calcular la probabilidad de que:

- a) en un día cualquiera haya 2 máquinas en reparación;
- b) en 12 horas haya 2 máquinas en reparación;
- c) en media hora haya 2 máquinas en reparación.

X v. a. que indica el número de máquinas en reparación

$$\mu_p = 5 \text{ máquinas por día} \Rightarrow \lambda = \mu \cdot \Delta t = 5 \text{ máquinas/día} \times 1 \text{ día} = 5 \text{ máquinas}$$

$$P(X=2) = \frac{e^{-5} \cdot 5^2}{2!} = 0,08422$$

$$\mu_p = 5 \text{ máquinas por día} \Rightarrow \lambda = \mu \cdot \Delta t = 5 \text{ máquinas/día} \times 0,5 \text{ día} = 2,5 \text{ máquinas}$$

$$P(X=2) = \frac{e^{-2,5} \cdot 2,5^2}{2!} = 0,2565$$

$$\mu_p = 5 \text{ máquinas por día} \Rightarrow \lambda = \mu \cdot \Delta t = 5 \text{ máquinas/día} \times (0,5/24) \text{ día} = 5/48 \text{ máquinas}$$

$$P(X=2) = \frac{e^{-5/48} \cdot \left(\frac{5}{48}\right)^2}{2!} = 0,005$$

RELACIÓN ENTRE EL MODELO BINOMIAL Y EL DE POISSON

La distribución de Poisson puede ser usada como una aproximación para la distribución binomial de parámetros n y p cuando n es grande y p es suficientemente chico como para que $n.p$ sea constante.

Proposición. (Aproximación de Poisson a la distribución binomial). Sea $X \sim Bi(n; p)$ y sea $\lambda = np$ constante, entonces

$$P(X=x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x} \approx \frac{(n.p)^x e^{-n.p}}{x!}$$

Observación. La distribución de Poisson se considera una buena aproximación a la distribución Binomial siempre que $p < 0,1$ y $np < 5$ o $n > 100$ y $p < 0,05$.

Ejemplo. En cierta fábrica los accidentes ocurren con muy poca frecuencia. Se sabe que la probabilidad de un accidente en cualquier día dado es de 0,005, y que los accidentes son independientes entre sí.

¿Cuál es la probabilidad de que en un día de cualquier periodo determinado de 400 días ocurra un accidente?

X v. a que indica el número de días en los que se produce un accidente

$$n = 400 \quad p = 0,005$$

$$P(X=1) = \binom{400}{1} 0,005^1 0,995^{399} = 0,270669$$

Si utilizamos la aproximación de Poisson: $\lambda = n.p = 400 \cdot 0,005 = 2$

$$P(X=1) = \frac{e^{-2} \cdot 2^1}{1!} = 0,270671$$

BIBLIOGRAFÍA

1. Devore, Jay L. Probabilidad y Estadística. Thomson. 2005.
2. Obregón Sanin, I. Teoría de la probabilidad. Limusa. 1997.
3. Walpole, Ronald E.; Myers Raymond H. Probabilidad y Estadística. Mc.Graw -Hill. 1992.
4. Mendenhall, W.; Wackerly, D.; Scheaffer, R. Estadística Matemática con Aplicaciones. Grupo Editorial Iberoamericana. 1994.