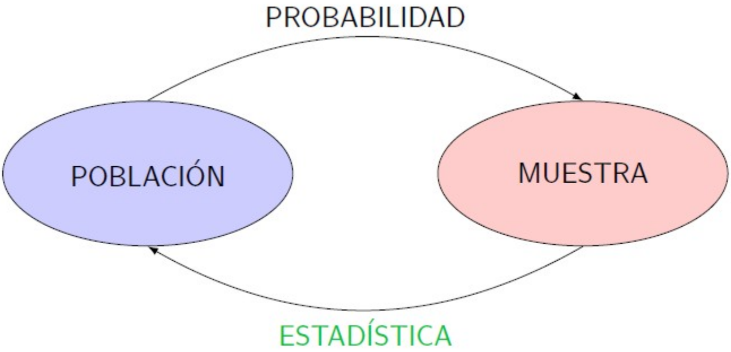
Distribuciones muestrales


PROBABILIDAD
POBLACIÓN
MUESTRA
ESTADÍSTICA

Estadística Inferencial

Objetivo

Tomar decisiones o sacar conclusiones respecto a la población basándose en la información contenida en una muestra (observaciones).

Generalmente se hacen inferencias respecto a los parámetros que describen la distribución de la población, a la forma de la distribución, a la independencia entre variables, a la normalidad de las observaciones.

Tipos de inferencias que veremos:

- Estimación Puntual: Se da un solo valor o punto como estimación del parámetro poblacional de interés
- Estimación por Intervalos: Se especifica un intervalo de posibles valores del parámetro en estudio
- Test de hipótesis: Se hacen conclusiones acerca de una hipótesis sobre los parámetros o distribución de la población. (próxima unidad)

Ejemplo: Calcular el tiempo de respuesta de un analgésico para calmar dolores musculares.

No es factible por costos/tiempos/eficacia probar el analgésico en toda la población $\Rightarrow$ realiza un muestreo a fines de considerar un subconjunto de observaciones de la población.

Muestreo

- Una muestra es un subconjunto de una población
- Para que las inferencias que hagamos con ella sean válidas, debe ser aleatoria y representativa de la población bajo estudio.
- Se elige mediante un procedimiento de muestreo, que debe realizarse de manera muy cuidadosa respondiendo a preguntas tales como cuántos elementos? cómo? dónde?, etc.
- Distintas metodologías de muestreo (consultar bibliografía asignatura)

Continuación Ejemplo

Luego de tomar una muestra aleatoria de pacientes y de haber registrado el tiempo de respuesta del analgésico en cada uno de ellos, si denotamos por μ_T al valor esperado del tiempo de respuesta, podríamos arribar a conclusiones como:

- Estimación Puntual: $\hat{\mu_T} = 35$ m
- Estimación por Intervalos: $\mu_T \in (32.3, 38.2)$
- Test de hipótesis: $\mu_T > 31m$

dependiendo del método a utilizar según lo que se quiera informar.

Distribuciones Muestrales

Definición 10.1:

Si $X_1, X_2, \cdots, X_n$ es una colección de n variables aleatorias tales que:

1. cada una de ellas tiene la misma función de probabilidad que la distribución de la población,
2. son independientes entre sí,

entonces se dice que $X_1, \ldots, X_n$ son *variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas* (v.a.i.i.d.)
y constituyen una muestra aleatoria de la población (muestra aleatoria de tamaño n).

Definiciones y notaciones

Definición 10.2

Un estadístico es una función de variables aleatorias que constituyen una o más muestras.

Ejemplo: $\bar{X}$ = media muestral de la muestra $X_1, X_2, \cdots, X_n$.
(Notar que un estadístico también es una variable aleatoria).

Definición 10.3: Distribución Muestral

La distribución de probabilidades de un estadístico se denomina distribución muestral

Observación

La distribución muestral de un estadístico depende de la distribución de la población, del tamaño de la muestra, etc.

Distribuciones muestrales

Distribuciones Muestrales

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.i.i.d. con $E(X_i) = \mu$, $Var(X_i) = \sigma^2$, $\forall i = 1, \ldots, n$, $0 < \sigma^2 < \infty$.

1. $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ es la media muestral de la muestra aleatoria $X_1, X_2, \ldots, X_n$.
2. $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ es el total muestral de la muestra $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

$\bar{X}$

- $\mu_{\bar{X}} = E(\bar{X}) = \mu$
- $\sigma^2_{\bar{X}} = Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$

Sn

- $\mu_{S_n} = E(S_n) = n\mu$
- $\sigma^2_{S_n} = Var(S_n) = n\sigma^2$

Distribuciones muestrales

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.i.i.d. con $E(X_i) = \mu$, $Var(X_i) = \sigma^2$, $\forall i = 1, \ldots, n$, $0 < \sigma^2 < \infty$.

- Si no conocemos la distribución de la población, no podemos, en general, calcular la distribución de los estadísticos construidos a partir de $X_1, X_2, \ldots, X_n$.
- SI podemos determinar la esperanza y varianza de los principales estadísticos en función de los parámetros de la distribución de la población.

Distribución de la media muestral $\bar{X}$

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.i.i.d. con $E(X_i) = \mu$, $Var(X_i) = \sigma^2$, $\forall i = 1, \ldots, n$, $0 < \sigma^2 < \infty$.

Situaciones:

1. $E(\bar{X}) = \mu$ y $Var(\bar{X}) = \sigma^2_{\bar{X}} = \frac{\sigma^2}{n}$ donde $E(X)$ y σ^2 son parámetros poblacionales.
2. Si $n > 30$ entonces podemos usar TCL y $\bar{X} \approx \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$
3. Si se asume que la población tiene distribución normal $\Rightarrow$ $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ y $\bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$ independientemente del valor de n

Ejemplo 1

El nivel de colesterol total en una población se distribuye normalmente con una media de 210 mg/dL y una varianza de 400 $(\text{mg/dL})^2$. Se extrae una muestra aleatoria de tamaño 16 de esa población. Calcular la probabilidad que la media muestral supere a la media poblacional en por lo menos 8 mg/dL.

Continuación Ejemplo 1

Datos:

- La población se distribuye normalmente, esto es, $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ con $\mu = 210$, $\sigma^2{=}400$.
- Se toma una muestra $X_1, \ldots, X_n$ con $n{=}16$

Preguntas: Si $\bar{X} = \frac{\sum_{1=1}^{16} X_i}{16}$

1. $P(\bar{X} > \mu + 8) =$?
2. ¿Cuál es la distribución de $\bar{X}$?

Continuación Ejemplo 1

Respuestas:

2. Como la población es normal, y las X_i una muestra aleatoria de esa población, entonces $\bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n) = \mathcal{N}(200, 400/16)$

1. $P(\bar{X} > \mu + 8) = P(\bar{X} > 210 + 8) = 1 - P(\bar{X} \leq 218) =$
$1 - P(\frac{\bar{X}-\mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}} \leq \frac{218-\mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}}) = 1 - \Phi(8/5) = 1 - \Phi(1.6) = 0.0548$

Distribución de la proporción muestral

Supuestos

- Población finita, formada por elementos de dos clases.
- N= tamaño de la población, N_1 cantidad de elementos de clase 1, N_2 cantidad de elementos de clase 2, $N = N_1 + N_2$
- Se toma una muestra de tamaño n, interesa conocer cuántos elementos de la clase 1 (éxitos) hay en esa muestra
- Se define X= número de elementos de la clase 1 presentes en la muestra
- La proporción poblacional de éxitos es $p = \frac{N_1}{N}$ (parámetro)
- La proporción muestral de éxitos es $\hat{p} = \frac{X}{n}$ (estadístico)

$$P(\hat{p} = \frac{r}{n}) = P(\frac{X}{n} = \frac{r}{n}) = P(X = r)$$

Distribución de la proporción muestral

Si la extracción de la muestra se hace:

1. Con reemplazo $\Rightarrow \hat{p}$ tiene distribución Binomial, y $E(\hat{p}) = p = \frac{N_1}{N}$, $Var(\hat{p}) = \frac{pq}{n}$
2. Sin reemplazo $\Rightarrow \hat{p}$ tiene distribución hipergeométrica, y $E(\hat{p}) = p = \frac{N_1}{N}$, $Var(\hat{p}) = \frac{pq}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1}$
3. Si $n \geq 100 \Rightarrow$ por Teo. DeMoivre-Laplace $\hat{p} \approx \mathcal{N}(\hat{p}, \frac{\hat{p}\hat{q}}{n})$

Ejemplo 2

En un grupo de 80 personas, 30 son hipertensas (el resto no). Se extrae una muestra aleatoria, sin reemplazo, de 8 personas.

1. encontrar la distribución de probabilidad de la proporción $\hat{p}$ de hipertensos presentes en la muestra
2. calcular $P(0.5 \leq \hat{p} \leq 0.7)$
3. calcular $E(\hat{p})$ y $Var(\hat{p})$
4. Si la población hubiera sido de 800 personas, de las cuales 300 son hipertensas y tomaba una muestra de 100 personas, ¿como podría aproximar la distribución de $\hat{p}$?

Continuación Ejemplo 2

Datos:

- N=80 personas, N_1=30 personas hipertensas,N_2=50 personas no hipertensas,
- Se extrae una muestra aleatoria de tamaño n=8, sin reemplazo

Sea X = número de personas hipertensas en la muestra (que se toma sin reemplazo)
$\Rightarrow X \sim h(n, N_1, N)$ y

$$P(\hat{p} = \frac{r}{n}) = P(X = r) = \frac{\binom{N_1}{r}\binom{N-N_1}{n-r}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{30}{r}\binom{50}{8-r}}{\binom{50}{8}}$$

1.

r	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\hat{p}$	$\frac{0}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{8}$
$P(\hat{p} = \frac{r}{n})$	0.0185	0.1034	0.2384	0.297	0.218	0.096	0.025	0.0035	0.0002

2. $P(0.5 \leq \hat{p} \leq 0.7) = P(4 \leq X \leq 5.6) == P(X = 4) + P(X = 5) = 0.314$
3. $E(\hat{p}) = \frac{N_1}{N} = \frac{30}{80} = \frac{3}{8}$, $Var(\hat{p}) = \frac{(N_1/N)\cdot(1-N_1/N)}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1} = 0.03$
4. Por De Moivre - Laplace, $\hat{p} \approx \mathcal{N}(\frac{3}{8}, 0.002)$

Distribución χ^2

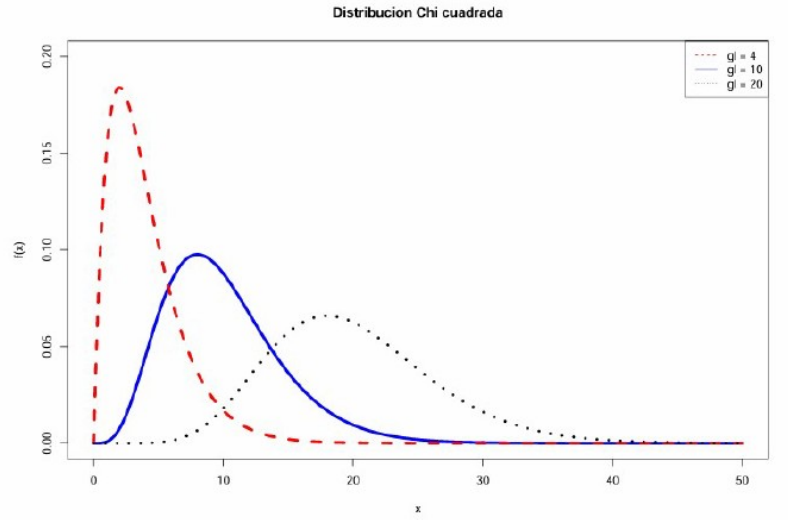
Sea $X_1, \ldots, X_n$ muestra aleatoria de una distribución normal con media μ y varianza σ^2. Entonces $Z_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma}$ son v.a. independientes con distribución normal estándar y la v.a definida como

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2$$

tiene distribución χ^2 con n grados de libertad.

Si $Y \sim \chi_n^2 \Rightarrow E(Y) = n, \mathrm{Var(Y)} = \mathrm{2n}$

Distribución χ^2



Distribución χ^2

Sea $X_1, \ldots, X_n$ muestra aleatoria de una distribución normal con media μ y varianza σ^2. Si $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$, $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1}$, entonces

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$$

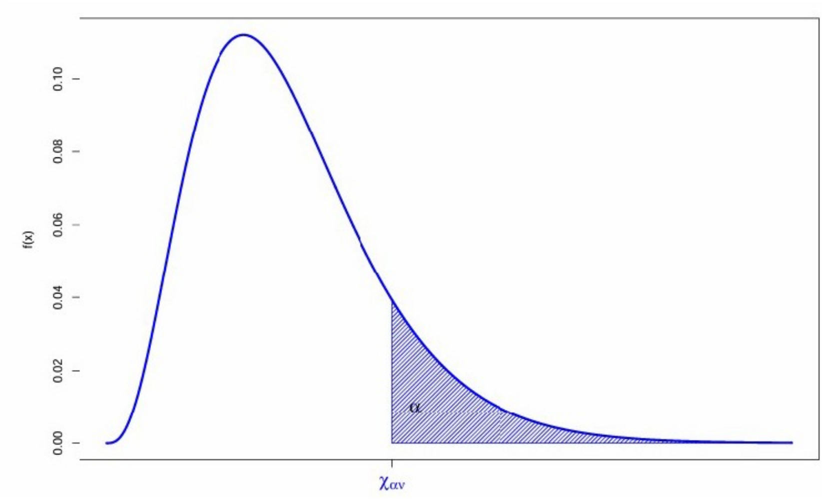
tiene distribución χ^2 con $(n-1)$ grados de libertad. Además $\bar{X}$ y S^2 son v.a. independientes.

Cálculo de Probabilidades

Supongamos $\chi^2 \sim \chi^2_n$. Para calcular probabilidades debe recurrirse a tablas que dan valores aproximados. Fijado $0 < \alpha < 1$ se define el *valor de porcentaje* $\chi^2_{\alpha,n}$ como

$$P(\chi^2 > \chi^2_{\alpha,n}) = \alpha$$

Cálculo de Probabilidades χ^2



Uso de tabla χ^2

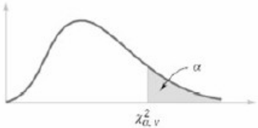


Table III Percentage Points $\chi^2_{\alpha,\nu}$ of the Chi-Squared Distribution

ν \ α	.995	.990	.975	.950	.900	.500	.100	.050	.025	.010	.005
1	.00+	.00+	.00+	.00+	.02	.45	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	.01	.02	.05	.10	.21	1.39	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	.07	.11	.22	.35	.58	2.37	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84
4	.21	.30	.48	.71	1.06	3.36	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86
5	.41	.55	.83	1.15	1.61	4.35	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75
6	.68	.87	1.24	1.64	2.20	5.35	10.65	12.59	14.45	16.81	18.55
7	.99	1.24	1.69	2.17	2.83	6.35	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	7.34	13.36	15.51	17.53	20.09	21.96
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	8.34	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	9.34	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	10.34	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	11.34	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	12.34	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	13.34	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32

Uso de tabla χ^2

Ejemplos:

1. Encontrar los valores de los siguientes percentiles: $\chi^2_{0.05,10}, \chi^2_{0.025,5}, \chi^2_{0.95,8}$
2. Si $\chi^2 \sim \chi^2_{11}$, calcular $P(\chi^2 > 17.28)$
3. En `R` invocar la función `pchisq(q, df, lower.tail = FALSE)`

Distribución t

Sea Z v.a. normal estándar y sea χ^2 una v.a. chi cuadrada con ν grados de libertad. Entonces si Z y χ^2 son independientes, la v.a. definida como

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\chi^2/\nu}}$$

tiene una distribución t con ν grados de libertad.
$\mu = E(T) = 0$, $\mathrm{Var(T) = n^2 - 2}$

Distribución t