8vo llamado 2023.-

1) ⓐ Enuncie y demuestre el teorema de Probabilidad total.

ⓑ De un ejemplo.

ⓒ Es siempre cierto que si A y B son dos eventos $\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$?

2) ⓐ Defina probabilidad condicional entre eventos,

ⓑ Pruebe que dados dos eventos A, B de un espacio muestral S, con $P(B) \neq 0$ entonces $P(A/B) + P(A'/B) = 1$

Vale esta propiedad si son independientes?

y si son mutuamente excluyentes?

3) Sea X una variable aleatoria con distribucion Poisson de parametro λ ~~[illegible]~~,

ⓐ X es continua o discreta?

ⓑ Que indica el parametro λ ?

ⓒ Describa con detalle este modelo, y de un ejemplo de aplicacion.

ⓓ Si $X_1, X_2, \dots X_{50}$ son v.a.i.i.d. con distribución de Poisson de parametro $\lambda = 5$. ¿Que distribucion tiene aproximadamente la variable definida como $S = \frac{1}{50} \cdot \sum_{i=1}^{50} X_i$?

ⓔ Sea $X_1, \dots, X_n$ muestra aleatoria de una variable aleatoria con distribución Poisson de parametro λ $(E(x) = \lambda)$.

Bajo que condiciones podria dar una estimación por un intervalo del 95% de confianza para λ, y como se construye dicho intervalo?

4) Un candidato a intendente de cierto pueblo sostiene que mas de la mitad de los ciudadanos que figuran en el padrón, van a votar por el en las proximas elecciones. Un grupo de personas no está de acuerdo con la afirmación, y para ello deciden realizar una prueba de hipotesis.

① ② teorema de probabilidad total.

Sea S un espacio muestral; y sean los eventos disjuntos, $A_i \cap A_j = \emptyset$ con $i \neq j$,

$\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ una partición aleatoria de S tal que

$P(A_i) > 0$ y $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = S$

Dado un evento B se verifica:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B/A_i) . P(A_i)$$

Demostración

$$B = B \cap S$$

$$B = B \cap (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)$$

⊗ aplicamos distributiva

$$B = \cancel{\quad} \bigcup_{i=1}^{n} (B \cap A_i)$$

⊗ Dado que A_i son eventos disjuntos, $B \cap A_i$ también lo son.

$\Rightarrow$ Si A y B son eventos disjuntos, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i)$$

⊗ por probabilidad de la intersección

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B/A_i) . P(A_i)$$

ⓑ Ejemplo de las cajas.

② ⓑ ● A y B son eventos dependientes

$$\Rightarrow P(A/B) + P(A'/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} + \frac{P(A' \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

A y B son independientes $\Rightarrow P(A/B) = P(A)$

$$\Rightarrow P(A/B) + P(A'/B) = P(A) + P(A') = P(S) = 1$$

A y B son mutuamente excluyentes $\Rightarrow A \cap B = \emptyset$

$$\Rightarrow P(A/B) + P(A'/B) = \frac{P(A \cap B) . \cancel{P(B)}}{P(B)} + \frac{P(A' \cap B) . \cancel{P(B)}}{P(B)} = \emptyset + \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

① ⓒ No, no es siempre cierto.

La regla general para el cálculo de la probabilidad de dos eventos, A y B es:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

sin embargo cuando A y B son dos eventos disjuntos $\Rightarrow A \cap B = \emptyset$ dado que no tienen elementos en común, por lo que en ese caso se descarta la $P(A \cap B)$.

② ⓐ La probabilidad condicional está definida por
Sea (S, A, P) un espacio de probabilidad.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Observaciones:

① Si $P(B) = 0 \Rightarrow P(A/B) = P(A)$

② $P(A/B) . P(B) = P(A \cap B) = P(B/A) . P(A)$

③ Si $P(B) \neq 0 \Rightarrow P(A/B) + P(A'/B) = 1$

③ ⓐ X es discreta xq' es el número de ocurrencias de un evento en un intervalo de tiempo, es decir que asume valores finitos o infinitamente numerables.

ⓑ el parametro λ representa la tasa de ocurrencia de un evento por unidad de tiempo.

ⓒ Distribucion de Poisson

Cantidad de eventos que ocurren en un intervalo de tiempo (espacio, volumen, superficie).

Supuestos

La cantidad de eventos que ocurren en un intervalo es independiente de la cant de eventos que ocurren en otro intervalo disjunto.

La probabilidad depende de la amplitud del intervalo.

$$P(X = r) = \frac{\lambda^r}{r!} . e^{-\lambda}$$

μp = numero promedio de ocurrencias

λ = tasa ~~promedio~~ media de ocurrencias por unidad de tiempo

$E(x) = \lambda \quad Var(x) = \lambda$

Ejemplo

En promedio 30 personas concurren al cajero entre las 15 y 16 hs

$\Rightarrow \mu = 30 \qquad \Delta t = 1 \qquad \lambda = 30$

Cual es la probabilidad de que entre las 16 y 18 concurran exactamente 20 ?

$\Rightarrow \mu = 30 \qquad \Delta t = 2 \qquad \lambda = 60$

$$P(X=20) = \frac{\lambda^r}{r!} \cdot e^{-\lambda} = \frac{60^{20}}{20!} e^{-60} = 1,31 \times 10^{-9} = 0,00000000131$$

③ ⓓ Dado que $X_1, X_2, \ldots, X_{50}$ son v.a.i.i.d. con una distribución Poisson de parámetro $\lambda = 5$, la variable $S = \frac{\sum_{i=1}^{50} X_i}{50}$ es la media muestral de estas variables.

De acuerdo con el Teorema del Límite Central, para una muestra suficientemente grande, la distribución de la media muestral tiende a ser aproximadamente normal, independientemente de la forma de la distribución original. La aproximación se vuelve más precisa a medida que aumenta el tamaño de la muestra.

① Identificación de la Distribución original:

$X_i \sim P(\lambda = 5)$

② Calculo de Media y Varianza de la Distribución Original

Media $= \lambda = 5$

Varianza $= \sigma^2 = \lambda = 5$

③ Calculo de Media y varianza de la Media Muestral

Media Muestral $= E(S) = n \cdot \mu = 50 \cdot 5 = 250$

Var Muestral $= Var(S) = n \cdot \sigma^2 = 50 \cdot 5 = 250$

④ Identificación de la distribución aproximada

$S \sim N(250, 250)$

$$\frac{S - 250}{\sqrt{250}} \xrightarrow{D} N(0,1)$$

④ ② Planteamiento de la prueba de Hipótesis.

① Hipótesis nula: El candidato tiene razón y la proporción de ciudadanos que votarán por él es del 50%

$H_0 : p = 0{,}50$

② Hipótesis alternativa (H_1)

$H_1 : p \neq 0{,}5$ (dos colas ya que no especificamos si será menor o mayor)

③ Estadístico de prueba

Dado que estamos tratando con una proporción, el estadístico de prueba apropiado sería el estadístico de proporciones muestrales

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

donde $\hat{p}$ = proporción muestral observada
p_0 = proporción bajo hipótesis nula
n = tamaño de la muestra.

ⓑ Supuestos:

- La muestra es aleatoria y representa adecuadamente a la población.
- Las respuestas de cada ciudadano son independientes entre sí.
- El tamaño de la muestra es lo suficientemente grande para aplicar aproximación normal conforme al TCL.

Estadístico

Utilizamos el estadístico Z de proporciones muestrales.

ⓒ Región de rechazo

La región de rechazo depende del nivel de significancia (α) elegido para la prueba. Por ejemplo, para un α del 5%, la región de rechazo sería aquella en la que el valor absoluto de Z sea mayor que el valor crítico $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ asociado con un intervalo de confianza del 95%.

ⓓ Error de Tipo 1

Rechazar erróneamente la hipótesis nula cuando es verdadera.