Modelos Probabilísticos Continuos

Distribución Uniforme

Una v.a. continua X cuya función de densidad está dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & cc \end{cases}$$

es una v.a. continua con **Distribución Uniforme en el intervalo** $[a, b]$ y se denota: $X \sim \mathcal{U}[a, b]$.

Distribución Uniforme

Una v.a. continua X cuya función de densidad está dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & cc \end{cases}$$

es una v.a. continua con **Distribución Uniforme en el intervalo** $[a, b]$ y se denota: $X \sim \mathcal{U}[a, b]$.

- $F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & x > b \end{cases}$
- $E(X) = \frac{(a+b)}{2}$; $\quad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

Si $a = 3, b = 6 \Rightarrow X \sim \mathcal{U}[3, 6]$ y

Ejemplo 1

El tiempo que le lleva a un operador completar un formulario electrónico está uniformenente distribuido entre 1.5 y 2.2 minutos.

- ¿Cuál es el tiempo medio que le lleva al operario completar el formulario?
- ¿Cuál es la probabilidad que le lleve a lo sumo dos minutos completar un formulario?

Distribución Exponencial

Se dice que una variable aleatoria X tiene **distribución exponencial de parámetro** α $(\alpha > 0)$, $X \sim \mathcal{E}(\alpha)$ si su función de densidad está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x} & x \geq 0 \\ 0 & cc \end{cases}$$

Distribución Exponencial

Se dice que una variable aleatoria X tiene **distribución exponencial de parámetro** α $(\alpha > 0)$, $X \sim \mathcal{E}(\alpha)$ si su función de densidad está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x} & x \geq 0 \\ 0 & cc \end{cases}$$

Su función de distribución es:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha x} & x \geq 0 \\ 0 & cc \end{cases}$$

Distribución Exponencial

Se dice que una variable aleatoria X tiene **distribución exponencial de parámetro** α ($\alpha > 0$), $X \sim \mathcal{E}(\alpha)$ si su función de densidad está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x} & x \geq 0 \\ 0 & cc \end{cases}$$

Su función de distribución es:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha x} & x \geq 0 \\ 0 & cc \end{cases}$$

Además, $E(X) = \frac{1}{\alpha}$, $\quad \sigma_X = \sqrt{Var(X)} = \frac{1}{\alpha}$.

Utilizada, por ejemplo, en la modelación de la duración de componentes eléctricos, distancia entre ocurrencias sucesivas de procesos de Poisson.

Ejemplo 2

La duración (en horas) de una cierta componente electrónica tiene distribución exponencial con media 100 (hrs).

1. ¿Cuál es la probabilidad que la componente dure mas de 100 horas?
2. Una de estas componentes trabajó sin fallar por 50 horas. ¿Cuál es la probabilidad que funcione correctamente 100 horas más?
3. Tres de estos componentes trabajan independientemente en una pieza de un equipo. El equipo falla si al menos dos componentes fallan. ¿Cuál es la probabilidad de que el equipo funcione al menos durante las próximas 200 horas sin fallar?

Dist. Exponencial:Falta de memoria

Teorema

Sea X una variable aleatoria con distribución exponencial, y sean $s, t \in \mathbb{R}_+$. Entonces

$$P(X > s + t / X > s) = P(X > t)$$

Demostración:

Relación entre Distribución Exponencial y de Poisson.

- Supongamos $Y=$ número de ocurrencias de un evento en un intervalo de tiempo de longitud t y que Y sigue un modelo de Poisson con parámetro $\lambda = \mu \cdot t$, donde μ es el promedio de ocurrencias por unidad de tiempo, $Y \sim \mathcal{P}(\mu \cdot t)$
- ¿cuánto (en tiempo) habrá que esperar para observar la próxima ocurrencia del evento?

Relación entre Distribución Exponencial y de Poisson.

- Supongamos $Y=$ número de ocurrencias de un evento en un intervalo de tiempo de longitud t y que Y sigue un modelo de Poisson con parámetro $\lambda = \mu \cdot t$, donde μ es el promedio de ocurrencias por unidad de tiempo, $Y \sim \mathcal{P}(\mu \cdot t)$
- ¿cuánto (en tiempo) habrá que esperar para observar la próxima ocurrencia del evento?

Sea X va.a que mide el tiempo de espera hasta la próxima ocurrencia

Relación entre Distribución Exponencial y de Poisson.

- Supongamos $Y=$ número de ocurrencias de un evento en un intervalo de tiempo de longitud t y que Y sigue un modelo de Poisson con parámetro $\lambda = \mu \cdot t$, donde μ es el promedio de ocurrencias por unidad de tiempo, $Y \sim \mathcal{P}(\mu \cdot t)$
- ¿cuánto (en tiempo) habrá que esperar para observar la próxima ocurrencia del evento?

Sea X va.a que mide el tiempo de espera hasta la próxima ocurrencia
$P(X \leq t) = 1 - P(X > t) = 1 - P(\mathrm{no\ ocurren\ eventos\ en\ } (0, \mathrm{t}))$
$= 1 - P(Y = 0) = 1 - \lambda^0/0!.e^{-\lambda} = 1 - e^{-\mu t}$.

Relación entre Distribución Exponencial y de Poisson.

- Supongamos $Y=$ número de ocurrencias de un evento en un intervalo de tiempo de longitud t y que Y sigue un modelo de Poisson con parámetro $\lambda = \mu \cdot t$, donde μ es el promedio de ocurrencias por unidad de tiempo, $Y \sim \mathcal{P}(\mu \cdot t)$
- ¿cuánto (en tiempo) habrá que esperar para observar la próxima ocurrencia del evento?

Sea X va.a que mide el tiempo de espera hasta la próxima ocurrencia
$P(X \leq t) = 1 - P(X > t) = 1 - P(\text{no ocurren eventos en } (0,\text{t}))$
$= 1 - P(Y = 0) = 1 - \lambda^0/0!.e^{-\lambda} = 1 - e^{-\mu t}$.

$$\therefore X \sim \mathcal{E}(\mu)$$

Relación entre Distribución Exponencial y de Poisson

Si $Y \sim \mathcal{P}(\mu \cdot t)$, con $\mu =$ promedio de ocurrencias por unidad de tiempo, entonces la va $X=$ tiempo entre dos ocurrencias consecutivas del evento, tiene distribución exponencial de parámetro μ, $X \sim \mathcal{E}(\mu)$.

Relación entre Distribución Exponencial y de Poisson

Si $Y \sim \mathcal{P}(\mu \cdot t)$, con $\mu =$ promedio de ocurrencias por unidad de tiempo, entonces la va $X=$ tiempo entre dos ocurrencias consecutivas del evento, tiene distribución exponencial de parámetro μ, $X \sim \mathcal{E}(\mu)$.

Ejemplo 3

Recordemos el **Ejemplo 9** de la unidad anterior (v.a. discretas):
Los usuarios del cajero automático que está en la entrada del Campus llegan al mismo siguiendo una distribución de Poisson con un promedio de 25 usuarios por hora.
Calcular la probabilidad que pasen más de dos horas sin que ingresen usuarios al cajero.

Distribución Normal

También conocida como **distribución gaussiana**, es una de las distribuciones más importantes en la probabilidad y estadística:

Distribución Normal

También conocida como **distribución gaussiana**, es una de las distribuciones más importantes en la probabilidad y estadística:

- Si se repite un experimento una cierta cantidad de veces, entonces la variable que representa el promedio de los resultados tiene aproximadamente una distribución normal.

Distribución Normal

También conocida como **distribución gaussiana**, es una de las distribuciones más importantes en la probabilidad y estadística:

- Si se repite un experimento una cierta cantidad de veces, entonces la variable que representa el promedio de los resultados tiene aproximadamente una distribución normal.
- Algunas variables que pueden ser modeladas con esta distribución incluyen estaturas, pesos y otras características físicas, errores de medición en experimentos científicos, mediciones antropométricas en fósiles, tiempos de reacción en experimentos psicológicos, mediciones de inteligencia y aptitud, calificaciones en varios exámenes y numerosas medidas e indicadores económicos.

Distribución Normal

También conocida como **distribución gaussiana**, es una de las distribuciones más importantes en la probabilidad y estadística:

- Si se repite un experimento una cierta cantidad de veces, entonces la variable que representa el promedio de los resultados tiene aproximadamente una distribución normal.
- Algunas variables que pueden ser modeladas con esta distribución incluyen estaturas, pesos y otras características físicas, errores de medición en experimentos científicos, mediciones antropométricas en fósiles, tiempos de reacción en experimentos psicológicos, mediciones de inteligencia y aptitud, calificaciones en varios exámenes y numerosas medidas e indicadores económicos.
- Aún cuando las variables individuales no estén normalmente distribuidas, las sumas y promedios de las variables en condiciones adecuadas tendrán de manera aproximada una distribución normal.

Distribución Normal

Se dice que una v.a. continua X tiene una **distribución normal** con parámetros μ y σ (o μ y σ^2), y se denota por $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$, si la función de densidad de probabilidad de X es:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad -\infty < x < \infty$$

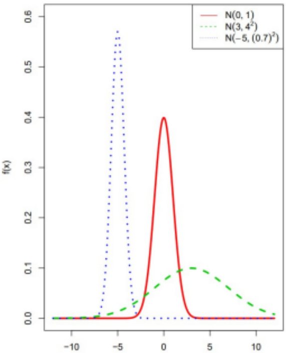
Distribución Normal

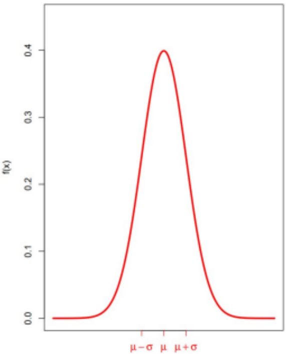
Se dice que una v.a. continua X tiene una **distribución normal** con parámetros μ y σ (o μ y σ^2), y se denota por $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$, si la función de densidad de probabilidad de X es:

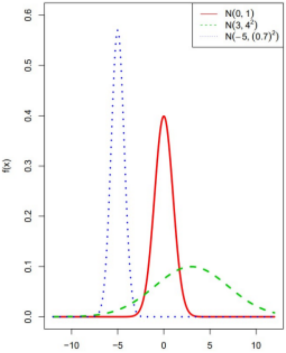
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad -\infty < x < \infty$$

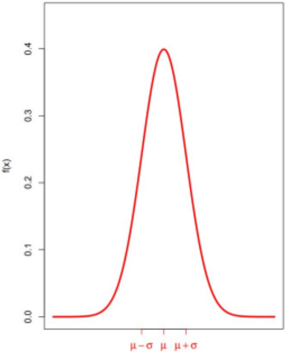
Se puede probar que:

- $E(X) = \mu$
- $V(X) = \sigma^2$


N(0, 1)
N(3, 4^2)
N(−5, $(0.7)^2$)
f(x)
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
−10
−5
0
5
10


f(x)
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
μ−σ
μ
μ+σ





- Cada curva de densidad es simétrica respecto a μ.
- El punto de simetría (μ) de la función de densidad coincide con el máximo, la mediana y la moda de la distribución.
- σ es la distancia desde μ hasta los puntos de inflexión de la curva.

Distribución Normal Estándar

Si una v.a. con Distribución Normal tiene media $\mu = 0$ y desviación estándar $\sigma = 1$ entonces se dice que esa v.a. tiene **Distribución Normal Estándar**, y se denota por Z.

Distribución Normal Estándar

Si una v.a. con Distribución Normal tiene media $\mu = 0$ y desviación estándar $\sigma = 1$ entonces se dice que esa v.a. tiene **Distribución Normal Estándar**, y se denota por Z.

Su función de distribución acumulada se denota por:

$$\Phi(z) = P(Z \leq z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{\frac{-t^2}{2}}\, dt$$

Además, $E(X) = 0, V(X) = 1$

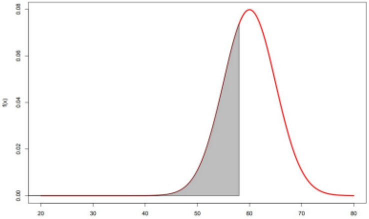
Ejemplo 4

El tiempo que tarda una célula en dividirse (mitosis) tiene distribución normal con un tiempo promedio de una hora y una desviación estándar de 5 minutos. ¿Cuál es la probabilidad que una célula se divida en menos de 58 minutos?

Ejemplo 4

El tiempo que tarda una célula en dividirse (mitosis) tiene distribución normal con un tiempo promedio de una hora y una desviación estándar de 5 minutos. ¿Cuál es la probabilidad que una célula se divida en menos de 58 minutos?

- $X \sim N(60, 5^2)$
- $P(X \leq 58) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}5} \int_{-\infty}^{58} e^{\frac{-(x-60)^2}{2 \cdot 5^2}} dx$
- ¿Es posible calcular eso para cualquier valor de μ y σ?



Distribución Normal Estándar

Sí, es posible. Para ello se estandariza la variable aleatoria X:

Así si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, entonces la v.a $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ y :

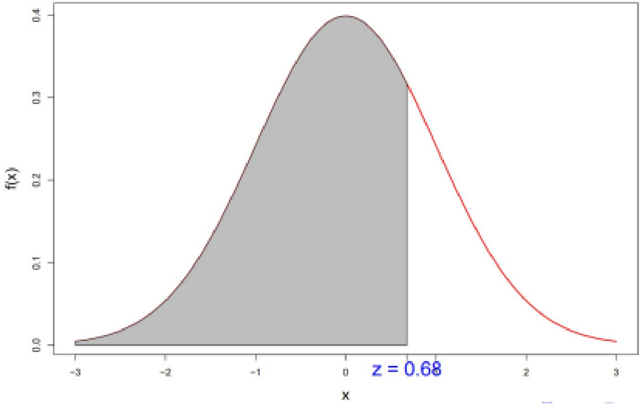
$$P(X \leq x) = P(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x-\mu}{\sigma}) = P(Z \leq \frac{x-\mu}{\sigma}) = \Phi(z)$$

con $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$. La función $\Phi(z)$ es la función de distribución acumulada de una v.a con distribución normal estándar y está tabulada.

Distribución Normal Estándar

Si $Z \sim N(0,1)$, supongamos $z = 0{,}63$, entonces:

$$P(Z \leq 0{,}63) = \Phi(0{,}63)$$



Distribución Normal - Lectura de Tabla

Usando la tabla:

$$P(Z \leq 0{,}63) = \Phi(0{,}63)$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05 ..
0.0	0.500000	0.503989	0.507978	0.511967	0.515953	0.519939
0.1	0.539828	0.543795	0.547758	0.551717	0.555760	0.559618
0.2	0.579260	0.583166	0.587064	0.590954	0.594835	0.598706
0.3	0.617911	0.621719	0.625516	0.629300	0.633072	0.636831
0.4	0.655422	0.659097	0.662757	0.666402	0.670031	0.673645
0.5	0.691462	0.694974	0.698468	0.701944	0.705401	0.708840
0.6	0.725747	0.729069	0.732371	0.735653	0.738914	0.742154
0.7	0.758036	0.761148	0.764238	0.767305	0.770350	0.773373
⋮						

Distribución Normal Estandar

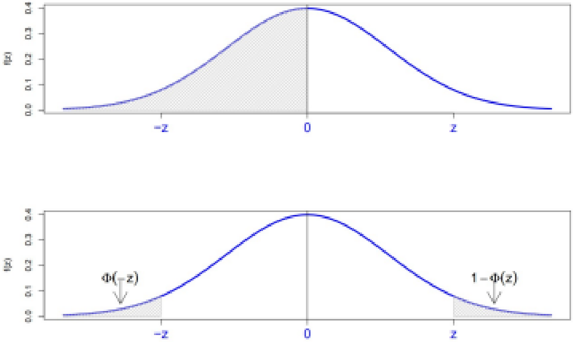
Algunas propiedades: Sean $Z \sim N(0,1)$ y $z > 0$. Como la función de densidad de esta v.a es simétrica en torno a $z = 0$,

- $\Phi(0) = 0{,}5$
- $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$
- $P(Z > z) = \Phi(-z)$
- $P(-z \leq Z \leq z) = 2\Phi(z) - 1$

Distribución Normal Estandar

Algunas propiedades: Sean $Z \sim N(0,1)$ y $z > 0$. Como la función de densidad de esta v.a es simétrica en torno a $z = 0$,

- $\Phi(0) = 0{,}5$
- $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$
- $P(Z > z) = \Phi(-z)$
- $P(-z \leq Z \leq z) = 2\Phi(z) - 1$



Continuación-Ejemplo 4

Continuación-Ejemplo 4

Si $X \sim N(60, 5^2)$ entonces $Z = \frac{X-60}{5} \sim N(0,1)$ y

$$P(X \leq 58) = P(\frac{X-60}{5} \leq \frac{58-60}{5}) = \Phi(\frac{-2}{5}) = \Phi(-0{,}4)$$

Buscando en la tabla Normal, se tiene que

$$\Phi(-0{,}4) = P(Z \leq -0{,}4) = 0{,}3445$$

Distribución Normal-Ejemplo 5

Supongamos ahora que queremos determinar el tiempo (en minutos) para el cual la probabilidad que la división de la célula suceda en menos de ese tiempo es de 0.7. Es decir, queremos encontrar el valor de t para el cual $P(X \leq t) = 0{,}7$.

Distribución Normal-Ejemplo 5

Supongamos ahora que queremos determinar el tiempo (en minutos) para el cual la probabilidad que la división de la célula suceda en menos de ese tiempo es de 0.7. Es decir, queremos encontrar el valor de t para el cual $P(X \leq t) = 0{,}7$.

$$0{,}7 = P(X \leq t) = P(\frac{X-60}{5} \leq \frac{t-60}{5}) = \Phi(\frac{t-60}{5})$$

Sea $z = \frac{t-60}{5}$, debemos encontrar z tal que $\Phi(z) = 0{,}7$

Continuación Ejemplo 5

Buscando en la tabla vemos a que combinación de filas y columnas le corresponde la entrada 0,7

z	0.00	0.01	<u>0.02</u>	0.03	0.04	0.05 ..
0.0	0.500000	0.503989	0.507978	0.511967	0.515953	0.519939
0.1	0.539828	0.543795	0.547758	0.551717	0.555760	0.559618
0.2	0.579260	0.583166	0.587064	0.590954	0.594835	0.598706
0.3	0.617911	0.621719	0.625516	0.629300	0.633072	0.636831
0.4	0.655422	0.659097	0.662757	0.666402	0.670031	0.673645
<u>0.5</u>	0.691462	0.694974	0.698468	0.701944	0.705401	0.708840
0.6	0.725747	0.729069	0.732371	0.735653	0.738914	0.742154
0.7	0.758036	0.761148	0.764238	0.767305	0.770350	0.773373
⋮						

Así $0{,}52 = z = \frac{t-60}{5}$ y despejando resulta $t = 62{,}6$

Ejercicios

1. La lectura de la temperatura medida por una termocupla que está ubicada en un medio de temperatura constante tiene distribución normal con media μ , la temperatura del medio, y desviación estándar σ. ¿Cuál debería ser el valor de σ para asegurarse que el 95 % de las lecturas estén a 0.01^o de μ?
2. El peso de una zapatilla deportiva está normalmente distribuido con una media de 250 grs y una desviación estándar de 25 grs.

    1. ¿Cuál es la probabilidad que una de esas zapatillas pese más de 270 grs?
    2. ¿Cuánto debería ser la desviación estándar para que la compañía anuncie que el 99,9 % de sus zapatillas pesan menos que 270 grs?
    3. Si la desviación estándar se mantiene en 25 grs, cuánto debería ser el peso medio para que la compañia pueda afirmar que el 95 % de sus zapatillas pesa menos que 270 grs?