

Trabajo Práctico N°3: Medida de Probabilidad. Probabilidad Condicional

1. a) Indique cuál es el error en cada una de las siguientes afirmaciones y modifíquelas para que sean correctas, justificando las respuestas:
 - i) Las probabilidades de que un vendedor de automóviles cierre ninguna, una, dos o tres operaciones en cualquier día de Febrero son respectivamente: 0, 19; 0,38; 0,29; 0,15.
 - ii) La probabilidad de que llueva mañana es de 0,40 y la de que no llueva es de 0,52.
 - iii) La probabilidad de que una impresora cometan 0, 1, 2, 3, 4 o más errores en la impresión de un documento son respectivamente: 0,19 ; 0,34 ; -0,25 ; 0,43 ; 0,29.
 - iv) Al sacar una carta de juego en un solo intento, de un paquete completo (52 cartas) la probabilidad de que sea de corazones es $1/4$; la de seleccionar una carta negra es $1/2$ y la de que resulte tanto negra como de corazones es $1/8$.
- b) Indique si la siguiente afirmación es verdadera o falsa justificando la respuesta: "Si la probabilidad de que ocurran dos sucesos a la vez es menor que $1/2$, la suma de la probabilidad de ambos (por separado) no puede exceder de $3/2$ ".
- c) Si la probabilidad de que ocurran dos sucesos simultáneamente es p , ¿cuál es la probabilidad de que a lo sumo uno de los dos ocurra? Justifique su respuesta.
2. Sea $S = \{a, b, c, d\}$ y P una medida de probabilidad, halle $P(\{a\})$ si:
 - a) $P(\{b\}) = 1/3; P(\{c\}) = 1/6; P(\{d\}) = 1/9.$
 - b) $P(\{b, c\}) = 2 \cdot P(\{a\}); P(\{d\}) = 0.$
 - c) $P(\{c\}) = 2 \cdot P(\{d\}); P(\{d\}) = 3 \cdot P(\{a\}); P(\{b\}) = 0.$
3. Sean A , B y C eventos mutuamente excluyentes de un mismo espacio muestral S y $P(A) = 0,2$; $P(B) = 0,3$; $P(C) = 0,2$. Calcule:
 - a) $P(A \cup B \cup C)$
 - b) $P(B \cup C)$
 - c) $P[A^c \cap (B \cup C)]$
4. Sean los eventos A y B de un mismo espacio muestral con:
$$P(A) = 0,5; \quad P(B) = 1/3; \quad P(A \cap B) = 1/4.$$
 - a) Calcule:
 - i) $P(A/B);$
 - ii) $P(B/A);$
 - iii) $P(A \cup B);$
 - iv) $P(A'/B');$
 - v) $P(B'/A').$
 - b) Asigne algún significado a los sucesos A y B y exprese coloquialmente todos los sucesos involucrados en el problema.
5. La probabilidad de que una industria estadounidense se radique en Argentina es 0,7, de que se localice en Brasil es 0,4 y de que se encuentre en Argentina o en Brasil o en ambas es 0,8. ¿Cuál es la probabilidad de que la industria se localice:
 - a) en ambos países?
 - b) en ninguno de ellos?
 - c) sabiendo que se localizó en Argentina, se localice en Brasil?
 - d) si no se localizó en Brasil, tampoco lo haga en Argentina?
6. Un espacio muestral de 200 adultos se clasifica de acuerdo con su sexo y nivel de educación:

EDUCACIÓN	HOMBRE	MUJER
Primaria	38	45
Secundaria	28	50
Terciaria	22	17

- a) Si se selecciona aleatoriamente a una persona de este grupo, encuentre la probabilidad de que:
- I) Sea hombre, sabiendo que tiene educación de nivel Secundario.
 - II) No tenga educación Terciaria, sabiendo que es mujer.
- b) Si se seleccionan aleatoriamente a dos personas de este grupo, calcule la probabilidad de que: Sabiendo que tienen educación Primaria, sean un hombre y una mujer.
7. En el último año de escuela, en un grupo de 100 alumnos se encontró que 42 cursaron Matemática, 68 Psicología, 54 Historia, 22 Matemática e Historia, 25 Matemática y Psicología, 10 las tres materias y 7 Historia pero no Matemática ni Psicología. Si se selecciona un estudiante aleatoriamente, encuentre la probabilidad de que:
- una persona que cursa Psicología haya cursado las tres materias;
 - haya cursado exactamente una materia;
 - una persona que no cursa Psicología, haya cursado Matemática e Historia.
8. Un monedero contiene 3 monedas de \$1 y 2 de 50 centavos. Se extraen tres monedas al azar, una después de otra sin reposición. Sean los sucesos:
- A: La segunda moneda extraída es de \$1.
- B: Las dos últimas monedas son de 50 centavos.
- C: A lo sumo dos monedas son de \$1.
- Construya un espacio muestral adecuado al experimento.
 - Calcule la probabilidad de los sucesos A, B y C.
9. Sean A y B dos sucesos asociados a un experimento y sea P una medida de probabilidad. Si $P(A) = 0,4$; $P(A \cup B) = 0,7$ y $P(B) = p$; halle p si:
- A y B son mutuamente excluyentes.
 - A y B son independientes.
 - A es subconjunto de B.
10. Un experimento consiste en lanzar un dado. Si el resultado es un número par se lanza una moneda una vez. Si en cambio el número en el dado es impar, la moneda se lanza dos veces. Use la notación 4C, por ejemplo, para denotar el suceso que el dado muestre 4 y después la moneda salga cara. Construya un diagrama de árbol para mostrar los elementos del espacio muestral S.
- ¿Cuántos puntos muestrales tiene S?
 - Liste los elementos que corresponden al suceso A: en el dado sale un número menor que 3. Calcule $P(A)$.
 - Liste los elementos que corresponden al suceso B: ocurren 2 cruces. Calcule $P(B)$.
 - ¿Son A y B sucesos excluyentes? ¿Por qué?
 - Liste los elementos del suceso $A \cup B$, calcule $P(A \cup B)$ y utilizando esta última probabilidad calcule $P(A \cap B)$
 - ¿Son A y B sucesos independientes? ¿Por qué?
11. A y B dos sucesos asociados a un experimento y sea P una medida de probabilidad. Si $P(A) = 1/3$; $P(B/A) = 1/2$; $P(A/B) = 1/3$. Determine cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas:
- A y B son independientes;
 - $A \subset B$;
 - A y B son excluyentes;
 - $P(A'/B') = 2/3$.
12. La probabilidad de que un hombre casado vea cierto programa de televisión es 0,4 y la de que una mujer del mismo estado civil lo haga es 0,5. La probabilidad de que un hombre vea el programa, dado que su esposa lo hace es 0,7. Encuentre la probabilidad de que:
- una pareja de casados vea el programa;
 - una esposa vea el programa, dado que su esposo lo hace;
 - al menos una persona del matrimonio vea el programa.

13. El 70% de los alumnos que cursan Probabilidad y Estadística asisten a clases teóricas, y de éstos, el 60% regularizan la materia. Además se sabe que el 80% de los que regularizan la materia asisten a clases teóricas.

- a) I) ¿Cuál es la probabilidad de que los alumnos regularicen y asistan a clases teóricas?
II) ¿Cuál es la probabilidad de que los alumnos regularicen la materia?
- b) Si se eligen al azar dos alumnos de este curso, ¿cuál es la probabilidad de que al menos haya regularizado la materia, si ambos asistieron a clases teóricas?

14. Un producto está formado de dos partes A y B . El proceso de fabricación es tal que la probabilidad de un defecto en A es 0,06 y la probabilidad de un defecto en B es 0,07. ¿Cuál es la probabilidad de que un producto no sea defectuoso? **Nota:** suponga independencia entre los defectos en A y B .

15. Un sistema está formado por dos componentes C_1 y C_2 conectados en paralelo y otro componente C_3 conectado en serie a los dos anteriores.

Cada componente funciona de forma independiente a los demás siendo las probabilidades de fallo 0,1; 0,15 y 0,01, para los componentes C_1 , C_2 y C_3 , respectivamente. Calcule la probabilidad de que:

- a) fallen los tres componentes;
- b) el sistema funcione, es decir, funcione al menos uno de los componentes C_1 , C_2 y funcione el componente C_3 ;
- c) el componente C_3 falle, sabiendo que el sistema está funcionando.

16. A y B participan de un juego que puede ganar uno de ellos o bien empatar. Las probabilidades respectivas de ganar son $4/9$ y $3/9$; y la de empatar es $2/9$. Los jugadores acuerdan realizar un torneo consistente en dos partidos. Calcule la probabilidad de que:

- a) empaten los dos partidos;
- b) A gane un solo partido;
- c) no haya ningún empate.

Nota: el resultado de un partido es independiente del resultado de cualquier otro.

17. En una cierta región del país se sabe por experiencia pasada que la probabilidad de seleccionar a una persona con cáncer es 0,02. Si la probabilidad de que un médico le diagnostique correctamente a una persona con cáncer, que tiene la enfermedad es 0,78, y la de que le diagnostique cáncer a una persona que no padece la enfermedad es 0,06. Calcule la probabilidad de que:

- a) a una persona se le diagnostique cáncer.
- b) si a una persona se le diagnostica cáncer, verdaderamente tenga la enfermedad.

18. A , B y C licitan por contrato para la construcción de un camino. Las probabilidades de que A , B y C obtengan el contrato son respectivamente 0,5; 0,3 y 0,2. Si A obtiene el contrato, escogerá a D como subcontratista, con probabilidad 0,8. Si B obtiene el contrato, D será escogido con probabilidad 0,4.

- a) Calcule la probabilidad de que D sea subcontratado.
- b) Calcule las probabilidades posteriores.

19. Una compañía constructora emplea a 2 ingenieros de ventas. El ingeniero 1 hace el trabajo de estimar costos en 70% de las cotizaciones solicitadas en la empresa. El ingeniero 2 lo hace para el 30% de tales cotizaciones. Se sabe que la tasa de error para el ingeniero 1 es tal que 0,02 es la probabilidad de un error en el trabajo; del ingeniero 2 es de 0,04. Suponga que llega una solicitud de cotización y ocurre un error grave al estimar los costos. ¿Qué ingeniero supondría usted que hizo el trabajo? Justifique a través del cálculo de probabilidades.

20. Si se aprobó Matemática, la probabilidad de aprobar Física es 0,5. Esta probabilidad se reduce a 0,2 si se desaprobó Matemática. Por otra parte, la probabilidad de aprobar al menos una de dichas asignaturas es 0,6. ¿Cuál es la probabilidad de que sólo un alumno, entre dos que desaprobaron Física, haya aprobado Matemática?

Ejercicios Complementarios:

1. Dado un espacio de probabilidad (S, \mathcal{A}, P) y un evento fijo $B \in \mathcal{A}$ tal que $P(B) > 0$, demuestre que la función $\bar{P}(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ define una función de probabilidad.
2. Suponga que A, B y C son tres eventos tales que $P(B \cap C) > 0$. Si A es independiente de B dado C y A es independiente de C dado B, demuestre (o refute) que A es independiente de $B \cap C$.
3. Un sistema de recomendación sugiere películas basadas en géneros preferidos por el usuario. Si a un usuario le gusta la ciencia ficción, hay una probabilidad del 0.8 de que le recomiendan "Star Wars". Si no le gusta, la probabilidad se reduce al 0.3. Si se sabe que al 60% de los usuarios les gusta la ciencia ficción y un usuario recibe una recomendación de "Star Wars",
 - a) ¿cuál es la probabilidad de que a este usuario le guste la ciencia ficción?
 - b) Si un usuario no recibe una recomendación de "Star Wars", ¿cuál es la probabilidad de que a este usuario no le guste la ciencia ficción?
4. Un data center tiene un 98% de tiempo de actividad garantizado. Si ocurre un corte de energía, la probabilidad de que el data center esté inactivo es del 0.7. Si no hay corte de energía, la posibilidad de inactividad es solo del 1%. Si se sabe que hay cortes de energía el 5% del tiempo y el data center está inactivo:
 - a) ¿Cuál es la probabilidad de que haya habido un corte de energía?
 - b) Si el data center está activo, ¿cuál es la probabilidad de que no haya habido un corte de energía?
5. Una caja contiene los siguientes cuatro papelitos y cada uno tiene exactamente las mismas dimensiones: (1) gana el premio 1; (2) gana el premio 2; (3) gana el premio 3; (4) ganan los premios 1, 2 y 3. Se selecciona un papelito al azar. Sea $A_1 = \{\text{gana el premio 1}\}$, $A_2 = \{\text{gana el premio 2}\}$ y $A_3 = \{\text{gana el premio 3}\}$. ¿Son estos eventos independientes?
6. Considere cuatro eventos independientes A_1, A_2, A_3 y A_4 y sea $p_i = P(A_i)$ con $i = 1, 2, 3, 4$. Exprese la probabilidad de que por lo menos uno de estos eventos ocurra en función de las p_i y haga lo mismo para la probabilidad de que por lo menos dos de los eventos ocurran.