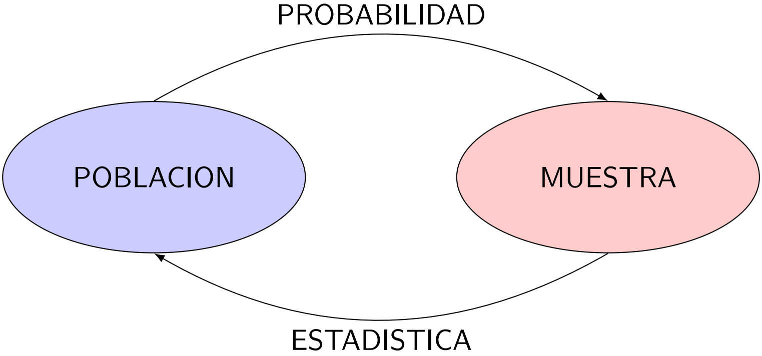
Probabilidades



Definición (antigua): *La Probabilidad es una rama de la matemática que trata de los efectos del azar.*

azar : Experimentos o fenómenos aleatorios

Introducción

Un experimento es cualquier acción o procedimiento que, generalmente y bajo ciertas condiciones y reglas rigurosamente controladas, genere observaciones.

Decimos que es:

- Determinístico: si repetido en condiciones semejantes se obtienen resultados esencialmente idénticos.
- Aleatorio: repetido en condiciones semejantes se obtienen resultados diferentes. Si se repiten esos experimentos bajo las mismas condiciones, y aún siendo muy cuidadosos, los resultados variarán. Tienen una componente aleatoria, son experimentos aleatorios En algunos casos las magnitudes de estas variaciones serán pequeñas, en otros no.

Introducción

Ejemplos

1. Desde una determinada altura, una persona libera un objeto.Repetido en las mismas condiciones...
    1.1 El experimento consiste en observar qué sucede con el objeto (siempre cae) $\Rightarrow$ Experimento determinístico
    1.2 El experimento consiste en medir el tiempo que tarda en llegar al piso $\Rightarrow$ Experimento aleatorio
2. Medir el voltaje de una batería para autos $\Rightarrow$ experimento aleatorio
3. Medir la temperatura máxima en un cierto lugar. $\Rightarrow$ experimento aleatorio
4. Contar la cantidad de bacterias por centímetro cúbico en un vaso de leche.$\Rightarrow$ Experimento aleatorio.
5. Lanzar un dado y observar el resultado.$\Rightarrow$ experimento aleatorio
6. Lanzar una moneda y observar el resultado. $\Rightarrow$ experimento

Introducción

Ejemplos

1. Desde una determinada altura, una persona libera un objeto.Repetido en las mismas condiciones...
   1.1 El experimento consiste en observar qué sucede con el objeto (siempre cae) ⇒ Experimento determinístico
   1.2 El experimento consiste en medir el tiempo que tarda en llegar al piso ⇒ Experimento aleatorio
2. Medir el voltaje de una batería para autos ⇒ experimento aleatorio
3. Medir la temperatura máxima en un cierto lugar- ⇒ experimento aleatorio
4. Contar la cantidad de bacterias por centímetro cúbico en un vaso de leche.⇒ experimento aleatorio
5. Lanzar un dado y observar el resultado.⇒ experimento aleatorio
6. Lanzar una moneda y observar el resultado. ⇒ experimento

Introducción

Ejemplos

1. Desde una determinada altura, una persona libera un objeto.Repetido en las mismas condiciones...
   1.1 El experimento consiste en observar qué sucede con el objeto (siempre cae) ⇒ Experimento determinístico
   1.2 El experimento consiste en medir el tiempo que tarda en llegar al piso ⇒ Experimento aleatorio
2. Medir el voltaje de una batería para autos.⇒ experimento aleatorio
3. Medir la temperatura máxima en un cierto lugar- ⇒ experimento aleatorio
4. Contar la cantidad de bacterias por centímetro cúbico en un vaso de leche.⇒ experimento aleatorio
5. Lanzar un dado y observar el resultado.⇒ experimento aleatorio
6. Lanzar una moneda y observar el resultado. ⇒ experimento

Introducción

Ejemplos

1. Desde una determinada altura, una persona libera un objeto.Repetido en las mismas condiciones...
    1.1 El experimento consiste en observar qué sucede con el objeto (siempre cae) $\Rightarrow$ Experimento determinístico
    1.2 El experimento consiste en medir el tiempo que tarda en llegar al piso $\Rightarrow$ Experimento aleatorio
2. Medir el voltaje de una batería para autos.
3. Medir la temperatura máxima en un cierto lugar-
4. Contar la cantidad de bacterias por centímetro cúbico en un vaso de leche.
5. Lanzar un dado y observar el resultado.
6. Lanzar una moneda y observar el resultado.

Introducción

Ejemplos

1. Desde una determinada altura, una persona libera un objeto.Repetido en las mismas condiciones...
   1.1 El experimento consiste en observar qué sucede con el objeto (siempre cae) $\Rightarrow$ Experimento determinístico
   1.2 El experimento consiste en medir el tiempo que tarda en llegar al piso $\Rightarrow$ Experimento aleatorio
2. Medir el voltaje de una batería para autos.$\Rightarrow$ experimento aleatorio
3. Medir la temperatura máxima en un cierto lugar- $\Rightarrow$ experimento aleatorio
4. Contar la cantidad de bacterias por centímetro cúbico en un vaso de leche.$\Rightarrow$ experimento aleatorio
5. Lanzar un dado y observar el resultado.$\Rightarrow$ experimento aleatorio
6. Lanzar una moneda y observar el resultado. $\Rightarrow$ experimento aleatorio

Experimentos aleatorios

Definición 2.1:

La teoría de la Probabilidad es una rama de la Matemática que crea, investiga, propone MODELOS que describen a los fenómenos o experimentos aleatorios.
Uno de sus objetivos es entender, cuantificar y modelar el tipo de variaciones que se pueden presentar.
Un modelo es una versión simplificada de la realidad, que involucra operaciones y funciones matemáticas, **variables** y **parámetros**

Espacio Muestral

Definición 2.2

: Dado un experimento aleatorio diremos que un conjunto **S** es un Espacio Muestral para el experimento si podemos asociar a cada resultado posible del experimento un elemento de **S**, de modo que a resultados diferentes le correspondan elementos diferentes de **S**. Esto es, es espacio muestral **S** es el conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio.

El espacio muestral se define, a menudo, en base a los objetivos del análisis.

Espacio Muestral

En el ejemplo 2: Medir el voltaje de una batería para autos.

(a) $\mathbf{S} = \mathbb{R}^+ = \{x/x \geq 0\}$

(b) Si sabemos que a lo sumo medirá 13V $\Rightarrow$ $\mathbf{S} = (0V, 13V)$

(c) Si el estudio consiste en medir el voltaje de cada batería que sale de una lıínea de producción hasta que el voltaje caiga fuera de esos límites, y si denotamos por $F =$ voltaje de batería cae fuera de los límites, $E =$ voltaje de batería cae dentro de los límites$\Rightarrow$ $\mathbf{S} = \{F, EF, EEF, EEEF, ...\}$

Ejemplo

En los otros ejemplos **S** podría ser:

3. $\mathbf{S} = (10^o C, 50^o C)$
4. $\mathbf{S} = \{1, 2, 3, ...\}$
5. $\mathbf{S} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
6. $\mathbf{S} = \{C, X\}$

Definiciones

Definición 2.3

Se dice que el espacio muestral **S** es:

- Discreto: Si consiste de un número finito, o infinitamente numerable de resultados posibles. Cada uno de estos posibles resultados se denomina *punto muestral*
- Continuo: Si contiene al menos un intervalo (acotado o no) de números reales.

En el ejemplo 2: Medir el voltaje de una batería para autos si:

(a) $\mathbf{S} = \mathbb{R}^{+} = \{x/x \geq 0\} \Rightarrow \mathbf{S}$ es continuo

(b) $\mathbf{S} = (0V, 13V) \Rightarrow \mathbf{S}$ es continuo

(c) $\mathbf{S} = \{F, EF, EEF, EEEF, ...\} \Rightarrow \mathbf{S}$ es discreto

Definiciones

Definición 2.3

Se dice que el espacio muestral **S** es:

- Discreto: Si consiste de un número finito, o infinitamente numerable de resultados posibles. Cada uno de estos posibles resultados se denomina *punto muestral*
- Continuo: Si contiene al menos un intervalo (acotado o no) de números reales.

En el ejemplo 2: Medir el voltaje de una batería para autos si:

(a) $\mathbf{S} = \mathbb{R}^{+} = \{x/x \geq 0\} \Rightarrow$ **S** es continuo

(b) $\mathbf{S} = (0V, 13V) \Rightarrow$ **S** es continuo

(c) $\mathbf{S} = \{F, EF, EEF, EEEF, ...\} \Rightarrow$ **S** es discreto

Eventos

Definición 2.4

- Un Evento aleatorio (o suceso aleatorio) es cualquier subconjunto del espacio muestral **S**. Se denotan por letras mayúsculas (A, E, etc)
- El evento imposible es aquel que no ocurre nunca. Se lo denota por $\varnothing$
- El evento seguro es el que ocurre siempre, coincide con el espacio muestral.

Si el espacio muestral es discreto:

- Un evento es simple (elemental) si consiste solamente de un punto muestral. Lo denotaremos E_i
- Un evento es compuesto si consiste de más de un punto muestral.

Ejemplo

Se arroja un dado numerado del 1 al 6 y se observa el resultado.

- Espacio muestral es $\mathbf{S} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $E_1 = \{1\}, E_2 = \{2\}, E_3 = \{3\}, \ldots, E_6 = \{6\}$ son los eventos simples.
- $A =$ se observa un número par, $A = \{2, 4, 6\}$ es un evento compuesto.
- $B =$ se observa un número mayor a 6. $B = \emptyset$ es un evento imposible.

Ejemplo

Se arroja un dado numerado del 1 al 6 y se observa el resultado.

- Espacio muestral es $\mathbf{S} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $E_1 = \{1\}, E_2 = \{2\}, E_3 = \{3\}, \ldots, E_6 = \{6\}$ son los eventos simples.
- $A =$ se observa un número par, $A = \{2, 4, 6\}$ es un evento compuesto.
- $B =$ se observa un número mayor a 6. $B = \varnothing$ es un evento imposible.

Relaciones entre eventos

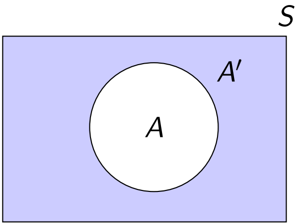
- Si los eventos A y B pueden ocurrir simultanemante, decimos que son eventos compatibles.
- Si los eventos A y B no pueden presentarse simultanemante, decimos que son eventos incompatibles, excluyentes o disjuntos.
- Decimos que dos eventos son opuestos si:
  - no pueden presentarse simultaneamente
  - la NO ocurrencia de uno implica la ocurrencia del otro.

  El **opuesto** o **complemento** de un evento A, denotado por A' es el conjunto formado por todos los elementos de **S** que no están en A.

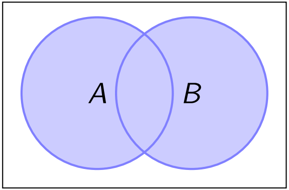
Operaciones entre eventos

Como los eventos son subconjuntos de un espacio muestral, se puede "operar" con ellos usando teoría de conjuntos para así definir nuevos eventos. Sean A, B eventos aleatorios de un mismo espacio muestral.

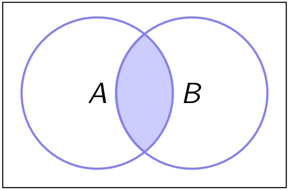
- El evento $A \cup B$ (**suma** o **unión**) es el evento que está formado por todos los resultados que están en A ó en B.
- El evento $A \cap B$ (**producto** o **intersección**) es el evento que está formado por todos los resultados que están contenidos en ambos eventos.
- El evento $A - B$ (**diferencia**) entre A y B (en ese orden) es el evento formado por todos los resultados presentes en A que no estén presentes en B



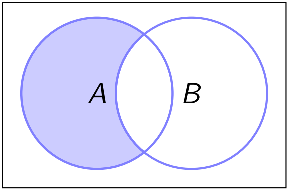
$A \cup B$



$A \cap B$



$A - B$



Ejemplo 1

Sean A, B y C tres eventos de un espacio muestral **S**
$Enundiagramagenrico, marqueeleventoquecorrespondeacadacaso:$

1. Ocurre al menos uno de los eventos.
2. Ocurren los tres eventos simultaneamente.
3. Ocurre a lo sumo un evento.

Ejemplo 2

Una caja contiene una lámpara eléctrica de 75W, otra de 60W, otra de 40W y una cuarta de 25W. Construir un espacio muestral para los siguientes experimentos aleatorios:

a Se extrae aleatoriamente una lámpara.

b Se extraen aleatoriamente dos lámparas sin reposición.

c Se extraen aleatoriamente dos lámparas con reposición.

Ejemplo 3

Se arroja una moneda "honesta" tres veces y se observa el resultado. Determinar

a Un espacio muestral apropiado.

b Por extensión los siguientes eventos:

  i El número de caras es igual a 1

  ii El número de caras sucesivas es igual a 2

  iii Hay por lo menos una ceca

  iv Hay más cecas que caras

  v Hay a lo sumo una ceca

  vi No hay más de una cara

c ¿ Qué pares de sucesos de la lista anterior son: mutuamente excluyentes, compatibles u opuestos?

Clases de Conjuntos

Definición 2.5

Un conjunto $\mathcal{A}$ cuyos elementos son conjuntos es una clase ó familia de conjuntos.

Ejemplo: Supongamos $\mathbf{S} = \{a, b, c\}$.

$$\mathcal{P}(\mathbf{S}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \mathbf{S}\}$$

es el *conjunto de partes de* $\mathbf{S}$ y es una clase, o familia, de conjuntos.

Algebra de Boole

Definición 2.6

Una clase $\mathcal{A} \neq \emptyset$ formada por subconjuntos de un conjunto **S** que es *cerrada* para la *unión* y *complemento* de conjuntos (si $B \in \mathcal{A}, C \in \mathcal{A} \Rightarrow B \cup C \in \mathcal{A}, B' \in \mathcal{A}$) se denomina Algebra Booleana de Conjuntos (álgebra de subconjuntos de **S**).
Si además se satisface que $A_i \in \mathcal{A}, \forall i = 1, 2, 3, \ldots \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ entonces $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra de conjuntos

Ejemplo:
La clase $\mathcal{P}(\mathbf{S})$ es un álgebra booleana de conjuntos

Espacio de Probabilidad

La descripción de los experimentos aleatorios se representa por la terna $(\mathbf{S}, \mathcal{P}(\mathbf{S}), P)$ donde:

- $\mathbf{S}$: espacio muestral asociado al experimento
- $\mathcal{P}(\mathbf{S})$: álgebra (o σ-álgebra) de conjuntos
- P: función de probabilidad

La función de probabilidad P es una función $P : \mathcal{P}(\mathbf{S}) \to [0, 1]$ que cuantifica la verosimilitud o posibilidad de ocurrencia de un evento aleatorio perteneciente a $\mathcal{P}(\mathbf{S})$.
En lo que resta denotaremos por $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbf{S})$

Probabilidad - Definición Axiomática

Definición 2.7: Definición (Axiomática)

Se dice que una función $P : \mathcal{A} \to [0,1]$ es una función de probabilidad si verifica los siguientes axiomas:

Axioma 1: $P(A) \geq 0, \forall A \in \mathcal{A}$

Axioma 2: $P(\mathbf{S}) = 1$

Axioma 3:
- a Si $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ es una colección finita de eventos mutuamente excluyentes $\Rightarrow P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$
- b Si $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ es una colección infinita de eventos mutuamente excluyentes $\Rightarrow P(A_1 \cup_2 \cup \ldots) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Diremos que tal P es una probabilidad finitamente aditiva si satisface los axiomas 1,2 y 3a, mientras que diremos que es una probabilidad si satisface los axiomas 1,2 y 3b.

Propiedades

Sea $(\mathbf{S}, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad, sean A,B eventos $\in \mathcal{A}$

1. $P(A) = 1 - P(A')$.
2. $P(\varnothing) = 0$
3. Si A,B, son eventos incompatibles $\Rightarrow P(A \cap B) = 0$.
4. Si $A \subseteq B \quad \Rightarrow P(A) \leq P(B)$ y $P(B - A) = P(B) - P(A)$
5. Para cualquier par de eventos A,B en $\mathcal{A}$,
$$P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$$
6. Para cualquier par de eventos A,B en $\mathcal{A}$,
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
7. Si A,B,C son eventos en $\mathcal{A}$, $P(A \cup B \cup C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$
8. (Subaditividad) $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i), A_1, \ldots, A_n \ \in \mathcal{A}$

Una función de probabilidad debe satisfacer esos axiomas, pero ¿cómo se asignan probabilidades a eventos?
En este curso sólo introduciremos dos maneras:

- Método clásico (espacios muestrales discretos)
- Método estadístico o frecuentista.

Definición clásica o sistemática

Supondremos: **S** **discreto y finito**, $E_1, \ldots, E_n$ sus eventos simples.

1. Se asignan probabilidades a los $E_, i = 1, \ldots, n$, de manera tal que $P(E_i) \geq 0 \forall i, i = 1, \ldots, n$ y $\sum_{i=1}^{n} P(E_i) = 1$

   Si A es un evento compuesto, A es la unión (disjunta) de algunos de esos E_i, $\Rightarrow P(A) = \sum_{E_i \subseteq A} P(E_i)$
2. Si pueden considerarse los $E_i, i = 1, \ldots, n$ equiprobables $\Rightarrow$ se asigna $P(E_i) = \frac{1}{n}$ y de esta manera se satisfacen los axiomas (simetría o indiferencia).

   Si A es un evento compuesto, y $N(A)$: número de resultados favorables al evento A, $\Rightarrow$
   $P(A) = \sum_{E_i \subseteq A} P(E_i) = \sum_{E_i \subseteq A} \frac{1}{n} = \frac{N(A)}{n}$

   $n = \#\mathbf{S}$ es el número de resultados posibles, $N(A)$ el número de resultados favorables a A. (Laplace)

Ejemplo

Se extrae aleatoriamente un enchufe de un lote de 100.

$\mathcal{S} = \{E_1, E_2, \ldots, E_{100}\}$, $E_i =$ se extrae el enchufe n°i, $i = 1, \ldots, 100$

$P(E_i) = \frac{1}{100} = 0.01$

Supongamos que de esos 100 enchufes, hay 5 que están fallados. ¿Cuál es la probabilidad de extraer un enchufe que esté fallado? ¿Cual es la probabilidad de que se extraiga un enchufe que no está fallado?.

Ejemplo

Se extrae aleatoriamente un enchufe de un lote de 100.

$\mathcal{S} = \{E_1, E_2, \ldots, E_{100}\}$, $E_i =$ se extrae el enchufe n^o i, $i = 1, \ldots, 100$

$P(E_i) = \frac{1}{100} = 0.01$

Supongamos que de esos 100 enchufes, hay 5 que están fallados. ¿Cuál es la probabilidad de extraer un enchufe que esté fallado? ¿ Cual es la probabilidad de que se extraiga un enchufe que no está fallado?

Ejemplo

Se extrae aleatoriamente un enchufe de un lote de 100.

$\mathcal{S} = \{E_1, E_2, \ldots, E_{100}\}$, $E_i =$ se extrae el enchufe n^o i, $i = 1, \ldots, 100$

$P(E_i) = \frac{1}{100} = 0.01$

Supongamos que de esos 100 enchufes, hay 5 que están fallados. ¿Cuál es la probabilidad de extraer un enchufe que esté fallado? ¿ Cual es la probabilidad de que se extraiga un enchufe que no está fallado?.

Ejemplos

Un fabricante tiene 5 computadoras idénticas para entregar, pero no sabe que 2 son defectuosas. Recibe un pedido de 2 computadoras y lo entrega seleccionándolas al azar entre las 5 disponibles.

1. ¿ Cuál es la probabilidad que entregue las dos defectuosas?
2. ¿ Cuál es la probabilidad que entregue sólo una defectuosa?
3. Calcular la probabilidad que no entregue ninguna computadora defectuosa.

Definición Frecuentista

Sea $\mathbf{S}$ el espacio muestral asociado a un experimento aleatorio, $A \subseteq \mathbf{S}$ un evento.

- Se repite n veces el experimento.
- Se define $F(A) = \#$ de veces que ocurre A en las n repeticiones. $F(A)$ frecuencia absoluta de ocurrencia A.
- Se define $f(A) = \frac{F(A)}{n}$ como la frecuencia relativa de ocurrencia de A.

Si el experimento se repite en forma independiente e idéntica una cantidad considerable de veces, se observará que $f(A)$ tiende a estabilizarse en un número a medida que n crece. Ese número se define como $P(A) = \lim_{n \to \infty} f(A)$.