Lineaire Algebra

Jasper Vos **Huiswerkset 12** 2 december 2025
Studentnr: *s2911159*

Opgave 10.5.1(1)

Idee

We bepalen de rang van C_a door naar de determinant te kijken. Een 3×3 matrix heeft rang 3 als de determinant niet nul is.

Berekening determinant

Bereken $\det(C_a)$ met rijontwikkeling langs de eerste rij:

$$\begin{aligned}
\det(C_a) &= \det \begin{pmatrix} a & a & 2 \\ 1 & 0 & a \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \\
&= a \det \begin{pmatrix} 0 & a \\ -3 & 1 \end{pmatrix} - a \det \begin{pmatrix} 1 & a \\ -2 & 1 \end{pmatrix} + 2 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \\
&= a(0 + 3a) - a(1 + 2a) + 2(-3 - 0) \\
&= 3a^2 - a - 2a^2 - 6 \\
&= a^2 - a - 6 \\
&= (a - 3)(a + 2)
\end{aligned}$$

Conclusie

De determinant is nul als $(a - 3)(a + 2) = 0$, dus voor $a = 3$ of $a = -2$.
Rang van C_a:

- Als $a \in \{-2, 3\}$: $\det(C_a) = 0$, dus rang < 3. Na rij-reductie blijkt rang $= 2$.
- Als $a \notin \{-2, 3\}$: $\det(C_a) \neq 0$, dus $\boxed{\text{rang}(C_a) = 3}$

Opgave 10.5.1(2)

Idee

Gebruik het resultaat uit deel (1). Als $a = 2$, dan is $2 \notin \{-2, 3\}$, dus $\text{rang}(C_2) = 3$. Een 3×3 matrix met rang 3 is inverteerbaar.

Bewijs inverteerbaarheid

Voor $a = 2$:

$$\det(C_2) = (2-3)(2+2) = (-1)(4) = -4 \neq 0$$

Dus C_2 is **inverteerbaar**.

Berekening inverse

We gebruiken de uitgebreide matrix $[C_2 \mid I]$ en brengen deze naar $[I \mid C_2^{-1}]$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 = \frac{1}{2}R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 = R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 = R_3 + 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 = -R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 = R_3 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \frac{3}{2} & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 = \frac{1}{2}R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 = R_2 + R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{4} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 = R_1 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{4} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 = R_1 - R_3} \boxed{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{4} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)}$$

Antwoord

$$\boxed{C_2^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 2 & -1 \\ \frac{5}{4} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -6 & 8 & -4 \\ 5 & -6 & 2 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}}$$

Opgave 10.5.1(3)

Idee

Het stelsel $C_a x = v_b$ heeft oneindig veel oplossingen als:

- De rang van C_a kleiner is dan 3 (vrije variabelen)
- Het stelsel consistent is (geen tegenstrijdigheden)

Uit deel (1) weten we dat $\text{rang}(C_a) < 3$ precies wanneer $a \in \{-2, 3\}$. We moeten nu voor beide waarden nagaan welke b consistentie geeft.

Geval $a = -2$

Voor $a = -2$ wordt het stelsel:

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$$

Breng de uitgebreide matrix naar rij-echelonvorm:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ -2 & -3 & 1 & b \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 = -\frac{1}{2}R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ -2 & -3 & 1 & b \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 = R_2 - R_1,\ R_3 = R_3 + 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & b-2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 = R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & b-4 \end{array}\right)$$

Voor consistentie moet $b - 4 = 0$, dus $\boxed{b = 4}$.

Geval $a = 3$

Voor $a = 3$ wordt het stelsel:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$$

Breng de uitgebreide matrix naar rij-echelonvorm:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 1 & b \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \\ -2 & -3 & 1 & b \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 = R_2 - 3R_1,\ R_3 = R_3 + 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -7 & -1 \\ 0 & -3 & 7 & b+2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 = R_3 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & b+1 \end{array}\right)$$

Voor consistentie moet $b + 1 = 0$, dus $\boxed{b = -1}$.

Antwoord

Het stelsel $C_a x = v_b$ heeft oneindig veel oplossingen voor:

$$\boxed{(a, b) \in \{(-2, 4),\ (3, -1)\}}$$

Opgave 10.5.1(4)

Idee

Uit deel (3) hebben we twee paren gevonden: $(a, b) = (-2, 4)$ en $(a, b) = (3, -1)$. De kleinste waarde van a is $a = -2$, dus we beschrijven de oplossingsruimte voor $(a, b) = (-2, 4)$.

Oplossingsruimte bepalen

Uit deel (3) hadden we voor $a = -2$ en $b = 4$ de gereduceerde matrix:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Breng naar volledig gereduceerde rij-echelonvorm:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 = -R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{R_1 = R_1 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Dit geeft het stelsel:

$$x_1 - 2x_3 = 1$$
$$x_2 + x_3 = -2$$

De variabele x_3 is vrij. Stel $x_3 = t$ met $t \in \mathbb{R}$, dan:

$$x_1 = 1 + 2t$$
$$x_2 = -2 - t$$
$$x_3 = t$$

Parametrische vorm

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2t \\ -2 - t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Antwoord

De oplossingsruimte voor $(a, b) = (-2, 4)$ is:

$$\boxed{\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}}$$

Dit is een lijn door het punt $(1, -2, 0)$ in de richting van de vector $(2, -1, 1)$.

Opgave 11.1.3

Eigenwaarden bepalen

Los de karakteristieke vergelijking op:

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda I) &= 0 \\
\det \begin{pmatrix} 5-\lambda & -4 \\ 8 & -7-\lambda \end{pmatrix} &= 0 \\
(5-\lambda)(-7-\lambda) - (-4)(8) &= 0 \\
-35 - 5\lambda + 7\lambda + \lambda^2 + 32 &= 0 \\
\lambda^2 + 2\lambda - 3 &= 0 \\
(\lambda+3)(\lambda-1) &= 0
\end{aligned}$$

Eigenwaarden: $\boxed{\lambda_1 = -3 \text{ en } \lambda_2 = 1}$

Eigenruimte voor $\lambda_1 = -3$

Los $(A + 3I)v = 0$ op:

$$\begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 8 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

Rijreductie:

$$\begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 8 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 = \frac{1}{8}R_1} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 8 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 = R_2 - 8R_1} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dit geeft $v_1 - \frac{1}{2}v_2 = 0 \implies v_1 = \frac{1}{2}v_2$.
Stel $v_2 = 2t$ met $t \in \mathbb{R}$, dan $v_1 = t$ en:

$$v = t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Basis voor $E_{-3}(A)$: $\boxed{\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}}$

Eigenruimte voor $\lambda_2 = 1$

Los $(A - I)v = 0$ op:

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 8 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

Rijreductie:

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 8 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 = \frac{1}{4}R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 8 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 = R_2 - 8R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dit geeft $v_1 - v_2 = 0 \implies v_1 = v_2$.
Stel $v_2 = t$ met $t \in \mathbb{R}$, dan $v_1 = t$ en:

$$v = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Basis voor $E_1(A)$: $\boxed{\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}$

Eigenwaarden bepalen

Los de karakteristieke vergelijking op:

$$\det(B - \lambda I) = 0$$
$$\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -3-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

Gebruik cofactorontwikkeling langs de derde kolom:

$$(-3-\lambda)\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0$$
$$(-3-\lambda)[(3-\lambda)(-\lambda) - (2)(-1)] = 0$$
$$(-3-\lambda)[-3\lambda + \lambda^2 + 2] = 0$$
$$(-3-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = 0$$
$$(-3-\lambda)(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$$

Eigenwaarden: $\boxed{\lambda_1 = -3,\ \lambda_2 = 1,\ \text{en}\ \lambda_3 = 2}$

Eigenruimte voor $\lambda_1 = -3$

Los $(B + 3I)v = 0$ op:

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0$$

Rijreductie:

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{R_2 = R_2 + 6R_1} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{R_1 = -R_1,\ R_2 = \frac{1}{20}R_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{R_1 = R_1 + 3R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dit geeft $v_1 = 0$ en $v_2 = 0$, terwijl v_3 vrij is.
Stel $v_3 = t$ met $t \in \mathbb{R}$:

$$v = t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Basis voor $E_{-3}(B)$: $\boxed{\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}}$

Eigenruimte voor $\lambda_2 = 1$

Los $(B - I)v = 0$ op:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0$$

Rijreductie:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 = R_2 + 2R_1} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 = -R_1,\ R_3 = -\frac{1}{4}R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dit geeft $v_1 + v_2 = 0 \implies v_1 = -v_2$ en $v_3 = 0$.
Stel $v_2 = t$ met $t \in \mathbb{R}$, dan $v_1 = -t$ en:

$$v = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Basis voor $E_1(B)$: $\boxed{\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}}$

Eigenruimte voor $\lambda_3 = 2$

Los $(B - 2I)v = 0$ op:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0$$

Rijreductie:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 = R_2 + R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 = -\frac{1}{5}R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dit geeft $v_1 + 2v_2 = 0 \implies v_1 = -2v_2$ en $v_3 = 0$.
Stel $v_2 = t$ met $t \in \mathbb{R}$, dan $v_1 = -2t$ en:

$$v = t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Basis voor $E_2(B)$: $\boxed{\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}}$