

Wiskundige Structuren

Jasper Vos
Studentnr: s2911159

Huiswerkset 7

7 november 2025

Opgave 1

We gebruiken volledige inductie om te bewijzen dat I niet leeg is voor alle $n \in \mathbb{N}$.

Bewijs.

- *Basisstap:* $n = 0, n = 1$

Voor $n = 0$ is triviaal want $\mathcal{I}_0 := \bigcap_{i \geq 0} I_i = I_0$, en I_0 is een niet-lege begrensde interval, dus \mathcal{I} niet leeg.

Voor $n = 1$ geldt $\mathcal{I}_1 := \bigcap_{i \geq 1} I_i = I_0 \cap I_1$.

Laat $x \in I_1$ dan $x \in I_0$ want $I_1 \subset I_0$ en I_1 niet-leeg. Hieruit volgt dus $x \in I_1 \cap I_0$, en dus $I_1 \cap I_0 \neq \emptyset$ waaruit volgt dat \mathcal{I} niet-leeg is.

- *Inductie-hypothese:*

Neem nu $n = k$ en beschouw \mathcal{I}_k niet-leeg. Laat zien dat voor $n = k + 1$, geldt dat \mathcal{I}_{k+1} niet-leeg is.

Voor $n = k$ geldt $\mathcal{I}_{k+1} := \bigcap_{i \geq k+1} I_i = I_{k+1} \cap I_k \cap I_{k-1} \cap \dots \cap I_0 = I_{k+1} \cap \mathcal{I}_k$.

Laat $x \in I_{k+1}$ dan $x \in I_k$ want $I_{k+1} \subset I_k \subset \mathcal{I}_k$, en dus $x \in I_{k+1} \cap \mathcal{I}_k$. Hieruit volgt dus dat $I_{k+1} \cap \mathcal{I}_k \neq \emptyset$, en dus \mathcal{I}_{k+1} niet-leeg.

- *Conclusie:*

\mathcal{I} is niet-leeg voor $n = 0, n = 1$, en verder voor elke $n = k$ en zijn opvolgers. Hieruit volgt dus dat \mathcal{I} leeg is voor elke $n \in \mathbb{N}$.

□

Opgave 2

- Elke begrensde rij heeft een convergente deelrij (Bolzano-Weierstrass). We kijken dus eerst of de rij begrensd is, merk op:

$$-1 \leq \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) \leq 1 \iff |\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)| \leq 1$$

Hieruit volgt dus dat $\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)$, begrensd is.

Laten we nu een deelrij zoeken, bekijk $\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)$:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) = (0, 1, 0, -1, 0, 1, \dots)$$

Neem $\sin(n2\pi) = (0, 0, 0, \dots)$ dan hebben we een constante rij, en constante rijen zijn convergent.

- Voor alle $M \in \mathbb{R}_{>0}$ geldt dat er een $n > M$ volgens de Archimedische eigenschap is. Dit betekent dus dat de rij onbegrensd is, en dus geen convergente deelrijen kan bevatten (Bolzano-Weierstrass).