

# Analyse I Huiswerk

Jasper Vos

Huiswerkset 2

17 september 2025

Studentnr: s2911159

1. a) Voor  $x \leq -1$  geldt het voorschrift  $\sqrt{x^2 + x + 4} + x$ . Er is een wortel en dus moeten we kijken of  $x^2 + x + 4 \geq 0$  voor alle  $x$ . We weten dat dit een dalparabool is met een minimum. We berekenen  $\frac{d}{dx}(x^2 + x + 4) = 2x + 1$ . Vervolgens stellen we deze gelijk om het minimum te vinden.  $2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$ . Vul nu in  $((-\frac{1}{2})^2 + -\frac{1}{2} + 4) \Rightarrow \frac{15}{4} > 0$ . En dus is het wortelgedeelte goed gedefinieerd aangezien voor alle  $x \leq -1$  geldt dat het groter is dan  $\frac{15}{4}$ .

Tot slot geldt dat het polynoom onder de wortel en de  $x$  naast de wortel goed gedefinieerd zijn omdat ze allebei per definitie continu zijn.

b)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x + 4} + x &= \lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{t^2 - t + 4} - t \quad (\text{Vervang } x \text{ met } t \text{ waarbij } t = -x) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{t^2 - t + 4} - t)(\sqrt{t^2 - t + 4} + t)}{\sqrt{t^2 - t + 4} + t} \quad (\text{Gebruik de worteltruc}) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^2 - t + 4 - t^2}{\sqrt{t^2 - t + 4} + t} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-t + 4}{\sqrt{t^2 - t + 4} + t} \quad (\text{Deel de teller en noemer door } t) \\ &= \frac{-1 + 0}{\sqrt{1 + 0 + 0} + 1} = \boxed{-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 2x^2 - 4x}{(x^2 - 1)(x - 2)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 2x^2 - 4x}{x^3 - 2x^2 - x + 2} \quad (\text{Werk de haakjes weg}) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^3}{x^3} - \frac{2x^2}{x^3} - \frac{4x}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3} - \frac{2x^2}{x^3} - \frac{x}{x^3} + \frac{2}{x^3}} \quad (\text{Deel de teller en noemer door } x^3) \\ &= \frac{2 - 0 - 0}{1 - 0 - 0 + 0} = \boxed{2}\end{aligned}$$

- d) Als  $f(x)$  continu is op  $x = -1$  moeten zowel het linker als rechterlimiet gelijk aan elkaar zijn.

$$\begin{aligned}\lim_{x \uparrow -1} \sqrt{x^2 + x + 4} + x &= \sqrt{(-1)^2 - 1 + 4} - 1 \\ &= \sqrt{4} - 1 = 1 \\ &\Leftrightarrow \\ \lim_{x \downarrow -1} \frac{2x^3 - 2x^2 - 4x}{(x^2 - 1)(x - 2)} &= \lim_{x \downarrow -1} \frac{2x(x^2 - x - 2)}{(x - 1)(x + 1)(x - 2)} \\ &= \lim_{x \downarrow -1} \frac{2x \cancel{(x + 1)} \cancel{(x - 2)}}{(x - 1) \cancel{(x + 1)} \cancel{(x - 2)}} \\ &= \frac{2(-1)}{(-1) - 1} = 1\end{aligned}$$

Aangezien  $\lim_{x \uparrow -1} f(x) = \lim_{x \downarrow -1} f(x)$  moet  $f(x)$  continu zijn op het punt  $x = -1$ .

- e) Gebruik wat we bij de vorige vraag hebben bereikt namelijk  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{x-1}$  en werk verder uit. Vul in voor  $x \rightarrow 1$  dan:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{x-1} = \frac{2}{0}$$

Dit betekent dat we een verticale asymptoot hebben op  $x = 1$ . Vul nu in voor  $x \rightarrow 2$  dan:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x}{x-1} = \frac{4}{1} = 4$$

f) Gebruik weer het vorige resultaat dan:  $\lim_{x \uparrow 2} \frac{2x}{x-1} = 4 \Leftrightarrow \lim_{x \downarrow 2} \frac{2x}{x-1} = 4$ . Als we dus  $c = 4$  nemen is  $g$  continu op  $x = 2$ .  $g$  is continu op  $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$  aangezien 1 geen element is op  $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$ , en voor alle overige elementen het wel gedefinieerd is.

2. Zij  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x} + 50x^2 - \cos(x))$  en  $h(x) = -x^2$ . We weten dat:

$$x^2 \geq x^2 \sin(\frac{1}{x} + 50x^2 - \cos(x)) \geq -x^2$$

Aangezien  $1 \geq \sin(\frac{1}{x} + 50x^2 - \cos(x)) \geq -1$ . Hieruit volgt dat we de tussenwaardestelling kunnen gebruiken.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} -x^2 = 0$$

Omdat  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \geq \lim_{x \rightarrow 0} g(x) \geq \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$ , moet  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x} + 50x^2 - \cos(x)) = 0$ .