Wiskundige Structuren

Jasper Vos **Huiswerkset 4** 10 oktober 2025
Studentnr: *s2911159*

Opgave 1

a) We hebben eerst een hulpstelling nodig voor het unieke inverse van elk element in $\mathbb{Z}$.

Lemma 1 (Unieke inverse)**.** $\forall x \in \mathbb{Z}\ \exists! y \in \mathbb{Z}$ *zodanig dat* $x + y = 0$

Bewijs. Neem $x, y, y' \in Z$ en laat $x + y = 0$ en $x + y' = 0$ dan:

$$\begin{aligned} x + y &= x + y' \\ y &= y' \quad \text{(Schrapwet)} \end{aligned}$$

Hieruit volgt dus dat er een unieke inverse is. □

Nu beginnen we het bewijs waarom $(-1)a = -a$:

$$\begin{aligned} (-1)a &= 0 + (-1)a \quad \text{(0 is neutraal in optelling)} \\ &= a + (-a) + (-1)a \quad (a + (-a) = 0 \text{ lemma unieke inverse}) \\ &= a + (-1)a + (-a) \quad \text{(Optelling is commutatief)} \\ &= (1)a + (-1)a + (-a) \quad \text{(1 is neutraal in vermenigvuldiging)} \\ &= (1 + (-1))a + (-a) \quad \text{(Ditstributieve eigenschap)} \\ &= (0)a + (-a) \\ &= 0 + (-a) \\ &= -a \end{aligned}$$

b) We moeten eigenlijk laten zien wat het inverse is van 0. Gebruik lemma waarbij we dus weten dat unieke inverse is. Stel voor $0 + a = 0$ dan:

$$\begin{aligned} 0 + a &= 0 \\ a &= 0 \end{aligned}$$

Dus 0 is het inverse van 0 en dus $0 = -0$.

c) Bewijs met het ongerijmde, stel $0 = 1$ dan en gebruikt het feit dat elk element een unieke inverse heeft. Bekijk linkerkant $0 + 0 = 0$ en rechterkant $1 + (-1) = 0$. maar $0 \neq -1$ dit is een tegenspraak want als $0 = 1$ dan zouden ze een unieke inverse moeten hebben.

Opgave 2

a) 1. *Reflexiviteit:* Te bewijzen $x \sim_n x$.
   Zij $x \sim_n x$ dan:
   $$x \sim_n n \iff (x + x = n + 1) \vee (x = x)$$
   Voor alle x geldt dat $x = x$ dus is $\sim_n$ reflexief.
2. *Symmetrie:* Te bewijzen $x \sim_n y$ dan $y \sim_n x$.
   Beredeneer vanuit $x \sim_n y$ dan:
   $$\begin{aligned} x \sim_n y &\iff x + y = n + 1 \vee x = y \\ &\iff y + x = n + 1 \vee y = x \quad \text{(Gebruik commutativiteit)} \\ &\iff y \sim_n x \end{aligned}$$
   Hieruit volgt dat $\sim_n$ symmetrisch is.
3. *Transitiviteit:* Te bewijzen als $x \sim_n y$ en $y \sim_n z$ dan $x \sim_n z$.
   $$x \sim_n y \iff (x + y = n + 1) \vee (x = y)$$
   en
   $$y \sim_n z \iff (y + z = n + 1) \vee (y = z)$$
   Gebruik substitutie
   $$\begin{gathered} (x + y = y + z) \vee (x = y = z) \\ (x + \cancel{y} = \cancel{y} + z) \vee (x = z) \quad \text{(Gebruik Schrapwet)} \\ (x + z) \vee (x = z) \iff x \sim_n z \end{gathered}$$
   Dan volgt dat $\sim_n$ transitief is.

Vanwege reflexiviteit, symmetrie en transitiviteit geldt dat $\sim_n$ een equivalentie-relatie is.

b)

c)