Lineaire Algebra

Jasper Vos **Huiswerkset 9** 13 november 2025
Studentnr: *s2911159*

Opgave 8.5.1

Stelsel 1

Gegeven stelsel:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Matrix en vector:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dit is een homogeen stelsel. Breng A naar gereduceerde rij-echelonvorm:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Uit de rij-echelonvorm volgt:

$$x_1 + 2x_3 = 0 \implies x_1 = -2x_3$$
$$x_2 - 2x_3 = 0 \implies x_2 = 2x_3$$

Dus de oplossingsverzameling is:

$$\left\{ t \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

Stelsel 2

Gegeven stelsel:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -1 \\ -x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

Matrix en vector:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Uitgebreide matrix naar rij-echelonvorm:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Neem $x_3 = 0$ dan:

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Algemene oplossing:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

Stelsel 3

Gegeven stelsel:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ -x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

Matrix en vector:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Uitgebreide matrix naar rij-echelonvorm:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De laatste kolom bevat een spil dus het stelsel is inconsistent. Er is geen oplossing.

Stelsel 4

Gegeven stelsel:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + x_3 = 3 \\ -2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$$

Matrix en vector:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Uitgebreide matrix naar rij-echelonvorm:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Particuliere oplossing (neem $x_3 = 0$):

$$a = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Kern van A heeft basis $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Algemene oplossing:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

Opgave 9.1.4

Gegeven zijn de vectorruimten V_1 (2×2 matrices) en V_2 (3×2 matrices) met bases:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

De lineaire afbeelding $T : V_1 \to V_2$ is gegeven door:

$$T(M) = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -1 & 5 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} \cdot M$$

Bepaal de beelden van de basiselementen:
Voor $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$:

$$T(B_1) = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -1 & 5 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 0 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$$

Voor $B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$:

$$T(B_2) = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -1 & 5 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -1 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Voor $B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$:

$$T(B_3) = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -1 & 5 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 5 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Voor $B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:

$$T(B_4) = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -1 & 5 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

De coördinaten ten opzichte van basis C zijn direct af te lezen. De matrix $[T]_B^C$ heeft als kolommen deze coördinaten:

$$[T]_B^C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 7 \\ -1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 5 \\ 8 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$