Wiskundige Structuren

Jasper Vos **Huiswerkset 9** 1 december 2025
Studentnr: *s2911159*

Opgave 1

Bewijs. Te bewijzen:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \;\text{ zodanig dat } x, y \in D \text{ geldt } |x - y| < \delta \implies \left| \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} \right| < \epsilon$$

Uitschrijven geeft:

$$\left| \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} \right| = \left| \frac{x^2 - y^2}{(xy)^2} \right| = \left| \frac{(x-y)(x+y)}{(xy)^2} \right|$$

Merk op dat $|x - y| < \delta$, alleen zitten we met die $\left|\frac{x+y}{(xy)^2}\right|$, we moeten een M vinden zodanig dat $M \geq \frac{x+y}{(xy)^2}$. Herschrijf:

$$\frac{x}{(xy)^2} + \frac{y}{(xy)^2} = \frac{1}{xy^2} + \frac{1}{x^2 y} \leq 1 + 1 = 2, \text{ Voor alle } x \in [1, \infty)$$

We hebben $M = 2$ gevonden en dus:

$$\left| \frac{(x-y)(x+y)}{(xy)^2} \right| < M \cdot \delta = 2\delta$$

Kies $\delta = \frac{\epsilon}{2}$, dan hebben we:

$$\boxed{\left| \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} \right| < 2\delta = \cancel{2} \cdot \frac{\epsilon}{\cancel{2}} = \epsilon}$$

En dus is f uniform continue op $[0, \infty)$. □

Opgave 2

Bewijs. Laat $g(x) = x$ en bekijk $x = 0$ dan:

$$g(0) = 0 \text{ en } f(0) = e^{-\frac{5}{2}\sqrt{0}} = e^0 = 1, \text{ en dus } f(0) > g(0)$$

Bekijk nu $x = 2$:

$$g(2) = 2 \text{ en } f(2) = e^{-\frac{5}{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{e^{\frac{5}{2}\sqrt{2}}} < 1, \text{ en dus } f(2) < g(2)$$

Omdat f en g beide continu zijn, en omdat $f(0) > g(0)$ en ook $g(2) > f(2)$ moet er volgens de tussenwaardestelling een $x \in [0, 2]$ bestaan waarvoor:

$$\boxed{f(x) = g(x) = x}$$

. □

Opgave 3

Bewijs. Merk op dat f een vorm heeft als:

$$f(x) = a_1 x^{n_1} + a_2 x^{n_2} + \dots$$

Waarbij $a_i > 0$, en $n_1 > n_i$ waarvoor $i > 1$.
We kijken dus alleen naar de eerste term om het gedrag van de functie te bepalen. Als n_1 even is geldt dus dat f altijd een dalparabool is, en als n_1 oneven geldt dat f stijgend is als $x > 0$. Dit betekent dus dat f naar boven onbegrensd is.
Volgens de tussenwaardestelling moet er een c bestaan zodanig dat $f(c) = 0$, voor n_1 even geeft dit twee oplossingen en voor n_1 oneven geeft dit een enkele oplossing. □

Opgave 4

Bewijs. Bewijs vanuit het ongerijmde.
Laat f continu zijn waarbij x, y bestaan met $f(x) \neq f(y)$. Kies nu een irrationaal getal p waarvoor geldt $f(x) < p < f(y)$. Volgens de tussenwaardestelling moet er dan een $c \in [0, 1]$ bestaan waarvoor $f(c) = p$. Merk op dat $f(c) \in \mathbb{Q}$ volgens definitie van f echter geldt ook dat $f(c) = p$ en $p \notin \mathbb{Q}$, dus hebben we een tegenspraak.
Als f continu is moet het dus constant zijn, en elke constante functie is per definitie continu. $\square$