Caleidoscoop Hoofdstuk 3

3 Equivalentierelaties

Opgave 3.1

a) Stel de volgende equivalentierelatie $\mathcal{R}$ op, waarbij $a \sim b \iff a = b$.

1 *Reflexief:* Bekijk $a\mathcal{R}a \implies a = a$

2 *Symmetrie:* Bekijk $(a\mathcal{R}b \implies b\mathcal{R}a) \implies a = b \implies b = a$

3 *Transitiviteit:* Bekijk $((a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}c) \implies a\mathcal{R}c) \implies (a = b \wedge b = c) \implies a = c$

b) Neem de volgende equivalentierelatie $\mathcal{R}$ op, waarbij $a \sim b \iff a \mod 42 = b \mod 42$.

1 *Reflexief:* $a \mod 42 = a \mod 42$

2 *Symmetrie:* $(a \mod 42 = b \mod 42) \implies b \mod 42 = a \mod 42$

3 *Transitiviteit:* $(a \mod 42 = b \mod 42 \wedge b \mod 42 = c \mod 42) \iff a \mod 42 = c \mod 42$

c) *Bewijs.* X **Aanname** : Ik stel dat A een verzameling is waarbij $A \neq \emptyset$, en $A/_\sim = \emptyset$. Aangezien $A \neq \emptyset$ bestaat er een $a \in A$, maar als we een equivalentierelatie hebben, dan volgt vanuit reflexiviteit dat $a \sim a$. Als $a \sim a$ dan moet er een equivalentieklasse $\overline{a} = \{b \in A : b \sim a\}$ bestaan waarbij $a \in \overline{a}$, maar $\overline{a} \in A/_\sim$. Dit is een tegenspraak want we stelde dat $A/_\sim = \emptyset$, en dus kan $A/_\sim$ niet leeg zijn. □

Opgave 3.2

a) X wordt gepartioneerd in $X/_\sim$, omdat $|X/_\sim| = \infty =$ zit in elke equivalentieklasse minstens 1 represetant die in X moet liggen. Dit betekent dus dat $|X| \geq |X/_\sim| = \infty$.