Wiskundige Structuren

Jasper Vos
Studentnr: *s2911159*

Huiswerkset 5

25 oktober 2025

Opgave 1

a) *Bewijs.* Te bewijzen: $a \cdot 0 = 0$:

$$\begin{aligned}
a \cdot 0 &= a \cdot 0 + 0 && \text{(0 is neutraal voor optelling in } \mathbb{R}) \\
&= a \cdot 0 + (a + (-a)) && (\forall x \in \mathbb{R}\ \exists(-x) \in \mathbb{R} \text{ zodanig dat } x + (-x) = 0) \\
&= a \cdot 0 + a \cdot (1) + (-a) && \text{(Optelling is associatief, en 1 is neutraal met vermenigvuldiging in } \mathbb{R}) \\
&= a \cdot (0 + 1) + (-a) && \text{(Gebruik distributieve eigenschap in } \mathbb{R}) \\
&= a \cdot (1) + (-a) && \text{(0 is neutraal met optelling in } \mathbb{R}) \\
&= a + (-a) && \text{(1 is neutraal met vermenigvuldiging in } \mathbb{R}) \\
&= 0 && ((-a) \text{ is de inverse van } a \text{, en dus } a + (-a) = 0)
\end{aligned}$$

□

b) *Bewijs.* Te bewijzen: $a \neq 0$ en $b \neq 0$ dan $a \cdot b \neq 0$:
Bewijs uit het ongerijmde waarbij we stellen dat $a \neq 0$ en $b \neq 0$ dan $a \cdot b = 0$:

$$\begin{aligned}
ab &= 0 && \\
a^{-1}ab &= a^{-1}0 && \text{(Vermenigvuldig beide kanten met } a^{-1}) \\
(a^{-1}a)b &= 0 && \text{(Uit resultaat a) geldt } \forall x \in \mathbb{R}\ x \cdot 0 = 0) \\
(1)b &= 0 && (\forall x \in R\ \exists x^{-1} \in R \text{ zodanig dat } x \cdot x^{-1} = 1) \\
b^{-1}b &= b^{-1}0 && \text{(Vermenigvuldig beide kanten met } b^{-1}) \\
(b^{-1}b) &= 0 && \text{(Uit resultaat a) geldt } \forall x \in \mathbb{R}\ x \cdot 0 = 0) \\
1 &= 0 && (\forall x \in R\ \exists x^{-1} \in R \text{ zodanig dat } x \cdot x^{-1} = 1)
\end{aligned}$$

Tegenspraak want $1 \neq 0$, en hieruit volgt als $a \neq 0$ en $b \neq 0$ dan $a \cdot b \neq 0$. □

c) *Bewijs.* Te bewijzen: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$:

Lemma 1 (Identiteit: $-b^2 = b(-b)$)**.**

Bewijs. Voor elk element bestaat een inverse, veronderstel dat b^2 de inverse van $b(-b)$ is, dan:

$$\begin{aligned}
b(-b) + b^2 &= b(b + (-b)) && \text{(Gebruik distributieve eigenschap in } \mathbb{R}) \\
&= b(0) && \text{(De inverse van } b \text{ is } (-b) \text{, en dus } b + (-b) = 0) \\
&= 0 && \text{(Uit resultaat a) geldt } \forall x \in \mathbb{R}\ x \cdot 0 = 0)
\end{aligned}$$

En dus geldt dat $-b^2 = b(-b)$. □

$$\begin{aligned}
(a+b)(a-b) &= (a+b)(a+(-b)) && \text{(Definitie: } a-b=a+(-b)) \\
&= a^2 + a(-b) + b(a) + b(-b) \\
&= a^2 + a(b+(-b)) + b(-b) && \text{(Gebruik tweemaal distributieve eigenschap in } \mathbb{R}) \\
&= a^2 + a(0) + b(-b) && \text{(De inverse van } b \text{ is } (-b) \text{, en dus } b+(-b)=0) \\
&= a^2 + 0 + (b(-b)) && \text{(Uit resultaat a) geldt } \forall x \in \mathbb{R}\ x \cdot 0 = 0) \\
&= a^2 + (b(-b)) && \text{(0 is neutraal met optelling in } \mathbb{R}) \\
&= a^2 + (-b^2) && \text{(Gebruik \textit{Lemma 1} waarbij: } -b^2 = b(-b)) \\
&= a^2 - b^2 && \text{(Definitie: } a-b=a+(-b))
\end{aligned}$$

□

Opgave 2

Infimum:

Veronderstel dat $\inf(A) = 0$:

Bewijs. 1. Te bewijzen 0 is een ondergrens.

$a_i = \frac{1}{n+1}$, en voor alle n geldt $\frac{1}{n+1} > 0$, dus is 0 een ondergrens van A.

2. Te bewijzen 0 is de grootste ondergrens.

Gebruik de definitie: $\forall \epsilon > 0$ bestaat er een $a \in A$ zodanig dat $a > 0 + \epsilon$.

$$\begin{aligned}
a &< 0 + \epsilon \\
\frac{1}{n+1} &< 0 + \epsilon \\
\frac{1}{n+1} &< \epsilon \\
\frac{n+1}{n+1} &< \epsilon(n+1) \\
\frac{1}{\epsilon} &< (n+1) \\
\frac{1}{\epsilon} - 1 &< n
\end{aligned}$$

Dus voor elke $\epsilon > 0$ bestaat er een element kleiner dan ϵ.

Beide voorwaarden gelden en dus:

$$\inf(A) = 0$$

. □

Supremum:

Veronderstel dat $\sup(A) = 1$:

Bewijs. 1. Te bewijzen 1 is een bovengrens.

$a_i = \frac{1}{n+1}$, merk op dat $\frac{1}{n+1}$ dalend is naarmate n groter wordt. Volgens het welordeningsprincipe op $\mathbb{N}$ is $n = 0$ het kleinste element en dus $\frac{1}{0+1} = 1$. Hieruit volgt dus dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ dat $1 \geq \frac{1}{n+1}$, en dus is 1 een bovengrens.

2. Te bewijzen 1 is de kleinste bovengrens.

   Merk op dat $1 \in A$, en een bovengrens is. Dit betekent dat 1 de kleinste bovengrens moet zijn.
Beide voorwaarden zijn voldaan en dus:

$$\sup(A) = 1$$

$\square$

Maximum/minimum:

A heeft geen minimum want $\inf(A) = 0 \notin A$, maar A heeft wel een maximum omdat $\sup(A) = 1$ en $1 \in A$.

Opgave 3

De definitie van een divergente rij:

$$\forall M > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \text{ zodanig dat } \forall n \geq N : a_n > M$$

Bewijs. We moeten dus een N vinden die altijd een groter rij-element geeft voor elke $M > 0$.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n^2 + \sin(n)}{n+1} \\ &\geq \frac{n^2 - 1}{n+1} = \frac{\cancel{(n+1)}(n-1)}{\cancel{n+1}} = n - 1 \quad \text{(Merk op dat } -1 \leq \sin(n) \leq 1\text{)} \end{aligned}$$

We willen dat $n - 1 > M$, en dus nemen we $n > M + 1$. Kies $N = \lceil M + 1 \rceil$. Daarmee geldt voor alle $n \geq N$ dat $a_n > M$. $\square$