

Wiskundige Structuren Huiswerk

Jasper Vos

Huiswerkset 1

10 september 2025

Studentnr: s2911159

Opgave 1

a) *Bewijs.* Laten we aannemen dat de vergelijking niet klopt door te stellen:

$$(A \cap B) \cap (A \setminus B) \neq \emptyset$$

Neem een $x \in (A \cap B) \cap (A \setminus B)$ en werk verder uit:

$$\begin{aligned} x \in (A \cap B) \cap (A \setminus B) &\implies (x \in A \wedge x \in B) \wedge (x \in A \wedge x \notin B) \\ &\implies x \in A \wedge (x \in B \wedge x \notin B) \\ &\implies x \in A \wedge x \in \emptyset \\ &\implies A \cap \emptyset = \emptyset \end{aligned}$$

Dit is een tegenspraak dus $(A \cap B) \cap (A \setminus B) = \emptyset$. □

b) *Bewijs.* Net zoals bij de vorige vraag stellen we dat de vergelijking niet klopt:

$$(A \cap B) \cup (A \setminus B) \neq A$$

$$\begin{aligned} x \in (A \cap B) \cup (A \setminus B) &\implies (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \notin B) \\ &\implies x \in A \wedge (x \in B \vee x \notin B) \quad (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \Leftrightarrow p \wedge (q \vee r) \\ &\implies x \in A \wedge x \in U \\ &\implies A \cap U = A \end{aligned}$$

Dit is een tegenspraak dus $(A \cap B) \cup (A \setminus B) = A$. □

Opgave 2

a) We kijken eerst of f injectief is:

Bewijs. Voor alle $n_1, n_2 \in A : f(n_1) = f(n_2) \implies (n_1) = (n_2)$, en dus:

$$\begin{aligned} (n_1)^2 &= (n_2)^2 \\ \sqrt{(n_1)^2} &= \sqrt{(n_2)^2} \\ n_1 &= n_2 \end{aligned}$$

Aangezien $n_1, n_2 \geq 0$ is er een unieke n voor een bepaalde $m \in B$, en dus is f injectief. □

Nu gaan we kijken of f surjectief is:

Bewijs. $\forall m \in B \exists n \in A$ zodanig dat $f(n) = m$.

$$\begin{aligned} f(n) &= m \\ n^2 &= m \\ n &= \sqrt{m} \end{aligned}$$

Hieruit volgt $f(\sqrt{m}) = (\sqrt{m})^2 = m$, en aangezien elk element m dus bereikt kan worden voor een bepaalde x is f surjectief. □

f is dus zowel injectief als surjectief.

b) *Bewijs.* Eerst bewijzen we of g injectief is:

$$\forall x_1, x_2 \in A : g(x_1) = g(x_2) \implies x_1 = x_2$$

Hieruit volgt:

$$\begin{aligned} g(x_1) &= g(x_2) \\ (x_1)^3 + 5 &= (x_2)^3 + 5 \\ (x_1)^3 &= (x_2)^3 \\ x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

g is dus injectief, nu bewijzen we surjectiviteit:

$$\forall y \in B \exists x \in A : g(x) = y$$

Dus:

$$\begin{aligned} g(x) &= y \\ x^3 + 5 &= y \\ x^3 &= y - 5 \\ x &= \sqrt[3]{y - 5} \end{aligned}$$

Nu gaan we het controleren:

$$g(\sqrt[3]{y - 5}) = (\sqrt[3]{y - 5})^3 + 5 = y - 5 + 5 = y$$

Dus g is ook surjectief, en aangezien g zowel injectief als surjectief is geldt dat g een bijectie is en een inverse g^{-1} heeft. Nu gaan we de inverse berekenen:

$$\begin{aligned} g(y) &= x \\ y^3 + 5 &= x \\ y^3 &= x - 5 \\ y &= \sqrt[3]{x - 5} = g^{-1}(x) \end{aligned}$$

□