Lineaire Algebra Huiswerk

Jasper Vos **Huiswerkset 2** 15 september 2025
Studentnr: *s2911159*

Opdracht 1.4.2(1)

Bewijs. Schrijf probleem in logische notatie zodat het makkelijker is.

$$||v|| = ||w|| \Leftrightarrow < v - w, v + w >= 0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(||v|| = ||w|| \implies < v - w, v + w >= 0) \quad \wedge \quad (< v - w, v + w >= 0 \implies ||v|| = ||w||)$$

Bewijs $||v|| = ||w|| \implies < v, w >= 0$:

$$\begin{aligned}
\boxed{||v|| = ||w||} &\implies ||v|| - ||w|| = 0 \\
&\implies ||v||^2 - ||w||^2 = 0 \\
&\implies < v, v > - < w, w >= 0 \\
&\implies < v, v > + < v, w > - < v, w > - < w, w >= 0 \\
&\implies v_1^2 + vw_1 - vw_1 - w_1^2 + v_2^2 + vw_2 - vw_2 - w_2^2 + \cdots + v_n^2 + vw_n - vw_n - w_n^2 = 0 \\
&\implies (v_1 + w_1)(v_1 - w_1) + \cdots + (v_n + w_n)(v_n - w_n) = 0 \\
&\implies \boxed{< v + w, v - w >= 0}
\end{aligned}$$

Bewijs nu voor $< v, w >= 0 \implies ||v|| = ||w||$:

$$\begin{aligned}
\boxed{< v + w, v - w >= 0} &\implies (v_1 + w_1)(v_1 - w_1) + \cdots + (v_n + w_n)(v_n - w_n) = 0 \\
&\implies v_1^2 + vw_1 - vw_1 - w_1^2 + v_2^2 + vw_2 - vw_2 - w_2^2 + \cdots + v_n^2 + vw_n - vw_n - w_n^2 = 0 \\
&\implies < v, v > + < v, w > - < v, w > - < w, w >= 0 \\
&\implies < v, v > - < w, w >= 0 \\
&\implies ||v||^2 - ||w||^2 = 0 \\
&\implies \boxed{||v|| - ||w|| = 0}
\end{aligned}$$

Dit voldoet aan $||v|| = ||w|| \Leftrightarrow < v - w, v + w >= 0$ en dus zijn we klaar. $\square$

Opdracht 1.6.5

Laten we eerst het vlak V opspannen en daarna de afstand tussen het vlak en q berekenen. Neem $V = \{\lambda_1 \lambda_2 \in \mathbb{R} : p_1 + \lambda_1(p_2 - p_1) + \lambda_2(p_3 - p_1)\}$ en vul in:

$$V = \{\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} : (1, 2, -1) + \lambda_1(0, -2, 2) + \lambda_2(-3, 1, 2)\}$$

Bereken het kruisproduct $(p_2 - p_1) \times (p_3 - p_1)$ zodat je een vector krijgt die zowel op $p_2 - p_1$ en $p_3 - p - 1$ loodrecht staat.

$$n = (-2)(2) - (2)(1), (2)(-3) - (0)(2), (0)(1) - (-2)(-3) = (-6, -6, -6)$$

Tot slot projecteren we de vector $q - p_1$ op de normaalvector n.

$$< (q - p_1)n >= ((2 - 1)(-6) + (2 - 2)(-6) + (1 - (-1))(-6)) - 18$$

Bereken nu de afstand:

$$\frac{18}{\sqrt{36 + 36 + 36}} = \boxed{\sqrt{3}}$$