Wiskundige Structuren Huiswerk

Jasper Vos **Huiswerkset 2** 22 september 2025
Studentnr: *s2911159*

Opgave 1

Bewijs. Als A en B beide aftelbaar oneindig zijn dan bestaat er een bijectie vanuit $\mathbb{N}$. Zij $g : \mathbb{N} \to A$ en $h : \mathbb{N} \to B$. Laten we nu een functie f opstellen waarbij we A en B vlechten in f. Zij $f : \mathbb{N} \to A \cup B$: waarvoor geldt:

$$f(n) = \begin{cases} a_{\frac{n}{2}} & \text{als } n \text{ even is} \\ b_{\frac{n+1}{2}} & \text{als } n \text{ oneven is} \end{cases}$$

Injectiviteit:

Zij $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ te bewijzen $f(n_1) = f(n_2) \implies n_1 = n_2$

Geval 1: n_1, n_2 beide even:

$$\begin{aligned} f(n_1) &= f(n_2) \\ a_{\frac{n_1}{2}} &= a_{\frac{n_2}{2}} \\ n_1 &= n_2 \quad (\because g, h \text{ beide injectief zijn}) \end{aligned}$$

Geval 2: n_1, n_2 beide oneven:

$$\begin{aligned} f(n_1) &= f(n_2) \\ b_{\frac{n_1+1}{2}} &= b_{\frac{n_2+1}{2}} \\ n_1 &= n_2 \quad (\because g, h \text{ beide injectief zijn}) \end{aligned}$$

Geval 3: n_1 even en n_2 oneven:

$$\begin{aligned} f(n_1) &= f(n_2) \\ a_{\frac{n_1}{2}} &\neq b_{\frac{n_2+1}{2}} \end{aligned}$$

Dit kan niet omdat aan de linkerkant een element van A staat en aan de rechterkant een element van B, en gegeven was dat $A \cap B = \emptyset$. Geval 3 is dus niet relevant en de overige zijn correct dus f is injectief.

Surjectiviteit:

Te bewijzen $\forall m \in A \cup B$ geldt dat er een $n \in \mathbb{N}$ bestaat zodanig dat $f(n) = m$

Geval 1: Als $m \in A$:

Dan bestaat er een $a_k \in A$ zodanig dat $a_k = m$, we kiezen $n = 2k$ dan:

$$f(2k) = a_{\frac{2k}{2}} = a_k = m$$

Geval 2: Als $m \in B$:

Dan bestaat er een $b_k \in B$ zodanig dat $b_k = m$, we kiezen $n = 2k - 1$ dan:

$$f(2k-1) = b_{\frac{(2k-1)+1}{2}} = b_k = m$$

f is surjectief en injectief waaruit volgt dat f bijectief is. Hieruit volgt dus dat $f : \mathbb{N} \to A \cup B$ aftelbaar oneindig is. $\square$

Opgave 2

Bewijs. Om bijectiviteit te bewijzen moet f zowel injectief als surjectief zijn.

Injectiviteit:

Te bewijzen $\forall (n_1, x_1),\ (n_2, x_2) \in \mathbb{N}_{>0} \to \mathbb{R}$ dan $f(n_1, x_1) = f(n_2, x_2) \implies n_1 = n_2,$ en $x_1 = x_2$.

$$(98n_1x_1, n_1) = (98n_2x_2, n_2)$$

$$n_1 = n_2 \quad \text{(Rechtercomponent)}$$

$$\begin{aligned} 98n_1x_1 &= 98n_2x_2 \\ n_1x_1 &= n_2x_2 \\ x_1 &= x_2 \quad \text{(Geschrapt vanuit het resultaat van het rechtercomponent)} \end{aligned}$$

Voor zowel het rechter als linkercomponent geldt dus dat f injectief is.

Surjectiviteit:

Te bewijzen $\forall (y, m) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}_{>0}$ bestaat er een $(n, x) \in \mathbb{N}_{>0} \times \mathbb{R}$ zodanig dat $f(n, x) = (y, m)$. neem $(n, x) = (m, \frac{y}{98m})$, dan:

$$f(m, \frac{y}{98m}) = (\cancel{98m}(\frac{y}{\cancel{98m}}), m) = (y, m)$$

Hieruit volgt dus dat f surjectief is. We hebben al eerder bewezen dat f injectief is en dus is f bijectief. $\square$

Inverse:

Tot slot stellen we de inverse $f^{-1} = g$ op.

$$g : \mathbb{R} \times \mathbb{N}_{>0} \to \mathbb{N}_{>0} \times \mathbb{R} \text{ met } g(x, n) = (n, \frac{x}{98n})$$