

Opgave 7.1.8

Idee

We moeten laten zien dat f_0, f_1, \dots, f_n lineair onafhankelijk zijn. Dit kunnen we doen door een matrix A te construeren. Deze matrix A bevat functies als rijen en de punten worden geëvalueerd als kolommen. Tot slot proberen we matrix A met rij-reductie naar de identiteitsmatrix te krijgen. Dit toont aan dat de rang $n + 1$ is en dus $n + 1$ functies lineair onafhankelijk zijn.

Constructie

Stap 1: Matrix opstellen

Definieer matrix A met $A_{ij} = f_i(a_j)$:

$$A = \begin{pmatrix} f_0(a_0) & f_0(a_1) & f_0(a_2) & \dots & f_0(a_n) \\ f_1(a_0) & f_1(a_1) & f_1(a_2) & \dots & f_1(a_n) \\ f_2(a_0) & f_2(a_1) & f_2(a_2) & \dots & f_2(a_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n(a_0) & f_n(a_1) & f_n(a_2) & \dots & f_n(a_n) \end{pmatrix}$$

Stap 2: Voorwaarde toepassen

Gegeven is $f_i(a_j) = \begin{cases} 1 & , \text{ als } j \leq i \\ 0 & , \text{ als } j > i \end{cases}$, Herschrijf de matrix A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Stap 3: Rij-reductie

Met de operatie $R_2 = R_2 - R_1$, vervolgens $R_3 = R_3 - R_2 - R_1$, etc. Kunnen we I_{n+1} construeren.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2=R_2-R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \dots \xrightarrow{R_{n+1}=R_{n+1}-R_n-\dots-R_1} \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Conclusie

Doordat we I_{n+1} hebben geconstrueerd betekent dit dat we een matrix A hebben met een rang van $n + 1$, en dus geldt f_0, f_1, \dots, f_n lineair onafhankelijk.

Opgave 7.3.3(1)

Idee

We proberen de dimensie te vinden door de basis van $V = \ker(a)$ te vinden.

Basis van V

Neem $v \in V$, dan moet $\langle v, a \rangle = 0$ vanwege $V = a^\perp$.

$$v = \langle (v_1, v_2, v_3, v_4), (1, 1, 1, 1) \rangle = 0 \iff v_1 = -v_2 - v_3 - v_4$$

De algemene oplossing is:

$$v = v_2(-1, 1, 0, 0) + v_3(-1, 0, 1, 0) + v_4(-1, 0, 0, 1)$$

Met vrije parameters $v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{R}$.

Een basis voor V is dus:

$$V = L\left((-1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)\right)$$

Conclusie

De basis bevat 3 vectoren, en dus $\dim(V) = 3$.

Opgave 7.3.3(2)

Idee

We checken of v_1, v_2 lineair onafhankelijk zijn door de vectoren als rijen in een matrix te zetten. Als de rang van deze matrix gelijk aan 2 is dan zijn de vectoren lineair onafhankelijk.

Rij-reductie

Zet v_1 als R_1 en v_2 als R_2 en reduceer:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & -4 \end{pmatrix} &\xrightarrow{R_2=R_1+R_2} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{R_2=R_2-2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & -3 & 6 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{R_2=-\frac{1}{3}R_2} \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

Conclusie

Met rij-reductie zien we dus dat de matrix 2 pivots heeft en daarmee een rang van 2. Hieruit volgt dat v_1, v_2 lineair onafhankelijk zijn.

Opgave 7.3.3(3)

Idee

Aangezien we weten dat $\dim(V) = 3$, hebben we 3 onafhankelijke vectoren nodig voor een basis. We hebben al v_1 en v_2 uit *Opgave 7.3.3(2)*, en kiezen $v_3 = (-1, 0, 0, 1)$ die we hebben gevonden in *Opgave 7.3.3(1)*. We stellen de matrix op en reduceren om te verifiëren of de rang gelijk is aan 3.

Rij-reductie

We zetten de vectoren v_1 , v_2 , en v_3 in de matrix en reduceren:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} &\xrightarrow{R_3=R_3+R_1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{R_2=R_2+2R_1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{R_1=-R_1, R_2=-\frac{1}{3}R_2} \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

Conclusie

De matrix heeft 3 pivots en dus is de rang van de matrix gelijk aan 3. De vectoren zijn lineair onafhankelijk en vormen de basis:

$$\boxed{V = \left((-1, 0, 0, 1), (2, -3, -1, 2), (1, 0, 1, -2) \right)}$$