

# Wiskundige Structuren Huiswerk

Jasper Vos  
Studentnr: s2911159

Huiswerkset 2

17 september 2025

---

## Opgave 1

Om te laten zien dat  $A \cup B$  aftelbaar oneindig is maken we een functie die bijectief is en  $A \cup B$  als beeld heeft. Laten we de natuurlijke getallen  $\mathbb{N}$  gebruiken. Aangezien  $A \cap B = \emptyset$  kunnen we vanuit  $\mathbb{N}$  elk element apart bereiken door gebruikt te maken van dat  $n \in \mathbb{N}$  oneven of even kan zijn. Daarmee kunnen we een functie opstellen waarbij we elk  $a \in A$  en  $b \in B$  bereikt kan worden vanuit  $\mathbb{N}$ .

Zij  $f : \mathbb{N} \rightarrow A \cup B$ : waarvoor geldt:

$$f(n) = \begin{cases} a_{\frac{n}{2}+1} & \text{als } n \text{ even is} \\ b_{\frac{n-1}{2}+1} & \text{als } n \text{ oneven is} \end{cases}$$

Laat zien dat de functie injectief is:

$$\forall n_1, n_2 \text{ geldt } f(n_1) = f(n_2) \implies n_1 = n_2$$

*Geval 1:*  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$  waarbij  $n_1$  en  $n_2$  even zijn.

$$\begin{aligned} a_{\frac{n_1}{2}+1} &= a_{\frac{n_2}{2}+1} \\ \Downarrow \\ \frac{n_1}{2} + \cancel{x} &= \frac{n_2}{2} + \cancel{x} \\ n_1 &= n_2 \end{aligned}$$

*Geval 1:*  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$  waarbij  $n_1$  en  $n_2$  oneven zijn.

$$\begin{aligned} b_{\frac{n_1-1}{2}+1} &= b_{\frac{n_2-1}{2}+1} \\ \Downarrow \\ \frac{n_1 - \cancel{x}}{2} + \cancel{x} &= \frac{n_2 - \cancel{x}}{2} + \cancel{x} \\ n_1 &= n_2 \end{aligned}$$

*Geval 3:*  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$  waarbij  $n_1$  is even en  $n_2$  is oneven.

$n_1 = n_2$  kan niet als  $n_1$  even is en  $n_2$  oneven aangezien een getal niet zowel even als oneven kan zijn.

Vervolgens laten we zien dat de functie surjectief is:

$$\forall m \in (A \cup B) \exists n \in \mathbb{N} \text{ zodanig dat } f(n) = m$$

## Opgave 2

Om bijectie te bewijzen moet de functie  $f$  zowel injectief als surjectief zijn. Laat zien dat de functie injectief is:

$$\forall (n_1, x_1), (n_2, x_2) \in \mathbb{N}_{>0} \times \mathbb{R} \text{ geldt } f((n_1, x_1)) = f((n_2, x_2)) \implies n_1 = n_2 \wedge x_1 = x_2$$

$$\begin{aligned}
(98n_1x_1, n_1) &= (98n_2x_2, n_2) \\
&\Downarrow \\
98n_1x_1 &= 98n_2x_2 \wedge n_1 = n_2 \\
n_1x_1 &= n_2x_2 \wedge n_1 = n_2 \\
x_1 &= x_2 \wedge n_1 = n_2
\end{aligned}$$