Wiskundige Structuren

Jasper Vos **Huiswerkset 6** 4 november 2025
Studentnr: *s2911159*

Opgave 1

a) *Bewijs.*

- *Basisstap:* $n = 1$
  Te bewijzen: $a_1 > a_0$. We weten $a_0 = \log_2(12)$, en $a_1 = a_{0+1} = \log_2(a_0 + 12) = \log_2(\log_2(12) + 12)$.
  Nu moeten we laten zien dat:
  $$\log_2(\log_2(12) + 12) > \log_2(12)$$
  Merk op dat $3 < \log_2(12)$ als we dit gebruiken dan:
  $$\log_2(\log_2(12) + 12) > \log_2(3 + 12) > \log_2(12)$$
  We kunnen hier dus aflezen dat $\log_2(15) > \log_2(12)$ omdat $\log_2$ strikt stijgend is, en omdat $\log_2(15) < \log_2(\log_2(12) + 12)$. Via transitiviteit van ordening $>$ geldt:
  $$\log_2(\log_2(12) + 12) > \log_2(12) \iff \boxed{a_1 > a_0}$$
- *Inductie-hypothese:*
  We nemen aan dat de stelling voor $n = k$ geldt ofwel dat $a_k > a_{k-1}$. Vanuit de inductie-hypothese bouwen we naar de volgende termen.
  $$\begin{aligned} a_k &> a_{k-1} \\ a_k + 12 &> a_{k-1} + 12 \\ \log_2(a_k + 12) &> \log_2(a_{k-1} + 12) \end{aligned}$$
  Merk op dat dit overeen komt met de definitie van a_{k+1} en a_k, en dus:
  $$\log_2(a_k + 12) > \log_2(a_{k-1} + 12) \iff \boxed{a_{k+1} > a_k}$$
  Hieruit volgt dus dat de stelling voor elke $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ geldt, en daarmee is a_n strikt stijgend.

□

b) *Bewijs.*

- *Basisstap:* $n = 1$
  Te bewijzen $a_1 < 4$. We weten dat $a_1 = a_{0+1} = \log_2(a_0 + 12) = \log_2(\log_2(12) + 12)$. Merk op dat $a_0 = \log_2(12) < \log_2(16) = 4$, en dus is $a_0 < 4$ waaruit volgt:
  $$\log_2(a_0 + 12) < \log_2(4 + 12) \iff \boxed{a_1 < 4}$$
  4 is dus een bovengrens van a_1.
- *Inductie-hypothese:*
  We nemen aan dat de stelling voor $n = k$ geldt ofwel dat $a_k < 4$. We gebruiken dezelfde truuk als bij de basisstap. Merk op dat $a_k < 4 = \log_2(16)$, weten we dus dat:
  $$\begin{aligned} a_{k+1} &= \log_2(a_k + 12) \\ &< \log_2(4 + 12) = 4 \iff \boxed{a_{k+1} < 4} \end{aligned}$$
  Dus 4 is een bovengrens van a_{k+1}.
  Hieruit volgt dat voor alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ dat 4 een bovengrens is van a_n.

□

c) Merk op dat a_n van boven begrensd is omdat voor alle n geldt dat 4 een bovengrens is (*vraag 1b*) en dat a_n strikt stijgend is (*vraag 1a*). Dit betekent dat a_n convergent moet zijn volgens de monotone convergentiestelling. Merk op dat $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \log_2(a_n + 12)$ als we dit verder uitwerken:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_{n+1} &= \lim_{n\to\infty} \log_2(a_n + 12) \\ &= \log_2((\lim_{n\to\infty} a_n) + 12)\end{aligned}$$

Laat $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = L$, en dus ook $L = \lim_{n\to\infty} a_n$.

$$\begin{aligned}L &= log_2(L + 12) \\ 2^L &= L + 12\end{aligned}$$

Bekijk de eerste resultaten van 2^L, en neem $L = 4$.

$$2^4 = 4 + 12 \iff 16 = 16$$

Hieruit volgt dat 4 het limiet is.

Opgave 2

a) *Bewijs.*

Kies een willekeurige $M \in \mathbb{R}$, omdat a_n niet begrensd is bestaat er een $N \in \mathbb{N}$ zodanig dat $a_n > M$. Merk ook op dat a_n strikt stijgend is en dus voor alle $n \geq N$ geldt dan $a_n \geq a_N$, en dus:

$$\forall M \in \mathbb{R}\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ met } n \geq N \text{ zodanig dat } a_n > M$$

Dit is de definitie van een divergente rij, en dus $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. □

b) *Bewijs.*

Neem $r = 1 + h$ met $h > 0$ dan:

$$\begin{aligned}r^n &= (1 + h)^n \\ &\geq 1 + nh\end{aligned}$$

Laten we nu een willekeurige M nemen, en vind een N met voor alle $n \geq N$ zodanig dat $1 + nh > M$. Kies

$$\boxed{N > \frac{M - 1}{h}}$$

Laten we het controleren: $r^n \geq 1 + Nh > 1 + \frac{M-1}{h} \cdot h = 1 + M - 1 = M$, en dus moet r^n een divergente rij zijn waarbij $\lim_{n\to\infty} r^n = \infty$. □

c) *Bewijs.*

Merk op dat b_n geen divergente rij is want $\lim_{n\to\infty} b_n \neq \infty$. Dit betekent dat er een M bestaat waarbij $b_n < M$, en hieruit volgt dat b_n begrensd is. Omdat b_n stijgend en begrensd is moet volgens de monotone convergentiestelling gelden dat b_n convergent is. □