Wiskundige Structuren

Jasper Vos **Huiswerkset 5** 25 oktober 2025
Studentnr: *s2911159*

Opgave 1

a) *Bewijs.* Te bewijzen: $a \cdot 0 = 0$:

$$
\begin{aligned}
a \cdot 0 &= a \cdot 0 + 0 && \text{(0 is neutraal voor optelling in } \mathbb{R}\text{)} \\
&= a \cdot 0 + (a + (-a)) && (\forall x \in \mathbb{R}\ \exists(-x) \in \mathbb{R} \text{ zodanig dat } x + (-x) = 0) \\
&= a \cdot 0 + a \cdot (1) + (-a) && \text{(Optelling is associatief, en 1 is neutraal met vermenigvuldiging in } \mathbb{R}\text{)} \\
&= a \cdot (0 + 1) + (-a) && \text{(Gebruik distributieve eigenschap in } \mathbb{R}\text{)} \\
&= a \cdot (1) + (-a) && \text{(0 is neutraal met optelling in } \mathbb{R}\text{)} \\
&= a + (-a) && \text{(1 is neutraal met vermenigvuldiging in } \mathbb{R}\text{)} \\
&= 0 && ((-a) \text{ is de inverse van } a\text{, en dus } a + (-a) = 0)
\end{aligned}
$$

□

b) *Bewijs.* Te bewijzen: $a \neq 0$ en $b \neq 0$ dan $a \cdot b \neq 0$:
Bewijs uit het ongerijmde waarbij we stellen dat $a \neq 0$ en $b \neq 0$ dan $a \cdot b = 0$:

$$
\begin{aligned}
ab &= 0 \\
a^{-1}ab &= a^{-1}0 && \text{(Vermenigvuldig beide kanten met } a^{-1}\text{)} \\
(a^{-1}a)b &= 0 && \text{(Uit resultaat a) geldt } \forall x \in \mathbb{R}\ x \cdot 0 = 0\text{)} \\
(1)b &= 0 && (\forall x \in R\ \exists x^{-1} \in R \text{ zodanig dat } x \cdot x^{-1} = 1) \\
b^{-1}b &= b^{-1}0 && \text{(Vermenigvuldig beide kanten met } b^{-1}\text{)} \\
(b^{-1}b) &= 0 && \text{(Uit resultaat a) geldt } \forall x \in \mathbb{R}\ x \cdot 0 = 0\text{)} \\
1 &= 0 && (\forall x \in R\ \exists x^{-1} \in R \text{ zodanig dat } x \cdot x^{-1} = 1)
\end{aligned}
$$

Tegenspraak want $1 \neq 0$, en hieruit volgt als $a \neq 0$ en $b \neq 0$ dan $a \cdot b \neq 0$. □

c) *Bewijs.* Te bewijzen: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$:

Lemma 1 (Identiteit: $-b^2 = b(-b)$)**.**

Bewijs. Voor elk element bestaat een inverse, veronderstel dat b^2 de inverse van $b(-b)$ is, dan:

$$
\begin{aligned}
b(-b) + b^2 &= b(b + (-b)) && \text{(Gebruik distributieve eigenschap in } \mathbb{R}\text{)} \\
&= b(0) && \text{(De inverse van } b \text{ is } (-b)\text{, en dus } b + (-b) = 0\text{)} \\
&= 0 && \text{(Uit resultaat a) geldt } \forall x \in \mathbb{R}\ x \cdot 0 = 0\text{)}
\end{aligned}
$$

En dus geldt dat $-b^2 = b(-b)$. □

$$
\begin{aligned}
(a+b)(a-b) &= (a+b)(a+(-b)) && \text{(Definitie: } a-b=a+(-b)\text{)}\\
&= a^2 + a(-b) + b(a) + b(-b) \\
&= a^2 + a(b+(-b)) + b(-b) && \text{(Gebruik tweemaal distributieve eigenschap in } \mathbb{R}\text{)}\\
&= a^2 + a(0) + b(-b) && \text{(De inverse van } b \text{ is } (-b)\text{, en dus } b+(-b)=0\text{)}\\
&= a^2 + 0 + (b(-b)) && \text{(Uit resultaat a) geldt } \forall x \in \mathbb{R}\ x \cdot 0 = 0\text{)}\\
&= a^2 + (b(-b)) && \text{(0 is neutraal met optelling in } \mathbb{R}\text{)}\\
&= a^2 + (-b^2) && \text{(Gebruik \textit{Lemma 1} waarbij: } -b^2 = b(-b)\text{)}\\
&= a^2 - b^2 && \text{(Definitie: } a-b=a+(-b)\text{)}
\end{aligned}
$$

$\square$