

Opgave 1

- a) *Bewijs.* Om aan te tonen dat 0 een verdichtingspunt is moeten we kijken of er oneindig aantal elementen rond 0 zitten. Kies $\epsilon > 0$, en dan bekijken we het interval $(0, \epsilon)$:

$$0 < \frac{1729}{n+1} < \epsilon$$

Als we dit herschrijven kunnen we een N (met de archimedische eigenschap) vinden waarbij $\frac{1729}{N+1} < \epsilon$, ofwel:

$$\frac{1729}{n+1} < \epsilon \iff \frac{1729}{\epsilon} < n+1 \iff \frac{1729}{\epsilon} - 1 < n$$

We kiezen dus $N = \lceil \frac{1729}{\epsilon} - 1 \rceil$, dan geldt dus voor alle $n > N$ dat het kleiner dan epsilon is en dus bestaan er oneindig punten rond 0, en daarmee is 0 een verdichtingspunt. \square

- b) *Bewijs.* Gebruik definitie om te verifiëren dat 1 het limiet is. Definitie:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ en } \forall x \in D \text{ zodanig dat } |x - 0| = |x| < \delta \implies \left| \frac{1}{1+x} - 1 \right| < \epsilon$$

Herschrijf de termen:

$$\left| \frac{1}{1+x} - 1 \right| = \left| \frac{1-1-x}{1+x} \right| = \left| \frac{-x}{1+x} \right| = \left| \frac{x}{1+x} \right|$$

Merk op dat $x > 0$ vanuit *Opgave 1a*, dan:

$$\left| \frac{x}{x+1} \right| = \frac{x}{1+x} < \frac{x}{1} = x \leq |x| < \delta$$

Als we dus $\delta = \epsilon$ kiezen dan krijgen we:

$$\left| \frac{1}{1+x} - 1 \right| < \delta = \epsilon$$

De definitie houdt stand als we stellen dat $L = 1$, en dus klopt $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$. \square

- c) *Bewijs.* Laat $\epsilon > 0$, dan moet er een $N \in \mathbb{N}$ bestaan met $\forall n \geq N$ zodanig dat:

$$\left| \frac{1}{1 + \frac{1729}{n+1}} - 1 \right| < \epsilon$$

Herschrijf de termen:

$$\left| \frac{-1729}{n+1+1729} \right| < \epsilon \iff 1729 < \epsilon(n+1730) \iff \frac{1729-1730\epsilon}{\epsilon} < n$$

Kies volgens de archimedische eigenschap $N = \lceil \frac{1729-1730\epsilon}{\epsilon} \rceil$, dan geldt voor alle $n \geq N$ dat je arbitrair dichtbij 1 kan komen en dus is de rij convergent en het limiet 1. \square

Opgave 2

Bewijs. Gebruik definitie i) uit het boek:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ met } \forall x \in \mathbb{R} \text{ zodanig dat } |x - c| < \delta \implies |f(x) - f(0)| < \epsilon$$

Herschrijf:

$$\begin{aligned} \left| x^4 \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) - f(0) \right| &= \left| x^4 \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right| \\ &\leq |x^4| \quad (\text{Omdat } -1 \leq \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1) \\ &= |x|^4 < \delta^4 \end{aligned}$$

Kies $\delta = \sqrt[4]{\epsilon}$, dan:

$$\left| x^4 \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) - f(0) \right| < \delta^4 = (\sqrt[4]{\epsilon})^4 = \epsilon$$

Hieruit volgt dus dat voor alle ϵ een δ kunnen vinden en daarmee is de functie continue op $c = 0$. □

Opgave 3

Kies epsilon $\epsilon = \frac{1}{2}$, voor elke c die we dan hebben in $(c - \delta, c + \delta)$ geldt dat er zowel rationale als irrationale getallen zitten.

- Stel dat $c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, dan bestaat er in het interval $(c - \delta, c + \delta)$ een $x \in \mathbb{Q}$ (omdat we tussen elke twee reële getallen een rationaal getal kunnen proppen) en dus:

$$|1 - 0| = 1 \not< \frac{1}{2}$$

- Stel dat $c \in \mathbb{Q}$, dan bestaat vice versa ook een reëel getal tussen twee rationale getallen en dus:

$$|0 - 1| = 1 \not< \frac{1}{2}$$

Opgave 4

Per term bekijken we of het continue is en vervolgens moet de som van alle termen dan ook continue zijn.

- Merk op dat $|x|$ continue is, omdat $|x^3| = |x|^3$ is $|x^3|$ dus ook continue volgens de samenstelling van continue functies.
- We kunnen $\frac{1}{1+x^2}$ als twee continue functies zien namelijk de constante functie $f(x) = 1$ en $g(x) = 1 + x^2$. Constante functies zijn altijd continue en $g(x)$ is ook continue want het is een polynoom. Als twee functies continue zijn dan is $\frac{f(x)}{g(x)}$ ook continue als $g(x) \neq 0$, en dit geldt want $g(x) > 0$ voor alle x .
- De laatste term $9x^8$ is een polynoom en dus continue.

Hierbij zijn alle termen continue en dus is de som ook continue.