

Caleidoscoop Hoofdstuk 3

3 Equivalentierelaties

Opgave 3.1

a) Stel de volgende equivalentierelatie \mathcal{R} op, waarbij $a \sim b \iff a = b$.

1 *Reflexief*: Bekijk $a\mathcal{R}a \implies a = a$

2 *Symmetrie*: Bekijk $(a\mathcal{R}b \implies b\mathcal{R}a) \implies a = b \implies b = a$

3 *Transitiviteit*: Bekijk $((a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}c) \implies a\mathcal{R}c) \implies (a = b \wedge b = c) \implies a = c$

b) Neem de volgende equivalentierelatie \mathcal{R} op, waarbij $a \sim b \iff a \bmod 42 = b \bmod 42$.

1 *Reflexief*: $a \bmod 42 = a \bmod 42$

2 *Symmetrie*: $(a \bmod 42 = b \bmod 42) \implies b \bmod 42 = a \bmod 42$

3 *Transitiviteit*: $(a \bmod 42 = b \bmod 42 \wedge b \bmod 42 = c \bmod 42) \iff a \bmod 42 = c \bmod 42$

c) *Bewijs. X Aanname*: Ik stel dat A een verzameling is waarbij $A \neq \emptyset$, en $A/\sim = \emptyset$. Aangezien $A \neq \emptyset$ bestaat er een $a \in A$, maar als we een equivalentierelatie hebben, dan volgt vanuit reflexiviteit dat $a \sim a$. Als $a \sim a$ dan moet er een equivalentieklasse $\bar{a} = \{b \in A : b \sim a\}$ bestaan waarbij $a \in \bar{a}$, maar $\bar{a} \in A/\sim$. Dit is een tegenspraak want we stelde dat $A/\sim = \emptyset$, en dus kan A/\sim niet leeg zijn. \square

Opgave 3.2

a) X wordt gepartitioneerd in X/\sim , omdat $|X/\sim| = \infty =$ zit in elke equivalentieklasse minstens 1 representant die in X moet liggen. Dit betekent dus dat $|X| \geq |X/\sim| = \infty$.

b) • *Geval 1*: $(|X/\sim|) = (n \wedge |X| = \infty)$: Neem $X = \mathbb{Z}$ met $x \sim y$ als $x \equiv y \bmod n$, dan heeft $|X/\sim|$ precies n elementen namelijk: $\underbrace{\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{n-1}\}}_{n \text{ elementen}}$. Hieruit volgt dus dat $|X| = \infty$, en $|X/\sim| = n$.

• *Geval 2*: $(|X/\sim| = n) \wedge (|X| = n)$: Laat $X = \mathbb{Z}_k$ en maak een equivalentie relatie waarbij $x \sim y \iff x = y$. Dan heeft onder reflexiviteit iedere $x \in X$ een equivalentieklasse, namelijk: $X/\sim = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{k-1}\}$. Dit betekent dus dat $|X| = k$ en $|X/\sim| = k$.

c) Dan moet $X = \emptyset$,

Bewijs. Stel dat $|X| = n$ en $|X/\sim| = 0$ dan geldt $\forall x \in X$ dat $x \in \bar{x}$, maar dit kan niet want $|X/\sim| = 0$, en dus moet $|X| = 0$. \square

Opgave 3.3

a) 1 *Reflexief*: $a - a = 0$ en $0 \in W$, dus reflexief. ($\because 0 \in W$)

2 *Symmetrie*: als $a - b \in W$ dan $(-1)(a - b) \in W \iff b - a \in W$ ($\because v \in W \implies \lambda v \in W$)

3 *Transitiviteit*: $a - b + b - c = a - c \in W$ ($\because v, w \in W \implies v + w \in W$)

b) Neem een $a \in V$ dan geldt voor alle $b \in V$, dat hij equivalent is aan a , en dus heeft de V/\sim slechts één equivalentieklasse.

c) Neem een willekeurige $\bar{a} \in V/\sim$, dan moet \bar{a} zichzelf bevatten, want $a \sim b \iff a - b \in \{0\} = W$, en dus $a = b$. Dit betekent dat elk element in V een eigen equivalentieklasse heeft met zichzelf.

Opgave 3.4

Ik heb er geen kunnen vinden als we vanuit \mathbb{Z} dit proberen op te lossen. Als we vanuit $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ starten dan kan ik het wel oplossen.

Laat $x \sim y$ met $x, y \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ als x en y op hetzelfde niveau n liggen in Pascal's driehoek.

- 1 *Reflexief*: x ligt op hetzelfde niveau als x en dus reflexief.
- 2 *Symmetrie*: x en y op hetzelfde niveau betekent y en x op hetzelfde niveau en dus geldt symmetrie.
- 3 *Transitiviteit*: Als x en y op hetzelfde niveau liggen en y en z ook. Dan moet x ook op hetzelfde niveau liggen als z .

Tot slot heb ik nog een idee om alsnog met \mathbb{Z} dit op te lossen. We moeten eerst een functie f opstellen met $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ waarbij

$$f = \begin{cases} 2x & \text{als } x \geq 0 \\ |2x + 1| & \text{als } x < 0 \end{cases}$$

Dit zorgt ervoor dat we gewoon met $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ verder kunnen werken en dan dezelfde equivalentierelatie kunnen opstellen als hierboven. Ik weet niet of dit goed is...

Opgave 3.5

- a) *Bewijs*. 1 *Reflexief*: Als $p = p$ dan moet $p' = p'$.
 2 *Symmetrie*: Als $p \sim q$ dan $p' = q' \implies q' = p' \implies q \sim p$
 3 *Transitiviteit*: Als $p \sim q \wedge q \sim r$ dan $p' = q'$ en $q' = r'$ waardoor $p' = r' \implies p \sim r$.

□

- b) Laat $p, q \in \mathbb{Z}[X]$ waarbij $p \neq q$ en $\bar{p} = \bar{q}$, dan geldt $f(\bar{p}) \neq f(\bar{q})$ maar dit is een tegenspraak want $\bar{p} = \bar{q}$. Dit betekent dat dit geen functie is, Aangezien voor elk argument hebben we een unieke waarde moeten hebben.
- c) Laat $P = p(x) + c$ en $Q = q(x) + d$ met $P \neq Q$ en $P' = Q'$, dan:

$$\begin{aligned} g(\bar{P}) &= p(1) + c - (p(0) + c) \\ &= p(1) - p(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(\bar{Q}) &= q(1) + c - (q(0) + c) \\ &= q(1) - q(0) \end{aligned}$$

Het verschil tussen P en Q was de constante. De constante verdwijnt door de functie g en dus is deze wel goed gedefinieerd.

Opgave 3.6

Correct gedefinieerd

Neem $f : X/\sim \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ met $f(\bar{x}) := g(x)$, waarbij $g : X \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ met $g(x) = x \bmod 2$. Beschouw $X \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ en stel de equivalentierelatie $(x \sim y)$ als $(x \bmod 6) = (y \bmod 6)$ op. Als we nu willekeurige $x, y \in \bar{x}$ representanten zouden selecteren dan $f(x) = f(y)$, aangezien voor elk element in \bar{a} geldt dat het in dezelfde restklasse valt. Ofwel voor $\bar{0}$ kunnen we elk element schrijven als $2(x) + 0$, $\bar{1} \implies 2(x) + 1$, $\bar{2} \implies 2(x) + 2$, etc. Voorbeeld:

$$\begin{aligned} \bar{0} &= \{0, 6, 12, 18, 24, \dots\} \\ &= \{(2 \cdot 0), (2 \cdot 3), (2 \cdot 4), \dots\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{1} &= \{1, 7, 13, 19, \dots\} \\ &= \{(2 \cdot 0 + 1), (2 \cdot 3 + 1), (2 \cdot 6 + 1), \dots\} \end{aligned}$$

$$\vdots = \{\dots\dots\dots\}$$

Incorrect gedefinieerd

Neem $f : X/\sim \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ met $f(\bar{x}) := g(x)$ waarbij $g : X \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ met $g(x) = x \bmod 2$. Beschouw $X \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ en stel de equivalentierelatie $x \sim y$ als $(x \bmod 3) = (y \bmod 3)$ op. Als we nu willekeurige $x, y \in \bar{x}$ representanten zouden selecteren dan $f(x) \neq f(y)$, want neem bijvoorbeeld $3, 6 \in \bar{0}$, dan $f(3) = 3 \bmod 2 = \boxed{1}$ en $f(6) = 6 \bmod 2 = \boxed{0}$. Hieruit volgt dus dat f geen functie is aangezien een argument meer dan één waarde kan vertegenwoordigen.

Opgave 3.7

Zij $(a, b), (c, d) \in X/\sim$ en laat de vermedigvuldiging als volgt zijn:

$$\begin{aligned}(a, b) \cdot (c, d) &= (a - b)(c - d) \\ &= ac - ad - bc + bd \\ &= (ac + bd) - (ad + bc) \\ &= (ac + bd, ad + bc)\end{aligned}$$

We gaan nu laten zien dat de berekening representant onafhankelijk is. Neem $(ac + bd, ad + bc)$, en $(a'c' + b'd', a'd' + b'c')$ en kijk of:

$$\begin{aligned}(ac + bd, ad + bc) &\sim (a'c' + b'd', a'd' + b'c') \\ &\Downarrow \\ ac + bd + a'd' + b'c' &= ad + bc + a'c' + b'd' \\ &\Downarrow \\ (ac + bd) - (ad + bc) &= (a'c' + b'd') - (a'd' + b'c') \\ &\Downarrow \\ (ac + bd, ad + bc) &= (a'c' + b'd', a'd' + b'c')\end{aligned}$$

Hieruit volgt dat het representant onafhankelijk is. Ik twijfel nog over deze uitwerking..

Opgave 3.8

Zij $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\neq 0}$ met $f(x) = (x, 1)$, waarbij we een equivalentierelatie opstellen:

$$(a, b) \sim (c, d) \iff ad = bc$$

1 *Reflexief*: Neem $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\neq 0}$ dan:

$$\begin{aligned}(a, b) &\sim (a, b) \\ &\Downarrow \\ ab &= ba \\ ab &= ab \quad (\because \text{Vermedigvuldiging is commutatief in } \mathbb{Z})\end{aligned}$$

De relatie is dus reflexief.

2 *Symmetrie*: Als $(a, b) \sim (c, d)$ dan:

$$\begin{aligned}ad &= bc \\ &\Downarrow \\ bc &= ad \\ &\Downarrow \\ cb &= da \quad (\because \text{Vermedigvuldiging is commutatief in } \mathbb{Z}) \\ &\Downarrow \\ (c, d) &\sim (a, b)\end{aligned}$$

De relatie is dus symmetrisch.

3 *Transitiviteit*: Als $(a, b) \sim (c, d) \wedge (c, d) \sim (e, f)$ dan $(a, b) \sim (e, f)$

$$\begin{aligned}
 (a, b) \sim (c, d) &\implies ad = bc \\
 &\Downarrow \\
 (c, d) \sim (e, f) &\implies cf = de \\
 &\Downarrow \\
 ad(f) &= bc(f) \\
 &\Downarrow \\
 ad(f) &= b(de) \\
 &\Downarrow \\
 af &= be \\
 &\Downarrow \\
 (a, b) &\sim (e, f)
 \end{aligned}$$

De relatie is dus transitief.

Nu moeten we nog bewijzen of de equivalentierelatie representantonafhankelijk is. Neem $(a, b) \sim (c, d)$ en $(a', b') \sim (c', d')$ dan:

$$a$$

Waarbij de interpretatie als volgt is:

$$\overline{(a, b)} = \frac{a}{b}$$

En nu hebben we \mathbb{Q} ?