# Wiskundige Structuren Huiswerk

**Jasper Vos** **Huiswerkset 3** 28 september 2025
Studentnr: *s2911159*

## Opgave 1

*Bewijs.* Ik bewijs voor zowel $n = 0$ en $n = 1$, omdat er vaak dubbelzinnigheid is over $0 \in \mathbb{N}$ of $0 \notin \mathbb{N}$.

1. *Basisstap:* $n = 0,\ n = 1$

   Neem $|A| = |\emptyset| = 0$, dan en slechts dan als $|\mathcal{P}(A)||\{\emptyset\}| = 2^0 = 1$. Dus de uitspraak geldt voor $n = 0$.

   Neem $|A| = |\{a\}| = 1$ dan en slechts dan als $|\mathcal{P}(A)| = |\{\emptyset, \{a\}\}| = 2^1 = 2$. Dus de uistpraak geldt voor $n = 1$.

2. *Inductiehypothese:* Neem aan dat de stelling geldt voor $0 \leq k < n$, dan geldt dus: $|A| = k$ en $|\mathcal{P}(A)| = 2^k$. Laat $k = n - 1$, en $B = A \cup \{b\}$, Dan kunnen we de machtsverzameling opstellen voor $\mathcal{P}(B)$ waarbij:

   $$C = \{V \in \mathcal{P}(B) : \{b\} \notin V)\} = \mathcal{P}(A)$$

   en:

   $$D = \{V \in \mathcal{P}(B) : \{b\} \in V\}$$

   Hieruit volgt $C \cup D = \mathcal{P}(B)$. Merk op dat $D = \{V \cup \{b\} : V \in \mathcal{P}(A)\}$, en dus:

   $$|D| = |\mathcal{P}(A)|$$

   Als we nu alles optellen krijgen we:

   $$\begin{aligned} |\mathcal{P}(B)| &= |C| + |D| \\ &= |\mathcal{P}(A)| + |\mathcal{P}(A)| \\ &= 2^k + 2^k \\ &= 2(2^k) \\ &= 2^{k+1} \end{aligned}$$

3. *Uitspraak waar voor alle $n$:* We stellen dat de uitspraak waar is voor alle $n$ en gaan dit bewijzen door te stellen dat dit niet zo is door vervolgens een tegenspraak te vinden.

   Vanuit de welordening van $\mathbb{N}$ is er een kleinste element $n_0 \in \mathbb{N}$. We zeggen dat er een kleinste $n_0$ moet bestaan waarvoor de uispraak niet waar is, maar we hebben al bewezen dat voor $0 \leq k \leq n$ de uitspraak waar is. Dit is dus een tegenspraak en daarom geldt voor alle $n \in N$ dat de uitspraak waar is.

$\square$

## Opgave 2

Voor alle $a \in A : f(f(a)) = a$, dan betekent dus ook omdat $f$ een bijectie is dat $ff = \mathrm{id}_A$