Lineaire Algebra Huiswerk

Jasper Vos
Studentnr: *s2911159*

Huiswerkset 3

29 september 2025

Opgave 3.4.6

Opgave 3.4.6(2)

Bewijs. Laat V een verzameling zijn van alle oneven functies van $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, waarbij V een deelruimte is op $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Het nulelement

Te bewijzen: V bevat het nulelement, wat in dit geval de nulfunctie f_0 is.
Zij $f_0 : \mathbb{R} \to \{0\}$ $f(x) = 0$, dan geldt voor alle $x \in \mathbb{R}$ dat:

$$f(-x) = 0 \text{ en } -f(x) = -0 = 0$$

Dit betekent dus dat V de nulfunctie f_0 bevat.

Gesloten onder optelling

Te bewijzen: $f, g \in V$ dan $f + g \in V$.
Zij $f, g \in V$ willekeurig gegeven dan geldt voor alle $x \in \mathbb{R}$ dat:

$$\begin{aligned}
(f+g)(-x) &= f(-x) + g(-x) \quad \text{(Definitie optellen functies)} \\
&= -f(x) + -g(x) \quad \text{(Eigenschap oneven functie)} \\
&= -(f(x) + g(x)) \quad \text{(Distributiviteit in } \mathbb{R}\text{)} \\
&= -((f+g)(x)) \quad \text{(Definitie optellen functies)}
\end{aligned}$$

Hieruit volgt dus dat voor alle $x \in \mathbb{R}$ geldt $(f+g)(-x) = -(f+g)(x)$, en dus $f + g \in V$.

Gesloten onder scalaire vermedigvuldiging

Te bewijzen: $f \in V$ en $\lambda \in \mathbb{R}$ dan $\lambda f \in V$.
Zij $f \in V$ en $\lambda \in \mathbb{R}$ dan:

$$\lambda f(-x) = -\lambda f(x) \quad \text{(Eigenschap oneven functie)}$$

Dus voor elke $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $\lambda f(-x) = -\lambda f(x)$, en dus $\lambda f \in V$.

Conclusie
Door te bewijzen dat V voldoet aan het nulelement, optelling en scalaire vermedigvuldiging hebben we bewezen dat V een deelruimte is van $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. $\square$