Lineaire Algebra Huiswerk

Jasper Vos **Huiswerkset 3** 23 september 2025
Studentnr: *s2911159*

Opgave 2.2.9 (4)

Nulelement

We stellen de nulfunctie op namelijk $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met $f_0(x) = 0$, dan $f_0(3) = 0$ en dus $f_0 \in V$.

Optelling

Zij f_1, f_2 willekeurig gekozen in V, en laat $g = f_1 + f_2$, dan:

$$\begin{aligned} g(3) &= (f_1 + f_2)(3) \\ &= f_1(3) + f_2(3) \\ &= 0 + 0 \\ &= \boxed{0} \end{aligned}$$

Hieruit volgt dus dat $g(3) = 0$ en dus $g \in V$.

Vermedigvuldiging

Zij $\lambda \in \mathbb{R}$ en f willekeurig gekozen in V dan:

$$\begin{aligned} \lambda f(3) &= \lambda(0) \\ &= \boxed{0} \end{aligned}$$

Axioma's

1. Additieve commutativiteit:

Te bewijzen: Voor alle $f, g \in V$ geldt $f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$.

Bewijs. Merk op dat $f(x), g(x) \in \mathbb{R}$, en voor $\mathbb{R}$ geldt dat termen commutatief zijn. Dus $f(x)+g(x) = g(x)+f(x)$. □

2. Additieve associativiteit:

Te bewijzen: Voor alle $f, g, h \in V$ geldt dat $(f + (g + h))(x) = ((f + g) + h)(x)$.

Bewijs.

$$\begin{aligned} (f + (g + h))(x) &= f(x) + (g + h)(x) \quad (f(x), g(x), h(x) \in \mathbb{R} \text{ en dus associatief}) \\ &= f(x) + g(x) + h(x) \\ &= (f + g)(x) + h(x) \\ &= ((f + g) + h)(x) \end{aligned}$$

□

Dus V is associatief.

3. Neutraal element:

Te bewijzen: Voor alle $f \in V$ geldt $f + f_0 = f$

Bewijs. Merk op dat $f_0(x) = 0$ en dus $f(x) + f_0(x) = f(x) + 0 = f(x)$. □

4. Bestaan van negatieven:

Te bewijzen: Voor alle $f \in V$ bestaat er een $f' \in V$ zodanig dat $f + f' = f_0$.

Bewijs. We weten dat $f(x) \in \mathbb{R}$ ligt en voor $\mathbb{R}$ geldt dat elk element een additieve inverse heeft. Dus neem $f'(x) = -f(x)$ dan $f(x) + f'(x) = f_0(x)$. □

5. Scalaire Vermedigvuldiging is associatief:

Te bewijzen: Voor alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ en $f \in V$ geldt: $(\lambda \odot (\mu \odot f))(x) = ((\lambda \odot \mu) \odot f)(x)$.

Bewijs. We weten dat λ, μ en $f(x)$ allemaal in $\mathbb{R}$ liggen en voor $\mathbb{R}$ geldt dat vermedigvuldiging associatief is dus:

$$\begin{aligned}(\lambda \odot (\mu \odot f))(x) &= \lambda(\mu \odot f)(x) \\ &= \lambda(\mu f(x)) \\ &= (\lambda\mu) f(x) \\ &= ((\lambda \odot \mu) \odot f)(x)\end{aligned}$$

□

6. Vermedigvulding met 1 doet niks:

Te bewijzen: Voor alle $f \in V$ geldt $1 \odot f = f$.

Bewijs. Merk op $f(x) \in \mathbb{R}$, dan $1 \odot f(x) = f(x)$. □

7. Distributiviteit I:

Te bewijzen: Voor alle $\lambda \in \mathbb{R}$ en voor alle $f, g \in V$ geldt $(\lambda \odot (f + g))(x) = (\lambda \odot f)(x) \oplus (\lambda \odot g)(x)$.

Bewijs. Merk op dat $f(x) \in \mathbb{R}$ en voor $\mathbb{R}$ geldt dat het distributief is, en dus:

$$\begin{aligned}(\lambda \odot (f + g))(x) &= \lambda \odot (f(x) + g(x)) \\ &= (\lambda \odot f)(x) \oplus (\lambda \odot g)(x)\end{aligned}$$

□

8. Distributiviteit II:

Te bewijzen: Voor alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ en voor alle $f \in V$ geldt $((\lambda + \mu) \odot f)(x) = (\lambda \odot f)(x) \oplus (\mu \odot f)(x)$.

Bewijs. Merk op dat $f(x) \in \mathbb{R}$ en voor $\mathbb{R}$ geldt dat het distributief is, en dus:

$$\begin{aligned}((\lambda \odot \mu) + f)(x) &= (\lambda \odot \mu) f(x) \\ &= (\lambda \odot f)(x) \oplus (\mu \odot f)(x)\end{aligned}$$

□

V heeft een Nulelement, optelling, vermedigvulding, en voldoet aan de acht axioma's waardoor we kunnen zeggen at V een vectorruimte is.