

Opgave 1

a) *Bewijs.*

- *Basisstap: $n = 1$*

Te bewijzen: $a_1 > a_0$. We weten $a_0 = \log_2(12)$, en $a_1 = a_{0+1} = \log_2(a_0 + 12) = \log_2(\log_2(12) + 12)$.

Nu moeten we laten zien dat:

$$\log_2(\log_2(12) + 12) > \log_2(12)$$

Merk op dat $3 < \log_2(12)$ als we dit gebruiken dan:

$$\log_2(\log_2(12) + 12) > \log_2(3 + 12) > \log_2(12)$$

We kunnen hier dus aflezen dat $\log_2(15) > \log_2(12)$ omdat \log_2 strikt stijgend is, en omdat $\log_2(15) < \log_2(\log_2(12) + 12)$. Via transitiviteit van ordening $>$ geldt:

$$\log_2(\log_2(12) + 12) > \log_2(12) \iff \boxed{a_1 > a_0}$$

- *Inductie-hypothese:*

We nemen aan dat de stelling voor $n = k$ geldt ofwel dat $a_k > a_{k-1}$. Vanuit de inductie-hypothese bouwen we naar de volgende termen.

$$a_k > a_{k-1}$$

$$a_k + 12 > a_{k-1} + 12$$

$$\log_2(a_k + 12) > \log_2(a_{k-1} + 12)$$

Merk op dat dit overeen komt met de definitie van a_{k+1} en a_k , en dus:

$$\log_2(a_k + 12) > \log_2(a_{k-1} + 12) \iff \boxed{a_{k+1} > a_k}$$

Hieruit volgt dus dat de stelling voor elke $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ geldt, en daarmee is a_n strikt stijgend.

□

b) *Bewijs.*

- *Basisstap: $n = 1$*

Te bewijzen $a_1 < 4$. We weten dat $a_1 = a_{0+1} = \log_2(a_0 + 12) = \log_2(\log_2(12) + 12)$. Merk op dat $a_0 = \log_2(12) < \log_2(16) = 4$, en dus is $a_0 < 4$ waaruit volgt:

$$\log_2(a_0 + 12) < \log_2(4 + 12) \iff \boxed{a_1 < 4}$$

4 is dus een bovengrens van a_1 .

- *Inductie-hypothese:*

We nemen aan dat de stelling voor $n = k$ geldt ofwel dat $a_k < 4$. We gebruiken dezelfde truuk als bij de basisstap. Merk op dat $a_k < 4 = \log_2(16)$, weten we dus dat:

$$a_{k+1} = \log_2(a_k + 12)$$

$$< \log_2(4 + 12) = 4 \iff \boxed{a_{k+1} < 4}$$

Dus 4 is een bovengrens van a_{k+1} .

Hieruit volgt dat voor alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ dat 4 een bovengrens is van a_n .

□

- c) Merk op dat a_n van boven begrensd is omdat voor alle n geldt dat 4 een bovengrens is (*vraag 1b*) en dat a_n strikt stijgend is (*vraag 1a*). Dit betekent dat a_n convergent moet zijn volgens de monotone convergentiestelling. Merk op dat $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \log_2(a_n + 12)$ als we dit verder uitwerken:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \log_2(a_n + 12) \\ &= \log_2\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + 12\right)\end{aligned}$$

Laat $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = L$, en dus ook $L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

$$\begin{aligned}L &= \log_2(L + 12) \\ 2^L &= L + 12\end{aligned}$$

Bekijk de eerste resultaten van 2^L , en neem $L = 4$.

$$2^4 = 4 + 12 \iff 16 = 16$$

Hieruit volgt dus dat 4 het limiet is van de rij.

Opgave 2

- a) Kies een willekeurige $M \in \mathbb{R}$, omdat a_n niet begrensd is bestaat er een $N \in \mathbb{N}$ zodanig dat $a_n > M$. Merk ook op dat a_n strikt stijgend is en dus voor alle $n \geq N$ geldt dan $a_n \geq a_N$, en dus:

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N} \text{ met } n \geq N \text{ zodanig dat } a_n > M$$

Dit is de definitie van een divergente rij, en dus $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.

- b)
c)