Caleidoscoop

Jasper Vos
Studentnr: *s2911159*

Inleverset A

5 oktober 2025

---

1 a) Zij $a, b, c \in \mathbb{Q}$ en $\sim$ een equivalentie-relatie waarbij $a - b \in \mathbb{Z}$.
Bewijs dat $\sim$ een equivalentie-relatie is:

- $\sim$ *is reflexief:*
  $a - a = 0$ en $0 \in \mathbb{Z}$ en dus is $\sim$ reflexief.
- $\sim$ *is symmetrisch:*
  Als $a - b \in \mathbb{Z}$ dan $-1(a - b) = b - a \in \mathbb{Z}$, en dus $b \sim a$ waaruit volgt dat $\sim$ symmetrisch is.
- $\sim$ *is transitief:*
  $a - b \in \mathbb{Z}$ en $b - c \in \mathbb{Z}$ dan $(a - b) + (b - c) \in \mathbb{Z}$ dus $a - \cancel{b} + \cancel{b} - c = a - c \in \mathbb{Z}$ hieruit volgt $a \sim c$ en dus is $\sim$ een transitieve relatie.

Voor $\sim$ geldt dat hij reflexief, symmetrisch en transitief is, en daarmee is $\sim$ een equivalentie-relatie.
Als we nu gaan kijken naar $\mathbb{Q}/_\sim$, dan kunnen we elke equivalentie-klasse $\overline{q}$ kunnen schrijven als:

$$\overline{q} = \overline{\frac{1}{k}} = \{(\frac{k(i) + 1}{k}) : i \in \mathbb{Z}\}$$

Hieruit volgt dus dat we oneindig equivalentie-klassen hebben want we kunnen een bijectie opstellen vanuit $f : \mathbb{Z} \to (0, 1]$ met $f(k) = \frac{1}{k}$, en dus zijn het aantal equivalentie-klassen aftelbaar oneindig. Daarnaast heeft elke equivalentie-klasse oneindig elementen omdat:

$$\frac{k(i) + 1}{k} = i + \frac{1}{k}$$

We kunnen dit zien als een strikt stijgende lijn, en dus moet elke equivalentie-klasse oneindig aantal elementen bevatten.

b) Ik denk niet dat dit kan. Ik stel voor dat het wel kan, en probeer een tegenspraak te herleiden.

Bewijs. Stel dat er een Quotiëntruimte bestaat waarbij $|Q/_\sim| = n$, en $|\overline{q}| = m$, waarbij $\overline{q} \in Q/_\sim$, We weten dat $(Q/_\sim)$ partities vormen in $\mathbb{Q}$. Dit betekent dus dat $\mathbb{Q}$ partities $\overline{q}$ moet vormen waarbij elk element van $\mathbb{Q}$ opgedeeld wordt, echter geldt voor $|\overline{q}| = m$ en $|Q/_\sim| = n$, en dus zijn er hoogstens $n \cdot m$ aantal elementen. Dit luidt tot een tegenspraak want $n \cdot m < \infty = |\mathbb{Q}|$. $\square$

2 a) i. Bekijk of $X := \{0\} \cup \{1 - \frac{1}{n+2}\}_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ zowel een infimum en een supremum heeft.

- Bekijk of X een infimum heeft:

  Bewijs. Claim dat het infimum i bestaat met $i = 0$. Allereerst moet 0 een ondergrens zijn. Bekijk

  $$x \in \{0\} \cup \{1 - \frac{1}{n+2}\}$$

  We weten dat de rechterkant van de vereniging minstens $x = \frac{1}{2}$, en hoogstens 1 benadert.
  We zeggen dat 0 een ondergrens is als $0 \leq x$ voor alle $x \in X$. Dit komt overeen met het minimum voor X en dus is 0 een ondergrens, en een minimum van X.
  Nu moeten we laten zien dat 0 de grootste ondergrens is. Dit is echter waar omdat 0 ook het minimum van X is en dus is het infimum $i = 0$. $\square$

- Bekijk of X een supremum heeft:

  Bewijs. Claim dat het supremum s bestaat waarbij $s = 1$. Allereerst moet s een bovengrens zijn en dus moet voor elke $x \in X$ gelden dat $s \geq x$. Bekijk:

  $$X = \{0\} \cup \{1 - \frac{1}{n+2}\}$$

De rechterkant van de vereniging geeft aan dat het 1 benadert, maar nooit 1 kan worden en dus $1 \geq x$ voor alle $x \in X$.
Nu moeten we nog laten zien dat $s = 1$ de kleinste bovengrens is. Neem $x = 1 - \frac{1}{n+2}$, dan moet gelden $\forall epsilon > 0$ dat:

$$1 - \epsilon < x$$

Waarbij 1 de gesuggereerde bovengrens s is. substitueer $x = 1 - \frac{1}{n+2}$:

$$1 - \epsilon < 1 - \frac{1}{n+2}$$

Neem aan dat $\epsilon > \frac{1}{n+2}$ dan is er altijd een x waarvoor epsilon groter is als we n groot genoeg maken. Hieruit volgt dus dat $s = 1$ de kleinste bovengrens moet zijn. □

ii. Bekijk of $Y := \{\frac{n+2}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$, een supremum en infimum heeft.

-