Caleidoscoop Hoofdstuk 3

3 Equivalentierelaties

Opgave 3.1

a) Stel de volgende equivalentierelatie $\mathcal{R}$ op, waarbij $a \sim b \Longleftrightarrow a = b$.

1 *Reflexief:* Bekijk $a\mathcal{R}a \implies a = a$

2 *Symmetrie:* Bekijk $(a\mathcal{R}b \implies b\mathcal{R}a) \implies a = b \implies b = a$

3 *Transitiviteit:* Bekijk $((a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}c) \implies a\mathcal{R}c) \implies (a = b \wedge b = c) \implies a = c$

b) Neem de volgende equivalentierelatie $\mathcal{R}$ op, waarbij $a \sim b \Longleftrightarrow a \mod 42 = b \mod 42$.

1 *Reflexief:* $a \mod 42 = a \mod 42$

2 *Symmetrie:* $(a \mod 42 = b \mod 42) \implies b \mod 42 = a \mod 42$

3 *Transitiviteit:* $(a \mod 42 = b \mod 42 \wedge b \mod 42 = c \mod 42) \Longleftrightarrow a \mod 42 = c \mod 42$

c) *Bewijs.* X **Aanname** : Ik stel dat A een verzameling is waarbij $A \neq \emptyset$, en $A/_\sim = \emptyset$. Aangezien $A \neq \emptyset$ bestaat er een $a \in A$, maar als we een equivalentierelatie hebben, dan volgt vanuit reflexiviteit dat $a \sim a$. Als $a \sim a$ dan moet er een equivalentieklasse $\overline{a} = \{b \in A : b \sim a\}$ bestaan waarbij $a \in \overline{a}$, maar $\overline{a} \in A/_\sim$. Dit is een tegenspraak want we stelde dat $A/_\sim = \emptyset$, en dus kan $A/_\sim$ niet leeg zijn. □

Opgave 3.2

a) X wordt gepartioneerd in $X/_\sim$, omdat $|X/_\sim| = \infty =$ zit in elke equivalentieklasse minstens 1 represetant die in X moet liggen. Dit betekent dus dat $|X| \geq |X/_\sim| = \infty$.

b)
- *Geval 1:* $(|X/_\sim|) = (n \wedge |X| = \infty)$: Neem $X = \mathbb{Z}$ met $x \sim y$ als $x \equiv y \mod n$, dan heeft $|X/_\sim|$ precies n elmenten namelijk: $\underbrace{\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{n-1}\}}_{n \text{ elementen}}$. Hieruit volgt dus dat $|X| = \infty$, en $|X/_\sim| = n$.
- *Geval 2:* $(|X/_\sim| = n) \wedge (|X| = n)$: Laat $X = \mathbb{Z}_k$ en maak een equivalentie relatie waarbij $x \sim y \Longleftrightarrow x = y$. Dan heeft onder reflexiviteit iedere $x \in X$ een equivalentieklasse, namelijk: $X/_\sim = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{k-1}\}$. Dit betekent dus dat $|X| = k$ en $|X/_\sim| = k$.

c) Dan moet $X = \emptyset$,

Bewijs. Stel dat $|X| = n$ en $|X/_\sim| = 0$ dan geldt $\forall x \in X$ dat $x \in \overline{x}$, maar dit kan niet want $|X/_\sim| = 0$, en dus moet $|X| = 0$. □

Opgave 3.3

a) 1 *Reflexief:* $a - a = 0$ en $0 \in W$, dus reflexief. $\quad (\because 0 \in W)$

2 *Symmetrie:* als $a - b \in W$ dan $(-1)(a - b) \in W \Longleftrightarrow b - a \in W \quad (\because v \in W \implies \lambda v \in W)$

3 *Transitiviteit:* $a - b + b - c = a - c \in W \quad (\because v, w \in W \implies v + w \in W)$

b) Dan