Lineaire Algebra Huiswerk

Jasper Vos
Studentnr: *s2911159*

Huiswerkset 3

23 september 2025

Opgave 2.2.9 (4)

Nulelement

We stellen de nulfunctie op namelijk $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met $f_0(x) = 0$, dan $f_0(3) = 0$ en dus $f_0 \in V$.

Optelling

Zij f_1, f_2 willekeurig gekozen in V, en laat $g = f_1 + f_2$, dan:

$$\begin{aligned} g(3) &= (f_1 + f_2)(3) \\ &= f_1(3) + f_2(3) \\ &= 0 + 0 \\ &= \boxed{0} \end{aligned}$$

Hieruit volgt dus dat $g(3) = 0$ en dus $g \in V$.

Vermedigvuldiging

Zij $\lambda \in \mathbb{R}$ en f willekeurig gekozen in V dan:

$$\begin{aligned} \lambda f(3) &= \lambda(0) \\ &= \boxed{0} \end{aligned}$$

Axioma's

Additieve commutativiteit:

Te bewijzen: Voor alle $f, g \in V$ geldt $f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$.
Merk op dat $f(x), g(x) \in \mathbb{R}$, en voor $\mathbb{R}$ geldt dat termen commutatief zijn. Dus $f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$.

Additieve associativiteit:

Te bewijzen: Voor alle $f, g, h \in V$ geldt dat $(f + (g + h))(x) = ((f + g) + h)(x)$.

$$\begin{aligned} (f + (g + h))(x) &= f(x) + (g + h)(x) \quad (f(x), g(x), h(x) \in \mathbb{R} \text{ en dus associatief}) \\ &= f(x) + g(x) + h(x) \\ &= (f + g)(x) + h(x) \\ &= ((f + g) + h)(x) \end{aligned}$$

Neutraal element: