Lineaire Algebra Huiswerk

Jasper Vos **Huiswerkset 4** 29 september 2025
Studentnr: *s2911159*

Opgave 3.4.6

Bewijs. Laat F een willekeurig lichaam zijn voor een willekeurige vectorruimte V en laat met tegenvoorbeeld zien dat $L(I) \cap L(J) = L(I \cap J)$ niet waar kan zijn. Te bewijzen met een tegenvoorbeeld.

Bekijk $L(I) \cap L(J)$:

Neem $I \in \mathbb{R}^2$ met $I = \{(1,1)\},$ en $J \in \mathbb{R}^2$ met $J = \{(2,2)\}$ dan:

$$L(I) = \{\lambda(1,1) : \lambda \in F\} \quad \text{(Voor willekeurige } \lambda)$$

en

$$L(J) = \{\mu(2,2) : \mu \in F\} \quad \text{(Voor willekeurige } \mu)$$

daaruit volgt dus $L(I) \cap L(J)$:

$$L(I) \cap L(J) = \{\lambda(1,1) : \lambda \in F\} \quad \text{(Vool willekeurige } \lambda)$$

Dit komt voort omdat $L(I)$, en $L(J)$ dezelfde lijn opstellen, want $(2,2) \in J$ is een opgeschaalde variant van $(1,1) \in I$.

Bekijk $L(I \cap J)$:

Neem $I = \{1,1\},$ en $J = \{2,2\}$, dan:

$$I \cap J = \{(1,1)\} \cap \{(2,2)\} = \emptyset$$

Als we hier het lineaire omhulsel van nemen dan krijgen we $L(\emptyset) = \{0\}$.

Conclusie:
Dit betekent dus dat $L(I) \cap L(J)$ het lineaire omhulsel van $(1,1)$ is, en voor $L(I \cap J)$ geldt alleen de nulvector. Dit betekent dus dat:

$$L(I) \cap L(J) \neq L(I \cap J)$$

□

Opgave 3.4.7(2)

Bewijs. Laat V een verzameling zijn van alle oneven functies van $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, waarbij V een deelruimte is op $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Het nulelement

Te bewijzen: V bevat het nulelement, wat in dit geval de nulfunctie f_0 is.
Zij $f_0 : \mathbb{R} \to \{0\}$ $f(x) = 0$, dan geldt voor alle $x \in \mathbb{R}$ dat:

$$f(-x) = 0 \text{ en } -f(x) = -0 = 0$$

Dit betekent dus dat $f_0 \in V$.

Gesloten onder optelling

Te bewijzen: $f, g \in V$ dan $f + g \in V$.
Zij $f, g \in V$ willekeurig gegeven dan geldt voor alle $x \in \mathbb{R}$ dat:

$$\begin{aligned} (f+g)(-x) &= f(-x) + g(-x) \quad \text{(Definitie optellen functies)} \\ &= -f(x) + -g(x) \quad \text{(Eigenschap oneven functie)} \\ &= -(f(x) + g(x)) \quad \text{(Distributiviteit in } \mathbb{R}\text{)} \\ &= -((f+g)(x)) \quad \text{(Definitie optellen functies)} \end{aligned}$$

Hieruit volgt dus dat voor alle $x \in \mathbb{R}$ geldt $(f+g)(-x) = -(f+g)(x)$, en dus $f + g \in V$.

Gesloten onder scalaire vermedigvuldiging

Te bewijzen: $f \in V$ en $\lambda \in \mathbb{R}$ dan $\lambda f \in V$.
Zij $f \in V$ en $\lambda \in \mathbb{R}$ dan:

$$\lambda f(-x) = -\lambda f(x) \quad \text{(Eigenschap oneven functie)}$$

Dus voor elke $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $\lambda f(-x) = -\lambda f(x)$, en dus $\lambda f \in V$.

Conclusie:
Door te bewijzen dat V voldoet aan het nulelement, optelling en scalaire vermedigvuldiging hebben we bewezen dat V een deelruimte is van $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. $\square$