Wiskundige structuren

Opgave 1

a)

Te bewijzen:

$$-(a+b) = (-a) + (-b)$$

Bewijs. Allereerst moeten we bewijzen dat er slechts één $x \in \mathbb{Z}$ zodanig dat $y \in \mathbb{Z}$ geldt $x + y = 0$
Neem $x + y_1 = 0$ en $x + y_2 = 0$ dan:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_1 + 0 \quad \text{(0 is het neutrale element)} \\ &= y_1 + (x + y_2) \\ &= (y_1 + x) + y_2 \quad (\mathbb{Z} \text{ is associatief}) \\ &= 0 + y_2 \\ &= y_2 \end{aligned}$$

Dit betekent dus dat elk element een unieke inverse heeft, en dus:

$$\begin{aligned} a + (-a) + b + (-b) &= 0 \\ a + b + (-a) + (-b) &= 0 \quad (\mathbb{Z} \text{ is commutatief}) \\ (a+b) + (-a) + (-b) &= 0 \\ (a+b) + -(a+b) + (-a) + (-b) &= -(a+b) \quad (-(a+b) \text{ is de inverse van } (a+b)) \\ 0 + (-a) + (-b) &= -(a+b) \\ (-a) + (-b) &= -(a+b) \end{aligned}$$

Hieruit volgt dus dat:

$$-(a+b) = (-a) + (-b)$$

□

b)

Te bewijzen:

$$-0 = 0$$

Bewijs. Uit opgave a hebben we bewezen dat elke element een unieke inverse heeft, en dus:

$$\begin{aligned} -0 &= -0 + 0 \quad (\mathbb{Z} \text{ heeft 0 als neutrale element}) \\ &= 0 + (-0) \quad (\mathbb{Z} \text{ is commutatief}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

c)

Te bewijzen:

$$(-ab) = (-a)b$$

Bewijs. Veronderstel dat:

$$\begin{aligned} (-ab) - (-a)b &= 0 \\ b(-a + -(-a)) &= 0 \\ b(-a + a) &= 0 \quad \text{(De inverse van } a \text{ is } -a \text{ en de inverse van } -a \text{ is } a\text{, vanwege uniciteit)} \\ b(0) &= 0 \end{aligned}$$

□

d)

Opgave 12

MOET P(A) P(OMEGA)

d)