Studentnr: *s2911159*

Opgave 9.4.2

We hebben de lijn $L \subset \mathbb{R}^2$ met $y = 2x$ en een orthogonale projectie $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ op L.

(1) Lijn $L = \text{span}\{(1,2)\}$, dus richtingsvector $a = (1,2)$ met $\langle a, a\rangle = 5$.

Bereken projectie van basisvectoren:

$$\pi(e_1) = \frac{\langle e_1, a\rangle}{\langle a, a\rangle} \cdot (1,2) = \frac{1 \cdot 1 + 0 \cdot 2}{1 \cdot 1 + 2 \cdot 2} \cdot (1,2) = \frac{1}{5}(1,2) = \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$$
$$\pi(e_2) = \frac{\langle e_2, a\rangle}{\langle a, a\rangle} \cdot (1,2) = \frac{0 \cdot 1 + 1 \cdot 2}{1 \cdot 1 + 2 \cdot 2} \cdot (1,2) = \frac{2}{5}(1,2) = \left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

Gebruik de vectoren als kolommen in $[\pi]_B^B$:

$$\boxed{[\pi]_B^B = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}}$$

(2) Kies $v_1 = (1,2)$ voor L en $v_2 = (-2,1)$ voor $L^\perp$.

Check: $(1,2) \cdot (-2,1) = -2 + 2 = 0$

Basis $C = (v_1, v_2)$.

Projectie behoudt component langs L, zet component langs $L^\perp$ op 0:

$$\boxed{[\pi]_C^C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

(3) Basiswisselmatrix P van C naar B:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Bereken $[\pi]_B^B = P \cdot [\pi]_C^C \cdot P^{-1}$:

$$[\pi]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{[\pi]_B^B = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}}$$

Komt overeen met (1).

Opgave 10.1.2

Te bewijzen

Voor bovendriehoeksmatrix A geldt: $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$

Bewijs via inductie

Bovendriehoeksmatrix heeft vorm:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & * & \dots & * \\ 0 & a_{22} & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Basisstap ($n = 1$): $A = (a_{11})$, dus $\det(A) = a_{11}$
Inductiestap: Stel het geldt voor $(n-1) \times (n-1)$ matrices.
Laplace-expansie naar eerste kolom:

$$\det(A) = a_{11} \cdot \det(A_{11}) + 0 + \ldots + 0$$

Submatrix A_{11} is ook bovendriehoeks met diagonaal $(a_{22}, \ldots, a_{nn})$.
Via inductiehypothese:

$$\det(A_{11}) = a_{22} \cdot a_{33} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

Dus:

$$\det(A) = a_{11} \cdot (a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Conclusie

$$\boxed{\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}}$$