

## Opgave 1

We gebruiken volledige inductie om te bewijzen dat  $I$  niet leeg is voor alle  $n \in \mathbb{N}$ .

*Bewijs.*

- *Basisstap:*  $n = 0$ ,  $n = 1$

Voor  $n = 0$  is triviaal want  $\mathcal{I}_0 := \bigcap_{0 \geq 0} I_0 = I_0$ , en  $I_0$  is een niet-lege begrensde interval, dus  $\mathcal{I}$  niet leeg.

Voor  $n = 1$  geldt  $\mathcal{I}_1 := \bigcap_{1 \geq i \geq 0} I_i = I_0 \cap I_1$ .

Laat  $x \in I_1$  dan  $x \in I_0$  want  $I_1 \subset I_0$  en  $I_1$  niet-leeg. Hieruit volgt dus  $x \in I_1 \cap I_0$ , en dus  $I_1 \cap I_0 \neq \emptyset$  waaruit volgt dat  $\mathcal{I}$  niet-leeg is.

- *Inductie-hypothese:*

Neem nu  $n = k$  en beschouw  $\mathcal{I}_k$  niet-leeg. Laat zien dat voor  $n = k + 1$ , geldt dat  $\mathcal{I}_{k+1}$  niet-leeg is.

Voor  $n = k$  geldt  $\mathcal{I}_k + 1 := \bigcap_{k+1 \geq i \geq 0} I_i = I_{k+1} \cap I_k \cap I_{k-1} \cap \dots \cap I_0 = I_{k+1} \cap \mathcal{I}_k$ .

Laat  $x \in I_{k+1}$  dan  $x \in I_k$  want  $I_{k+1} \subset I_k \subset \mathcal{I}_k$ , en dus  $x \in I_{k+1} \cap \mathcal{I}_k$ . Hieruit volgt dus dat  $I_{k+1} \cap \mathcal{I}_k \neq \emptyset$ , en dus  $\mathcal{I}_{k+1}$  niet-leeg.

- *Conclusie:*

$\mathcal{I}$  is niet-leeg voor  $n = 0$ ,  $n = 1$ , en verder voor elke  $n = k$  en zijn opvolgers. Hieruit volgt dus dat  $\mathcal{I}$  leeg is voor elke  $n \in \mathbb{N}$ .

□

## Opgave 2

- a) Elke begrensde rij heeft een convergente deelrij (Bolzano-Weierstrass). We kijken dus eerst of de rij begrensd is, merk op:

$$-1 \leq \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) \leq 1 \iff |\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)| \leq 1$$

Hieruit volgt dus dat  $\sin(\frac{\pi}{2}n)$ , begrensd is.

Laten we nu een deelrij zoeken, bekijk  $\sin(\frac{\pi}{2}n)$ :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) = (0, 1, 0, -1, 0, 1, \dots)$$

Neem  $\sin(n2\pi) = (0, 0, 0, \dots)$  dan hebben we een constante rij, en constante rijen zijn convergent.

- b) Voor alle  $M \in \mathbb{R}_{>0}$  geldt dat er een  $n > M$  volgens de Archimedische eigenschap is. Dit betekent dus dat de rij onbegrensd is, en dus geen convergente deelrijen kan bevatten (Bolzano-Weierstrass).