Wiskundige Structuren

Jasper Vos **Huiswerkset 8** 24 november 2025
Studentnr: *s2911159*

Opgave 1

a) *Bewijs.* Om aan te tonen dat 0 een verdichtingspunt is moeten we kijken of er oneindig aantal elementen rond 0 zitten. Kies $\epsilon > 0$, en dan bekijken we het interval $(0,\ \epsilon)$:

$$0 < \frac{1729}{n+1} < \epsilon$$

Als we dit herschrijven kunnen we een N (met de archimedische eigenschap) vinden waarbij $\frac{1729}{N+1} < \epsilon$, ofwel:

$$\frac{1729}{n+1} < \epsilon \iff \frac{1729}{\epsilon} < n+1 \iff \frac{1729}{\epsilon} - 1 < n$$

We kiezen dus $N = \lceil \frac{1729}{\epsilon} - 1 \rceil$, dan geldt dus voor alle $n > N$ dat het kleiner dan epsilon is en dus bestaan er oneindig punten rond 0, en daarmee is 0 een verdichtingspunt. ☐

b) *Bewijs.* Gebruik definitie om te verifiëren dat 1 het limiet is. Definitie:

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ en } \forall x \in D \text{ zodanig dat } |x - 0| = |x| < \delta \implies \left| \frac{1}{1+x} - 1 \right| < \epsilon$$

Herschrijf de termen:

$$\left| \frac{1}{1+x} - 1 \right| = \left| \frac{1-1-x}{1+x} \right| = \left| \frac{-x}{1+x} \right| = \left| \frac{x}{1+x} \right|$$

Merk op dat $x > 0$ vanuit *Opgave 1a*, dan:

$$\left| \frac{x}{x+1} \right| = \frac{x}{1+x} < \frac{x}{1} = x \leq |x| < \delta$$

Als we dus $\delta = \epsilon$ kiezen dan krijgen we:

$$\left| \frac{1}{1+x} - 1 \right| < \delta = \epsilon$$

De definitie houdt stand als we stellen dat $L = 1$, en dus klopt $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$. ☐

c) *Bewijs.* Laat $\epsilon > 0$, dan moet er een $N \in \mathbb{N}$ bestaan met $\forall n \geq N$ zodanig dat:

$$\left| \frac{1}{1 + \frac{1729}{n+1}} - 1 \right| < \epsilon$$

Herschrijf de termen:

$$\left| \frac{-1729}{n+1+1729} \right| < \epsilon \iff 1729 < \epsilon(n + 1730) \iff \frac{1729 - 1730\epsilon}{\epsilon} < n$$

Kies volgens de archimedische eigenschap $N = \lceil \frac{1729 - 1730\epsilon}{\epsilon} \rceil$, dan geldt voor alle $n \geq N$ dat je arbitrair dichtbij 1 kan komen en dus is de rij convergent en het limiet 1. ☐

Opgave 2

Bewijs. ¡¡¡¡¡¡¡ HEAD
Gebruik definitie *i)* uit het boek:

$$\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0 \text{ met } \forall x \in \mathbb{R} \text{ zodanig dat } |x - c| < \delta \implies |f(x) - f(0)| < \epsilon$$

Herschrijf:

$$\begin{aligned}
\left|x^4 \cdot \cos(\frac{1}{x}) - f(0)\right| &= \left|x^4 \cdot \cos(\frac{1}{x})\right| \\
&\leq |x^4| \quad (\text{Omdat } -1 \leq \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1) \\
&= |x|^4 < \delta^4
\end{aligned}$$

Kies $\delta = \sqrt[4]{\epsilon}$, dan:

$$\left|x^4 \cdot \cos(\frac{1}{x}) - f(0)\right| < \delta^4 = (\sqrt[4]{\epsilon})^4 = \epsilon$$

Hieruit volgt dus dat voor alle ϵ een δ kunnen vinden en daarmee is de functie continue op $c = 0$. □

Opgave 3

Kies epsilon $\epsilon = \frac{1}{2}$, voor elke c die we dan hebben in $(c-\delta,\ c+\delta)$ geldt dat er zowel rationale als irrationale getallen zitten. ======= Gebruik definitie *i)* uit het boek:

$$\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0 \text{ met } \forall x \in \mathbb{R} \text{ zodanig dat } |x - c| < \delta \implies |f(x) - f(0)| < \epsilon$$

Herschrijf:

$$\left|x^4 \cdot \cos(\frac{1}{x}) - f(0)\right| = \left|x^4 \cdot \cos(\frac{1}{x})\right| \leq |x^4| = |x|^4 < \delta^4$$

Kies $\delta = \sqrt[4]{\epsilon}$, dan:

$$\left|x^4 \cdot \cos(\frac{1}{x}) - f(0)\right| < \delta^4 = (\sqrt[4]{\epsilon})^4 = \epsilon$$

Hieruit volgt dus dat voor alle ϵ een δ kunnen vinden en daarmee is de functie continue op $x = 0$.

Opgave 3

Voor alle $x, y \in \mathbb{R}$, geldt dat er een $q \in \mathbb{Q}$ bestaat zodanig dat $x < q < y$. Dit betekent dus dat wel altijd een gat tussen 0 en 1 hebben en dus kan dit nooit continue zijn. Om dit verder formeel te laten zien kunnen we een $\epsilon = \frac{1}{2}$ kiezen, en gevallen afgaan. ¿¿¿¿¿¿¿ 3be707222100cb682b7b82d614f20760027a7e20

- Stel dat $c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, dan bestaat er in het interval $(c - \delta, c + \delta)$ een $x \in Q$ (omdat we tussen elke twee reële getallen een rationaal getal kunnen proppen) en dus:

$$|1 - 0| = 1 \not< \frac{1}{2}$$

- Stel dat $c \in \mathbb{Q}$, dan bestaat vice versa ook een reëel getal tussen twee rationale getallen en dus: ¡¡¡¡¡¡¡ HEAD

$$|0 - 1| = 1 \not< \frac{1}{2}$$

Opgave 4

Per term bekijken we of het continue is en vervolgens moet de som van alle termen dan ook continue zijn.

- Merk op dat $|x|$ continue is, omdat $|x^3| = |x|^3$ is $|x^3|$ dus ook continue volgens de samenstelling van continue functies.
- We kunnen $\frac{1}{1+x^2}$ als twee continue functies zien namelijk de constante functie $f(x) = 1$ en $g(x) = 1 + x^2$. Constante functies zijn altijd continue en $g(x)$ is ook continue want het is een polynoom. Als twee functies continue zijn dan is $\frac{f(x)}{g(x)}$ ook continue als $g(x) \neq 0$, en dit geldt want $g(x) > 0$ voor alle x.
- De laatste term $9x^8$ is een polynoom en dus continue. =======

$$|0 - 1| = 1 \not< \frac{1}{2}$$

Opgave 4

Ga per term af of hij continue is dan is de som van alle continue termen ook continue.

- Merk op dat $|x|$ continue is, en dus is $|x||x||x| = |x|^3 = |x^3|$ ook continue.
- We kunnen $\frac{1}{1+x^2}$ als twee continue functies zien namelijk de constante functie $f(x) = 1$ en $g(x) = 1 + x^2$. Constante functies zijn altijd continue en $g(x)$ is ook continue want het is een polynoom. Als twee functies continue zijn dan is $\frac{f(x)}{g(x)}$ ook continue als $g(x) \neq 0$, en dit geldt want $g(x) > 0$ voor alle x.
- De laatste term $9x^8$ is een polynoom en dus continue. ¿¿¿¿¿¿¿ 3be707222100cb682b7b82d614f20760027a7e20

Hierbij zijn alle termen continue en dus is de som ook continue.