

- 1 a) Zij $a, b, c \in \mathbb{Q}$ en \sim een equivalentie-relatie waarbij $a - b \in \mathbb{Z}$.

Bewijs dat \sim een equivalentie-relatie is:

- \sim is *reflexief*:
 $a - a = 0$ en $0 \in \mathbb{Z}$ en dus is \sim reflexief.
- \sim is *symmetrisch*:
Als $a - b \in \mathbb{Z}$ dan $-1(a - b) = b - a \in \mathbb{Z}$, en dus $b \sim a$ waaruit volgt dat \sim symmetrisch is.
- \sim is *transitief*:
 $a - b \in \mathbb{Z}$ en $b - c \in \mathbb{Z}$ dan $(a - b) + (b - c) \in \mathbb{Z}$ dus $a - b + b - c = a - c \in \mathbb{Z}$ hieruit volgt $a \sim c$ en dus is \sim een transitieve relatie.

Voor \sim geldt dat hij reflexief, symmetrisch en transitief is, en daarmee is \sim een equivalentie-relatie.

Als we nu gaan kijken naar \mathbb{Q}/\sim , dan kunnen we elke equivalentie-klasse \bar{q} kunnen schrijven als:

$$\bar{q} = \frac{1}{k} = \left\{ \left(\frac{k(i) + 1}{k} \right) : i \in \mathbb{Z} \right\}$$

Hieruit volgt dus dat we oneindig equivalentie-classes hebben want we kunnen een bijectie opstellen vanuit $f : \mathbb{Z} \rightarrow (0, 1]$ met $f(k) = \frac{1}{k}$, en dus zijn het aantal equivalentie-classes aftelbaar oneindig. Daarnaast heeft elke equivalentie-klasse oneindig elementen omdat:

$$\frac{k(i) + 1}{k} = i + \frac{1}{k}$$

We kunnen dit zien als een strikt stijgende lijn, en dus moet elke equivalentie-klasse oneindig aantal elementen bevatten.

- b) Ik denk niet dat dit kan. Ik stel voor dat het wel kan, en probeer een tegenspraak te herleiden.

Bewijs. Stel dat er een Quotiëntruimte bestaat waarbij $|Q/\sim| = n$, en $|\bar{q}| = m$, waarbij $\bar{q} \in Q/\sim$. We weten dat (Q/\sim) partities vormen in \mathbb{Q} . Dit betekent dus dat \mathbb{Q} partities \bar{q} moet vormen waarbij elk element van \mathbb{Q} opgedeeld wordt, echter geldt voor $|\bar{q}| = m$ en $|Q/\sim| = n$, en dus zijn er hoogstens $n \cdot m$ aantal elementen. Dit luidt tot een tegenspraak want $n \cdot m < \infty = |\mathbb{Q}|$. \square