Wiskundige Structuren

Jasper Vos **Huiswerkset 7** 7 november 2025
Studentnr: *s2911159*

Opgave 1

We gebruiken volledige inductie om te bewijzen dat I niet leeg is voor alle $n \in \mathbb{N}$.

Bewijs.

- *Basisstap:* $n = 0,\ n = 1$

  Voor $n = 0$ is triviaal want $\mathcal{I}_0 := \bigcap_{0 \geq 0} I_0 = I_0$, en I_0 is een niet-lege begrensde interval, dus $\mathcal{I}$ niet leeg.

  Voor $n = 1$ geldt $\mathcal{I}_1 := \bigcap_{1 \geq i \geq 0} I_i = I_0 \cap I_1$.

  Laat $x \in I_1$ dan $x \in I_0$ want $I_1 \subset I_0$ en I_1 niet-leeg. Hieruit volgt dus $x \in I_1 \cap I_0$, en dus $I_1 \cap I_0 \neq \emptyset$ waaruit volgt dat $\mathcal{I}$ niet-leeg is.

- *Inductie-hypothese:*

  Neem nu $n = k$ en beschouw $\mathcal{I}_k$ niet-leeg. Laat zien dat voor $n = k + 1$, geldt dat $\mathcal{I}_{k+1}$ niet-leeg is.

  Voor $n = k$ geldt $\mathcal{I}_k + 1 := \bigcap_{k+1 \geq i \geq 0} = I_{k+1} \cap I_k \cap I_{k-1} \cap \cdots \cap I_0 = I_{k+1} \cap \mathcal{I}_k$.

  Laat $x \in I_{k+1}$ dan $x \in I_k$ want $I_{k+1} \subset I_k \subset \mathcal{I}_k$, en dus $x \in I_{k+1} \cap \mathcal{I}_k$. Hieruit volgt dus dat $I_{k+1} \cap \mathcal{I}_k \neq \emptyset$, en dus $\mathcal{I}_{k+1}$ niet-leeg.

- *Conclusie:*

  $\mathcal{I}$ is niet-leeg voor $n = 0,\ n = 1$, en verder voor elke $n = k$ en zijn opvolgers. Hieruit volgt dus dat $\mathcal{I}$ leeg is voor elke $n \in \mathbb{N}$.

$\square$

Opgave 2

a) Elke begrensde rij heeft een convergente deelrij. We kijken dus eerst of de rij begrensd is, merk op:

$$-1 \leq \sin(\frac{\pi}{2}n) \leq 1 \iff |\sin(\frac{\pi}{2}n)| \leq 1$$

Hieruit volgt dus dat $\sin(\frac{\pi}{2}n)$, begrensd is.

Laten we nu een deelrij zoeken, bekijk $\sin(\frac{\pi}{2}n)$:

$$\sin(\frac{\pi}{2}n) = (0, 1, 0, -1, 0, 1, \dots)$$

Neem $\sin(n2\pi) = (0, 0, 0, \dots)$ dan hebben we een constante rij, en constante rijen zijn convergent.

b) Voor alle $M \in \mathbb{R}$ geldt dat er een $n > M$, volgens de archimedische eigenschap. Dit betekent dus dat de rij onbegrensd is en dus divergent.