

- 1 a) Zij $a, b, c \in \mathbb{Q}$ en \sim een equivalentie-relatie waarbij $a - b \in \mathbb{Z}$.

Bewijs dat \sim een equivalentie-relatie is:

- \sim is reflexief:
 $a - a = 0$ en $0 \in \mathbb{Z}$ en dus is \sim reflexief.
- \sim is symmetrisch:
Als $a - b \in \mathbb{Z}$ dan $-1(a - b) = b - a \in \mathbb{Z}$, en dus $b \sim a$ waaruit volgt dat \sim symmetrisch is.
- \sim is transitief:
 $a - b \in \mathbb{Z}$ en $b - c \in \mathbb{Z}$ dan $(a - b) + (b - c) \in \mathbb{Z}$ dus $a - \cancel{b} + \cancel{b} - c = a - c \in \mathbb{Z}$ hieruit volgt $a \sim c$ en dus is \sim een transitieve relatie.

Voor \sim geldt dat hij reflexief, symmetrisch en transitief is, en daarmee is \sim een equivalentie-relatie.

Als we nu gaan kijken naar \mathbb{Q}/\sim , dan kunnen we elke equivalentie-klasse \bar{q} kunnen schrijven als:

$$\bar{q} = \frac{1}{k} = \{(\frac{k(i) + 1}{k}) : i \in \mathbb{Z}\}$$

Hieruit volgt dus dat we oneindig equivalentie-classes hebben want we kunnen een bijectie opstellen vanuit $f : \mathbb{Z} \rightarrow (0, 1]$ met $f(k) = \frac{1}{k}$, en dus zijn het aantal equivalentie-classes aftelbaar oneindig. Daarnaast heeft elke equivalentie-klasse oneindig elementen omdat:

$$\frac{k(i) + 1}{k} = i + \frac{1}{k}$$

We kunnen dit zien als een strikt stijgende lijn, en dus moet elke equivalentie-klasse oneindig aantal elementen bevatten.

- b) Ik denk niet dat dit kan. Ik stel voor dat het wel kan, en probeer een tegenspraak te herleiden.

Bewijs. Stel dat er een Quotiëntruimte bestaat waarbij $|Q/\sim| = n$, en $|\bar{q}| = m$, waarbij $\bar{q} \in Q/\sim$. We weten dat (Q/\sim) partities vormen in \mathbb{Q} . Dit betekent dus dat \mathbb{Q} partities \bar{q} moet vormen waarbij elk element van \mathbb{Q} opgedeeld wordt, echter geldt voor $|\bar{q}| = m$ en $|Q/\sim| = n$, en dus zijn er hoogstens $n \cdot m$ aantal elementen. Dit luidt tot een tegenspraak want $n \cdot m < \infty = |\mathbb{Q}|$. \square

- 2 a) i. Bekijk of $X := \{0\} \cup \{1 - \frac{1}{n+2}\}_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ zowel een infimum en een supremum heeft.

- Bekijk of X een infimum heeft:

Bewijs. Claim dat het infimum i bestaat met $i = 0$. Allereerst moet 0 een ondergrens zijn. Bekijk

$$x \in \{0\} \cup \{1 - \frac{1}{n+2}\}$$

We weten dat de rechterkant van de vereniging minstens $x = \frac{1}{2}$, en hoogstens 1 benadert.

We zeggen dat 0 een ondergrens is als $0 \leq x$ voor alle $x \in X$. Dit komt overeen met het minimum voor X en dus is 0 een ondergrens, en een minimum van X .

Nu moeten we laten zien dat 0 de grootste ondergrens is. Dit is echter waar omdat 0 ook het minimum van X is en dus is het infimum $i = 0$. \square

- Bekijk of X een supremum heeft:

Bewijs. Claim dat het supremum s bestaat waarbij $s = 1$. Allereerst moet s een bovengrens zijn en dus moet voor elke $x \in X$ gelden dat $s \geq x$. Bekijk:

$$X = \{0\} \cup \{1 - \frac{1}{n+2}\}$$

De rechterkant van de vereniging geeft aan dat het 1 benadert, maar nooit 1 kan worden en dus $1 \geq x$ voor alle $x \in X$.

Nu moeten we nog laten zien dat $s = 1$ de kleinste bovengrens is. Neem $x = 1 - \frac{1}{n+2}$, dan moet gelden $\forall \epsilon > 0$ dat:

$$1 - \epsilon < x$$

Waarbij 1 de gesuggereerde bovengrens s is. substitueer $x = 1 - \frac{1}{n+2}$:

$$1 - \epsilon < 1 - \frac{1}{n+2}$$

Neem aan dat $\epsilon > \frac{1}{n+2}$ dan is er altijd een x waarvoor epsilon groter is als we n groot genoeg maken. Hieruit volgt dus dat $s = 1$ de kleinste bovengrens moet zijn. \square

ii. Bekijk of $Y := \{\frac{n+2}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$, een supremum en infimum heeft.

- Bekijk of Y een infimum heeft:

Bewijs. Claim dat het infimum $i = 1$. Dan moet voor alle $x \in Y$ gelden dat $x \geq i = 1$. Merk op dat $x \in \frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$, dan $1 + \frac{1}{n+1} > 1$, en dus is $i = 1$ een ondergrens.

Nu moeten we nog laten zien dat het de grootste ondergrens is. Voor alle $\epsilon > 0$, bestaat er een $x \in Y$ zodanig dat:

$$\epsilon + \underbrace{1}_{\text{Onze claim } i=1} > x$$

neem $x = 1 + \frac{1}{n+1}$, dan:

$$\epsilon + 1 > \frac{1}{n+1} + 1$$

We kunnen epsilon willekeurig klein maken en met name $\epsilon > \frac{1}{n+1}$, en dus volgt dat $i = 1$ inderdaad het infimum is. \square

- Bekijk of Y een supremum heeft:

Bewijs. Claim dat het supremum $s = 2$. Bekijk $x \in 1 + \frac{1}{n+1}$, we kunnen dit zien als een strikt dalende functie en dus geldt voor $n = 0$, dat dit de grootste waarde is voor $1 + \frac{1}{n+1}$. En dus $1 + \frac{1}{0+1} = 2$. Dit betekent dus dat 2 het maximum van Y is en dus automatisch het supremum. \square

3 Bekijk alle gevallen:

- *Geval 1:* $\sup(U) \in U$ en $\inf(V) \in V$ dan geldt dat $U \cap V = \{\sup(U)\}$
- *Geval 2:* $\sup(U) \notin U$ en $\inf(V) \in V$ dan geldt dat $U \cap V = \emptyset$
- *Geval 3:* $\sup(U) \in U$ en $\inf(V) \notin V$ dan geldt dat $U \cap V = \emptyset$

4 *Bewijs.* Stel dat s_1 en s_2 beide infima zijn. Dan geldt voor s_1 dat voor elke andere ondergrens (waaronder in het bijzonder s_2) $s_1 \geq s_2$, echter geldt voor s_2 ook dat het een infimum is en dus moet s_2 groter zijn dan alle andere ondergrenzen dus ook s_1 . Hieruit volgt dat $s_2 \geq s_1$. Als deze beide voorwaarden waar zijn moet $s_1 = s_2$. \square