Analyse I Huiswerk

Jasper Vos **Huiswerkset 3** 30 september 2025
Studentnr: *s2911159*

1) a) Voor $x \in (0, \infty)$ geldt:

$$f(x) = \frac{x}{1+\sqrt{x}}$$

De functie is goed gedefinieerd want $1 + \sqrt{x} \neq 0$ als $x \in (0, \infty)$, daarnaast geldt voor iedere x dat het een inwendig punt is.
Laten we nu f' berekenen op $(0, \infty)$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1+\sqrt{x}}\right) \\
&= \left(\frac{(1+\sqrt{x}) - x(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}})}{(1+\sqrt{x})^2}\right) && \text{(Gebruik de Quotiëntregel)} \\
&= \left(\frac{1+\sqrt{x} - \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}}{(1+\sqrt{x})^2}\right) && \text{(Vereenvoudig)} \\
&= \boxed{\left(\frac{1+\frac{1}{2}\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})^2}\right)} && \text{(Vereenvoudig)}
\end{aligned}$$

Dus $f'(x) = \left(\frac{1+\frac{1}{2}\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})^2}\right)$ voor alle $x \in (0, \infty)$.

b) Laten we eerst kijken of de functie continu is in $x = -2$.
Bekijk of de limieten op $x = -2$ overeenkomen:

- Voor als $x \leq -2$ dan $\lim_{x\uparrow -2}(\frac{1}{x+1}) = \frac{1}{-2+1} = \boxed{-1}$
- Voor als $x > -2$ dan $\lim_{x\downarrow -2}(x^2 + x) = (-2)^2 + (-2) = \boxed{2}$

En dus is f niet continu op $x = -2$, en dus zeker niet differentieerbaar.

c) Om te bepalen of f differentieerbaar is in het punt $x = 0$, moet allereest gelden dat f continu is op $x = 0$.
Bekijk eerst of $x = 0$ continu is:

- Voor als $x < 0$ dan $\lim_{x\uparrow 0}(x^2 + x) = \boxed{0}$
- Voor als $x \geq 0$ dan $\lim_{x\downarrow 0} \frac{x}{1+\sqrt{x}} = \frac{0}{1+\sqrt{0}} = \boxed{0}$

Dit betekent dat f continu is op $x = 0$, dus aan de voorwaarde continuiteit is voldaan. Nu kijken we of de afgeleiden gelijk zijn rond $x = 0$.

- Neem $x \geq 0$ hebben we vanuit onderdeel a) namelijk: $f'(x) = \left(\frac{1+\frac{1}{2}\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})^2}\right)$ en dus:

$$f'(0) = \left(\frac{1+\frac{1}{2}\sqrt{0}}{(1+\sqrt{0})^2}\right) = \boxed{1}$$

- Neem $x < 0$, dan moeten we eerst even de afgeleide berekenen: $f'(x) = \frac{d}{dx}(x^2+x) = 2x+1$. Bereken het limiet vanuit wat 0 benadert vanuit $x < 0$, dan:

$$\lim_{x\uparrow 0}(2x+1) = 2(0) + 1 = \boxed{1}$$

Hieruit volgt dus dat f differentieerbaar is op $x = 0$.

d) We hebben laten zien in vraag c) dat f differentieerbaar is op $x = 0$, en dan moet f per definitie continu zijn.

2) Gebruik de kettingregel meerdere keren:

$$\begin{aligned}
\phi'(x) &= \frac{d}{dx}\left(\sin\left(\sqrt{2+\cos(x^2+x+1)}\right)\right) \\
&= \cos\left(\sqrt{2+\cos(x^2+x+1)}\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{2+\cos(x^2+x+1)}}\cdot\big(-\sin(x^2+x+1)\big)\cdot(2x+1) \\
&= \boxed{\frac{(\cos(\sqrt{2+\cos(x^2+x+1)}))(-\sin(x^2+x+1))(2x+1)}{2\sqrt{2+\cos(x^2+x+1)}}}
\end{aligned}$$

3) a)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\tan^2(x)}{\cos(2x)} &= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}}{\cos(2x)} \quad \left(\text{Herschrijf } \tan^2(x) = \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}\right) \\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{\cos^2(x)-\sin^2(x)}{\cos^2(x)}}{\cos(2x)} \\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2(x)-\sin^2(x)}{\cos^2(x)\cos(2x)} \\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cancel{\cos^2(x)-\sin^2(x)}}{\cos^2(x)\cancel{(\cos^2(x)-\sin^2(x))}} \quad (\cos(2x) = \cos^2(x)-\sin^2(x)) \\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(\frac{\pi}{4})} = \boxed{2}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\frac{\theta-1+\sin(\theta^2-1)}{\theta^2-1} &= \lim_{x\to 1}\frac{\theta-1}{\theta^2-1} + \lim_{x\to 1}\frac{\sin(\theta^2-1)}{\theta^2-1} \quad (\text{Gebruik rekenregels limieten}) \\
&= \lim_{x\to 1}\frac{\cancel{\theta-1}}{\cancel{(\theta-1)}(\theta+1)} + \lim_{x\to 1}\frac{\sin(\theta^2-1)}{\theta^2-1} \quad (\text{Gebruik } (a^2-b^2) = (a-b)(a+b)) \\
&= \underbrace{\lim_{x\to 1}\frac{1}{\theta+1}}_{\text{Hieruit volgt } \frac{1}{2}} + \underbrace{\lim_{x\to 1}\frac{\sin(\theta^2-1)}{\theta^2-1}}_{\text{Standaardlimiet gelijk aan 1}} = \boxed{\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$