Analyse I Huiswerk

Jasper Vos
Studentnr: *s2911159*

Huiswerkset 2

13 september 2025

1. a)

b)

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x+4}+x &= \lim_{t\to\infty}\sqrt{t^2-t+4}-t \quad \text{(Vervang } x \text{ met } t \text{ waarbij } t=-x\text{)}\\
&= \lim_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{t^2-t+4}-t)(\sqrt{t^2-t+4}+t)}{\sqrt{t^2-t+4}+t} \quad \text{(Gebruik de worteltruc)}\\
&= \lim_{t\to\infty}\frac{\cancel{t^2}-t+4-\cancel{t^2}}{\sqrt{t^2-t+4}+t}\\
&= \lim_{t\to\infty}\frac{\frac{-t}{t}+\frac{4}{t}}{\sqrt{\frac{t^2}{t^2}-\frac{t}{t^2}+\frac{4}{t^2}}+\frac{t}{t}} \quad \text{(Deel de teller en noemer door } t\text{)}\\
&= \frac{-1+0}{\sqrt{1+0+0}+1} = \boxed{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-2x^2-4x}{(x^2-1)(x-2)} &= \lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-2x^2-4x}{x^3-2x^2-x+2} \quad \text{(Werk de haakjes weg)}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^3}{x^3}-\frac{2x^2}{x^3}-\frac{4x}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}-\frac{2x^2}{x^3}-\frac{x}{x^3}+\frac{2}{x^3}} \quad \text{(Deel de teller en noemer door } x^3\text{)}\\
&= \frac{2-0-0}{1-0-0+0} = \boxed{2}
\end{aligned}
$$

d) Als $f(x)$ continu is op $x=-1$ moeten zowel het linker als rechterlimiet gelijk aan elkaar zijn.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\uparrow-1}\sqrt{x^2+x+4}+x &= \sqrt{(-1)^2-1+4}-1\\
&= \sqrt{4}-1 = 1\\
&\Leftrightarrow\\
\lim_{x\downarrow-1}\frac{2x^3-2x^2-4x}{(x^2-1)(x-2)} &= \lim_{x\downarrow-1}\frac{2x(x^2-x-2)}{(x-1)(x+1)(x-2)}\\
&= \lim_{x\downarrow-1}\frac{2x\cancel{(x+1)(x-2)}}{(x-1)\cancel{(x+1)(x-2)}}\\
&= \frac{2(-1)}{(-1)-1} = 1
\end{aligned}
$$

Aangezien $\lim_{x\uparrow-1} f(x) = \lim_{x\downarrow-1} f(x)$ moet $f(x)$ continu zijn op het punt $x=-1$.

e) Gebruik wat we bij de vorige vraag hebben bereikt namelijk $\lim_{x\to1}\frac{2x}{x-1}$ en werk verder uit. Vul in voor $x\to1$ dan:

$$\lim_{x\to1}\frac{2x}{x-1} = \frac{2}{0}$$

Dit betekent dat we een verticale asymptoot hebben op $x=1$. Vul nu in voor $x\to2$ dan:

$$\lim_{x\to2}\frac{2x}{x-1} = \frac{4}{1} = 4$$

f) Gebruik weer het vorige resultaat dan: $\lim_{x\uparrow 2}\frac{2x}{x-1}=4 \Leftrightarrow \lim_{x\downarrow 2}\frac{2x}{x-1}=4$. Als we dus $c=4$ nemen is g continu op $x=2$. g is continu op $(-\infty,1)\cup(1,\infty)$ aangezien 1 geen element is op $(-\infty,1)\cup(1,\infty)$, en voor alle overige elementen het wel gedefinieerd is.

2. Zij $f(x)=x^2, g(x)=x^2\sin(\frac{1}{x}+50x^2-\cos(x))$ en $h(x)=-x^2$. We weten dat:

$$x^2 \geq x^2\sin(\frac{1}{x}+50x^2-\cos(x)) \geq -x^2$$

Aangezien $1 \geq \sin(\frac{1}{x}+50x^2-\cos(x)) \geq -1$. Hieruit volgt dat we de tussenwaardestelling kunnen gebruiken.

$$\lim_{x\to 0} x^2 = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0} -x^2 = 0$$

Omdat $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \geq \lim_{x\to 0} g(x) \geq \lim_{x\to 0} h(x) = 0$, moet $\lim_{x\to 0} g(x) = x^2\sin(\frac{1}{x}+50x^2-\cos(x)) = 0$.