Caleidoscoop Hoofdstuk 2

2 Volledige Inductie

2.1 Bewijs met volledige inductie

a) $\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 1} : 3^{2n+1} + 2^{n-1}$ is een 7-voud.

Bewijs. **Basis:** Voor $n = 1$:

$$3^{2(1)+1} + 2^{(1)-1} = 3^3 + 2^0 = 28 = 7 \cdot 4$$

Inductiestap: Stel de uitspraak is waar voor $n = k$, en bewijs voor $n = k + 1$. Gebruik $3^{2k-1} + 2^{k-1} = 7p$ voor een zeker $p \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}
3^{2(k+1)+1} + 2^{(k+1)-1} &= 3^2 \cdot 3^{2k+1} + 2 \cdot 2^{k-1} \\
&= 9 \cdot (7p - 2^{k-1}) + 2 \cdot 2^{k-1} \quad (\text{Vervang } 3^{2n+1} = 7p - 2^{n-1}) \\
&= 9 \cdot 7p - 9 \cdot 2^{k-1} + 2 \cdot 2^{k-1} \\
&= 9 \cdot 7p + 2^{k-1}(-9 + 2) \\
&= 7 \cdot 9p - 7 \cdot 2^{k-1} \\
&= 7(9p - 2^{k-1})
\end{aligned}$$

De uitspraak geldt dus ook voor $n = k + 1$ en daarmee is het bewijs voltooid. □

b) Iedere $n \in \mathbb{Z}_{>1}$ is deelbaar door een priemgetal.

Bewijs. **Basis:** Voor $n = 2$ dan $2|2$ en 2 is priem. **Inductiestap:** Stel de bewering geldt voor alle $2 \leq k < n$, en bewijs voor n. Als n priem is dan $p = n$, dus $p|n$. Als n niet priem dan nemen we $a, b \in \mathbb{Z}$ zodanig dat $n = ab \wedge 1 < a, b < n$. Echter aangezien $a < n$ geldt $\exists p \in \mathbb{P} : p|a$ en uit $a|n$ volgt $p|n$. □

c) Voor alle $x \in \mathbb{R}_{>1}$ geldt: $\forall n \in \mathbb{Z} : (1 + x)^n \geq (1 + nx)$.

Bewijs. **Basis:** Voor $n = 1$, dan $(1 + x)^1 = 1 + (1)x \implies 1 + x = 1 + x$. **Inductiestap:** Stel de uitspraak is waar voor $n = k$, bewijs voor $n = k + 1$. Vermedigvuldig beide kanten met $(1 + x)$ dan:

$$\begin{aligned}
(1 + x)^k(x + 1) &\geq (1 + kx)(x + 1) \\
&\geq (1 + x + kx^2 + kx) \\
&> (1 + kx + x) \\
&= (1 + (k + 1)x)
\end{aligned}$$

Hieruit volgt dus $(1 + x)^{k+1} \geq 1 + (k + 1)x$. En dat betekent dat de uitspraak juist is. □

d) $\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 4} : n! > 2^n$.

Bewijs. **Basis:** Voor $n = 4$, dan $4! > 2^4 \Leftrightarrow 24 > 16$ en dus klopt de uitspraak voor $n = 4$. **Inductiestap:** Stel de uitspraak is waar voor $n = k$ en bewijs voor $n = k + 1$:

$$(k + 1)! > 2^{k+1}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(k + 1)(k)! > 2 \cdot 2^k$$

Volgens de inductie-hypothese is $k! > 2^k$ en aangezien $k+1 \geq 5 > 2$ is $(k+1)(k)! > 2 \cdot 2^k$ en klopt de uitspraak voor alle $n \geq 4$. □

e) $\forall n \in \mathbb{Z}_{>0} : \sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$. **Basis:** Voor $n = 1$, dan $\sum_{i=1}^{1}(2i-1) = 1 \Leftrightarrow 1^2 = 1$. De uitspraak klopt voor $n = 1$. **Inductiestap:** Stel de uitspraak is waar voor $n = k$ en bewijs voor $n = k+1$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1}(2i-1) &= \sum_{i=1}^{k}(2i-1) + 2(k+1) - 1 \\
&= k^2 + 2k + 1 \\
&= (k+1)^2
\end{aligned}$$

De uitspraak is dus waar voor $k+1$ en hiermee geldt de uitspraak voor alle $n > 0$.

2.2