Caleidoscoop

Jasper Vos
Studentnr: *s2911159*

Inleverset A

4 oktober 2025

---

1 a) Zij $a, b, c \in \mathbb{Q}$ en $\sim$ een equivalentie-relatie waarbij $a - b \in \mathbb{Z}$.
Bewijs dat $\sim$ een equivalentie-relatie is:

- $\sim$ *is reflexief:*
$a - a = 0$ en $0 \in \mathbb{Z}$ en dus is $\sim$ reflexief.
- $\sim$ *is symmetrisch:*
Als $a - b \in \mathbb{Z}$ dan $-1(a - b) = b - a \in \mathbb{Z}$, en dus $b \sim a$ waaruit volgt dat $\sim$ symmetrisch is.
- $\sim$ *is transitief:*
$a - b \in \mathbb{Z}$ en $b - c \in \mathbb{Z}$ dan $(a - b) + (b - c) \in \mathbb{Z}$ dus $a - \cancel{b} + \cancel{b} - c = a - c \in \mathbb{Z}$ hieruit volgt $a \sim c$ en dus is $\sim$ een transitieve relatie.

Voor $\sim$ geldt dat hij reflexief, symmetrisch en transitief is, en daarmee is $\sim$ een equivalentie-relatie.
Als we nu gaan kijken naar $\mathbb{Q}/_\sim$, dan kunnen we elke equivalentie-klasse $\overline{q}$ kunnen schrijven als:

$$\overline{q} = \overline{\frac{1}{k}} = \{(\frac{k(i) + 1}{k}) : i \in \mathbb{Z}\}$$

Hieruit volgt dus dat we oneindig equivalentie-klassen hebben want we kunnen een bijectie opstellen vanuit $f : \mathbb{Z} \to (0, 1]$ met $f(k) = \frac{1}{k}$, en dus zijn het aantal equivalentie-klassen aftelbaar oneindig. Daarnaast heeft elke equivalentie-klasse oneindig elementen omdat:

$$\frac{k(i) + 1}{k} = i + \frac{1}{k}$$

We kunnen dit zien als een strikt stijgende lijn, en dus moet elke equivalentie-klasse oneindig aantal elementen bevatten.

b) Ik denk niet dat dit kan. Ik stel voor dat het wel kan, en probeer een tegenspraak te herleiden.

Bewijs. Stel dat er een Quotiëntruimte bestaat waarbij $|Q/_\sim| = n$, en $|\overline{q}| = m$, waarbij $\overline{q} \in Q/_\sim$, We weten dat $(Q/_\sim)$ partities vormen in $\mathbb{Q}$. Dit betekent dus dat $\mathbb{Q}$ partities $\overline{q}$ moet vormen waarbij elk element van $\mathbb{Q}$ opgedeeld wordt, echter geldt voor $|\overline{q}| = m$ en $|Q/_\sim| = n$, en dus zijn er hoogstens $n \cdot m$ aantal elementen. Dit luidt tot een tegenspraak want $n \cdot m < \infty = |\mathbb{Q}|$. $\square$

2