

## Caleidoscoop Hoofdstuk 3

---

### 3 Equivalentierelaties

#### Opgave 3.1

a) Stel de volgende equivalentierelatie  $\mathcal{R}$  op, waarbij  $a \sim b \iff a = b$ .

1 *Reflexief*: Bekijk  $a\mathcal{R}a \implies a = a$

2 *Symmetrie*: Bekijk  $(a\mathcal{R}b \implies b\mathcal{R}a) \implies a = b \implies b = a$

3 *Transitiviteit*: Bekijk  $((a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}c) \implies a\mathcal{R}c) \implies (a = b \wedge b = c) \implies a = c$

b) Neem de volgende equivalentierelatie  $\mathcal{R}$  op, waarbij  $a \sim b \iff a \bmod 42 = b \bmod 42$ .

1 *Reflexief*:  $a \bmod 42 = a \bmod 42$

2 *Symmetrie*:  $(a \bmod 42 = b \bmod 42) \implies b \bmod 42 = a \bmod 42$

3 *Transitiviteit*:  $(a \bmod 42 = b \bmod 42 \wedge b \bmod 42 = c \bmod 42) \iff a \bmod 42 = c \bmod 42$

c) *Bewijs. X Aanname*: Ik stel dat  $A$  een verzameling is waarbij  $A \neq \emptyset$ , en  $A/\sim = \emptyset$ . Aangezien  $A \neq \emptyset$  bestaat er een  $a \in A$ , maar als we een equivalentierelatie hebben, dan volgt vanuit reflexiviteit dat  $a \sim a$ . Als  $a \sim a$  dan moet er een equivalentieklasse  $\bar{a} = \{b \in A : b \sim a\}$  bestaan waarbij  $a \in \bar{a}$ , maar  $\bar{a} \in A/\sim$ . Dit is een tegenspraak want we stelde dat  $A/\sim = \emptyset$ , en dus kan  $A/\sim$  niet leeg zijn.  $\square$

#### Opgave 3.2

a)  $X$  wordt gepartitioneerd in  $X/\sim$ , omdat  $|X/\sim| = \infty =$  zit in elke equivalentieklasse minstens 1 representant die in  $X$  moet liggen. Dit betekent dus dat  $|X| \geq |X/\sim| = \infty$ .

b) • *Geval 1*:  $|X/\sim| = n \wedge |X| = \infty$ :

Neem  $X = \mathbb{Z}$  met  $x \sim y$  als  $x \equiv y \bmod n$ , dan heeft  $|X/\sim|$  precies  $n$  elementen namelijk:  $\bar{0}, \bar{1}, \dots, \bar{n-1}$ . Dit is een tegenspraak want we stelde dat  $|X/\sim| = \infty$ , en  $|X/\sim| = n$ .