

Opgave 1

a) We hebben eerst een aantal hulpstellingen nodig.

Lemma 1 (Schrapwet). *Zij $x, y, z \in \mathbb{Z}$ dan geldt $x + z = y + z \implies x = y$.*

Bewijs. Neem $x, y, z \in \mathbb{Z}$ dan:

$$\begin{aligned}x + z &= y + z \\x + z + (-z) &= y + z + (-z) \quad (\text{Additieve inverse}) \\x + 0 &= y + 0 \quad (a + (-a) = 0) \\x &= y \quad (0 \text{ is neutraal in optelling})\end{aligned}$$

□

Lemma 2 (Unieke inverse). $\forall x \in \mathbb{Z} \exists! y \in \mathbb{Z}$ zodanig dat $x + y = 0$.

Bewijs. Neem $x, y, y' \in \mathbb{Z}$ en laat $x + y = 0$ en $x + y' = 0$ dan:

$$\begin{aligned}x + y &= x + y' \\y &= y' \quad (\text{zie Lemma 1})\end{aligned}$$

Hieruit volgt dus dat er een unieke inverse is.

□

Lemma 3 (vermenigvuldiging met 0). $\forall x \in \mathbb{Z} \ x(0) = 0$.

Bewijs. Neem $x \in \mathbb{Z}$ dan:

$$\begin{aligned}x(0) &= x(0) + 0 \quad (0 \text{ is neutraal in optelling}) \\&= x(0) + (x + (-x)) \quad (\text{Merk op } x + (-x) = 0) \\&= x(0) + x + (-x) \quad (\text{Associativiteit in } \mathbb{Z}) \\&= x(0 + 1) + (-x) \quad (\text{Distributieve eigenschap in } \mathbb{Z}) \\&= x(1) + (-x) \quad (0 \text{ is neutraal in optelling}) \\&= x + (-x) \quad (1 \text{ is neutraal in vermenigvuldiging}) \\&= 0 \quad (\text{Merk op } x + (-x) = 0)\end{aligned}$$

□

Nu beginnen we het bewijs waarom $(-1)a = -a$:

$$\begin{aligned}(-1)a &= 0 + (-1)a \quad (0 \text{ is neutraal in optelling}) \\&= a + (-a) + (-1)a \quad (a + (-a) = 0 \text{ zie Lemma 2}) \\&= a + (-1)a + (-a) \quad (\text{Optelling is commutatief}) \\&= (1)a + (-1)a + (-a) \quad (1 \text{ is neutraal in vermenigvuldiging}) \\&= (1 + (-1))a + (-a) \quad (\text{Distributieve eigenschap}) \\&= (0)a + (-a) \quad (\text{Merk op } 1 + (-1) = 0) \\&= 0 + (-a) \quad (\text{zie Lemma 3}) \\&= -a\end{aligned}$$

- b) We moeten eigenlijk laten zien wat het inverse is van 0. Gebruik Lemma 2 waarbij we zeggen dat elk element een unieke inverse heeft. Stel voor $0 + a = 0$ dan:

$$\begin{aligned}0 + a &= 0 \\ a &= 0 \quad (0 \text{ is neutraal in optelling})\end{aligned}$$

Hieruit volgt dus dat 0 een inverse heeft namelijk zichzelf, en dus $0 = -0$.

- c) Bewijs met het ongerijmde.

Stel $0 = 1$ en gebruik het feit dat elk element een unieke inverse heeft (zie Lemma 2). Bekijk de linker en rechterkant van de vergelijking en bepaal hun inverse.

Voor 0:

$$0 + 0 = 0 \text{ en dus is } 0 \text{ de inverse.}$$

Voor 1:

$$1 + (-1) = 0 \text{ en dus is } (-1) \text{ de inverse.}$$

Echter omdat elk element in \mathbb{Z} een unieke inverse heeft is dit een tegenspraak, en dus $1 \neq 0$.

Opgave 2

a) We moeten laten zien dat \sim_n reflexief, symmetrisch en transitief is.

1. *Reflexiviteit*: Te bewijzen $x \sim_n x$.

Zij $x \sim_n x$ dan:

$$x \sim_n x \iff (x + x = n + 1) \vee (x = x)$$

Voor alle x geldt dat $x = x$ dus is \sim_n reflexief.

2. *Symmetrie*: Te bewijzen $x \sim_n y$ dan $y \sim_n x$.

Beredeneer vanuit $x \sim_n y$ dan:

$$\begin{aligned} x \sim_n y &\iff x + y = n + 1 \vee x = y \\ &\iff y + x = n + 1 \vee y = x \quad (\text{Gebruik commutativiteit}) \\ &\iff y \sim_n x \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat \sim_n symmetrisch is.

3. *Transitiviteit*: Te bewijzen als $x \sim_n y$ en $y \sim_n z$ dan $x \sim_n z$.

$$x \sim_n y \iff (x + y = n + 1) \vee (x = y)$$

en

$$y \sim_n z \iff (y + z = n + 1) \vee (y = z)$$

Gebruik substitutie

$$\begin{aligned} &(x + y = y + z) \vee (x = y = z) \\ &(x + y = y + z) \vee (x = z) \quad (\text{Gebruik Schrapwet}) \\ &(x + z) \vee (x = z) \iff x \sim_n z \end{aligned}$$

Dan volgt dat \sim_n transitief is.

Vanwege reflexiviteit, symmetrie en transitiviteit geldt dat \sim_n een equivalentie-relatie is.

b) Neem $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, en bekijk $[k]$. k is equivalent met k omdat $k = k$, dus $k \in [k]$. k is ook equivalent met k' waarbij $k' = (n + 1) - k$, en dus:

$$[k] = \{k, (n + 1) - k\}$$

De verzameling $\{1, 2, \dots, n\}$ wordt gedeeld onder zijn equivalentie \sim_n . Aangezien $||[k]|| = 2$ betekent het dat we n elementen hebben die verdeeld worden in $\frac{n}{2}$ equivalentie-klassen.

c) *Bewijs*. Schrijf de som twee keer in tegengestelde volgorde:

$$\begin{array}{ccc} 1 + 2 & + 3 + \dots & + n \\ n + (n - 1) & + (n - 2) + \dots & + 1 \end{array} \quad (\text{Zelfde som alleen omgedraaid})$$

Tel beide sommen op dan:

$$\underbrace{(n + 1) + (n + 1) + \dots + (n + 1)}_{n \text{ termen}} = n(n + 1)$$

Delen door twee omdat we beide sommen opgeteld hebben, dus:

$$\boxed{\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n + 1)}{2}}$$

□