

- 1 a) Zij  $a, b, c \in \mathbb{Q}$  en  $\sim$  een equivalentie-relatie waarbij  $a - b \in \mathbb{Z}$ .

Bewijs dat  $\sim$  een equivalentie-relatie is:

- $\sim$  is reflexief:  
 $a - a = 0$  en  $0 \in \mathbb{Z}$  en dus is  $\sim$  reflexief.
- $\sim$  is symmetrisch:  
Als  $a - b \in \mathbb{Z}$  dan  $-1(a - b) = b - a \in \mathbb{Z}$ , en dus  $b \sim a$  waaruit volgt dat  $\sim$  symmetrisch is.
- $\sim$  is transitief:  
 $a - b \in \mathbb{Z}$  en  $b - c \in \mathbb{Z}$  dan  $(a - b) + (b - c) \in \mathbb{Z}$  dus  $a - \cancel{b} + \cancel{b} - c = a - c \in \mathbb{Z}$  hieruit volgt  $a \sim c$  en dus is  $\sim$  een transitieve relatie.

Voor  $\sim$  geldt dat hij reflexief, symmetrisch en transitief is, en daarmee is  $\sim$  een equivalentie-relatie.

Als we nu gaan kijken naar  $\mathbb{Q}/\sim$ , dan kunnen we elke equivalentie-klasse  $\bar{q}$  kunnen schrijven als:

$$\bar{q} = \frac{1}{k} = \{(\frac{k(i) + 1}{k}) : i \in \mathbb{Z}\}$$

Hieruit volgt dus dat we oneindig equivalentie-classes hebben want we kunnen een bijectie opstellen vanuit  $f : \mathbb{Z} \rightarrow (0, 1]$  met  $f(k) = \frac{1}{k}$ , en dus zijn het aantal equivalentie-classes aftelbaar oneindig. Daarnaast heeft elke equivalentie-klasse oneindig elementen omdat:

$$\frac{k(i) + 1}{k} = i + \frac{1}{k}$$

We kunnen dit zien als een strikt stijgende lijn, en dus moet elke equivalentie-klasse oneindig aantal elementen bevatten.

- b) Ik denk niet dat dit kan. Ik stel voor dat het wel kan, en probeer een tegenspraak te herleiden.

*Bewijs.* Stel dat er een Quotiëntruimte bestaat waarbij  $|Q/\sim| = n$ , en  $|\bar{q}| = m$ , waarbij  $\bar{q} \in Q/\sim$ . We weten dat  $(Q/\sim)$  partities vormen in  $\mathbb{Q}$ . Dit betekent dus dat  $\mathbb{Q}$  partities  $\bar{q}$  moet vormen waarbij elk element van  $\mathbb{Q}$  opgedeeld wordt, echter geldt voor  $|\bar{q}| = m$  en  $|Q/\sim| = n$ , en dus zijn er hoogstens  $n \cdot m$  aantal elementen. Dit luidt tot een tegenspraak want  $n \cdot m < \infty = |\mathbb{Q}|$ .  $\square$

- 2 a) i. Bekijk of  $X := \{0\} \cup \{1 - \frac{1}{n+2}\}_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$  zowel een infimum en een supremum heeft.

- Bekijk of  $X$  een infimum heeft:

*Bewijs.* Claim dat het infimum  $i$  bestaat met  $i = 0$ . Allereerst moet  $0$  een ondergrens zijn. Bekijk

$$x \in \{0\} \cup \{1 - \frac{1}{n+2}\}$$

We weten dat de rechterkant van de vereniging minstens  $x = \frac{1}{2}$ , en hoogstens  $1$  benadert.

We zeggen dat  $0$  een ondergrens is als  $0 \leq x$  voor alle  $x \in X$ . Dit komt overeen met het minimum voor  $X$  en dus is  $0$  een ondergrens, en een minimum van  $X$ .

Nu moeten we laten zien dat  $0$  de grootste ondergrens is. Dit is echter waar omdat  $0$  ook het minimum van  $X$  is en dus is het infimum  $i = 0$ .  $\square$

- Bekijk of  $X$  een supremum heeft:

*Bewijs.* Claim dat het supremum  $s$  bestaat waarbij  $s = 1$ . Allereerst moet  $s$  een bovengrens zijn en dus moet voor elke  $x \in X$  gelden dat  $s \geq x$ . Bekijk:

$$X = \{0\} \cup \{1 - \frac{1}{n+2}\}$$

De rechterkant van de vereniging geeft aan dat het 1 benadert, maar nooit 1 kan worden en dus  $1 \geq x$  voor alle  $x \in X$ .

Nu moeten we nog laten zien dat  $s = 1$  de kleinste bovengrens is. Neem  $x = 1 - \frac{1}{n+2}$ , dan moet gelden  $\forall \epsilon > 0$  dat:

$$1 - \epsilon < x$$

Waarbij 1 de gesuggereerde bovengrens  $s$  is. substitueer  $x = 1 - \frac{1}{n+2}$ :

$$1 - \epsilon < 1 - \frac{1}{n+2}$$

Neem aan dat  $\epsilon > \frac{1}{n+2}$  dan is er altijd een  $x$  waarvoor epsilon groter is als we  $n$  groot genoeg maken. Hieruit volgt dus dat  $s = 1$  de kleinste bovengrens moet zijn.  $\square$

ii. Bekijk of  $Y := \{\frac{n+2}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$ , een supremum en infimum heeft.

- Bekijk of  $Y$  een infimum heeft:

*Bewijs.* Claim dat het infimum  $i = 1$ . Dan moet voor alle  $x \in Y$  gelden dat  $x \geq i = 1$ . Merk op dat  $x \in \frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$ , dan  $1 + \frac{1}{n+1} > 1$ , en dus is  $i = 1$  een ondergrens.

Nu moeten we nog laten zien dat het de grootste ondergrens is. Voor alle  $\epsilon > 0$ , bestaat er een  $x \in Y$  zodanig dat:

$$\epsilon + \underbrace{1}_{\text{Onze claim } i=1} > x$$

neem  $x = 1 + \frac{1}{n+1}$ , dan:

$$\epsilon + 1 > \frac{1}{n+1} + 1$$

We kunnen epsilon willekeurig klein en met name  $\epsilon > \frac{1}{n+1}$ , en dus volgt hieruit dat  $i = 1$  inderdaad het infimum is.  $\square$

- Bekijk of  $Y$  een