Lineaire Algebra Huiswerk

Jasper Vos
Studentnr: *s2911159*

Huiswerkset 6

14 oktober 2025

Opgave 5.4.3

Bepaal de matrix M waarvoor $f_M : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ reflectie is in het vlak $x + 2y - z = 0$.
Het vlak heeft normale vector $a = (1, 2, -1)$.

Normale vector normaliseren

Bereken lengte:

$$\langle a, a \rangle = 1^2 + 2^2 + (-1)^2 = 6$$

Dus $\|a\| = \sqrt{6}$ en:

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, -1)$$

Reflectie

In matrixvorm (hier ben ik niet helemaal zeker, maar volgens mij klopt dit):

$$M = I_3 - 2\hat{a}\hat{a}^\top$$

Berekenen van $\hat{a}\hat{a}^\top$

$$\hat{a}\hat{a}^\top = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrix M bepalen

$$\begin{aligned} M &= I_3 - 2\hat{a}\hat{a}^\top \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{6}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Element voor element:

$$\begin{aligned} &M_{11} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}, \quad M_{12} = 0 - \frac{2}{3} = -\frac{2}{3}, \quad M_{13} = 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \\ &M_{21} = 0 - \frac{2}{3} = -\frac{2}{3}, \quad M_{22} = 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}, \quad M_{23} = 0 + \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \\ &M_{31} = 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}, \quad M_{32} = 0 + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}, \quad M_{33} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

en dus:

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}}$$

Opgave 5.5.4

Rotatiematrix $A_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$
Te bewijzen:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

Bewijs. Als je eerst over hoek β roteert en daarna over hoek α, krijg je een rotatie over $\alpha+\beta$. In matrixvorm betekent dit dat $A_\alpha \cdot A_\beta = A_{\alpha+\beta}$ moet gelden.
Bereken $A_\alpha \cdot A_\beta$:

$$A_\alpha \cdot A_\beta = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

Bereken de elementen:
(1,1): $\cos\alpha\cos\beta + (-\sin\alpha)(\sin\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
(1,2): $\cos\alpha(-\sin\beta) + (-\sin\alpha)(\cos\beta) = -\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta$
Dit kan ik ook schrijven als: $-(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)$
(2,1): $\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
(2,2): $\sin\alpha(-\sin\beta) + \cos\alpha\cos\beta = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
Dus:
$$A_\alpha \cdot A_\beta = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \end{pmatrix}$$

We weten dat dit gelijk moet zijn aan:

$$A_{\alpha+\beta} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$$

Door de elementen te vergelijken krijgen we:
Uit (1,1): $\boxed{\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$
Uit (2,1): $\boxed{\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}$

Element (1,2) en (2,2) geven hetzelfde resultaat, dus onze berekening klopt.

□