

# Lineaire Algebra

Jasper Vos  
Studentnr: s2911159

## Huiswerkset 9

11 november 2025

---

### Opgave 8.1.4(1)

We hebben  $\text{rk}(g \circ f) = \dim g(f[U]) \leq \dim(f[U]) = \text{rk}(f)$ . Als  $g$  injectief is, dan verandert  $g$  de dimensie van  $f[U]$  niet, en dus:

$$\boxed{\text{rk}(g \circ f) = \text{rk}(f)}$$

#### Voorbeeld

Neem de volgende vectorruimtes:  $U = \mathbb{R}$ ,  $V = \mathbb{R}^2$  en tot slot  $W = \mathbb{R}$ .

Stel de afbeeldingen op  $f : U \rightarrow V$  met  $f(x) = (x, 0)$ , en  $g : V \rightarrow W$  waarbij  $g(x, y) = x$ .  $g$  is niet injectief omdat:

$$g(0, 1) = 0 = g(0, 2)$$

Het beeld van  $f$  heeft als dimensie de  $x$ -as want het tweede component is constant 0, en dus  $\dim(f) = 1$ . Het beeld van  $g \circ f$  geeft ook de  $x$ -as want  $g \circ f = x$ , en dus  $\dim(g \circ f) = 1$ .

Dit betekent dus dat:

$$\boxed{\text{rk}(g \circ f) = \text{rk}(f) \text{ waarbij } g \text{ niet injectief is}}$$

### Opgave 8.1.4(2)

We hebben  $\text{rk}(g \circ f) \leq \text{rk}(g)$ , als  $f$  surjectief dan  $f[U] = V$ , en dus:

$$\boxed{g[f[U]] = g[V], \text{ en dus } \text{rk}(g \circ f) = \text{rk}(g)}$$

#### Voorbeeld

Neem de volgende vectorruimtes:  $U = \mathbb{R}$ ,  $V = \mathbb{R}^2$  en  $W = \mathbb{R}$ . Stel de afbeeldingen op:

$$f : U \rightarrow V \text{ met } f(x) = (x, x) \text{ en } g : V \rightarrow W \text{ met } g(x, y) = x + y$$

Merk op dat  $f$  niet surjectief want  $(1, 0)$  wordt niet bereikt in  $V$  vanuit  $f$ . Het beeld van  $g$  geeft  $\dim(g) = 1$ , en voor  $g \circ f(x) = g(x, x) = x + x = 2x$  en dus  $\dim(\text{rk}(g \circ f)) = 1$ . Dit betekent dus:

$$\boxed{\text{rk}(g \circ f) = \text{rk}(g) \text{ waarbij } f \text{ niet surjectief is}}$$

## Opgave 8.3.2

Gegeven is  $F = \mathbb{F}_2$ , dus alle bewerkingen gebeuren modulo 2.

De deelruimte  $U \subseteq \mathbb{F}_2^4$  is opgespannen door:

$$u_1 = (1, 1, 1, 1), u_2 = (1, 1, 0, 0), \text{ en } u_3 = (0, 1, 1, 0)$$

Een willekeurig element uit  $U$  is dus te schrijven als:  $(a + b, a + b + c, a + c, a)$  met  $a, b, c \in \mathbb{F}_2$ .

De deelruimte  $V \subseteq \mathbb{F}_2^4$  is opgespannen door:  $v_1 = (1, 1, 1, 0), v_2 = (0, 1, 1, 1)$ . Een willekeurig element uit  $V$  is dus:

$$(p, p + q, p + q, q) \text{ met } p, q \in \mathbb{F}_2.$$

We zoeken  $U \cap V$ , dus we stellen:

$$(a + b, a + b + c, a + c, a) = (p, p + q, p + q, q)$$

Dit geeft het stelsel:

$$\begin{aligned} a + b &= p \\ a + b + c &= p + q \\ a + c &= p + q \\ a &= q \end{aligned}$$

Invullen  $a = q$  in de derde vergelijking:  $q + c = p + q \implies c = p$ , dan wordt de eerste vergelijking:

$$a + b = p \implies q + b = p \implies b = p + q$$

Invullen in de tweede vergelijking:

$$a + b + c = p + q \implies q + (p + q) + p = p + q \implies 0 = 0$$

Nu geldt  $p = q$ , en dus:  $p = q = a = c$  en  $b = 0$ . Dit levert maar één niet-nulvector op:  $(1, 0, 0, 1)$

$$U \cap V = \text{span}\{(1, 0, 0, 1)\}$$

$$U \cap V = \{0, (1, 0, 0, 1)\} = \text{span}\{(1, 0, 0, 1)\}$$