Wiskundige Structuren Huiswerk

Jasper Vos **Huiswerkset 1** 15 september 2025
Studentnr: *s2911159*

Opgave 1

a) *Bewijs.* Laten we aannemen dat de vergelijking niet klopt door te stellen:

$$(A \cap B) \cap (A \setminus B) \neq \emptyset$$

Neem een $x \in (A \cap B) \cap (A \setminus B)$ en werk verder uit:

$$\begin{aligned} x \in (A \cap B) \cap (A \setminus B) &\implies (x \in A \land x \in B) \land (x \in A \land x \notin B) \\ &\implies x \in A \land (x \in B \land x \notin B) \\ &\implies x \in A \land x \in \emptyset \\ &\implies A \cap \emptyset = \emptyset \end{aligned}$$

Dit is een tegenspraak dus $(A \cap B) \cap (A \setminus B) = \emptyset$. □

b) *Bewijs.* Net zoals bij de vorige vraag stellen we dat de vegelijking niet klopt:

$$(A \cap B) \cup (A \setminus B) \neq A$$

$$\begin{aligned} x \in (A \cap B) \cup (A \setminus B) &\implies (x \in A \land x \in B) \lor (x \in A \land x \notin B) \\ &\implies x \in A \land (x \in B \lor x \notin B) \quad (p \land q) \lor (p \land r) \Leftrightarrow p \land (q \lor r) \\ &\implies x \in A \land x \in U \\ &\implies A \cap U = A \end{aligned}$$

Dit is een tegenspraak dus $(A \cap B) \cup (A \setminus B) = A$. □

Opgave 2

a) We kijken eerst of f injectief is:

Bewijs. Voor alle $n_1, n_2 \in A : f(n_1) = f(n_2) \implies (n_1) = (n_2)$, en dus:

$$\begin{aligned} (n_1)^2 &= (n_2)^2 \\ \sqrt{(n_1)^2} &= \sqrt{(n_2)^2} \\ n_1 &= n_2 \end{aligned}$$

Aangezien $n_1, n_2 \geq 0$ is er een unieke n voor een bepaalde $m \in B$, en dus is f injectief. □

Nu gaan we kijken of f surjectief is:

Bewijs. $\forall m \in B \; \exists n \in A$ zodanig dat $f(n) = m$.

$$\begin{aligned} f(n) &= m \\ n^2 &= m \\ n &= \sqrt{m} \end{aligned}$$

Hieruit volgt $f(\sqrt{m}) = (\sqrt{m})^2 = m$, en aangezien elk element m dus bereikt kan worden voor een bepaalde x is f surjectief. □

f is dus zowel injectief als surjectief.

b) *Bewijs.* Eerst bewijzen we of g injectief is:

$$\forall x_1, x_2 \in A : g(x_1) = g(x_2) \implies x_1 = x_2$$

Hieruit volgt:

$$\begin{aligned} g(x_1) &= g(x_2) \\ (x_1)^3 + 5 &= (x_2)^3 + 5 \\ (x_1)^3 &= (x_2)^3 \\ x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

g is dus injectief, nu bewijzen we surjectiviteit:

$$\forall y \in B\ \exists x \in A : g(x) = y$$

Dus:

$$\begin{aligned} g(x) &= y \\ x^3 + 5 &= y \\ x^3 &= y - 5 \\ x &= \sqrt[3]{y-5} \end{aligned}$$

Nu gaan we het controleren:

$$g(\sqrt[3]{y-5}) = (\sqrt[3]{y-5})^3 + 5 = y - 5 + 5 = y$$

Dus g is ook surjectief, en aangezien g zowel injectief als surjectief is geldt dat g een bijectie is en een inverse g^{-1} heeft. De inverse hebben we al voor een deel afgeleid uit het bewijs voor surjectiviteit:

$$g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-5}$$

Tot slot bepalen we $g^{-1}(\{0,1\})$:

$$\begin{aligned} x^3 + 5 = 0 \Leftrightarrow (-\sqrt[3]{5})^3 + 5 = 0 \quad &(\text{Dus } x = -\sqrt[3]{5}) \\ x^3 + 5 = 1 \Leftrightarrow (-\sqrt[3]{4})^3 + 5 = 1 \quad &(\text{Dus } x = -\sqrt[3]{4}) \end{aligned}$$

En dus $g^{-1}(\{0,1\}) = \{-\sqrt[3]{5}, -\sqrt[3]{4}\}$. $\square$