

Opgave 8.1.4(1)

We hebben $\text{rk}(g \circ f) = \dim g(f[U]) \leq \dim(f[U]) = \text{rk}(f)$. Als g injectief is, dan verandert g de dimensie van $f[U]$ niet, en dus:

$$\text{rk}(g \circ f) = \text{rk}(f)$$

Voorbeeld

Neem de volgende vectorruimtes: $U = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$ en tot slot $W = \mathbb{R}$.

Stel de afbeeldingen op $f : U \rightarrow V$ met $f(x) = (x, 0)$, en $g : V \rightarrow W$ waarbij $g(x, y) = x$. g is niet injectief omdat:

$$g(0, 1) = 0 = g(0, 2)$$

Het beeld van f heeft als dimensie de x -as want het tweede component is constant 0, en dus $\dim(f) = 1$. Het beeld van $g \circ f$ geeft ook de x -as want $g \circ f = x$, en dus $\dim(g \circ f) = 1$.

Dit betekent dus dat:

$$\text{rk}(g \circ f) = \text{rk}(f) \text{ waarbij } g \text{ niet injectief is}$$

Opgave 8.1.4(2)

We hebben $\text{rk}(g \circ f) \leq \text{rk}(g)$, als f surjectief dan $f[U] = V$, en dus:

$$g[f[U]] = g[V], \text{ en dus } \text{rk}(g \circ f) = \text{rk}(g)$$

Voorbeeld

Neem de volgende vectorruimtes: $U = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$ en $W = \mathbb{R}$. Stel de afbeeldingen op:

$$f : U \rightarrow V \text{ met } f(x) = (x, x) \text{ en } g : V \rightarrow W \text{ met } g(x, y) = x + y$$

Merk op dat f niet surjectief want $(1, 0)$ wordt niet bereikt in V vanuit f . Het beeld van g geeft $\dim(g) = 1$, en voor $g \circ f(x) = g(x, x) = x + x = 2x$ en dus $\dim(\text{rk}(g \circ f)) = 1$. Dit betekent dus:

$$\text{rk}(g \circ f) = \text{rk}(g) \text{ waarbij } f \text{ niet surjectief is}$$

Opgave 8.3.2

Gegeven is $F = \mathbb{F}_2$, dus alle bewerkingen gebeuren modulo 2.

De deelruimte $U \subseteq \mathbb{F}_2^4$ is opgespannen door:

$$u_1 = (1, 1, 1, 1), \quad u_2 = (1, 1, 0, 0), \quad \text{en} \quad u_3 = (0, 1, 1, 0)$$

Een willekeurig element uit U is dus te schrijven als: $(a + b, a + b + c, a + c, a)$ met $a, b, c \in \mathbb{F}_2$.

De deelruimte $V \subseteq \mathbb{F}_2^4$ is opgespannen door: $v_1 = (1, 1, 1, 0)$, $v_2 = (0, 1, 1, 1)$ Een willekeurig element uit V is dus:

$$(p, p + q, p + q, q) \quad \text{met} \quad p, q \in \mathbb{F}_2.$$

We zoeken $U \cap V$, dus we stellen:

$$(a + b, a + b + c, a + c, a) = (p, p + q, p + q, q)$$

Dit geeft het stelsel:

$$\begin{aligned} a + b &= p \\ a + b + c &= p + q \\ a + c &= p + q \\ a &= q \end{aligned}$$

Invullen $a = q$ in de derde vergelijking: $q + c = p + q \implies c = p$, dan wordt de eerste vergelijking:

$$a + b = p \implies q + b = p \implies b = p + q$$

Invullen in de tweede vergelijking:

$$a + b + c = p + q \implies q + (p + q) + p = p + q \implies 0 = 0$$

Nu geldt $p = q$, en dus: $p = q = a = c$ en $b = 0$. Dit levert maar één niet-nulvector op: $(1, 0, 0, 1)$

$$U \cap V = \text{span}\{(1, 0, 0, 1)\}$$

$$U \cap V = \{0, (1, 0, 0, 1)\} = \text{span}\{(1, 0, 0, 1)\}$$