

# Caleidoscoop Hoofdstuk 2

---

## 2 Volledige Inductie

### 2.1 Bewijs met volledige inductie

- a)  $\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 1} : 3^{2n+1} + 2^{n-1}$  is een 7-voud.

*Bewijs. Basis:* Voor  $n = 1$ :

$$3^{2(1)+1} + 2^{(1)-1} = 3^3 + 2^0 = 28 = 7 \cdot 4$$

**Inductiestap:** Stel de uitspraak is waar voor  $n = k$ , en bewijs voor  $n = k + 1$ . Gebruik  $3^{2k-1} + 2^{k-1} = 7p$  voor een zeker  $p \in \mathbb{Z}$ .

$$\begin{aligned} 3^{2(k+1)+1} + 2^{(k+1)-1} &= 3^2 \cdot 3^{2k+1} + 2 \cdot 2^{k-1} \\ &= 9 \cdot (7p - 2^{k-1}) + 2 \cdot 2^{k-1} \quad (\text{Vervang } 3^{2n+1} = 7p - 2^{n-1}) \\ &= 9 \cdot 7p - 9 \cdot 2^{k-1} + 2 \cdot 2^{k-1} \\ &= 9 \cdot 7p + 2^{k-1}(-9 + 2) \\ &= 7 \cdot 9p - 7 \cdot 2^{k-1} \\ &= 7(9p - 2^{k-1}) \end{aligned}$$

De uitspraak geldt dus ook voor  $n = k + 1$  en daarmee is het bewijs voltooid.  $\square$

- b) Iedere  $n \in \mathbb{Z}_{>1}$  is deelbaar door een priemgetal.

*Bewijs. Basis:* Voor  $n = 2$  dan  $2|2$  en 2 is priem. **Inductiestap:** Stel de bewering geldt voor alle  $2 \leq k < n$ , en bewijs voor  $n$ . Als  $n$  priem is dan  $p = n$ , dus  $p|n$ . Als  $n$  niet priem dan nemen we  $a, b \in \mathbb{Z}$  zodanig dat  $n = ab \wedge 1 < a, b < n$ . Echter aangezien  $a < n$  geldt  $\exists p \in \mathbb{P} : p|a$  en uit  $a|n$  volgt  $p|n$ .  $\square$

- c) Voor alle  $x \in \mathbb{R}_{>1}$  geldt:  $\forall n \in \mathbb{Z} : (1+x)^n \geq (1+nx)$ .

*Bewijs. Basis:* Voor  $n = 1$ , dan  $(1+x)^1 = 1 + (1)x \implies 1+x = 1+x$ . **Inductiestap:** Stel de uitspraak is waar voor  $n = k$ , bewijs voor  $n = k + 1$ . Vermedigvuldig beide kanten met  $(1+x)$  dan:

$$\begin{aligned} (1+x)^k(x+1) &\geq (1+kx)(x+1) \\ &\geq (1+x+kx^2+kx) \\ &> (1+kx+x) \\ &= (1+(k+1)x) \end{aligned}$$

Hieruit volgt dus  $(1+x)^{k+1} \geq 1 + (k+1)x$ . En dat betekent dat de uitspraak juist is.  $\square$

- d)  $\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 4} : n! > 2^n$ .

*Bewijs. Basis:* Voor  $n = 4$ , dan  $4! > 2^4 \Leftrightarrow 24 > 16$  en dus klopt de uitspraak voor  $n = 4$ . **Inductiestap:** Stel de uitspraak is waar voor  $n = k$  en bewijs voor  $n = k + 1$ :

$$\begin{aligned} (k+1)! &> 2^{k+1} \\ &\Leftrightarrow \\ (k+1)(k)! &> 2 \cdot 2^k \end{aligned}$$

Volgens de inductie-hypothese is  $k! > 2^k$  en aangezien  $k+1 \geq 5 > 2$  is  $(k+1)(k)! > 2 \cdot 2^k$  en klopt de uitspraak voor alle  $n \geq 4$ .  $\square$

e)  $\forall n \in \mathbb{Z}_{>0} : \sum_{i=1}^n (2i - 1) = n^2$ . **Basis:** Voor  $n = 1$ , dan  $\sum_{i=1}^1 (2i - 1) = 1 \Leftrightarrow 1^2 = 1$ . De uitspraak klopt voor  $n = 1$ . **Inductiestap:** Stel de uitspraak is waar voor  $n = k$  en bewijs voor  $n = k + 1$ .

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} (2i - 1) &= \sum_{i=1}^k (2i - 1) + 2(k + 1) - 1 \\ &= k^2 + 2k + 1 \\ &= (k + 1)^2 \end{aligned}$$

De uitspraak is dus waar voor  $k + 1$  en hiermee geldt de uitspraak voor alle  $n > 0$ .

## 2.2