Wiskundige Structuren

Jasper Vos **Huiswerkset 4** 10 oktober 2025
Studentnr: *s2911159*

Opgave 1

a) We hebben eerst een aantal hulpstellingen nodig.

Lemma 1 (Schrapwet)**.** *Zij* $x, y, z \in \mathbb{Z}$ *dan geldt* $x + z = y + z \implies x = y$.

Bewijs. Neem $x, y, z \in \mathbb{Z}$ dan:

$$\begin{aligned} x + z &= y + z \\ x + z + (-z) &= y + z + (-z) \quad \text{(Additieve inverse)} \\ x + 0 &= y + 0 \quad \text{(a + (-a) = 0)} \\ x &= y \quad \text{(0 is neutraal in optelling)} \end{aligned}$$

□

Lemma 2 (Unieke inverse)**.** $\forall x \in \mathbb{Z}\ \exists! y \in \mathbb{Z}$ *zodanig dat* $x + y = 0$.

Bewijs. Neem $x, y, y' \in Z$ en laat $x + y = 0$ en $x + y' = 0$ dan:

$$\begin{aligned} x + y &= x + y' \\ y &= y' \quad \text{(zie Lemma 1)} \end{aligned}$$

Hieruit volgt dus dat er een unieke inverse is. □

Lemma 3 (vermenigvuldiging met 0)**.** $\forall x \in \mathbb{Z}\ x(0) = 0$.

Bewijs. Neem $x \in \mathbb{Z}$ dan:

$$\begin{aligned} x(0) &= x(0) + 0 \quad \text{(0 is neutraal in optelling)} \\ &= x(0) + (x + (-x)) \quad \text{(Merk op } x + (-x) = 0\text{)} \\ &= x(0) + x + (-x) \quad \text{(Associativiteit in } \mathbb{Z}\text{)} \\ &= x(0 + 1) + (-x) \quad \text{(Ditstributieve eigenschap in } \mathbb{Z}\text{)} \\ &= x(1) + (-x) \quad \text{(0 is neutraal in optelling)} \\ &= x + (-x) \quad \text{(1 is neutraal in vermenigvuldiging)} \\ &= 0 \quad \text{(Merk op } x + (-x) = 0\text{)} \end{aligned}$$

□

Nu beginnen we het bewijs waarom $(-1)a = -a$:

$$\begin{aligned} (-1)a &= 0 + (-1)a \quad \text{(0 is neutraal in optelling)} \\ &= a + (-a) + (-1)a \quad (a + (-a) = 0 \text{ zie Lemma 2)} \\ &= a + (-1)a + (-a) \quad \text{(Optelling is commutatief)} \\ &= (1)a + (-1)a + (-a) \quad \text{(1 is neutraal in vermenigvuldiging)} \\ &= (1 + (-1))a + (-a) \quad \text{(Ditstributieve eigenschap)} \\ &= (0)a + (-a) \quad \text{(Merk op } 1 + (-1) = 0\text{)} \\ &= 0 + (-a) \quad \text{(zie Lemma 3)} \\ &= -a \end{aligned}$$

b) We moeten eigenlijk laten zien wat het inverse is van 0. Gebruik Lemma 2 waarbij we zeggen dat elk element een unieke inverse heeft. Stel voor $0 + a = 0$ dan:

$$\begin{aligned} 0 + a &= 0 \\ a &= 0 \quad \text{(0 is neutraal in optelling)} \end{aligned}$$

Hieruit volgt dus dat 0 een inverse heeft namelijk zichzelf, en dus $0 = -0$.

c) Bewijs met het ongerijmde.

Stel $0 = 1$ en gebruik het feit dat elk element een unieke inverse heeft (zie Lemma 2). Bekijk de linker en rechterkant van de vergelijking en bepaal hun inverse.

Voor 0:

$$0 + 0 = 0 \text{ en dus is } 0 \text{ de inverse.}$$

Voor 1:

$$1 + (-1) = 0 \text{ en dus is } (-1) \text{ de inverse.}$$

Echter omdat elk element in $\mathbb{Z}$ een unieke inverse heeft is dit een tegenspraak, en dus $1 \neq 0$.

Opgave 2

a) We moeten laten zien dat $\sim_n$ reflexief, symmetrisch en transitief is.

1. *Reflexiviteit:* Te bewijzen $x \sim_n x$.
   Zij $x \sim_n x$ dan:
   $$x \sim_n n \iff (x + x = n + 1) \vee (x = x)$$
   Voor alle x geldt dat $x = x$ dus is $\sim_n$ reflexief.
2. *Symmetrie:* Te bewijzen $x \sim_n y$ dan $y \sim_n x$.
   Beredeneer vanuit $x \sim_n y$ dan:
   $$\begin{aligned} x \sim_n y &\iff x + y = n + 1 \vee x = y \\ &\iff y + x = n + 1 \vee y = x \quad \text{(Gebruik commutativiteit)} \\ &\iff y \sim_n x \end{aligned}$$
   Hieruit volgt dat $\sim_n$ symmetrisch is.
3. *Transitiviteit:* Te bewijzen als $x \sim_n y$ en $y \sim_n z$ dan $x \sim_n z$.
   $$x \sim_n y \iff (x + y = n + 1) \vee (x = y)$$
   en
   $$y \sim_n z \iff (y + z = n + 1) \vee (y = z)$$
   Gebruik substitutie
   $$\begin{aligned} &(x + y = y + z) \vee (x = y = z) \\ &(x + \cancel{y} = \cancel{y} + z) \vee (x = z) \quad \text{(Gebruik Schrapwet)} \\ &(x + z) \vee (x = z) \iff x \sim_n z \end{aligned}$$
   Dan volgt dat $\sim_n$ transitief is.

Vanwege reflexiviteit, symmetrie en transitiviteit geldt dat $\sim_n$ een equivalentie-relatie is.

b)

c) *Bewijs.* Schrijf de som als rij op:

$$\begin{array}{llll} 1 + 2 & +3 + \dots & +n & \\ n + (n-1) & +(n-2) + \dots & +1 & \text{(Zelfde som alleen omgedraaid)} \end{array}$$

Tel beide sommen op dan:
$$\underbrace{(n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1)}_{n \text{ termen}} = n(n+1)$$

Delen door twee omdat we beide sommen opgeteld hebben, dus:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}}$$

$\square$