# Wiskundige Structuren Huiswerk

**Jasper Vos** **Huiswerkset 3** 28 september 2025
Studentnr: *s2911159*

## Opgave 1

*Bewijs.* Ik bewijs voor zowel $n = 0$ en $n = 1$, omdat er vaak dubbelzinnigheid is over $0 \in \mathbb{N}$ of $0 \notin \mathbb{N}$.

1. *Basisstap:* $n = 0,\ n = 1$

   Neem $|A| = |\emptyset| = 0$, dan en slechts dan als $|\mathcal{P}(A)||\{\emptyset\}| = 2^0 = 1$. Dus de uitspraak geldt voor $n = 0$.

   Neem $|A| = |\{a\}| = 1$ dan en slechts dan als $|\mathcal{P}(A)| = |\{\emptyset, \{a\}\}| = 2^1 = 2$. Dus de uistpraak geldt voor $n = 1$.

2. *Inductiehypothese:*

   Neem aan dat de stelling geldt voor $0 \leq k < n$, dan geldt dus: $|A| = k$ en $|\mathcal{P}(A)| = 2^k$.

   Laat $k = n - 1$, en $B = A \cup \{b\}$, Dan kunnen we de machtsverzameling opstellen voor $\mathcal{P}(B)$ waarbij:

   $$C = \{V \in \mathcal{P}(B) : \{b\} \notin V)\} = \mathcal{P}(A)$$

   en:

   $$D = \{V \in \mathcal{P}(B) : \{b\} \in V\}$$

   Hieruit volgt $C \cup D = \mathcal{P}(B)$. Merk op dat $D = \{V \cup \{b\} : V \in \mathcal{P}(A)\}$, en dus:

   $$|D| = |\mathcal{P}(A)|$$

   Als we nu alles optellen krijgen we:

   $$\begin{aligned} |\mathcal{P}(B)| &= |C| + |D| \\ &= |\mathcal{P}(A)| + |\mathcal{P}(A)| \\ &= 2^k + 2^k \\ &= 2(2^k) \\ &= 2^{k+1} \end{aligned}$$

3. *Uitspraak waar voor alle n:*

   We stellen dat de uitspraak waar is voor alle $n$ en gaan dit bewijzen door te stellen dat dit niet zo is door vervolgens een tegenspraak te vinden.

   Vanuit de welordening van $\mathbb{N}$ is er een kleinste element $n_0 \in \mathbb{N}$. We zeggen dat er een kleinste $n_0$ moet bestaan waarvoor de uispraak niet waar is, maar we hebben al bewezen dat voor $0 \leq k \leq n$ de uitspraak waar is. Dit is dus een tegenspraak en daarom geldt voor alle $n \in N$ dat de uitspraak waar is.

□

## Opgave 2

*Bewijs.* Als $f$ een inverse heeft geldt:

$$f^{-1}(a) = b \Leftrightarrow f(b) = a$$

Neem $a \in A$ en laat $f^{-1}(a) = b$, en $f(b) = a$. Vervolgens stellen we op dat $f(b) = f(f^{-1}(a)) = a$, echter hebben we per definitie van $f$ dat $f(f(a)) = a$, en dus moet $f = f^{-1}$, omdat $f$ injectief is kan $f(f(a)) = f(f^{-1}(a))$ alleen als $f(a) = f^{-1}(a)$. □

## Opgave 3

*Bewijs.* Volledige inductie laten we eerst beginnen met $n = 0$ aangezien de formule impliceert dat $0 \in \mathbb{N}$.

1. *Basisstap:* $n = 0$ Voor de linkerkant:

   $$\sum_{i=0}^{0} 3i(i+1) = 3(0)(0+1) = \boxed{0}$$

   en de rechterkant:

   $$0(0+1)(0+2) = \boxed{0}$$

   Dus de stelling klopt als $n = 0$.

2. *Inductiehypothese:* Neem aan dat de stelling klopt voor $0 \leq k \leq n$ dus:

   $$\sum_{i=0}^{k} 3i(i+1) = k(k+1)(n+2)$$

   Laat nu $k = n - 1$ dan, en bewijs voor $k + 1 = n$:

   $$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{k} 3i(i+1) + 3(k+1)(k+2) &= k(k+1)(k+2) + 3(k+1)(k+2) \quad \text{(Substitutie)}\\ &= (k+3)(k+1)(k+2) \quad \text{(Distributie)}\\ &= (k+1)(k+2)(k+3) \quad \text{(Commutativiteit)}\\ &= (k+1)((k+1)+1)((k+1)+2)\end{aligned}$$

3. Stel dat de stelling niet geldt voor alle $n \in \mathbb{N}$ dan bestaat er een kleinste $n_0$ waarbij de stelling niet waar moet zijn, echter geldt voor $0 \leq k \leq n$ dat de stelling klopt, en dus is dit een tegenspraak.

   De stelling is dus waar voor alle $n \in \mathbb{N}$.

$\square$