Wiskundige structuren

Opgave 1

a)

Te bewijzen:

$$-(a+b) = (-a) + (-b)$$

Bewijs. Allereerst moeten we bewijzen dat er slechts één $x \in \mathbb{Z}$ zodanig dat $y \in \mathbb{Z}$ geldt $x + y = 0$
Neem $x + y_1 = 0$ en $x + y_2 = 0$ dan:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_1 + 0 \quad \text{(0 is het neutrale element)} \\ &= y_1 + (x + y_2) \\ &= (y_1 + x) + y_2 \quad (\mathbb{Z} \text{ is associatief}) \\ &= 0 + y_2 \\ &= y_2 \end{aligned}$$

Dit betekent dus dat elk element een unieke inverse heeft, en dus:

$$\begin{aligned} a + (-a) + b + (-b) &= 0 \\ a + b + (-a) + (-b) &= 0 \quad (\mathbb{Z} \text{ is commutatief}) \\ (a+b) + (-a) + (-b) &= 0 \\ (a+b) + -(a+b) + (-a) + (-b) &= -(a+b) \quad (-(a+b) \text{ is de inverse van } (a+b)) \\ 0 + (-a) + (-b) &= -(a+b) \\ (-a) + (-b) &= -(a+b) \end{aligned}$$

Hieruit volgt dus dat:

$$-(a+b) = (-a) + (-b)$$

□

b)

Te bewijzen:

$$-0 = 0$$

Bewijs. Uit opgave a hebben we bewezen dat elke element een unieke inverse heeft, en dus:

$$\begin{aligned} -0 &= -0 + 0 \quad (\mathbb{Z} \text{ heeft 0 als neutrale element}) \\ &= 0 + (-0) \quad (\mathbb{Z} \text{ is commutatief}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

c)

Te bewijzen:

$$(-ab) = (-a)b$$

Lemma 1. *Voor alle $x \in \mathbb{Z}$ $\exists! y \in \mathbb{Z}$ zodanig dat $x + y = 0$*

Lemma 2. *Voor alle $x \in \mathbb{Z}$ geldt $x(0) = 0$*

Bewijs. Laat $x = y(0)$ dan:

$$\begin{aligned} x + x &= y(0) + y(0) \\ x + x &= y(0 + 0) \quad \text{(Gebruik distributie in } \mathbb{Z}) \\ x + x &= y(0) \\ x + x &= x \\ x + x + (-x) &= x + (-x) \quad \text{(Voeg de inverse van } x \text{ toe)} \\ x + 0 &= 0 \quad \text{(0 is het neutrale element)} \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Hieruit volgt dus dat $y(0) = 0$. □

Bewijs. Veronderstel dat:

$$\begin{aligned} ab + (-a)b &= b(a + (-a)) \quad \text{(Gebruik distributie in } \mathbb{Z}) \\ &= b(0) \quad \text{(Vanuit Lemma 1 en Lemma 2)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Door Lemma 1 bestaat er precies één additieve inverse en dus $(-ab) = (-a)b$. □

d)

Te bewijzen:

$$(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$$

Bewijs. Gebruik Lemma 1 zodat je kan schrijven:

$$\begin{aligned} (-a) \cdot (-b) + -(a \cdot b) &= (-a)((-b) + b) \quad \text{(Volgens ditributiviteit van } \mathbb{Z}) \\ &= (-a)(0) \quad \text{(Gebruik Lemma 2)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Volgens Lemma 1 bestaat er slechts één inverse en dus moet $(-a) \cdot (-b) = (a \cdot b)$ □

Opgave 2

Bewijs. Stel dat $1 = 0$, en neem $a \in \mathbb{Z}$ waarbij $a \neq 1$ en $a \neq 0$ dan:

$$\begin{aligned} a &= a \cdot 1 \quad \text{(Het neutrale element in vermedigvuldiging)} \\ &= a \cdot 0 \quad \text{(Vanuit Lemma 2)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Hieruit volgt dus $\forall a \in \mathbb{Z} : a = 0$, en dus $\mathbb{Z} = \{0\}$, maar volgens axioma $\mathbb{Z}9$ is $\mathbb{Z}$ niet eindig, en dus tegenspraak. $\lightning$ □

Opgave 3

Bewijs. Vanuit Lemma 1 stellen we:

$$ac - (bc) = 0$$

$$\begin{aligned} ac + -(bc) &= ac + (-b)c \quad \text{(Vanuit Opgave 1(c))} \\ &= c(a + (-b)) \quad \text{(distributie van } \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Merk op dat $c \neq 0$, en dan is er slechts één oplossing mogelijk:

$$\begin{aligned} (a + (-b)) &= 0 \\ a + (-b) + b &= b \\ a + 0 &= b \\ a &= b \end{aligned}$$

$\square$

Opgave 12

MOET P(A) P(OMEGA)