

## Opgave 9.4.2(1)

We hebben de lijn  $L \subset \mathbb{R}^2$  met  $y = 2x$  en een orthogonale projectie  $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  op  $L$ . Lijn  $L = \text{span}\{(1, 2)\}$ , dus richtingsvector  $a = (1, 2)$  met  $\langle a, a \rangle = 5$ .

Bereken projectie van basisvectoren:

$$\begin{aligned}\pi(e_1) &= \frac{\langle e_1, a \rangle}{\langle a, a \rangle} \cdot (1, 2) = \frac{1 \cdot 1 + 0 \cdot 2}{1 \cdot 1 + 2 \cdot 2} \cdot (1, 2) = \frac{1}{5}(1, 2) = \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right) \\ \pi(e_2) &= \frac{\langle e_2, a \rangle}{\langle a, a \rangle} \cdot (1, 2) = \frac{0 \cdot 1 + 1 \cdot 2}{1 \cdot 1 + 2 \cdot 2} \cdot (1, 2) = \frac{2}{5}(1, 2) = \left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right)\end{aligned}$$

Gebruik de vectoren als kolommen in  $[\pi]_B^B$ :

$$[\pi]_B^B = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

## Opgave 9.4.2(2)

Kies  $v_1 = (1, 2)$  voor  $L$  en  $v_2 = (-2, 1)$  voor  $L^\perp$ .

Check:  $(1, 2) \cdot (-2, 1) = -2 + 2 = 0$

Basis  $C = (v_1, v_2)$ .

Projectie behoudt component langs  $L$ , zet component langs  $L^\perp$  op 0:

$$[\pi]_C^C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## Opgave 9.4.2(3)

Basiswisselmatrix  $P$  van  $C$  naar  $B$ :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Bereken  $[\pi]_B^B = P \cdot [\pi]_C^C \cdot P^{-1}$ :

$$\begin{aligned}[\pi]_B^B &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$[\pi]_B^B = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Komt overeen met (1).

## Opgave 10.1.2

### Bewijs via inductie

#### Basisstap $n = 1$

$A = (a_{11})$ , dus  $\det(A) = a_{11}$

#### Inductiestap

Stel het geldt voor  $(n-1) \times (n-1)$  matrices.

Cofactor-expansie naar eerste kolom:

$$\det(A) = a_{11} \cdot \det(A_{11}) + 0 + \dots + 0$$

Submatrix  $A_{11}$  is ook bovendrehoek met diagonaal  $(a_{22}, \dots, a_{nn})$ .

Via inductiehypothese:

$$\det(A_{11}) = a_{22} \cdot a_{33} \cdot \dots \cdot a_{nn}$$

Dus:

$$\det(A) = a_{11} \cdot (a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn})$$

#### Conclusie

$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$
--