Caleidoscoop

Jasper Vos **Inleverset A** 5 oktober 2025
Studentnr: *s2911159*

1 a) Zij $a, b, c \in \mathbb{Q}$ en $\sim$ een equivalentie-relatie waarbij $a - b \in \mathbb{Z}$.
Bewijs dat $\sim$ een equivalentie-relatie is:

- $\sim$ *is reflexief:*
  $a - a = 0$ en $0 \in \mathbb{Z}$ en dus is $\sim$ reflexief.
- $\sim$ *is symmetrisch:*
  Als $a - b \in \mathbb{Z}$ dan $-1(a - b) = b - a \in \mathbb{Z}$, en dus $b \sim a$ waaruit volgt dat $\sim$ symmetrisch is.
- $\sim$ *is transitief:*
  $a - b \in \mathbb{Z}$ en $b - c \in \mathbb{Z}$ dan $(a - b) + (b - c) \in \mathbb{Z}$ dus $a - \cancel{b} + \cancel{b} - c = a - c \in \mathbb{Z}$ hieruit volgt $a \sim c$ en dus is $\sim$ een transitieve relatie.

Voor $\sim$ geldt dat hij reflexief, symmetrisch en transitief is, en daarmee is $\sim$ een equivalentie-relatie.
Als we nu gaan kijken naar $\mathbb{Q}/_\sim$, dan kunnen we elke equivalentie-klasse $\overline{q}$ kunnen schrijven als:

$$\overline{q} = \overline{\frac{1}{k}} = \{(\frac{k(i)+1}{k}) : i \in \mathbb{Z}\}$$

Hieruit volgt dus dat we oneindig equivalentie-klassen hebben want we kunnen een bijectie opstellen vanuit $f : \mathbb{Z} \to (0, 1]$ met $f(k) = \frac{1}{k}$, en dus zijn het aantal equivalentie-klassen aftelbaar oneindig. Daarnaast heeft elke equivalentie-klasse oneindig elementen omdat:

$$\frac{k(i)+1}{k} = i + \frac{1}{k}$$

We kunnen dit zien als een strikt stijgende lijn, en dus moet elke equivalentie-klasse oneindig aantal elementen bevatten.

b) Ik denk niet dat dit kan. Ik stel voor dat het wel kan, en probeer een tegenspraak te herleiden.

Bewijs. Stel dat er een Quotiëntruimte bestaat waarbij $|Q/_\sim| = n$, en $|\overline{q}| = m$, waarbij $\overline{q} \in Q/_\sim$, We weten dat $(Q/_\sim)$ partities vormen in $\mathbb{Q}$. Dit betekent dus dat $\mathbb{Q}$ partities $\overline{q}$ moet vormen waarbij elk element van $\mathbb{Q}$ opgedeeld wordt, echter geldt voor $|\overline{q}| = m$ en $|Q/_\sim| = n$, en dus zijn er hoogstens $n \cdot m$ aantal elementen. Dit luidt tot een tegenspraak want $n \cdot m < \infty = |\mathbb{Q}|$. ☐

2 a) i. Bekijk of $X := \{0\} \cup \{1 - \frac{1}{n+2}\}_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ zowel een infimum en een supremum heeft.

- Bekijk of X een infimum heeft:

Bewijs. Claim dat het infimum i bestaat met $i = 0$. Allereerst moet 0 een ondergrens zijn. Bekijk

$$x \in \{0\} \cup \{1 - \frac{1}{n+2}\}$$

We weten dat de rechterkant van de vereniging minstens $x = \frac{1}{2}$, en hoogstens 1 benadert.
We zeggen dat 0 een ondergrens is als $0 \leq x$ voor alle $x \in X$. Dit komt overeen met het minimum voor X en dus is 0 een ondergrens, en een minimum van X.
Nu moeten we laten zien dat 0 de grootste ondergrens is. Dit is echter waar omdat 0 ook het minimum van X is en dus is het infimum $i = 0$. □

- Bekijk of X een supremum heeft:

Bewijs. Claim dat het supremum s bestaat waarbij $s = 1$. Allereerst moet s een bovengrens zijn en dus moet voor elke $x \in X$ gelden dat $s \geq x$. Bekijk:

$$X = \{0\} \cup \{1 - \frac{1}{n+2}\}$$

De rechterkant van de vereniging geeft aan dat het 1 benadert, maar nooit 1 kan worden en dus $1 \geq x$ voor alle $x \in X$.
Nu moeten we nog laten zien dat $s = 1$ de kleinste bovengrens is. Neem $x = 1 - \frac{1}{n+2}$, dan moet gelden $\forall \epsilon > 0$ dat:

$$1 - \epsilon < x$$

Waarbij 1 de gesuggereerde bovengrens s is. substitueer $x = 1 - \frac{1}{n+2}$:

$$1 - \epsilon < 1 - \frac{1}{n+2}$$

Neem aan dat $\epsilon > \frac{1}{n+2}$ dan is er altijd een x waarvoor epsilon groter is als we n groot genoeg maken. Hieruit volgt dus dat $s = 1$ de kleinste bovengrens moet zijn. □

ii. Bekijk of $Y := \{\frac{n+2}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$, een supremum en infimum heeft.

- Bekijk of Y een infimum heeft:

Bewijs. Claim dat het infimum $i = 1$. Dan moet voor alle $x \in Y$ gelden dat $x \geq i = 1$. Merk op dat $x \in \frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$, dan $1 + \frac{1}{n+1} > 1$, en dus is $i = 1$ een ondergrens.
Nu moeten we nog laten zien dat het de grootste ondergrens is. Voor alle $\epsilon > 0$, bestaat er een $x \in Y$ zodanig dat:

$$\epsilon + \underbrace{1}_{\text{Onze claim } i=1} > x$$

neem $x = 1 + \frac{1}{n+1}$, dan:

$$\epsilon + 1 > \frac{1}{n+1} + 1$$

We kunnen epsilon willekeurig klein maken en met name $\epsilon > \frac{1}{n+1}$, en dus volgt dat $i = 1$ inderdaad het infimum is. □

- Bekijk of Y een supremum heeft:

Bewijs. Claim dat het supremum $s = 2$. Bekijk $x \in 1 + \frac{1}{n+1}$, we kunnen dit zien als een strikt dalende functie en dus geldt voor $n = 0$, dat dit de grootste waarde is voor $1 + \frac{1}{n+1}$. En dus $1 + \frac{1}{0+1} = 2$. Dit betekent dus dat 2 het maximum van Y is en dus automatisch het supremum. □

iii. Bekijk of $Z := \{b - a \in \mathbb{R} : a \in (-1, 1), b \in [0, 2]\}$ een supremum en infimum heeft:

- Bekijk of Z een infimum heeft:

  Bewijs. Claim dat het infimum $i = -1$. Bekijk de minimale waarde die in Z kan liggen, dus neem $0 \in b$ en $1 \notin a$ maar het benadert wel 1 en dus $0 - 1 = -1$. Dit betekent dat -1 een ondergrens is. Nu moeten we laten zien dat -1 de grootste ondergrens is.
  Stel dat p een ondergrens is en $p > -1$, waarbij we $\epsilon > 0$ nemen dan:

  $$\begin{aligned} p - \epsilon &= -1 \\ p &= \epsilon - 1 \end{aligned}$$

  Neem $z \in Z$ waarbij $z := \frac{-1+p}{2}$, dan:

  $$\begin{aligned} z &= \frac{-1}{2} + \frac{p}{2} \\ &= \frac{-1}{2} + \frac{\epsilon - 1}{2} \\ &= \frac{\epsilon}{2} - 1 \end{aligned}$$

  Hieruit volgt dat $\epsilon - 1 > \frac{\epsilon}{2} - 1 > -1$, en dus $p > z > -1$. Dit is een tegenspraak want $z \in Z$ en $p > z$ en dus kan p niet een ondergrens zijn. $\square$

- Bekijk of Z een supremum heeft:

  Bewijs. Claim dat het supremum $s = 3$ is. Bekijk de maximale waarde die Z kan benaderen. We hebben dan $2 \in b$ en richting -1 in a, dus geldt dat $s = 3$ een bovengrens is.
  Stel nu dat p een bovengrens is met $p < s$, en neem $\epsilon > 0$ dan:

  $$\begin{aligned} p + \epsilon &= 3 \\ p &= 3 - \epsilon \end{aligned}$$

  Neem nu $z \in Z$ waarbij we $z := \frac{p+3}{2}$ dan:

  $$\begin{aligned} z &= \frac{p+3}{2} \\ &= \frac{p}{2} + \frac{3}{2} \\ &= \frac{3-\epsilon}{2} + \frac{3}{2} \\ &= 3 - \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

  Hieruit volgt $p < z < 3$. Dit is een tegenspraak want $z \in Z$ en $p < z$, en dus kan p geen bovengrens zijn. Dit betekent dus dat $s = 3$. $\square$

b) Vanuit vraag a) heeft Z dus een infimum $i = 0$ waarvoor $0 \in X$ en ook voor Y een supremum $s = 2$ waarbij $2 \in Y$. X heeft dus een minimum en Y een maximum.

3 Bekijk alle gevallen:

- *Geval 1:* $\sup(U) \in U$ en $\inf(V) \in V$ dan geldt dat $U \cap V = \{\sup(U)\}$
- *Geval 2:* $\sup(U) \notin U$ en $\inf(V) \in V$ dan geldt dat $U \cap V = \emptyset$
- *Geval 3:* $\sup(U) \in U$ en $\inf(V) \notin V$ dan geldt dat $U \cap V = \emptyset$

4 *Bewijs.* Stel dat s_1 en s_2 beide infima zijn. Dan geldt voor s_1 dat voor elke andere ondergrens (waaronder in het bijzonder s_2) $s_1 \geq s_2$, echter geldt voor s_2 ook dat het een infimum is en dus moet s_2 groter zijn dan alle andere ondergrenzen dus ook s_1. Hieruit volgt dat $s_2 \geq s_1$. Als deze beide voorwaarden waar zijn moet $s_1 = s_2$. □

5 B heeft een infimum want neem $a \in A$ dan is a een ondergrens van B. Vervolgens als B een ondergrens heeft dan is er ook een grootste ondergrens, en dus bestaat het infimum van B. Hetzelfde argument geldt voor het supremum van A, neem $b \in B$ dan heeft A een bovengrens en als er een bovengrens is dan is er ook een kleinste bovengrens.

Nu het bewijs dat $\sup(A) \leq \inf(B)$:

Bewijs. Stel dat het niet waar is dan geldt $\sup(A) > \inf(B)$.

Laat $\sup(A) = \inf(B) + \epsilon$ waarbij $\epsilon > 0$ en $\inf(B) \in B$. Dit is een tegenspraak want $\inf(B)$ is dan een kleinere bovengrens voor A ten opzichte van het orginele supremum van A.

Hieruit volgt dus dat $\sup(A) \leq \inf(B)$. □