Lineaire Algebra

Jasper Vos **Huiswerkset 9** 13 november 2025
Studentnr: *s2911159*

Opgave 8.1.4(1)

We hebben $\mathrm{rk}(g \circ f) = \dim g(f[U]) \leq \dim(f[U]) = \mathrm{rk}(f)$ Als g injectief is, dan verandert g de dimensie van $f[U]$ niet, en dus:

$$\boxed{\mathrm{rk}(g \circ f) = \mathrm{rk}(f)}$$

Voorbeeld

Neem de volgende vectorruimtes: $U = \mathbb{R},\ V = \mathbb{R}^2$ en tot slot $W = \mathbb{R}$.
Stel de afbeeldingen op $f : U \to V$ met $f(x) = (x, 0)$, en $g : V \to W$ waarbij $g(x, y) = x$. g is niet injectief omdat:

$$g(0, 1) = 0 = g(0, 2)$$

Het beeld van f heeft als dimensie de x-as want het tweede component is constant 0, en dus $\dim(f) = 1$. Het beeld van $g \circ f$ geeft ook de x-as want $g \circ f = x$, en dus $\dim(g \circ f) = 1$.
Dit betekent dus dat:

$$\boxed{\mathrm{rk}(g \circ f) = \mathrm{rk}(f) \text{ waarbij } g \text{ niet injectief is}}$$

Opgave 8.1.4(2)

We hebben $\mathrm{rk}(g \circ f) \leq \mathrm{rk}(g)$, als f surjectief dan $f[U] = V$, en dus:

$$\boxed{g[f[U]] = g[V], \text{ en dus } \mathrm{rk}(g \circ f) = \mathrm{rk}(g)}$$

Voorbeeld

Neem de volgende vectorruimtes: $U = \mathbb{R},\ V = \mathbb{R}^2$ en $W = \mathbb{R}$. Stel de afbeeldingen op:

$$f : U \to V \text{ met } f(x) = (x, x) \text{ en } g : V \to W \text{ met } g(x, y) = x + y$$

Merk op dat f niet surjectief want $(1, 0)$ wordt niet bereikt in V vanuit f. Het beeld van g geeft $\dim(g) = 1$, en voor $g \circ f(x) = g(x, x) = x + x = 2x$ en dus $\dim(\mathrm{rk}(g \circ f)) = 1$. Dit betekent dus:

$$\boxed{\mathrm{rk}(g \circ f) = \mathrm{rk}(g) \text{ waarbij } f \text{ niet surjectief is}}$$

Opgave 8.3.2

Gegeven is $F = \mathbb{F}_2$, dus alle bewerkingen gebeuren modulo 2.
De deelruimte $U \subseteq \mathbb{F}_2^4$ is opgespannen door:

$$u_1 = (1,1,1,1),\ u_2 = (1,1,0,0),\ \text{en } u_3 = (0,1,1,0)$$

Een willekeurig element uit U is dus te schrijven als: $(a+b,\ a+b+c,\ a+c,\ a) \quad \text{met } a,b,c \in \mathbb{F}_2$.
De deelruimte $V \subseteq \mathbb{F}_2^4$ is opgespannen door: $v_1 = (1,1,1,0),\ v_2 = (0,1,1,1)$ Een willekeurig element uit V is dus:

$$(p,\ p+q,\ p+q,\ q) \quad \text{met } p,q \in \mathbb{F}_2.$$

We zoeken $U \cap V$, dus we stellen:

$$(a+b,\ a+b+c,\ a+c,\ a) = (p,\ p+q,\ p+q,\ q)$$

Dit geeft het stelsel:

$$\begin{aligned} a+b &= p \\ a+b+c &= p+q \\ a+c &= p+q \\ a &= q \end{aligned}$$

Invullen $a = q$ in de derde vergelijking: $q + c = p + q \implies c = p$, dan wordt de eerste vergelijking:

$$a+b = p \implies q+b = p \implies b = p+q$$

Invullen in de tweede vergelijking:

$$a+b+c = p+q \implies q + (p+q) + p = p+q \implies 0 = 0$$

Nu geldt $p = q$, en dus: $p = q = a = c \quad \text{en} \quad b = 0$. Dit levert maar één niet-nulvector op: $(1,0,0,1)$

$$\boxed{U \cap V = \text{span}\{(1,0,0,1)\}}$$