Analyse I Huiswerk

Jasper Vos **Huiswerkset 2** 20 september 2025
Studentnr: *s2911159*

1. a) Voor $x \leq -1$ geldt het voorschrift $\sqrt{x^2+x+4}+x$. Er is een wortel en dus moeten we kijken of $x^2+x+4 \geq 0$ voor alle x. We weten dat dit een dalparabool is met een minimum. We berekenen $\frac{d}{dx}(x^2+x+4) = 2x+1$. Vervolgens stellen we deze gelijk om het minimum te vinden. $2x+1=0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$. Vul nu in $((-\frac{1}{2})^2 + -\frac{1}{2}+4) \Rightarrow \frac{15}{4} > 0$. En dus is het wortelgedeelte goed gedefinieerd aangezien voor alle $x \leq -1$ geldt dat het groter is dan $\frac{15}{4}$.

   Tot slot geldt dat het polynoom onder de wortel en de x naast de wortel goed gedefinieerd zijn omdat ze allebei per definitie continu zijn.

   b)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x+4}+x &= \lim_{t\to\infty} \sqrt{t^2-t+4}-t \quad \text{(Vervang } x \text{ met } t \text{ waarbij } t=-x\text{)} \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{(\sqrt{t^2-t+4}-t)(\sqrt{t^2-t+4}+t)}{\sqrt{t^2-t+4}+t} \quad \text{(Gebruik de worteltruc)} \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{\cancel{t^2}-t+4-\cancel{t^2}}{\sqrt{t^2-t+4}+t} \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{\frac{-t}{t}+\frac{4}{t}}{\sqrt{\frac{t^2}{t^2}-\frac{t}{t^2}+\frac{4}{t^2}}+\frac{t}{t}} \quad \text{(Deel de teller en noemer door } t\text{)} \\
&= \frac{-1+0}{\sqrt{1+0+0}+1} = \boxed{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

   c)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3-2x^2-4x}{(x^2-1)(x-2)} &= \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3-2x^2-4x}{x^3-2x^2-x+2} \quad \text{(Werk de haakjes weg)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^3}{x^3}-\frac{2x^2}{x^3}-\frac{4x}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}-\frac{2x^2}{x^3}-\frac{x}{x^3}+\frac{2}{x^3}} \quad \text{(Deel de teller en noemer door } x^3\text{)} \\
&= \frac{2-0-0}{1-0-0+0} = \boxed{2}
\end{aligned}$$

   d) Als $f(x)$ continu is op $x=-1$ moeten zowel het linker als rechterlimiet gelijk aan elkaar zijn.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\uparrow-1} \sqrt{x^2+x+4}+x &= \sqrt{(-1)^2-1+4}-1 \\
&= \sqrt{4}-1 = 1 \\
&\Leftrightarrow \\
\lim_{x\downarrow-1} \frac{2x^3-2x^2-4x}{(x^2-1)(x-2)} &= \lim_{x\downarrow-1} \frac{2x(x^2-x-2)}{(x-1)(x+1)(x-2)} \\
&= \lim_{x\downarrow-1} \frac{2x\cancel{(x+1)}\cancel{(x-2)}}{(x-1)\cancel{(x+1)}\cancel{(x-2)}} \\
&= \frac{2(-1)}{(-1)-1} = 1
\end{aligned}$$

   Aangezien $\lim_{x\uparrow-1} f(x) = \lim_{x\downarrow-1} f(x)$ moet $f(x)$ continu zijn op het punt $x=-1$.

   e) Gebruik wat we bij de vorige vraag hebben bereikt namelijk $\lim_{x\to1} \frac{2x}{x-1}$ en werk verder uit. Vul in voor $x \to 1$ dan:

$$\lim_{x\to1} \frac{2x}{x-1} = \frac{2}{0}$$

Dit betekent dat we een verticale asymptoot hebben op $x = 1$. Vul nu in voor $x \to 2$ dan:

$$\lim_{x \to 2} \frac{2x}{x-1} = \frac{4}{1} = 4$$

f) Gebruik weer het vorige resultaat dan: $\lim_{x \uparrow 2} \frac{2x}{x-1} = 4 \Leftrightarrow \lim_{x \downarrow 2} \frac{2x}{x-1} = 4$. Als we dus $c = 4$ nemen is g continu op $x = 2$. g is continu op $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$ aangezien 1 geen element is op $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$, en voor alle overige elementen het wel gedefinieerd is.

2. Zij $f(x) = x^2, g(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x} + 50x^2 - \cos(x))$ en $h(x) = -x^2$. We weten dat:

$$x^2 \geq x^2 \sin(\frac{1}{x} + 50x^2 - \cos(x)) \geq -x^2$$

Aangezien $1 \geq \sin(\frac{1}{x} + 50x^2 - \cos(x)) \geq -1$. Hieruit volgt dat we de tussenwaardestelling kunnen gebruiken.

$$\lim_{x \to 0} x^2 = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to 0} -x^2 = 0$$

Omdat $\lim_{x \to 0} f(x) = 0 \geq \lim_{x \to 0} g(x) \geq \lim_{x \to 0} h(x) = 0$, moet $\lim_{x \to 0} g(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x} + 50x^2 - \cos(x)) = 0$.