Caleidoscoop Hoofdstuk 2

2 Volledige Inductie

2.1 Bewijs met volledige inductie

a) $\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 1} : 3^{2n+1} + 2^{n-1}$ is een 7-voud.

Bewijs. **Basis:** Voor $n = 1$:
$$3^{2(1)+1} + 2^{(1)-1} = 3^3 + 2^0 = 28 = 7 \cdot 4$$

Inductiestap: Stel de uitspraak is waar voor $n = k$, en bewijs voor $n = k + 1$. Gebruik $3^{2k-1} + 2^{k-1} = 7p$ voor een zeker $p \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}
3^{2(k+1)+1} + 2^{(k+1)-1} &= 3^2 \cdot 3^{2k+1} + 2 \cdot 2^{k-1} \\
&= 9 \cdot (7p - 2^{k-1}) + 2 \cdot 2^{k-1} \quad \text{(Vervang } 3^{2n+1} = 7p - 2^{n-1}\text{)} \\
&= 9 \cdot 7p - 9 \cdot 2^{k-1} + 2 \cdot 2^{k-1} \\
&= 9 \cdot 7p + 2^{k-1}(-9 + 2) \\
&= 7 \cdot 9p + 7 \cdot 2^{k-1} \\
&= 7(9p + 2^{k-1})
\end{aligned}$$

De uitspraak geldt dus ook voor $n = k + 1$ en daarmee is het bewijs voltooid. □

b) Iedere $n \in \mathbb{Z}_{>1}$ is deelbaar door een priemgetal.

Bewijs. **Basis:** Voor $n = 2$ dan $2|2$ en 2 is priem. **Inductiestap:** Stel de bewering geldt voor alle $2 \leq k < n$, en bewijs voor n. Als n priem is dan $p = n$, dus $p|n$. Als n niet priem dan nemen we $a, b \in \mathbb{Z}$ zodanig dat $n = ab \wedge 1 < a, b < n$. Echter aangezien $a < n$ geldt $\exists p \in \mathbb{P} : p|a$ en uit $a|n$ volgt $p|n$. □

c)