

## Opgave 1

a) *Bewijs.*

- *Basisstap:  $n = 1$*

Te bewijzen:  $a_1 > a_0$ . We weten  $a_0 = \log_2(12)$ , en  $a_1 = a_{0+1} = \log_2(a_0 + 12) = \log_2(\log_2(12) + 12)$ .

Nu moeten we laten zien dat:

$$\log_2(\log_2(12) + 12) > \log_2(12)$$

Merk op dat  $3 < \log_2(12)$  als we dit gebruiken dan:

$$\log_2(\log_2(12) + 12) > \log_2(3 + 12) > \log_2(12)$$

We kunnen hier dus aflezen dat  $\log_2(15) > \log_2(12)$  omdat  $\log_2$  strikt stijgend is, en omdat  $\log_2(15) < \log_2(\log_2(12) + 12)$ . Via transitiviteit van ordening  $>$  geldt:

$$\log_2(\log_2(12) + 12) > \log_2(12) \iff \boxed{a_1 > a_0}$$

- *Inductie-hypothese:*

We nemen aan dat de stelling voor  $n = k$  geldt ofwel dat  $a_k > a_{k-1}$ . Vanuit de inductie-hypothese bouwen we naar de volgende termen.

$$a_k > a_{k-1}$$

$$a_k + 12 > a_{k-1} + 12$$

$$\log_2(a_k + 12) > \log_2(a_{k-1} + 12)$$

Merk op dat dit overeen komt met de definitie van  $a_{k+1}$  en  $a_k$ , en dus:

$$\log_2(a_k + 12) > \log_2(a_{k-1} + 12) \iff \boxed{a_{k+1} > a_k}$$

Hieruit volgt dus dat de stelling voor elke  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  geldt, en daarmee is  $a_n$  strikt stijgend.

□

b) *Bewijs.*

- *Basisstap:  $n = 1$*

Te bewijzen  $a_1 < 4$ . We weten dat  $a_1 = a_{0+1} = \log_2(a_0 + 12) = \log_2(\log_2(12) + 12)$ . Merk op dat  $a_0 = \log_2(12) < \log_2(16) = 4$ , en dus is  $a_0 < 4$  waaruit volgt:

$$\log_2(a_0 + 12) < \log_2(4 + 12) \iff \boxed{a_1 < 4}$$

4 is dus een bovengrens van  $a_1$ .

- *Inductie-hypothese:*

We nemen aan dat de stelling voor  $n = k$  geldt ofwel dat  $a_k < 4$ . We gebruiken dezelfde truuk als bij de basisstap. Merk op dat  $a_k < 4 = \log_2(16)$ , weten we dus dat:

$$a_{k+1} = \log_2(a_k + 12)$$

$$< \log_2(4 + 12) = 4 \iff \boxed{a_{k+1} < 4}$$

Dus 4 is een bovengrens van  $a_{k+1}$ .

Hieruit volgt dat voor alle  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  dat 4 een bovengrens is van  $a_n$ .

□

- c) Merk op dat  $a_n$  van boven begrensd is omdat voor alle  $n$  geldt dat 4 een bovengrens is (*vraag 1b*) en dat  $a_n$  strikt stijgend is (*vraag 1a*). Dit betekent dat  $a_n$  convergent moet zijn volgens de monotone convergentiestelling. De limiet van deze rij is dus het  $\sup(a_n)$ .

*Bewijs. Claim:*  $\sup(a_n) = 4$

- Te bewijzen: 4 is een bovengrens.  
Vanuit *vraag 1b* geldt dat 4 een bovengrens is.
- Te bewijzen: 4 is de kleinste bovengrens is:

□

## Opgave 2

a)