Caleidoscoop Hoofdstuk 3

3 Equivalentierelaties

Opgave 3.1

a) Stel de volgende equivalentierelatie $\mathcal{R}$ op, waarbij $a \sim b \iff a = b$.

1 *Reflexief:* Bekijk $a\mathcal{R}a \implies a = a$

2 *Symmetrie:* Bekijk $(a\mathcal{R}b \implies b\mathcal{R}a) \implies a = b \implies b = a$

3 *Transitiviteit:* Bekijk $((a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}c) \implies a\mathcal{R}c) \implies (a = b \wedge b = c) \implies a = c$

b) Neem de volgende equivalentierelatie $\mathcal{R}$ op, waarbij $a \sim b \iff a \mod 42 = b \mod 42$.

1 *Reflexief:* $a \mod 42 = a \mod 42$

2 *Symmetrie:* $(a \mod 42 = b \mod 42) \implies b \mod 42 = a \mod 42$

3 *Transitiviteit:* $(a \mod 42 = b \mod 42 \wedge b \mod 42 = c \mod 42) \iff a \mod 42 = c \mod 42$

c) *Bewijs.* X **Aanname** : Ik stel dat A een verzameling is waarbij $A \neq \emptyset$, en $A/_{\sim} = \emptyset$. Aangezien $A \neq \emptyset$ bestaat er een $a \in A$, maar als we een equivalentierelatie hebben, dan volgt vanuit reflexiviteit dat $a \sim a$. Als $a \sim a$ dan moet er een equivalentieklasse $\overline{a} = \{b \in A : b \sim a\}$ bestaan waarbij $a \in \overline{a}$, maar $\overline{a} \in A/_{\sim}$. Dit is een tegenspraak want we stelde dat $A/_{\sim} = \emptyset$, en dus kan $A/_{\sim}$ niet leeg zijn. □

Opgave 3.2

a) X wordt gepartitioneerd in $X/_{\sim}$, omdat $|X/_{\sim}| = \infty =$ zit in elke equivalentieklasse minstens 1 representant die in X moet liggen. Dit betekent dus dat $|X| \geq |X/_{\sim}| = \infty$.

b)
- *Geval 1:* $(|X/_{\sim}|) = (n \wedge |X| = \infty)$: Neem $X = \mathbb{Z}$ met $x \sim y$ als $x \equiv y \mod n$, dan heeft $|X/_{\sim}|$ precies n elementen namelijk: $\underbrace{\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{n-1}\}}_{n \text{ elementen}}$. Hieruit volgt dus dat $|X| = \infty$, en $|X/_{\sim}| = n$.
- *Geval 2:* $(|X/_{\sim}| = n) \wedge (|X| = n)$: Laat $X = \mathbb{Z}_k$ en maak een equivalentie relatie waarbij $x \sim y \iff x = y$. Dan heeft onder reflexiviteit iedere $x \in X$ een equivalentieklasse, namelijk: $X/_{\sim} = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{k-1}\}$. Dit betekent dus dat $|X| = k$ en $|X/_{\sim}| = k$.

c) Dan moet $X = \emptyset$,

Bewijs. Stel dat $|X| = n$ en $|X/_{\sim}| = 0$ dan geldt $\forall x \in X$ dat $x \in \overline{x}$, maar dit kan niet want $|X/_{\sim}| = 0$, en dus moet $|X| = 0$. □

Opgave 3.3

a) 1 *Reflexief:* $a - a = 0$ en $0 \in W$, dus reflexief. $(\because 0 \in W)$

2 *Symmetrie:* als $a - b \in W$ dan $(-1)(a-b) \in W \iff b - a \in W \quad (\because v \in W \implies \lambda v \in W)$

3 *Transitiviteit:* $a - b + b - c = a - c \in W \quad (\because v, w \in W \implies v + w \in W)$

b) Neem een $a \in V$ dan geldt voor alle $b \in V$, dat hij equivalent is aan a, en dus heeft de $V/_{\sim}$ slechts één equivalentieklasse.

c) Neem een willekeurige $\overline{a} \in V/_{\sim}$, dan moet $\overline{a}$ zichzelf bevatten, want $a \sim b \Leftrightarrow a - b \in \{0\} = W$, en dus $a = b$. Dit betekent dat elk element in V een eigen equivalentieklasse heeft met zichzelf.

Opgave 3.4

Ik heb er geen kunnen vinden als we vanuit $\mathbb{Z}$ dit proberen op te lossen. Als we vanuit $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ starten dan kan ik het wel oplossen.
Laat $x \sim y$ met $x, y \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ als x en y op hetzelfde niveau n liggen in Pascal's driehoek.

1 *Reflexief:* x ligt op hetzelfde niveau als x en dus reflexief.

2 *Symmetrie:* x en y op hetzelfde niveau betekent y en x op hetzelfde niveau en dus geldt symmetrie.

3 *Transitiviteit:* Als x en y op hetzelfde niveau liggen en y en z ook. Dan moet x ook op hetzelfde niveau liggen als z.

Tot slot heb ik nog een idee om alsnog met $\mathbb{Z}$ dit op te lossen. We moeten eerst een functie f opstellen met $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ waarbij

$$f = \begin{cases} 2x & \text{als } x \geq 0 \\ |2x+1| & \text{als } x < 0 \end{cases}$$

Dit zorgt ervoor dat we gewoon met $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ verder kunnen werken en dan dezelfde equivalentierelatie kunnen opstellen als hierboven. Ik weet niet of dit goed is...

Opgave 3.5

a) *Bewijs.* 1 *Reflexief:* Als $p = p$ dan moet $p' = p'$.
 2 *Symmetrie:* Als $p \sim q$ dan $p' = q' \implies q' = p' \implies q \sim p$
 3 *Transitiviteit:* Als $p \sim q \wedge q \sim r$ dan $p' = q'$ en $q' = r'$ waardoor $p' = r' \implies p \sim r$.

$\square$

b) Laat $p, q \in \mathbb{Z}[X]$ waarbij $p \neq q$ en $\overline{p} = \overline{q}$, dan geldt $f(\overline{p}) \neq f(\overline{q})$ maar dit is een tegenspraak want $\overline{p} = \overline{q}$. Dit betekent dat dit geen functie is, Aangezien voor elk argument hebben we een unieke waarde moeten hebben.

c) Laat $P = p(x) + c$ en $Q = q(x) + d$ met $P \neq Q$ en $P' = Q'$, dan:

$$\begin{aligned} g(\overline{P}) &= p(1) + c - (p(0) + c) \\ &= p(1) - p(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(\overline{Q}) &= q(1) + c - (q(0) + c) \\ &= q(1) - q(0) \end{aligned}$$

Het verschil tussen P en Q was de constante. De constante verdwijnt door de functie g en dus is deze wel goed gedefinieerd.

Opgave 3.6

Correct gedefinieerd

Neem $f : X/_{\sim} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ met $f(\overline{x}) := g(x)$, waarbij $g : X- > \mathbb{Z}_{\geq 0}$ met $g(x) = x \mod 2$. Beschouw $X \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ en stel de equivalentierelatie $(x \sim y)$ als $(x \mod 6) = (y \mod 6)$ op. Als we nu willekeurige $x, y \in \overline{x}$ representanten zouden selecteren dan $f(x) = f(y)$, aangezien voor elk element in $\overline{a}$ geldt dat het in dezelfde restklasse valt. Ofwel voor $\overline{0}$ kunnen we elk element schrijven als $2(x) + 0$, $\overline{1} \implies 2(x) + 1$, $\overline{2} \implies 2(x) + 2$, etc. Voorbeeld:

$$\begin{aligned} \overline{0} &= \{0, 6, 12, 18, 24, \dots\} \\ &= \{(2 \cdot 0), (2 \cdot 3), (2 \cdot 4), \dots\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{1} &= \{1, 7, 13, 19, \dots\} \\ &= \{(2 \cdot 0 + 1), (2 \cdot 3 + 1), (2 \cdot 6 + 1), \dots\} \end{aligned}$$

$$\overline{\vdots} = \{\dots\dots\dots\}$$

Incorrect gedefinieerd

Neem $f : X/_\sim \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ met $f(\overline{x}) := g(x)$ waarbij $g : X \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ met $g(x) = x \mod 2$. Beschouw $X \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ en stel de equivalentierelatie $x \sim y$ als $(x \mod 3) = (y \mod 3)$ op. Als we nu willekeurige $x, y \in \overline{x}$ representanten zouden selecteren dan $f(x) \neq f(y)$, want neem bijvoorbeeld $3, 6 \in \overline{0}$, dan $f(3) = 3 \mod 2 = \boxed{1}$ en $f(6) = 6 \mod 2 = \boxed{0}$. Hieruit volgt dus dat f geen functie is aangezien een argument meer dan één waarde kan vertegenwoordigen.

Opgave 3.7

Zij $(a, b), (c, d) \in X/_\sim$ en laat de vermenigvuldiging als volgt zijn:

$$\begin{aligned} (a,\ b) \cdot (c,\ d) &= (a - b)(c - d) \\ &= ac - ad - bc + bd \\ &= (ac + bd) - (ad + bc) \\ &= (ac + bd,\ ad + bc) \end{aligned}$$

We gaan nu laten zien dat de berekening representant onafhankelijk is. Neem $(ac+bd,\ ad+bc)$, en $(a'c'+b'd',\ a'd'+b'c')$ en kijk of:

$$\begin{gathered} (ac + bd,\ ad + bc) \sim (a'c' + b'd',\ a'd' + b'c') \\ \Downarrow \\ ac + bd + a'd' + b'c' = ad + bc + a'c' + b'd' \\ \Downarrow \\ (ac + bd) - (ad + bd) = (a'c' + b'd') - (a'd' + b'c') \\ \Downarrow \\ (ac + bd, ad + bd) = (a'c' + b'd', a'd' + b'c') \end{gathered}$$

Hieruit volgt dat het representant onafhankelijk is. Ik twijfel nog over deze uitwerking..

Opgave 3.8

Zij $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\neq 0}$ met $f(x) = (x, 1)$, waarbij we een equivalentierelatie opstellen:

$$(a, b) \sim (c, d) \iff ad = bc$$

Opstellen van equivalentierelatie op $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

1 *Reflexief:* Neem $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\neq 0}$ dan:

$$\begin{aligned} (a, b) &\sim (a, b) \\ &\Downarrow \\ ab &= ba \\ ab &= ab \quad (\because \text{Vermedigvuldiging is commutatief in } \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

De relatie is dus reflexief.

2 *Symmetrie:* Als $(a, b) \sim (c, d)$, waarbij (a, b) en $(c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dan:

$$\begin{aligned} ad &= bc \\ &\Downarrow \\ bc &= ad \\ &\Downarrow \\ cb &= da \quad (\because \text{Vermedigvuldiging is commutatief in } \mathbb{Z}) \\ &\Downarrow \\ (c, d) &\sim (a, b) \end{aligned}$$

De relatie is dus symmetrisch.

3 *Transitiviteit:* Als $(a,b) \sim (c,d) \wedge (c,d) \sim (e,f)$ dan $(a,b) \sim (e,f)$

$$
\begin{gathered}
(a,b) \sim (c,d) \implies ad = bc \\
\Downarrow \\
(c,d) \sim (e,f) \implies cf = de \\
\Downarrow \\
ad(f) = bc(f) \\
\Downarrow \\
ad(f) = b(de) \\
\Downarrow \\
af = be \\
\Downarrow \\
(a,b) \sim (e,f)
\end{gathered}
$$

De relatie is dus transitief.

Opstellen optelling in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

Neem (a,b) en $(c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dan definiëren we een optelling:

$$(a,b) + (c,d) = (ad + bc, bd)$$

Opstellen vermenigvuldiging in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

Neem (a,b) en $(c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dan definiëren we een vermenigvuldiging:

$$(a,b) \cdot (c,d) = (ac, bd)$$

Representant-onafhankelijkheid

Neem $(a,b) \sim (a',b')$ en $(c,d), \sim (c',d')$ dan moet gelden:

- *Optelling:*

$$
\begin{gathered}
(a,b) + (c,d) = (ad + bc, bd) \sim (a',b') + (c',d') = (a'd' + b'c', b'd') \\
\Downarrow \\
(ad + bc, bd) \sim (a'd' + b'c', b'd') \\
\Downarrow \\
((ad + bc)(b'd') = (bd)(a'd' + b'c'))
\end{gathered}
$$

Nu moeten we nog bewijzen of de equivalentierelatie representant-onafhankelijk is. Neem $(a,b) \sim (c,d)$ en $(a',b') \sim (c',d')$ dan:

$$a$$

Waarbij de interpretatie als volgt is:

$$\overline{(a,b)} = \frac{a}{b}$$

En nu hebben we $\mathbb{Q}$?