

## Caleidoscoop Hoofdstuk 3

---

### 3 Equivalentierelaties

#### Opgave 3.1

a) Stel de volgende equivalentierelatie  $\mathcal{R}$  op, waarbij  $a \sim b \iff a = b$ .

1 *Reflexief*: Bekijk  $a\mathcal{R}a \implies a = a$

2 *Symmetrie*: Bekijk  $(a\mathcal{R}b \implies b\mathcal{R}a) \implies a = b \implies b = a$

3 *Transitiviteit*: Bekijk  $((a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}c) \implies a\mathcal{R}c) \implies (a = b \wedge b = c) \implies a = c$

b) Neem de volgende equivalentierelatie  $\mathcal{R}$  op, waarbij  $a \sim b \iff a \bmod 42 = b \bmod 42$ .

1 *Reflexief*:  $a \bmod 42 = a \bmod 42$

2 *Symmetrie*:  $(a \bmod 42 = b \bmod 42) \implies b \bmod 42 = a \bmod 42$

3 *Transitiviteit*:  $(a \bmod 42 = b \bmod 42 \wedge b \bmod 42 = c \bmod 42) \iff a \bmod 42 = c \bmod 42$

c) *Bewijs. X Aanname*: Ik stel dat  $A$  een verzameling is waarbij  $A \neq \emptyset$ , en  $A/\sim = \emptyset$ . Aangezien  $A \neq \emptyset$  bestaat er een  $a \in A$ , maar als we een equivalentierelatie hebben, dan volgt vanuit reflexiviteit dat  $a \sim a$ . Als  $a \sim a$  dan moet er een equivalentieklasse  $\bar{a} = \{b \in A : b \sim a\}$  bestaan waarbij  $a \in \bar{a}$ , maar  $\bar{a} \in A/\sim$ . Dit is een tegenspraak want we stelde dat  $A/\sim = \emptyset$ , en dus kan  $A/\sim$  niet leeg zijn.  $\square$

#### Opgave 3.2

a)  $X$  wordt gepartitioneerd in  $X/\sim$ , omdat  $|X/\sim| = \infty =$  zit in elke equivalentieklasse minstens 1 representant die in  $X$  moet liggen. Dit betekent dus dat  $|X| \geq |X/\sim| = \infty$ .

b) • *Geval 1*:  $(|X/\sim|) = (n \wedge |X| = \infty)$ : Neem  $X = \mathbb{Z}$  met  $x \sim y$  als  $x \equiv y \bmod n$ , dan heeft  $|X/\sim|$  precies  $n$  elementen namelijk:  $\underbrace{\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{n-1}\}}_{n \text{ elementen}}$ . Hieruit volgt dus dat  $|X| = \infty$ , en  $|X/\sim| = n$ .

• *Geval 2*:  $(|X/\sim| = n) \wedge (|X| = n)$ : Laat  $X = \mathbb{Z}_k$  en maak een equivalentie relatie waarbij  $x \sim y \iff x = y$ . Dan heeft onder reflexiviteit iedere  $x \in X$  een equivalentieklasse, namelijk:  $X/\sim = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \bar{k-1}\}$ . Dit betekent dus dat  $|X| = k$  en  $|X/\sim| = k$ .

c) Dan moet  $X = \emptyset$ ,

*Bewijs*. Stel dat  $|X| = n$  en  $|X/\sim| = 0$  dan geldt  $\forall x \in X$  dat  $x \in \bar{x}$ , maar dit kan niet want  $|X/\sim| = 0$ , en dus moet  $|X| = 0$ .  $\square$

#### Opgave 3.3

a) 1 *Reflexief*:  $a - a = 0$  en  $0 \in W$ , dus reflexief. ( $\because 0 \in W$ )

2 *Symmetrie*: als  $a - b \in W$  dan  $(-1)(a - b) \in W \iff b - a \in W$  ( $\because v \in W \implies \lambda v \in W$ )

3 *Transitiviteit*:  $a - b + b - c = a - c \in W$  ( $\because v, w \in W \implies v + w \in W$ )

b) Neem een  $a \in V$  dan geldt voor alle  $b \in V$ , dat hij equivalent is aan  $a$ , en dus heeft de  $V/\sim$  slechts één equivalentieklasse.

c) Neem een willekeurige  $\bar{a} \in V/\sim$ , dan moet  $\bar{a}$  zichzelf bevatten, want  $a \sim b \iff a - b \in \{0\} = W$ , en dus  $a = b$ . Dit betekent dat elk element in  $V$  een eigen equivalentieklasse heeft met zichzelf.

### Opgave 3.4

Ik heb er geen kunnen vinden als we vanuit  $\mathbb{Z}$  dit proberen op te lossen. Als we vanuit  $\mathbb{Z}_{\geq 0}$  starten dan kan ik het wel oplossen.

Laat  $x \sim y$  met  $x, y \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  als  $x$  en  $y$  op hetzelfde niveau  $n$  liggen in Pascal's driehoek.

- 1 *Reflexief*:  $x$  ligt op hetzelfde niveau als  $x$  en dus reflexief.
- 2 *Symmetrie*:  $x$  en  $y$  op hetzelfde niveau betekent  $y$  en  $x$  op hetzelfde niveau en dus geldt symmetrie.
- 3 *Transitiviteit*: Als  $x$  en  $y$  op hetzelfde niveau liggen en  $y$  en  $z$  ook. Dan moet  $x$  ook op hetzelfde niveau liggen als  $z$ .

Tot slot heb ik nog een idee om alsnog met  $\mathbb{Z}$  dit op te lossen. We moeten eerst een functie  $f$  opstellen met  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$  waarbij

$$f = \begin{cases} 2x & \text{als } x \geq 0 \\ |2x + 1| & \text{als } x < 0 \end{cases}$$

Dit zorgt ervoor dat we gewoon met  $\mathbb{Z}_{\geq 0}$  verder kunnen werken en dan dezelfde equivalentierelatie kunnen opstellen als hierboven. Ik weet niet of dit goed is...

### Opgave 3.5

- a) *Bewijs*.
  - 1 *Reflexief*: Als  $p = p$  dan moet  $p' = p'$ .
  - 2 *Symmetrie*: Als  $p \sim q$  dan  $p' = q' \implies q' = p' \implies q \sim p$
  - 3 *Transitiviteit*: Als  $p \sim q \wedge q \sim r$  dan  $p' = q'$  en  $q' = r'$  waardoor  $p' = r' \implies p \sim r$ .

□

- b) Laat  $p, q \in \mathbb{Z}[X]$  waarbij  $p \neq q$  en  $\bar{p} = \bar{q}$ , dan geldt  $f(\bar{p}) \neq f(\bar{q})$  maar dit is een tegenspraak want  $\bar{p} = \bar{q}$ . Dit betekent dat dit geen functie is, Aangezien voor elk argument hebben we een unieke waarde moeten hebben.
- c) Laat  $P = p(x) + c$  en  $Q = q(x) + d$  met  $P \neq Q$  en  $P' = Q'$ , dan:

$$\begin{aligned} g(\bar{P}) &= p(1) + c - (p(0) + c) \\ &= p(1) - p(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(\bar{Q}) &= q(1) + c - (q(0) + c) \\ &= q(1) - q(0) \end{aligned}$$

Het verschil tussen  $P$  en  $Q$  was de constante. De constante verdwijnt door de functie  $g$  en dus is deze wel goed gedefinieerd.

### Opgave 3.6

#### Correct gedefinieerd

Neem  $f : X/\sim \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$  met  $f(\bar{x}) := g(x)$ , waarbij  $g : X \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$  met  $g(x) = x \bmod 2$ . Beschouw  $X \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  en stel de equivalentierelatie  $(x \sim y)$  als  $(x \bmod 6) = (y \bmod 6)$  op. Als we nu willekeurige  $x, y \in \bar{x}$  representanten zouden selecteren dan  $f(x) = f(y)$ , aangezien voor elk element in  $\bar{a}$  geldt dat het in dezelfde restklasse valt. Ofwel voor  $\bar{0}$  kunnen we elk element schrijven als  $2(x) + 0$ ,  $\bar{1} \implies 2(x) + 1$ ,  $\bar{2} \implies 2(x) + 2$ , etc. Voorbeeld:

$$\begin{aligned} \bar{0} &= \{0, 6, 12, 18, 24, \dots\} \\ &= \{(2 \cdot 0), (2 \cdot 3), (2 \cdot 4), \dots\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{1} &= \{1, 7, 13, 19, \dots\} \\ &= \{(2 \cdot 0 + 1), (2 \cdot 3 + 1), (2 \cdot 6 + 1), \dots\} \end{aligned}$$

$$\vdots = \{\dots\dots\dots\}$$

### Incorrect gedefinieerd

Neem  $f : X/\sim \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$  met  $f(\bar{x}) := g(x)$  waarbij  $g : X \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$  met  $g(x) = x \bmod 2$ . Beschouw  $X \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  en stel de equivalentierelatie  $x \sim y$  als  $(x \bmod 3) = (y \bmod 3)$  op. Als we nu willekeurige  $x, y \in \bar{x}$  representanten zouden selecteren dan  $f(x) \neq f(y)$ , want neem bijvoorbeeld  $3, 6 \in \bar{0}$ , dan  $f(3) = 3 \bmod 2 = \boxed{1}$  en  $f(6) = 6 \bmod 2 = \boxed{0}$ . Hieruit volgt dus dat  $f$  geen functie is aangezien een argument meer dan één waarde kan vertegenwoordigen.

### Opgave 3.7

Zij  $(a, b), (c, d) \in X/\sim$  en laat de vermedigvuldiging als volgt zijn:

$$\begin{aligned}(a, b) \cdot (c, d) &= (a - b)(c - d) \\ &= ac - ad - bc + bd \\ &= (ac + bd) - (ad + bc) \\ &= (ac + bd, ad + bc)\end{aligned}$$

We gaan nu laten zien dat de berekening representant onafhankelijk is. Neem  $(ac + bd, ad + bc)$ , en  $(a'c' + b'd', a'd' + b'c')$  en kijk of:

$$\begin{aligned}(ac + bd, ad + bc) &\sim (a'c' + b'd', a'd' + b'c') \\ &\Downarrow \\ ac + bd + a'd' + b'c' &= ad + bc + a'c' + b'd' \\ &\Downarrow \\ (ac + bd) - (ad + bc) &= (a'c' + b'd') - (a'd' + b'c') \\ &\Downarrow \\ (ac + bd, ad + bc) &= (a'c' + b'd', a'd' + b'c')\end{aligned}$$

Hieruit volgt dat het representant onafhankelijk is. Ik twijfel nog over deze uitwerking..

### Opgave 3.8

Zij  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\neq 0}$  met  $f(x) = (x, 1)$ , waarbij we een equivalentierelatie opstellen:

$$(a, b) \sim (c, d) \iff ad = bc$$

1 *Reflexief*: Neem  $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\neq 0}$  dan:

$$\begin{aligned}(a, b) &\sim (a, b) \\ &\Downarrow \\ ab &= ba \\ ab &= ab \quad (\because \text{Vermedigvuldiging is commutatief in } \mathbb{Z})\end{aligned}$$

De relatie is dus reflexief.

2 *Symmetrie*: Als  $(a, b) \sim (c, d)$  dan:

$$\begin{aligned}ad &= bc \\ &\Downarrow \\ bc &= ad \\ &\Downarrow \\ cb &= da \quad (\because \text{Vermedigvuldiging is commutatief in } \mathbb{Z}) \\ &\Downarrow \\ (c, d) &\sim (a, b)\end{aligned}$$

De relatie is dus symmetrisch.

3 *Transitiviteit:* Als  $(a, b) \sim (c, d) \wedge (c, d) \sim (e, f)$  dan  $(a, b) \sim (e, f)$

$$\begin{aligned}
 (a, b) \sim (c, d) &\implies ad = bc \\
 &\Downarrow \\
 (c, d) \sim (e, f) &\implies cf = de \\
 &\Downarrow \\
 ad(f) &= bc(f) \\
 &\Downarrow \\
 ad(f) &= b(de) \\
 &\Downarrow \\
 af &= be \\
 &\Downarrow \\
 (a, b) &\sim (e, f)
 \end{aligned}$$

De relatie is dus transitief.

Nu moeten we nog bewijzen of de equivalentierelatie representantonafhankelijk is. Neem  $(a, b) \sim (c, d)$  en  $(a', b') \sim (c', d')$  dan:

$$a$$

Waarbij de interpretatie als volgt is:

$$\overline{(a, b)} = \frac{a}{b}$$

En nu hebben we  $\mathbb{Q}$ ?