Lineaire Algebra

Jasper Vos **Huiswerkset 8** 4 november 2025
Studentnr: *s2911159*

Opgave 7.1.8

Idee

We moeten laten zien dat $f_0, f_1, \dots f_n$ lineair onafhankelijk zijn. Dit kunnen we doen door een matrix A te construeren. Deze matrix A bevat functies als rijen en de punten worden geëvalueerd als kolommen. Tot slot proberen we matrix A met rij-reductie naar de identiteitsmatrix te krijgen. Dit toont aan dat de rang $n+1$ is en dus $n+1$ functies lineair onafhankelijk zijn.

Constructie

Stap 1: Matrix opstellen

Definieer matrix A met $A_{ij} = f_i(a_j)$:

$$A = \begin{pmatrix} f_0(a_0) & f_0(a_1) & f_0(a_2) & \dots & f_0(a_n) \\ f_1(a_0) & f_1(a_1) & f_1(a_2) & \dots & f_1(a_n) \\ f_2(a_0) & f_2(a_1) & f_2(a_2) & \dots & f_2(a_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n(a_0) & f_n(a_1) & f_n(a_2) & \dots & f_n(a_n) \end{pmatrix}$$

Stap 2: Voorwaarde toepassen

Gegeven is $f_i(a_j) = \begin{cases} 1 & \text{, als } j \leq i \\ 0 & \text{, als } j > i \end{cases}$, Herschrijf de matrix A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Stap 3: Rij-reductie

Met de operatie $R_2 = R_2 - R_1$, vervolgens $R_3 = R_3 - R_2 - R_1$, etc. Kunnen we I_{n+1} construeren.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 = R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \dots \xrightarrow{R_{n+1} = R_{n+1} - R_n - \dots - R_1} \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Conclusie

Doordat we I_{n+1} hebben geconstrueerd betekent dit dat we een matrix A hebben met een rang van $n+1$, en dus geldt $f_0, f_1, \dots f_n$ lineair onafhankelijk.

Opgave 7.3.3(1)

Idee

We proberen de dimensie te vinden door de basis van $V = \ker(a)$ te vinden.

Basis van V

Neem $v \in V$, dan moet $\langle v, a\rangle = 0$ vanwege $V = a^{\perp}$.

$$v = \langle (v_1, v_2, v_3, v_4),\ (1,1,1,1)\rangle = 0 \iff v_1 = -v_2 - v_3 - v_4$$

De algemene oplossing is:

$$v = v_2(-1,1,0,0) + v_3(-1,0,1,0) + v_4(-1,0,0,1)$$

Met vrije parameters $v_2,\ v_3,\ v_4 \in \mathbb{R}$.
Een basis voor V is dus:

$$\boxed{V = L\Big((-1,1,0,0),(-1,0,1,0),(-1,0,0,1)\Big)}$$

Conclusie

De basis bevat 3 vectoren, en dus $\dim(V) = 3$.

Opgave 7.3.3(2)

Idee

We checken of $v_1,\ v_2$ lineair onafhankelijk zijn door de vectoren als rijen in een matrix te zetten. Als de rang van deze matrix gelijk aan 2 is dan zijn de vectoren lineair onafhankelijk.

Rij-reductie

Zet v_1 als R_1 en v_2 als R_2 en reduceer:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & -4 \end{pmatrix} &\xrightarrow{R_2 = R_1 + R_2} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{R_1 \rightleftarrows R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{R_2 = R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & -3 & 6 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{R_2 = -\frac{1}{3}R_2} \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}}
\end{aligned}$$

Conclusie

Met rij-reductie zien we dus dat de matrix 2 pivots heeft en daarmee een rang van 2. Hieruit volgt dat $v_1,\ v_2$ lineair onafhankelijk zijn.

Opgave 7.3.3(3)

Idee

Aangezien we weten dat $dim(V) = 3$, hebben we 3 onafhankelijke vectoren nodig voor een basis. We hebben al v_1 en v_2 uit *Opgave 7.3.3(2)*, en kiezen $v_3 = (-1, 0, 0, 1)$ die we hebben gevonden in *Opgave 7.3.3(1)*. We stellen de matrix op en reduceren om te verifiëren of de rang gelijk is aan 3.

Rij-reductie

We zetten de vectoren $v_1,\ v_2$, en v_3 in de matrix en reduceren:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 = R_3 + R_1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 = R_2 + 2R_1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 = -R_1,\ R_2 = -\frac{1}{3}R_2} \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}$$

Conclusie

De matrix heeft 3 pivots en dus is de rang van de matrix gelijk aan 3 net zoals $\dim(V) = 3$. De vectoren zijn lineair onafhankelijk en vormen de basis:

$$\boxed{V = \Big((-1, 0, 0, 1),\ (2, -3, -1, 2),\ (1, 0, 1, -2)\Big)}$$