Caleidoscoop Hoofdstuk 3

4 Reele getallen

4.1

a) *Bewijs.* We kunnen de reële getallen zien als equivalentie-klassen van de verzameling Cauchy-rijen, waarbij:

$$a_n \sim b_n \iff \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

Zij a_n, b_n Cauchy-rijen met:

$$a_n = \{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \dots\}$$
$$b_n = \{0, \frac{3}{10}, \frac{33}{100}, \dots\}$$

Laten we nu de stelling bekijken:

$$\forall \epsilon \in \mathbb{Q}_{>0}\ \exists N \in \mathbb{Z}_{>0} \text{ met } i \geq N \ \text{ zodanig dat } |a_i - b_i| < \epsilon$$

We moeten dus voor alle $\epsilon > 0$ een bepaalde N vinden zodat het verschil tussen de rijen arbitrair klein kan worden, en dus zeker kleiner dan ϵ.

Bekijk $|a_i - b_i|$, dan:

$$\begin{aligned}
|a_i - b_i| &= \left|\frac{1}{3} - \frac{3(10^i - 1)}{9 \cdot 10^i}\right| \\
&= \left|\frac{1}{3} - \frac{10^i - 1}{3 \cdot 10^i}\right| \\
&= \left|\frac{10^i - (10^i - 1)}{3 \cdot 10^i}\right| \\
&= \left|\frac{1}{3 \cdot 10^i}\right| \\
&= \frac{1}{3 \cdot 10^i} \quad (\text{Merk op } \frac{1}{3 \cdot 10^i} > 0)
\end{aligned}$$

Nu laten we dit kleiner worden dan ϵ en dus:

$$\frac{1}{3 \cdot 10^i} < \epsilon$$
$$\frac{1}{3\epsilon} < 10^i$$

Dus neem nu $10^N > 10^i$, dan bestaat er dus voor alle $\epsilon > 0$ een N waarvoor de rijen arbitrair dichtbij elkaar liggen. Dit betekent dus dat $a_n \sim b_n$ en dus zit b_n in de equivalentie-klassen van $\frac{1}{3}$, ofwel $0.33333333 \dots = \frac{1}{3}$. □