

3 Equivalentierelaties

3.1

a) Stel de volgende equivalentierelatie \mathcal{R} op, waarbij $a \sim b \iff a = b$.

1 *Reflexief*: Bekijk $a\mathcal{R}a \implies a = a$

2 *Symmetrie*: Bekijk $(a\mathcal{R}b \implies b\mathcal{R}a) \implies a = b \implies b = a$

3 *Transitiviteit*: Bekijk $((a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}c) \implies a\mathcal{R}c) \implies (a = b \wedge b = c) \implies a = c$

b) Neem de volgende equivalentierelatie \mathcal{R} op, waarbij $a \sim b \iff a \bmod 42 = b \bmod 42$.

1 *Reflexief*: $a \bmod 42 = a \bmod 42$

2 *Symmetrie*: $(a \bmod 42 = b \bmod 42) \implies b \bmod 42 = a \bmod 42$

3 *Transitiviteit*: $(a \bmod 42 = b \bmod 42 \wedge b \bmod 42 = c \bmod 42) \iff a \bmod 42 = c \bmod 42$

c) *Bewijs*. **Aanname** : Ik stel dat A een verzameling is waarbij $A \neq \emptyset$, en $A/\sim = \emptyset$. Aangezien $A \neq \emptyset$ bestaat er een $a \in A$, maar als we een equivalentierelatie hebben betekent dit $a \sim a$. Als $a \sim a$ dan moet er een equivalentieklasse $\bar{a} = \{b \in A : b \sim a\}$ bestaan waarbij $a \in \bar{a}$, maar $\bar{a} \in A/\sim$. Dit is een tegenspraak want we stelde dat $A/\sim = \emptyset$, en dus kan A/\sim niet leeg zijn. \square