

Opgave 9.4.2(1)

We hebben de lijn $L \subset \mathbb{R}^2$ met $y = 2x$ en een orthogonale projectie $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ op L . Lijn $L = \text{span}\{(1, 2)\}$, dus richtingsvector $a = (1, 2)$ met $\langle a, a \rangle = 5$.

Bereken projectie van basisvectoren:

$$\begin{aligned}\pi(e_1) &= \frac{\langle e_1, a \rangle}{\langle a, a \rangle} \cdot (1, 2) = \frac{1 \cdot 1 + 0 \cdot 2}{1 \cdot 1 + 2 \cdot 2} \cdot (1, 2) = \frac{1}{5}(1, 2) = \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right) \\ \pi(e_2) &= \frac{\langle e_2, a \rangle}{\langle a, a \rangle} \cdot (1, 2) = \frac{0 \cdot 1 + 1 \cdot 2}{1 \cdot 1 + 2 \cdot 2} \cdot (1, 2) = \frac{2}{5}(1, 2) = \left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right)\end{aligned}$$

Gebruik de vectoren als kolommen in $[\pi]_B^B$:

$$[\pi]_B^B = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Opgave 9.4.2(2)

Kies $v_1 = (1, 2)$ voor L en $v_2 = (-2, 1)$ voor L^\perp .

Check: $(1, 2) \cdot (-2, 1) = -2 + 2 = 0$

Basis $C = (v_1, v_2)$.

Projectie behoudt component langs L , zet component langs L^\perp op 0:

$$[\pi]_C^C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Opgave 9.4.2(3)

Basiswisselmatrix P van C naar B :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Bereken $[\pi]_B^B = P \cdot [\pi]_C^C \cdot P^{-1}$:

$$\begin{aligned}[\pi]_B^B &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$[\pi]_B^B = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

Komt overeen met (1).

Opgave 10.1.2

Voor bovendriehoeksmatrix A geldt: $\det(A) = \prod_{i=1}^n a_{ii}$

Bewijs via inductie

Bovendriehoeksmatrix heeft vorm:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & * & \dots & * \\ 0 & a_{22} & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Basisstap $n = 1$

$A = (a_{11})$, dus $\det(A) = a_{11}$

Inductiestap

Stel het geldt voor $(n-1) \times (n-1)$ matrices.

Laplace-expansie naar eerste kolom:

$$\det(A) = a_{11} \cdot \det(A_{11}) + 0 + \dots + 0$$

Submatrix A_{11} is ook bovendriehoeks met diagonaal (a_{22}, \dots, a_{nn}) .

Via inductiehypothese:

$$\det(A_{11}) = a_{22} \cdot a_{33} \cdot \dots \cdot a_{nn}$$

Dus:

$$\det(A) = a_{11} \cdot (a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}) = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

Conclusie

$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$