2. Fundamentos de Teoría de Probabilidades

Estadística Computacional - 2025

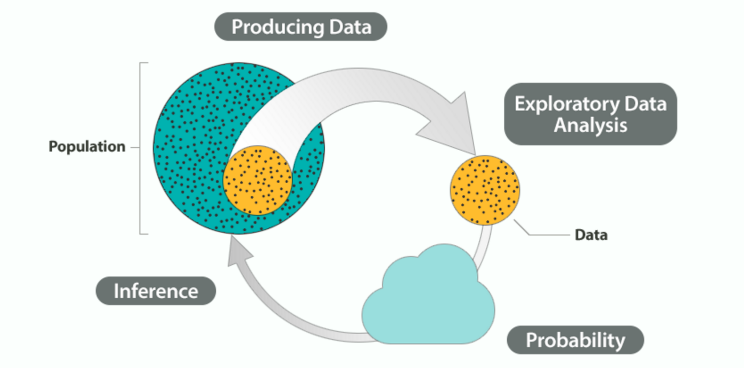
Ricardo Ñanculef, Carolina Saavedra
jnancu@inf.utfsm.cl, *carolina.saavedra@usm.cl*

Departamento de Informática UTFSM

Departamento de Informática
Universidad Técnica Federico Santa María

¿Cómo estudiaremos la Estadística?

- 3 Partes: Estadística Descriptiva, Teoría de Probabilidades, Inferencia.
- Estudio del azar e incertidumbre en cualquier situación.



Outline

I. Eventos y Medidas de Probabilidad

Probabilidades

Definición: Experimento/Fenómeno Aleatorio

Un fenómeno o experimento *aleatorio* es cualquier acción que al observarlo obtenemos un resultado **incierto**. Para poder **modelar** esta incerteza necesitamos que se cumplan algunas condiciones:

1. El conjunto de todos los resultados posibles es conocido: Ω.
2. Cada ejecución del experimento genera **un solo** resultado, denominado *un resultado simple*: $\omega \in \Omega$.
3. El experimento puede repetirse bajo las mismas condiciones.

Probabilidades

Definición: Experimento/Fenómeno Aleatorio

Un fenómeno o experimento *aleatorio* es cualquier acción que al observarlo obtenemos un resultado **incierto**. Para poder **modelar** esta incerteza necesitamos que se cumplan algunas condiciones:

1. El conjunto de todos los resultados posibles es conocido: Ω.
2. Cada ejecución del experimento genera **un solo** resultado, denominado *un resultado simple*: $\omega \in \Omega$.
3. El experimento puede repetirse bajo las mismas condiciones.

Definición: Espacio Muestral Ω

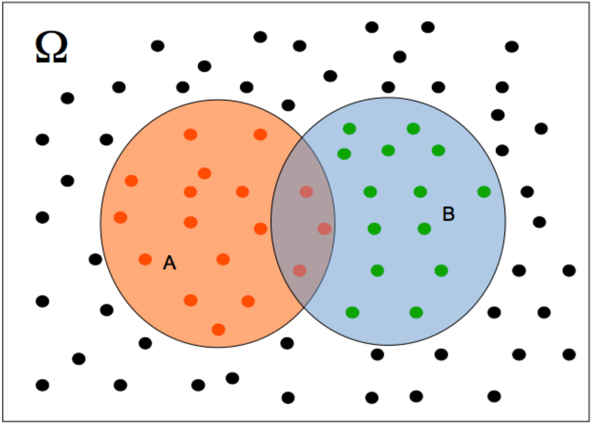
Conjunto de todos los posibles resultados del experimento. Si Ω es finito o numerable, éste se dice *discreto*. En otro caso Ω se dice *continuo*.

- Ω puede ser cualquier conjunto, pero el caso discreto más frecuente es $\Omega \subset Z^d$. El caso continuo más frecuente es $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. En este caso d se denomina la dimensión del espacio muestral.

Probabilidades

Definición: Evento $A, B, C, \ldots$

Un evento es cualquier **subconjunto** de Ω. (*recopilación de resultados individuales*)



Probabilidades

Definición Axiomática de Probabilidad

Sea $\mathcal{A}$ una colección de subconjuntos de Ω que contiene Ω y $\emptyset$. Entonces, $P : \mathcal{A} \to [0, 1]$ se dice una medida de probabilidad si y sólo si:

1. $P(\Omega) = 1$
2. $P(\emptyset) = 0$.
3. $\forall A, B$ tal que $A \cap B = \emptyset$: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
   - Genérico para eventos disjuntos entre sí, $\forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$: $P(\cup_i A_i) = \sum_i P(A_i)$.

Probabilidades

Definición Axiomática de Probabilidad

Sea $\mathcal{A}$ una colección de subconjuntos de Ω que contiene Ω y $\emptyset$. Entonces, $P : \mathcal{A} \to [0, 1]$ se dice una medida de probabilidad si y sólo si:

1. $P(\Omega) = 1$
2. $P(\emptyset) = 0$.
3. $\forall A, B$ tal que $A \cap B = \emptyset$: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
   - Genérico para eventos disjuntos entre sí, $\forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$: $P(\cup_i A_i) = \sum_i P(A_i)$.

Observaciones

- Recordar que $P(A)$ representa conceptualmente la probabilidad de que observemos un elemento que esta contenido en A.
- $\forall A$: $P(A^c) = 1 - P(A)$.
- A^c representa la no ocurrencia de un elemento de A.
- $A \cap B$ representa la ocurrencia de un elemento que esta en A y en B.
- $A \cup B$ representa la ocurrencia de un elemento que esta en A ó en B.

Probabilidades

Definición Clásica de Probabilidad (aka P. Teórica)

Sea Ω un *espacio muestral finito*. Entonces, $\forall A \subset \Omega$ la probabilidad teórica de A se calcula como

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

- "casos favorables" / "casos totales".
- Asume que los resultados son equi-probables.
- Ejemplo: lanzamiento de un dado. Determine el espacio muestral y demuestre que la probabilidad de obtener un número par es 0.5.

Probabilidades

Definición Frecuentista de Probabilidad (aka P. Empírica)

Sea m el número de veces que repetimos nuestro experimento aleatorio y $m(A)$ el número de veces que observamos $A \subset \Omega$, es decir, un resultado $\omega \in A$. Entonces se define la probabilidad empírica de A como

$$P(A) = \lim_{m \to \infty} \frac{m(A)}{m}$$

- ¿Existe este límite? Ley de los grandes números establece que sí existe (definiendo un tipo especial de límite).

Definición Bayesiana de Probabilidad (aka P. Subjetiva)

$P(A)$ es simplemente una medida subjetiva de la certeza con que observamos A.

Probabilidades

- De las propiedades que, por construcción, satisface una medida de probabilidad P, podemos derivar las siguientes:

Propiedad (Probabilidad de la Diferencia de Eventos)

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad y sean A, B dos eventos cualesquiera. Entonces,

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \ .$$

Probabilidades

- De las propiedades que, por construcción, satisface una medida de probabilidad P, podemos derivar las siguientes:

Propiedad (Probabilidad de la Diferencia de Eventos)

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad y sean A, B dos eventos cualesquiera. Entonces,

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \ .$$

Demostración: Para cualquier evento A y cualquier evento B, podemos escribir A de la siguiente forma:

$$A = (A - B) \cup (A \cap B) \ .$$

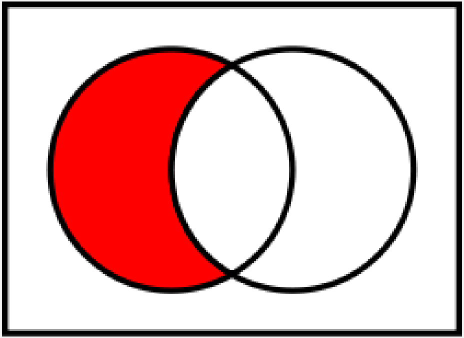
Notemos ahora que $(A - B)$ y $(A \cap B)$ son disjuntos (por definición de la diferencia entre dos conjuntos). Por la propiedad 3 de una medida de probabilidad P, concluimos que

$$P(A) = P(A - B) + P(A \cap B) \ ,$$

desde donde se obtiene el resultado. $\square$

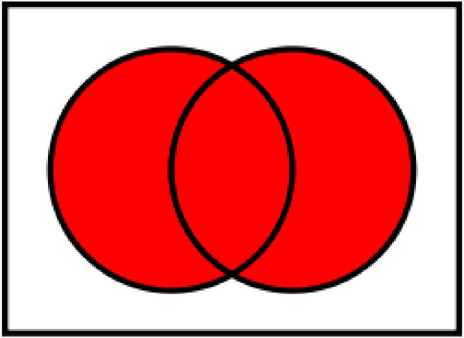
Probabilidades

Diferencia de Eventos $A - B$



Probabilidades

Unión de Eventos $A \cup B$



Probabilidades

Propiedad (Probabilidad de la Unión de Eventos)

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad y sean A, B dos eventos cualesquiera. Entonces,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Probabilidades

Propiedad (Probabilidad de la Unión de Eventos)

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad y sean A, B dos eventos cualesquiera. Entonces,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Demostración: Notemos que la unión de dos eventos cualesquiera la podemos escribir como sigue

$$(A \cup B) = (A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B) \; .$$

Notamos ahora que los eventos $(A - B), (B - A), (A \cap B)$ son disjuntos. Obtenemos, por la propiedad 3 de P,

$$P(A \cup B) = P(A - B) + P(B - A) + P(A \cap B) \; .$$

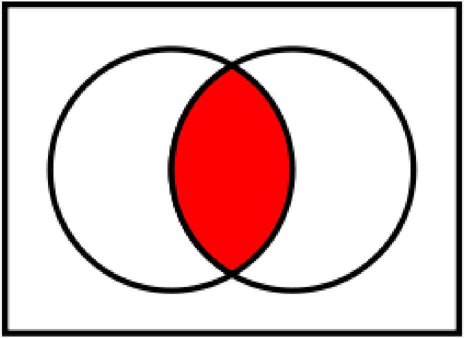
Usando el teorema anterior,

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(B \cap A) + P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \; . \end{aligned}$$

como se deseaba probar. $\square$

Probabilidades

Intersección de Eventos $A \cap B$



Probabilidades

Propiedad (Probabilidad de la Intersección de Eventos)

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad y sean A, B dos eventos cualesquiera. Entonces,

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

Demostración: Tarea.

Probabilidades

Ejercicio

Suponga que la probabilidad de que un estudiante UTFSM consuma café es 0.9, la probabilidad de que consuma té es 0.4 y la probabilidad de que consuma ambos es 0.6. Si seleccionamos un estudiante al azar.

- ¿Cuál es la probabilidad de que NO beba café?
- ¿Cuál es la probabilidad de que beba café ó té?.

Probabilidades

Ejercicio

Un estudiante realiza dos exámenes en un mismo día. La probabilidad de que apruebe el primero es 0.6. La probabilidad de que apruebe el segundo es 0.8; y la de que apruebe los dos es 0.5. Calcule:

- La probabilidad de que apruebe al menos uno de los dos exámenes.
- La probabilidad de que no apruebe ninguno.

Outline

II. Técnicas de Conteo

Outline

Técnicas de Conteo

Conteo y Medida de Probabilidad Teórica

Si Ω es finito, y todos los resultados elementales $\omega \in \Omega$ son igualmente probables, la medida de probabilidad "natural" es la medida de probabilidad teórica,

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Observación: Adoptar esta medida reduce el cálculo de probabilidades a contar los elementos de A y de Ω.

Técnicas de Conteo

Regla del Producto

Sea A el conjunto de pares ordenados de la forma (o_1, o_2) donde o_1 se puede elegir de un conjunto O_1 y o_2 de un conjunto O_2. Entonces,

$$|A| = |O_1| \cdot |O_2| \ .$$

- $(o_1, o_2) \neq (o_2, o_1)$.
- ¿De cuántas formas distintas se puede elegir $a \in A$?: De $n_1 \times n_2$ formas, donde $n_1 = |O_1|$ y $n_2 = |O_2|$.

Regla del Producto General

Sea A el conjunto de las tuplas de la forma $(o_1, o_2, \ldots, o_n)$ donde cada o_i se puede elegir de un conjunto O_i. Entonces,

$$|A| = |O_1| \cdot |O_2| \cdot |O_3| \ldots \cdot |O_n| \ .$$

Técnicas de Conteo

Permutaciones

Sea A un conjunto de n elementos. ¿De cuántas formas distintas podemos elegir k elementos de A si **consideramos el orden** en que los seleccionamos?

$$P_{k,n} = \frac{n!}{(n-k)!} \ .$$

Ejemplo

Dado un conjunto de $n = 10$ personas. ¿De cuántas formas distintas podemos formar un equipo de 4 personas? Todas ocuparán cargos distintos.

$$P_{4,10} = \frac{10!}{6!} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040 \ .$$

¿Clave de 4 dígitos? ¿Si sé cuales son los 4 dígitos?

Técnicas de Conteo

Combinaciones

Sea A un conjunto de n elementos. ¿De cuántas formas distintas podemos elegir k elementos de A si el **orden es irrelevante** en la selección?

$$C_{k,n} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \ .$$

Ejemplo

Dado un conjunto de $n = 10$ personas. ¿De cuántas formas podemos formar un comité de 4 personas distintas?

$$C_{4,10} = \binom{10}{4} = \frac{10!}{6!4!} = 210 \ .$$

Técnicas de Conteo

Permutaciones

El número de formas en que se puede elegir una tupla o lista de k objetos $o_1, o_2, \ldots, o_k$ de un total de n (cuando el orden importa) se anota $P_{k,n}$ y esta dado por

$$P_{k,n} = \frac{n!}{(n-k)!} \ .$$

Combinaciones

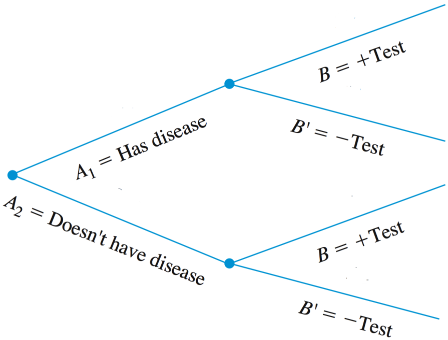
El número de formas en que se puede elegir un conjunto de k objetos $o_1, o_2, \ldots, o_k$ de un total de n (cuando el orden NO importa) se anota $C_{k,n}$ o bien $\binom{n}{k}$ y esta dado por

$$C_{k,n} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \ .$$

Técnicas de Conteo

Diagramas de árbol

Un Diagrama de Decisión es una representación gráfica utilizada para contar o enumerar alternativas.



Técnicas de Conteo

Ejercicio

Las fallas de teclado de una computadora pueden ser atribuidas a defectos eléctricos o mecánicos. Un taller de reparación actualmente cuenta con 25 teclados averiados, de los cuales 6 tienen defectos eléctricos. y 19 tienen defectos mecánicos

1. ¿Cuántas maneras hay de seleccionar al azar cinco de estos teclados para una inspección completa (sin tener en cuenta el orden)?
2. ¿De cuántas maneras puede seleccionarse una muestra de 5 teclados de manera que sólo dos tengan un defecto eléctrico?
3. Si una muestra de 5 teclados se selecciona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 4 de éstos tengan un defecto mecánico?

Técnicas de Conteo

Ejercicio (I- 2015)

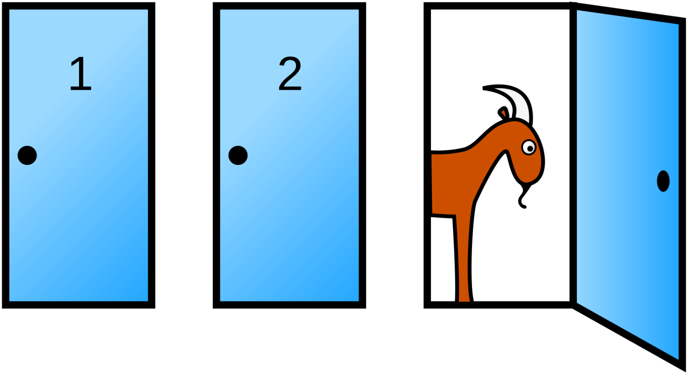
Una caja contiene 4 ampolletas de 75W, 5 de 60W y 6 de 45W. Si seleccionamos 3 ampolletas al azar.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 2 sean de 75W?
2. ¿Cuál es la probabilidad de que las 3 sean del mismo tipo?
3. ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar una de cada tipo?

Outline

III. Probabilidad Condicional

Outline

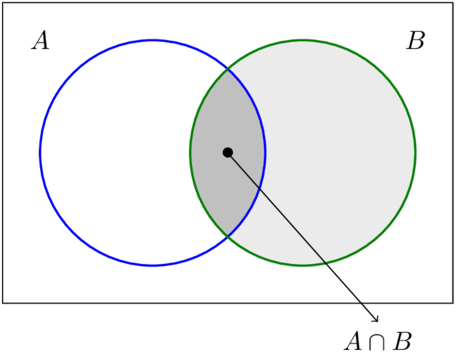


Probabilidad Condicional

Probabilidad Condicional

Dados dos eventos A y B, la probabilidad de A condicional a la ocurrencia de B se define:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$



Probabilidad Condicional

Ejemplo - 1

Consideremos el experimento del lanzamiento de un dado. Sea A el evento correspondiente a obtener un 2, es decir, $A = \{2\}$. Sea B el evento correspondiente a obtener un número par, es decir $B = \{2, 4, 6\}$. Usando la medida de probabilidad teórica, determine las probabilidades $P(A)$ y $P(A|B)$. Interprete el resultado.

Probabilidad Condicional

- *Regla del producto*: $P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$.

Observaciones

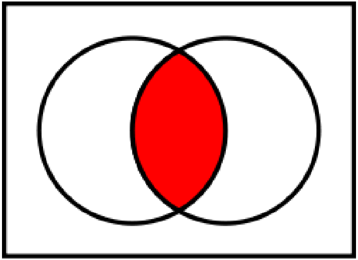
- $P(A \cap B) \leq$
- $P(A \cup B) \geq$

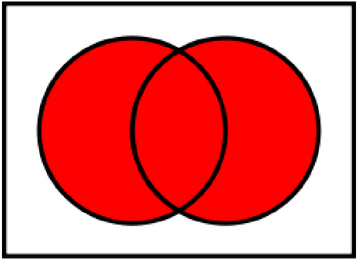
Probabilidad Condicional

- *Regla del producto*: $P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$.

Observaciones

- $P(A \cap B) \leq \quad P(A)$ y $P(B)$
- $P(A \cup B) \geq \quad P(A)$ y $P(B)$





Probabilidad Condicional

Teorema

Sean $A, B \subset \Omega$ eventos.

$$P(A^c|B) = 1 - P(A|B)$$

Además, en general tendremos, $P(A|B^c) \neq 1 - P(A|B)$.

Probabilidad Condicional

Teorema

Sean $A, B \subset \Omega$ eventos.

$$P(A^c|B) = 1 - P(A|B)$$

Además, en general tendremos, $P(A|B^c) \neq 1 - P(A|B)$.

Ejemplo

Consideremos el experimento del lanzamiento de un dado. Sea A el evento correspondiente a obtener un 2, es decir, $A = \{2\}$. Sea B el evento correspondiente a obtener un número par, es decir $B = \{2, 4, 6\}$. Usando la medida de probabilidad teórica, $P(A) = 1/6$ y $P(A|B) = 1/3$. $P(A^c|B)$ es la probabilidad de NO obtener un 2 dado que obtuvimos un número par, es decir $2/3$. Veamos si el teorema funciona: $P(A^c|B) = 1 - P(A|B) = 1 - 1/3 = 2/3$, funciona. Ahora, $P(A|B^c)$ es la probabilidad de obtener un 2 dado que NO obtuvimos un número par. Esta probabilidad es claramente 0. Por lo tanto $0 = P(A|B^c) \neq 1 - P(A|B) = 2/3$.

Probabilidad Condicional

Independencia

Dados dos eventos A, B, decimos que A es independiente de B si

$$P(A|B) = P(A)$$

Teorema

Sean $A, B \subset \Omega$ eventos. Si A es independiente de B, entonces B es independiente de A.

$$P(A|B) = P(A) \Rightarrow P(B|A) = P(B)$$

Además, en este caso, $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Probabilidad Condicional

Teorema (Regla de Bayes)

Sean $A, B \subset \Omega$ eventos. Entonces

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

Ejemplo

Un clasificador de correo SPAM es una tecnología que permite identificar, automáticamente, correo entrante no deseado (SPAM) de correo entrante deseado (no SPAM). Cierto clasificador tiene una probabilidad de 0.95 de filtrar correctamente un correo SPAM. Si el clasificador filtra en total el 30 % de los mensajes y usted sabe que se recibe un 10 % de correo SPAM. ¿Cuál es la probabilidad de que un correo filtrado por clasificador sea SPAM? ¿Que no sea SPAM? ¿Cual es la probabilidad de que un correo sea filtrado por clasificador y sea SPAM?

Probabilidad Condicional

Solución Ejemplo

Sea A el evento correspondiente a recibir un correo SPAM y A^c su complemento, es decir, el evento correspondiente a recibir un correo normal. Sabemos que $P(A) = 0.1$ y por lo tanto $P(A^c) = 0.9$. Sea B el evento correspondiente a filtrar un correo. Notar que éste puede ser SPAM o normal. Si es SPAM, filtrarlo es correcto. Si no es SPAM, filtrarlo es incorrecto. Sabemos que $P(B) = 0.3$ y $P(B|A) = 0.95$. Debemos determinar en cambio $P(A|B)$. Usando Bayes tenemos

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = \frac{0.95 \cdot 0.1}{0.3} \approx 0.317 \; .$$

Aproximadamente, un 32 % del correo filtrado por el clasificador es realmente SPAM. Un 78 % del correo filtrado no es SPAM.

Probabilidad Condicional

Partición

Sean $B_1, B_2, \ldots, B_m$ eventos en Ω con la propiedad de ser disjuntos dos a dos es decir $\forall i \neq j$

$$B_i \cap B_j = \emptyset \ ,$$

y además

$$\cup_{i=1}^{m} B_i = \Omega \ ,$$

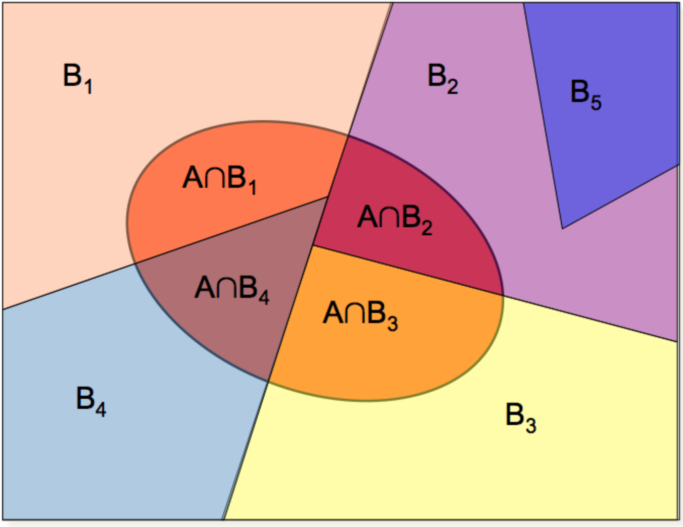
entonces, la colección $B_1, B_2, \ldots, B_m$ se denomina una *partición* de Ω.

Teorema (Regla de la Probabilidad Total)

Sea $B_1, B_2, \ldots, B_m$ una partición de Ω. Entonces, $\forall A$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{m} P(A|B_i)P(B_i) \ .$$

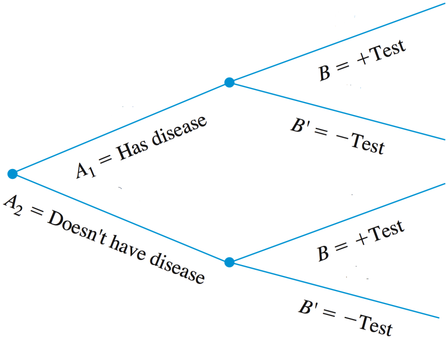
Probabilidad Condicional



Probabilidad Condicional

Ejemplo Enfermedad

El 1 % de la población de un determinado lugar padece una enfermedad. Para detectar esta enfermedad se realiza una prueba de diagnóstico. La prueba da positiva en el 97 % de los pacientes que padecen la enfermedad; en el 98 % de los individuos que no la padecen da negativa. Si elegimos al azar un individuo de esa población ¿Cuál es la probabilidad de que la prueba sea positiva? Si encontramos una persona que ha dado positivo, ¿cuál es la probabilidad de que efectivamente esté enfermo?



Probabilidades

Ejercicio Café

La tabla adjunta proporciona información sobre el tamaño de café seleccionado por alguien que compra una taza en un kiosko del aeropuerto en particular. Considerando una selección al azar de un comprador de café conteste lo siguiente:

	Pequeño	Mediano	Grande
Regular	14 %	20 %	26 %
Descafeinado	20 %	10 %	10 %

- ¿Cuál es la probabilidad de que compre una taza pequeña? ¿Un descafeinado?
- Si nos enteramos de que la persona compró una taza pequeña ¿cuál es ahora la probabilidad de que haya escogido el café descafeinado?
- Si nos enteramos de que compró un café descafeinado ¿cuál es ahora la probabilidad de que haya escogido una taza pequeña?

Probabilidades

Ejercicio

Suponga que una caja contiene 6 bolas rojas y 4 bolas verdes. Una segunda caja contiene 7 bolas rojas y 3 verdes. Elegimos aleatoriamente una bola de la primera caja y la introducimos en la segunda. Luego, elegimos aleatoriamente una bola de la segunda caja y la introducimos en la segunda.

- ¿Cual es la probabilidad de que el número de bolas rojas y verdes sea igual que al comienzo?

Probabilidad Condicional

Múltiples Condicionantes

Notemos que para dos eventos A, B cualesquiera, $(A \cap B)$ es un evento. Por lo tanto, es perfectamente posible encontrar una probabilidad condicional a la ocurrencia de $(A \cap B)$.

$$P(C|A \cap B) = \frac{P(C \cap A \cap B)}{P(A \cap B)} \ .$$

Notación

Cuando no genere confusión anotaremos $P(A \cap B)$ como $P(A, B)$. Esto también vale en los casos en que $(A \cap B)$ condiciona, es decir, $P(C|A, B)$ denota $P(C|A \cap B)$.

Probabilidad Condicional

Múltiples Condicionantes

Revise las siguientes identidades

$$P(A|B,C)P(B|C) = P(A,B|C)$$

Sea $\{B_1, B_2, \ldots, B_m\}$ una partición del espacio muestral. Entonces,

$$P(A|C) = \sum_{i=1}^{m} P(A|B_i, C)P(B_i|C)$$

Probabilidad Condicional

Teorema (Regla del Producto)

Sea $A_1, A_2, \ldots, A_m$ una secuencia de eventos. Entonces,

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_m) =& P(A_m|A_1, A_2, \ldots, A_{m-1}) \cdot P(A_{m-1}|A_1, A_2, \ldots, A_{m-2}) \cdots \\ & \cdots P(A_2|A_1) \cdot P(A_1) \\ =& \Pi_{j=1}^{m} P(A_j|A_1, A_2, \ldots A_{j-1}) \ . \end{aligned}$$

Probabilidad Condicional

Múltiples Eventos Independientes

Una sucesión de eventos $A_1, A_2, \ldots, A_m$ se dicen independientes si y sólo si

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_m) &= P(A_1) \cdot P(A_2) \cdots P(A_{m-1}) \cdot P(A_m) \\ &= \Pi_{j=1}^{m} P(A_j) \ . \end{aligned}$$

En este caso, tenemos que $\forall i \neq j$

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j) \ .$$

Probabilidad Condicional

Recordar Unión de Eventos Disjuntos!

Una sucesión de eventos $A_1, A_2, \ldots, A_m$ se dice que son *disjuntos dos a dos* si $\forall i \neq j$

$$P(A_i \cap A_j) = \emptyset \ .$$

En este caso,

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_m) \ .$$