3. Variables Aleatorias - Discretas

Estadística Computacional - 2025

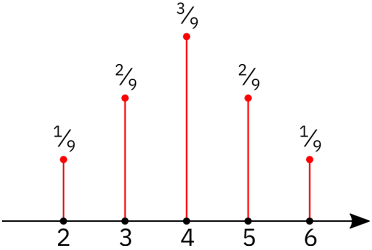
Ricardo Ñanculef, Carolina Saavedra
jnancu@inf.utfsm.cl, *carolina.saavedra@usm.cl*

Departamento de Informática UTFSM

Departamento de Informática
Universidad Técnica Federico Santa María

Outline

I. CONCEPTOS GENERALES



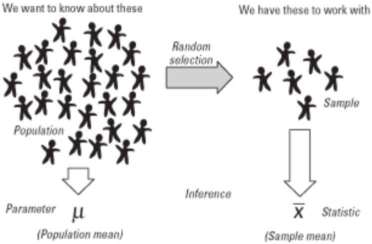
Objetivo

- Uno de nuestros objetivos es poder *modelar* fenómenos aleatorios (para poder entenderlos o hacer predicciones).
- En el capítulo anterior, aprendimos a cuantificar la incerteza de una observación proveniente de un fenómeno aleatorio.
- Lo anterior, no permite concentrarnos en las cantidades específicas que nos interesa estudiar.
- En ingeniería, un modelo normalmente se construye en torno a la idea de variable y su relación con otras variables.

Variables Aleatorias

Definición de Variable Aleatoria (v.a.)

Sea Ω un espacio muestral. Una v.a. es una función $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ que asigna a cada elemento $\omega \in \Omega$ un número real $X(\omega)$.



Variables Aleatorias

Definición de Variable Aleatoria (v.a.)

Sea Ω un espacio muestral. Una v.a. es una función $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ que asigna a cada elemento $\omega \in \Omega$ un número real $X(\omega)$.

Variables Aleatorias Discretas

Si X toma un conjunto finito o numerable de valores, X se dice *discreta*. En este caso, podemos enumerar su recorrido: $R_x = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$

- El valor d se denomina *la dimensión* de la v.a.
- Decimos que X es *univariada* si $d = 1$ y *multivariada* si $d > 1$.
- Supondremos por simplicidad que $d = 1$.

Función de Probabilidad

Definición F.D.P.

Sea $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una v.a. discreta. La función $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$

$$f(x) = P(X = x) \ ,$$

se denomina la *función de probabilidad de* X (o función de masa de probabilidad). Escribiremos también *fdp* de X.

Función de Probabilidad

Definición F.D.P.

Sea $X : \Omega \to \mathbb{R}$ una v.a. discreta. La función $f : \mathbb{R} \to [0,1]$

$$f(x) = P(X = x) \ ,$$

se denomina la *función de probabilidad de* X (o función de masa de probabilidad). Escribiremos también *fdp* de X.

Ejemplo 1

Considere el experimento aleatorio de lanzar una moneda 1 vez. Sea X la v.a. aleatoria

$$X(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega = \text{cara} \\ 1 & \text{si } \omega = \text{sello} \end{cases} \ .$$

Escribir la fdp de X asumiendo que la moneda no está trucada.

Función de Probabilidad

Solución Ejemplo

$$f(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } x = 0 \\ 1/2 & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{etoc} \end{cases} .$$

Ejemplo 2

Considere el experimento aleatorio de lanzar una moneda 2 veces. Sea X el número de sellos obtenidos. Escribir la fdp de X asumiendo que la moneda no está trucada.

Función de Probabilidad

Solución Ejemplo 2

$$f(x) = \begin{cases} 1/4 & \text{si } x = 0 \\ 1/2 & \text{si } x = 1 \\ 1/4 & \text{si } x = 2 \\ 0 & \text{etoc} \end{cases} .$$

Ejercicio Propuesto

Considere el experimento aleatorio de lanzar una moneda n veces. Sea X el número de sellos obtenidos. Escribir la fdp de X asumiendo que la moneda no está trucada.

Medida de Probabilidad Inducida

Pregunta

Sea $X : \Omega \to \mathbb{R}$ una v.a. discreta con fdp $f(x)$. ¿Cómo calcular $P(X \in (a, b))$?

Definición

Sea $X : \Omega \to \mathbb{R}$ una v.a. discreta con fdp $f(x)$.

$$P(X \in A) = \sum_{t \in A} f(t) \ .$$

Medida de Probabilidad Inducida

Observación

Note que en particular ...

$$P(a < X < b) = \sum_{a<t<b} f(t), \quad P(a \leq X < b) = \sum_{a\leq t<b} f(t),$$

$$P(a < X \leq b) = \sum_{a<t\leq b} f(t), \quad P(a \leq X \leq b) = \sum_{a\leq t\leq b} f(t) \;.$$

Además,

$$\sum_{-\infty<t<\infty} f(t) = P(-\infty < X < \infty) = 1 \;.$$

La última propiedad es un requisito para que una función f sea una función de probabilidad válida.

Medida de Probabilidad Inducida

Ejemplo

Un vendedor de autos usados ha notado que el número de defectos graves en un auto seleccionado aleatoriamente del negocio es una una v.a. discreta $X : \Omega \to \mathbb{R}$ con fdp dada por la siguiente tabla

x	$f(x)$
0	0.05
1	0.1
2	0.2
3	0.3
4	0.2
5	0.1
6	0.05
etoc	0.0

- ¿$P(X \leq 3)$? ¿$P(X < 3)$?
- ¿$P(X \leq 2)$? ¿$P(X \leq 6)$? ¿$P(3 \leq X \leq 6)$?
- ¿Es una fdp válida?.

Medida de Probabilidad Inducida

Ejemplo

Un vendedor de autos usados ha notado que el número de defectos graves en un auto seleccionado aleatoriamente del negocio es una una v.a. discreta $X : \Omega \to \mathbb{R}$ con fdp ...

- Notemos que

$$P(3 \leq X \leq 6) = P(X \leq 6) - P(X \leq 2)$$
$$P(3 < X \leq 6) = P(X \leq 6) - P(X \leq 3) \ .$$

Función de Distribución

Definición F.D.A.

Sea $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una v.a. discreta. La *función de distribución acumulada de* X se define como

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} f(t) \ .$$

También la escribiremos como fda de X.

Medida de Probabilidad Inducida

Ejemplo

Un vendedor de autos usados ha notado que el número de defectos graves en un auto seleccionado aleatoriamente del negocio es una una v.a. discreta $X : \Omega \to \mathbb{R}$ con fdp dada por la siguiente tabla

x	$f(x)$
0	0.05
1	0.1
2	0.2
3	0.3
4	0.2
5	0.1
6	0.05
etoc	0.0

Determine la distribución de probabilidad de X.

Medida de Probabilidad Inducida

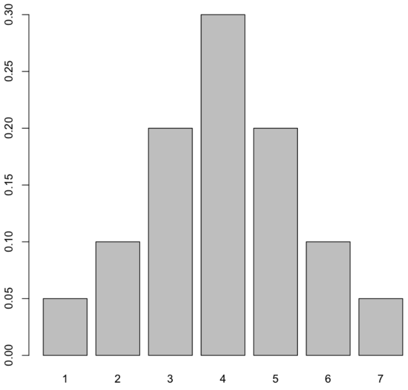
Ejemplo

Un vendedor de autos usados ha notado que el número de defectos graves en un auto seleccionado aleatoriamente del negocio es una una v.a. discreta $X : \Omega \to \mathbb{R}$ con fdp dada por la siguiente tabla

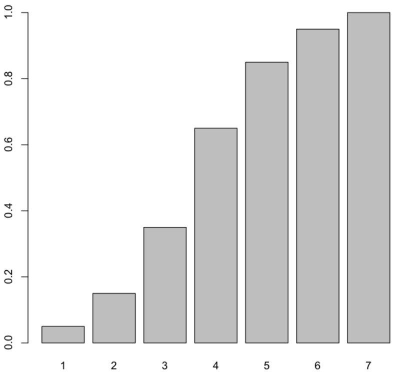
x	$f(x)$	F(x)
< 0	0.0	0.0
0	0.05	0.05
1	0.1	0.15
2	0.2	0.35
3	0.3	0.65
4	0.2	0.85
5	0.1	0.95
6	0.05	1.0
etoc	0.0	1.0

Variables Aleatorias

FDP:



FDA:



Función de Distribución

Observación

Sean $x_{(i)}$, con $i = 1, 2, \ldots$, los valores ordenados que puede tomar X. Entonces,

$$
\begin{aligned}
P(x_{(i)} \leq X \leq x_{(j)}) &= F(x_{(j)}) - F(x_{(i-1)}) \\
P(x_{(i)} < X \leq x_{(j)}) &= F(x_{(j)}) - F(x_{(i)}) \\
P(x_{(i)} \leq X < x_{(j)}) &= F(x_{(j-1)}) - F(x_{(i-1)}) \\
P(x_{(i)} < X < x_{(j)}) &= F(x_{(j-1)}) - F(x_{(i)}) \ .
\end{aligned}
$$

Variables Aleatorias Discretas

Ejemplo

Considere un escenario en que dos jugadores, R y S, se atacan mutuamente en turnos. En cada turno, uno de los jugadores obtiene un punto de habilidad (nadie pierde puntos). La probabilidad de que, durante el turno k, el punto lo gane R es $p_k = r_k/(r_k + s_k)$, donde r_k es la habilidad de R al comienzo del turno k, y s_k es la habilidad de S al comienzo del turno k. Si al comienzo del primer turno, ambos jugadores tienen 1 punto de habilidad, determine la fdp de r_k para el comienzo del tercer turno ($k = 3$).

Outline

II. Valores Esperados y Momentos de una V.A.

Valor Esperado

Ejemplo

Imagine que asistimos a la fiesta anual de un pequeño pueblo en el que abundan juegos como 'tiro al blanco', 'tejos', 'atrapar al ganso', etc. Uno de ellos le ofrece $10 mil pesos si gana con una entrada de tan solo mil pesos. El juego consiste en elegir un número de 1 a 6, lanzar dos dados, y contar el número de veces que aparece su número.

- Si estudia la dificultad del juego a través de observar la gente que ha jugado y cuántos de ellos han ganado ¿Podría determinar cuántos juegos esperamos ganar en diferentes intentos?
- Si quiere determinar cuanto dinero podríamos ganar en promedio en diferentes intentos ¿Cómo se podría realizar?

Valor Esperado

Definición

Sea $X : \Omega \to \mathbb{R}$ una v.a. discreta con recorrido $R_x = \{x_1, x_2, \ldots\}$ y fdp $f(x)$. Su valor esperado se define como:

$$E(X) = \sum_{x_i \in R_x} x_i \cdot f(x_i) \ .$$

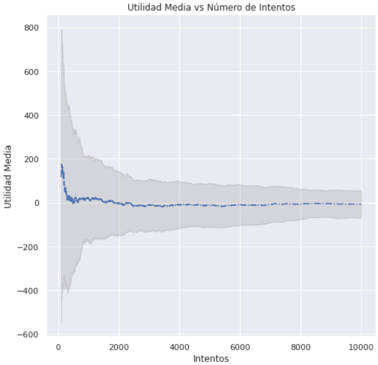
El operador E aplicado a una v.a. genérica X se denomina *Esperanza* (*Expectation*).

Valor Esperado

Idea...

Si observamos el valor de X un determinado número de veces (n), por ejemplo a través de simulación, y calculamos el promedio $\bar{X}_n$ de los resultados, la ley de los grandes números asegura que (bajo ciertas condiciones de regularidad)

$$\lim_{n \to \infty} \bar{X}_n \longrightarrow \mathbb{E}(X) \tag{1}$$



Si nosotros construimos el modelo de probabilidad de X (su fdp), podemos calcular su valor esperado directamente.

Valor Esperado

Ejemplo

El número de veces de un determinado sistema computacional se cae en un día normal de operación se puede modelar como una variable aleatoria discreta X cuya fdp está dada por la siguiente tabla

x	$f(x)$
0	0.25
1	0.35
2	0.15
3	0.10
4	0.05
5	0.05
6	0.05
etoc	0

¿Cuál es el número esperado de caídas del sistema en un día normal de operación?

Valor Esperado

Solución Ejemplo

x	$f(x)$
0	0.25
1	0.35
2	0.15
3	0.10
4	0.05
5	0.05
6	0.05
etoc	0

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \cdot 0.25 + 1 \cdot 0.35 + 2 \cdot 0.15 + 3 \cdot 0.1 + 4 \cdot 0.05 + 5 \cdot 0.05 + 6 \cdot 0.05 \\ &= 1.7 \ . \end{aligned}$$

Valor Esperado de una Función de X

Definición

Sea $X : \Omega \to \mathbb{R}$ una v.a. discreta con recorrido $R_x = \{x_1, x_2, \ldots\}$ y fdp $f(x)$. Sea $g(x)$ una función definida sobre $\mathbb{R}$ o al menos sobre el recorrido de X. El valor esperado de $g(X)$ se define como:

$$E(g(X)) = \sum_{x_i \in R_x} g(x_i) \cdot f(x_i) \ .$$

Valor Esperado de una Función de X

Ejemplo

El número de conejos que un cierto cazador logra capturar en un día se ha modelado como una v.a. discreta con fdp

x	$f(x)$
1	0.1
2	0.2
3	0.3
4	0.2
5	0.1
6	0.1
etoc	0

El cazador vende los primeros tres conejos en 5000 pesos (*cada uno*) y los siguientes en 3000 pesos (*cada uno*) ¿Cuál es la ganancia esperada para el cazador en un día elegido al azar?

Valor Esperado de una Función de X

Solución Ejemplo

x	$f(x)$	g(x)
1	0.1	5000
2	0.2	10000
3	0.3	15000
4	0.2	18000
5	0.1	21000
6	0.1	24000
etoc	0	-

$$\begin{aligned} E(g(X)) &= 0.1 \cdot 5000 + 0.2 \cdot 10000 + 0.3 \cdot 15000 + 0.2 \cdot 18000 \\ &\quad + 0.1 \cdot 21000 + 0.1 \cdot 24000 \\ &= 15100 \ . \end{aligned}$$

Propiedades de la Esperanza

Proposición

Sean $g_1, g_2, \ldots, g_m$ varias funciones de X.

$$E\left(g_1(X) + g_1(X) + \ldots g_m(X)\right) = E(g_1(X)) + E(g_2(X)) + \ldots E(g_m(X)) \ .$$

Proposición

Sea $g(X) = aX + b$ (una función lineal de X) con $a, b \in \mathbb{R}$.

$$E\left(g(X)\right) = a \cdot E(X) + b \ .$$

Varianza de una Variable Aleatoria

Definición

Sea $X : \Omega \to \mathbb{R}$ una v.a. discreta con recorrido $R_x = \{x_1, x_2, \ldots\}$ y fdp $f(x)$. Su varianza se define como:

$$Var(X) = \sum_{x_i \in R_x} (x_i - E(X))^2 \cdot f(x_i) \ .$$

Su desviación estándar se define como $\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$.

Proposición

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 \ .$$

$Var(X) = E(g(X))$ con $g(X) = (X - E(X))^2$.

¿Bastan el valor esperado y la varianza?

Momentos de una Variable Aleatoria

Definición

Sea $X : \Omega \to \mathbb{R}$ una v.a. discreta con recorrido $R_x = \{x_1, x_2, \ldots\}$ y fdp $f(x)$. Su k-ésimo momento se define como el valor esperado de su k-ésimo monomio:

$$\mu_X^k = E(X^k) \ .$$

Además, su k-ésimo momento central se define como

$$\bar{\mu}_X^k = E\left((X - E(X))^k\right) \ .$$

Valor Esperado

Problema

El número de seguros que puede vender un cierto vendedor en una semana es una v.a. discreta $X : \Omega \to \mathbb{R}$ con fdp dada por la tabla de mas abajo. La compañía le paga una comisión que depende del numero de seguros vendidos.

x	f(x)	C
0 - 10	0.1	100
11-20	0.35	300
21-30	0.25	500
31-40	0.15	700
41-50	0.1	900
> 50	0.05	1200

- ¿Cual es la comisión que el vendedor puede esperar obtener en una semana? ¿Qué tanto podría variar esta comisión?

Outline

III. Distribuciones Discretas Notables.

La Distribución de Bernoulli
FDP

Definición

Una v.a. discreta $X : \Omega \to \mathbb{R}$ se dice *Bernoulli* si puede tomar sólo dos valores $R_x = \{0, 1\}$ de modo que su fdp $f(x)$ viene dada por

$$f(x) = \begin{cases} p & \text{si } x = 1 \\ 1 - p & \text{si } x = 0 \end{cases} .$$

Se anota $X \sim Ber(p)$

Ejemplos

- Al lanzar una moneda, sea $X = 1$ si obtenemos cara y $X = 0$ si obtenemos sello. Entonces $X \sim Ber(p = 0.5)$.
- Al lanzar un dado, sea $X = 1$ si obtenemos un seis y $X = 0$ etoc. Entonces $X \sim Ber(p = 1/6)$.

La Distribución de Bernoulli
Características

Momentos de una V.A. Bernoulli

Notemos que si $X \sim Ber(p)$

$$E(X) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p$$

Además

$$E(X^2) = 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot (1-p) = p$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} Var(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\ &= p - p^2 = p(1-p) \end{aligned}$$

La Distribución Binomial

Experimento

- Imaginemos que un evento A puede ocurrir con probabilidad p y no ocurrir con probabilidad $1-p$.
- Sea X el número de veces que ocurre el evento.
- Si repetimos el experimento sólo 1 vez, $X \sim Ber(p)$.
- ¿Si repetimos el experimento 2 veces?. ¿Cuál es la fdp de X?
  - Sea A_1 el evento correspondiente a la ocurrencia de A en la primera repetición.
  - Sea A_2 el evento correspondiente a la ocurrencia de A en la segunda repetición.

$$
\begin{aligned}
P(X=0) &= P(A_1^c \cap A_2^c) \\
P(X=1) &= P((A_1^c \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_2^c)) \\
P(X=2) &= P(A_1 \cap A_2)
\end{aligned}
$$

¿Si repetimos el experimento n veces?

Experimento

- Asumiendo independencia:

$$
\begin{aligned}
P(X=0) =& P(A_1^c \cap A_2^c) = (1-p)\cdot(1-p) = \boxed{1}\cdot(1-p)^2 \\
P(X=1) =& P((A_1^c \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_2^c)) = (1-p)\cdot p + p\cdot(1-p) = \boxed{2}\cdot p(1-p) \\
P(X=2) =& P(A_1 \cap A_2) = p\cdot p = \boxed{1}\cdot p^2
\end{aligned}
$$

Experimento ++

- ¿Si repetimos el experimento 3 veces?. ¿Cuál es la fdp de X?
  - Asumiendo independencia ...
  - Sea A_k el evento correspondiente a la ocurrencia de A en la k-ésima repetición.

$$
\begin{aligned}
P(X=0) =& P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c) = \boxed{1} \cdot (1-p)^3 \\
P(X=1) =& P((A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c) \cup (A_1^c \cap A_2 \cap A_3^c) \cup (A_1^c \cap A_2 \cap A_3^c)) \\
=& \boxed{3} \cdot p(1-p)^2 \\
P(X=2) =& P((A_1^c \cap A_2 \cap A_3) \cup (A_1 \cap A_2^c \cap A_3) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3^c)) \\
=& \boxed{3} \cdot p^2(1-p) \\
P(X=3) =& P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \boxed{1} \cdot p^3
\end{aligned}
$$

Experimento ++

- ¿Si repetimos el experimento 4 veces?. ¿Cuál es la fdp de X?
  - Asumiendo independencia ...
  - Sea A_k el evento correspondiente a la ocurrencia de A en la k-ésima repetición.

$$
\begin{aligned}
P(X=0) =& P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c) = \boxed{1} \cdot (1-p)^4 \\
P(X=1) =& P((A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c) \cup (A_1^c \cap A_2 \cap A_3^c \cap A_4^c) \ldots) \\
=& \boxed{4} \cdot p(1-p)^3 \\
P(X=2) =& P((A_1^c \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4^c) \cup (A_1 \cap A_2^c \cap A_3 \cap A_4^c) \ldots) \\
=& \boxed{6} \cdot p^2(1-p)^2 \\
P(X=3) =& P((A_1^c \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \cup (A_1 \cap A_2^c \cap A_3 \cap A_4) \ldots) \\
=& \boxed{4} \cdot p^3(1-p) \\
P(X=4) =& P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = \boxed{1} \cdot p^4
\end{aligned}
$$

Experimento ++

- Coeficientes Binomiales
- Combinaciones de k elementos en un grupo de n,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

La Distribución Binomial
FDP

Definición

Una v.a. discreta X se dice Binomial con parámetros (n, p) si toma valores $R_x = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ y su f.d.p esta dada por

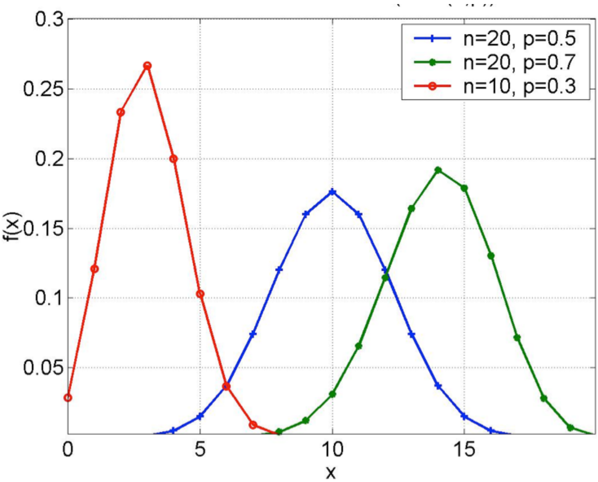
$$f(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & \text{si } x \in \{1, 2, \ldots, n\} \\ 0 & \text{etoc} \end{cases} .$$

Se anota $X \sim Bin(n, p)$

- Notar que $P(X \in \mathbb{R}) = 1$, por lo tanto, $\forall n, p$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 1 .$$

La Distribución Binomial



Teorema del Binomio

Será útil recordar que:

$$(x+y)^n := \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \ .$$

Momentos de la Distribución Binomial

$$E(X) := \sum_{x_i \in R_x} x_i p(x_i) = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k \frac{n!}{(n-k)!k!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{((n-1)-(k-1))!(k-1)!} p^{(k-1)} (1-p)^{(n-1)-(k-1)}$$

$$= np \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{((n-1)-(k-1))!(k-1)!} p^k (1-p)^{(n-1)-k}$$

$$= np \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = np \ \square$$

Momentos de la Distribución Binomial

$$E(X^2) := \sum_{x_i \in R_x} x_i^2 p(x_i) = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \text{ups} \ldots$$

Probemos con

$$E(X(X-1)) := \sum_{x_i \in R_x} (x_i)(1-x_i) p(x_i) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=2}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=2}^{n} k(k-1) \frac{n!}{(n-k)!k!} p^k (1-p)^{n-k}$$

Momentos de la Distribución Binomial

$$
\begin{aligned}
E(X(X-1)) &= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\frac{n!}{(n-k)!k!}p^{k}(1-p)^{n-k} \\
&= p^{2}n(n-1)\sum_{k=2}^{n} \frac{(n-2)!}{((n-2)-(k-2))!(k-2)!}p^{(k-2)}(1-p)^{(n-2)-(k-2)} \\
&= p^{2}n(n-1)\sum_{k=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{((n-2)-k)!k!}p^{k}(1-p)^{(n-2)-k} \\
&= p^{2}n(n-1)\sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} \\
&= p^{2}n(n-1)
\end{aligned}
$$

Momentos de la Distribución Binomial

$$E(X(X-1)) = p^2 n(n-1) = n^2 p^2 - np^2$$

Pero

$$E(X(X-1)) = E(X^2) - E(X)$$

Por lo tanto,

$$E(X^2) = E(X(X-1)) + E(X) = n^2 p^2 - np^2 + np$$

Por lo tanto,

$$Var(X) := E(X^2) - E(X)^2 = n^2 p^2 - np^2 + np - (np)^2 = np - np^2 = np(1-p) \ \square$$

La Distribución Binomial

Características

Características de la Distribución Binomial

- 2 parámetros (n=número de repeticiones del experimento ó número de pruebas y $p =$ probabilidad de ocurrencia del evento que se está estudiando).
- $E(X) = np$
- $Var(X) = np(1-p)$
- Si $p = 0.5$, el gráfico de la fdp es perfectamente simétrico.
- Si $p > 0.5$, el gráfico de la fdp está concentrado hacia la derecha (sesgo negativo).
- Si $p < 0.5$, el gráfico de la fdp está concentrado hacia la izquierda (sesgo positivo).

La Distribución Binomial

Ejemplo

Si lanzamos un dado 10 veces, asumiendo que los resultados de cada lanzamiento son independientes uno de otro, conteste:

- Exprese la probabilidad de obtener 5 veces el número 3.
- Exprese la probabilidad de obtener un número par más de 6 veces.
- ¿Cuál es el número esperado de veces que se observará un número par?

La Distribución Binomial

Ejemplo

Si lanzamos un dado 10 veces, asumiendo que los resultados de cada lanzamiento son independientes uno de otro, conteste:

- Exprese la probabilidad de obtener 5 veces el número 3.
- Exprese la probabilidad de obtener un número par más de 6 veces.
- ¿Cuál es el número esperado de veces que se observará un número par?

Probabilidades con la Distribución Binomial

Recordar! Para cualquier v.a. con fdp $f(x)$: $P(a < X < b) := \sum_{a<x_i<b} p(x_i)$ ..

Luego, si $X \sim Bin(n, p)$

$$P(a < X < b) := \sum_{a<k<b} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \ .$$

La Distribución de Poisson

Experimento

Supongamos que una cierta casilla de correo electrónico tiene un número medio de 10 emails de SPAM durante la mañana, con X el número de emails SPAMs recibidos, $X \sim Bin(n, p)$, lo indicado corresponde a $E[X] = 10$. Si durante la mañana llegan $n = 500$ emails, ¿Cuál es la probabilidad de que el usuario reciba 10 SPAM?

- Si $n = 1000$?
- Si $n = 1000000$?
- Si $n = \infty$?

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ np \text{ constante}}} P(X^{\text{Bin}} = k) := \lim_{\substack{n \to \infty \\ np \text{ constante}}} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \ ?$$

La Distribución de Poisson

$$P(X^{\text{Poi}} = k) := \lim_{\substack{n\to\infty \\ np \text{ constante}}} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \,?$$

Sea $\lambda = np$.

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{n\to\infty \\ \lambda \text{ constante}}} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} &= \lim_{n\to\infty, \lambda \text{ cte.}} \frac{n!}{(n-k)!k!} \frac{(np)^k}{n^k} \left(1 - \frac{np}{n}\right)^n \left(1 - \frac{np}{n}\right)^{-k} \\
&= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to\infty, \lambda \text{ cte.}} \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots 1}{n^k} \left(1 - \frac{np}{n}\right)^n \left(1 - \frac{np}{n}\right)^{-k} \\
&= \frac{\lambda^k}{k!} \boxed{1} \cdot \boxed{e^{-\lambda}} \cdot \boxed{1} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}
\end{aligned}$$

La Distribución de Poisson
FDP

Definición

Una v.a. discreta X se dice Poisson con parámetro λ si toma valores $R_x = \{0, 1, 2, \ldots\}$ (enteros) y su f.d.p esta dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} & \text{si } x = 0, 1, 2, \ldots \\ 0 & \text{etoc} \end{cases} .$$

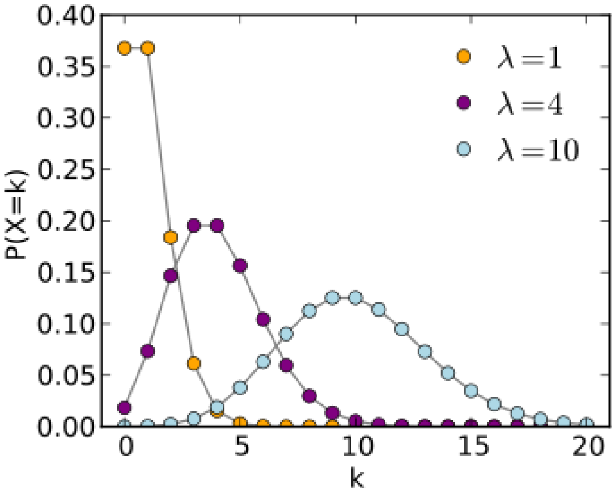
Se anota $X \sim Poi(\lambda)$. En ocasiones la distribución de Poisson se denomina también *Ley de los Eventos Raros*.

Proposición

Sean p, n tal que $\lim_{n \to \infty} np = \lambda = \text{constante} > 0$. Tenemos,

$$\lim_{n \to \infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} .$$

La Distribución de Poisson



Momentos de la Distribución de Poisson

$$
\begin{aligned}
E(X) &:= \sum_{x_i \in R_x} x_i p(x_i) = \sum_{k=0}^{\boxed{\infty}} k \left(\frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \right) \\
&:= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{(k-1)!} \\
&:= e^{-\lambda} \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\
&:= e^{-\lambda} \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \lambda \; e^{\lambda} \\
&:= \lambda \; \square
\end{aligned}
$$

Recordar Descomposición de Taylor!

Una función $g(x)$ infinitamente diferenciable en un punto x_0 se puede escribir en la base de los polinomios centrados en torno a x_0 como

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Por lo tanto, e^x se puede escribir en torno a 0 como

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k$$

Momentos de la Distribución de Poisson

$$
\begin{aligned}
E(X(X-1)) &:= \sum_{x_i \in R_x} (x_i)(1-x_i)p(x_i) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\left(\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}\right) \\
&:= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{(k-2)!} \\
&:= e^{-\lambda}\lambda^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} \\
&:= e^{-\lambda}\lambda^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\lambda^2 \; e^{\lambda} \\
&:= \lambda^2 \; .
\end{aligned}
$$

Momentos de la Distribución de Poisson

$$E(X(X-1)) = \lambda^2$$

Pero

$$E(X(X-1)) = E(X^2) - E(X)$$

Por lo tanto,

$$E(X^2) = E(X(X-1)) + E(X) = \lambda^2 + \lambda$$

Por lo tanto,

$$Var(X) := E(X^2) - E(X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda \ \square$$

La Distribución de Poisson
Características

Características de la Distribución Poisson

- 1 sólo parámetro (valor esperado de eventos por unidad de tiempo).
- $E(X) = \lambda$
- $Var(X) = \lambda$
- El gráfico de la fdp está siempre concentrado hacia la izquierda (sesgo positivo).

La Distribución de Poisson

Observación I

Una variable aleatoria $X \sim Poi(\lambda)$ modela generalmente el número de eventos que se observan en un determinado período de tiempo. Sabemos que la probabilidad de ocurra 1 evento entre el tiempo t y $t + \delta t$

1. No depende de t (un proceso de Poisson no tiene memoria).
2. Es directamente proporcional a t.

Observación II

Sea $X \sim Poi(\lambda)$ el número de eventos por unidad de tiempo. Entonces, el número de eventos en un intervalo de ΔT unidades de tiempo sigue una distribución $X^{\Delta} \sim Poi(\Delta \cdot \lambda)$.

$$P(X^{\Delta} = k) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\Delta\lambda}(\Delta\lambda)^k}{k!} & \text{si } k = 0, 1, 2, \ldots \\ 0 & \text{etoc} \end{cases} .$$

La Distribución Binomial

Ejemplo

Se sabe que el número de ventas que se concretan en cierto negocio de ventas por Internet es una v.a. de Poisson con valor esperado de 10 ventas por hora.

- ¿Cuál es la probabilidad de en cierta hora elegida al azar se registren más de 20 ventas?
- ¿Cuál es la probabilidad de en cierta hora elegida al azar se registren menos de 5 ventas?
- ¿Cuál es la probabilidad de en un día de operación (12 horas) se registren menos de 100 ventas?

La Distribución Geométrica

Motivación

Consideremos un experimento en el cual un evento A puede ocurrir con probabilidad p y no ocurrir con probabilidad $1 - p$ (Experimento de Bernoulli).

- En vez de repetir el experimento un número fijo de veces (n), nos preguntarnos por el número de veces que tendríamos que repetirlo hasta observar la primera ocurrencia de A ...
- Ejemplo 1: Un sujeto tiene una probabilidad fija $p = 0.1$ de superar un determinado examen. Si esa probabilidad no cambia, cual es la probabilidad de que tenga que repetir 5 veces el examen hasta aprobarlo por primera vez?
- Ejemplo 2: Un vendedor tiene una probabilidad fija $p = 0.01$ de vender un seguro en cierto recinto. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga que ofrecerlo a más de 50 personas para lograr la primera venta?

La Distribución Geométrica
FDP

Definición (número de Repeticiones)

Una v.a. discreta X se dice geométrica con parámetro p si toma valores $R_x = \{1, 2, \ldots\}$ y su f.d.p esta dada por

$$f(x) = \begin{cases} (1-p)^{x-1}p & \text{si } x = 1, 2, \ldots \\ 0 & \text{etoc} \end{cases} .$$

Se anota $X \sim \text{Geo}(p)$.

WARNING!

En este caso la variable aleatoria es el <u>número total de repeticiones</u> del experimento hasta observar la primera ocurrencia del evento de interés. Este último se denomina con frecuencia *un ÉXITO*.

La Distribución Geométrica
FDP alternativa

Definición - (número de Fracasos)

Una v.a. discreta X se dice geométrica con parámetro p si toma valores $R_x = \{0, 1, 2, \ldots\}$ y su f.d.p esta dada por

$$f(x) = \begin{cases} (1-p)^x p & \text{si } x = 0, 1, 2, \ldots \\ 0 & \text{etoc} \end{cases} .$$

Se anota $X \sim \text{Geo}(p)$.

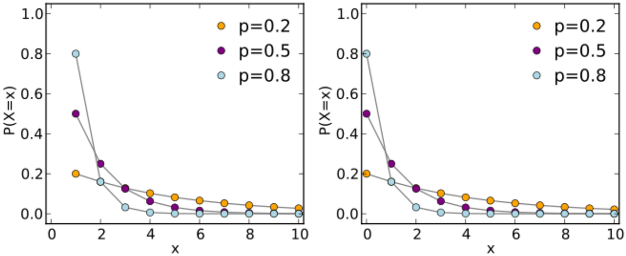
WARNING!

En este caso la variable aleatoria es el número total de FRACASOS hasta observar la primera ocurrencia del evento de interés.

La Distribución Geométrica
Características - FDP alternatva

Características de la Distribución Geométrica

- 1 parámetro ($p=$ probabilidad de ocurrencia del evento que se está estudiando).
- Si X denota el número de fracasos hasta la ocurrencia del primero éxito ....
- $E(X) = (1-p)/p$.
- $Var(X) = (1-p)/p^2$.
- El gráfico de la fdp está siempre concentrado hacia la izquierda (sesgo positivo).



La Distribución Binomial Negativa

Motivación

Consideremos un siguiente experimento en el cual un evento A puede ocurrir con probabilidad p y no ocurrir con probabilidad $1 - p$ (Experimento de Bernoulli).

- En vez de repetir el experimento un número fijo de veces n, nos preguntarnos por el número de veces que tenemos que repetir el experimento para observar r ocurrencias del evento de interés (**r éxitos**).
- Ejemplo 1: Un vendedor tiene una probabilidad fija $p = 0.01$ de vender un seguro en cierto recinto. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga que ofrecerlo a más de 50 personas para lograr 10 ventas?

La Distribución Binomial Negativa

FDP

Definición (número de Repeticiones)

Una v.a. discreta X se dice Binomial negativa con parámetros (r, p) si toma valores $R_x = \{r, r+1, r+2, \ldots\}$ y su f.d.p esta dada por

$$f(x) = \begin{cases} \binom{x-1}{r-1}(1-p)^{x-r}p^r & \text{si } x = r, r+1, r+2, \ldots \\ 0 & \text{etoc} \end{cases}.$$

Se anota $X \sim \text{Bin}^{-1}(r, p)$.

WARNING!

En este caso la variable aleatoria es el número total de repeticiones hasta lograr observar el evento un número fijo, no aleatorio, de r veces.

La Distribución Binomial Negativa

FDP alternativa

Definición (número de Fracasos)

Una v.a. discreta X se dice Binomial negativa con parámetros (r, p) si toma valores $R_x = \{0, 1, 2, \ldots\}$ (enteros) y su f.d.p esta dada por

$$f(x) = \begin{cases} \binom{r+x-1}{x}(1-p)^x p^r & \text{si } x = 0, 1, 2, \ldots \\ 0 & \text{etoc} \end{cases} .$$

Se anota $X \sim \text{Bin}^{-1}(r, p)$.

WARNING!

En este caso la variable aleatoria es el número total de FRACASOS (no ocurrencias del evento de interés) hasta lograr observar el evento un número fijo, no aleatorio, de r veces. El número total de repeticiones es $r + x$.

La Distribución Binomial Negativa

Características - FDP alternativa

Características de la Distribución Binomial Negativa

- Si X denota el número de fracasos hasta la ocurrencia de los primeros r éxitos ....
- Valor esperado

$$E(X) := \frac{r(1-p)}{p} \, .$$

- Varianza

$$Var(X) := \frac{r(1-p)}{p^2} \, .$$

- El gráfico de la fdp está siempre concentrado hacia la izquierda (sesgo positivo).

Ejercicio

Star Wars

Un supermercado ofrece a sus clientes un simpático regalo sorpresa, inspirado en personajes de Star Wars, cuando la compra sobrepasa cierto monto. La colección está formada por cinco figuras que tienen igual probabilidad de ocurrir. Felipe se ha propuesto reunir todos los personajes de la colección, pero está particularmente interesado en Yoda.

- Determine la probabilidad de que Felipe obtenga a Yoda antes de la cuarta compra.
- Determine el número esperado de compras que tendrá que realizar Felipe para obtener los cinco personajes de la colección.

La Distribución HiperGeométrica

Ejercicio

- En una caja de 100 ampolletas hay 5 defectuosas. Si usted saca 10 ampolletas de la caja ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 2 sean defectuosas?.
  - Cada extracción cambia la proporción de defectuosas y no defectuosas. Por lo tanto no podemos usar una distribución binomial (En éste modelo la probabilidad p de éxito es constante).

La Distribución HiperGeométrica

Ejercicio

- En una caja de 100 ampolletas hay 5 defectuosas. Si usted saca 10 ampolletas de la caja ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 2 sean defectuosas?.
  - Cada extracción cambia la proporción de defectuosas y no defectuosas. Por lo tanto no podemos usar una distribución binomial (En éste modelo la probabilidad p de éxito es constante).
  - Supongamos que en cada extracción cada ampolleta tiene la misma probabilidad de ser seleccionada.

$$\boxed{\binom{100}{10}} \leftarrow \text{formas de sacar 10 ampolletas de la caja}$$

$$\boxed{\binom{5}{2}} \leftarrow \text{formas de sacar 2 ampolletas defectuosas de la caja}$$

$$\boxed{\binom{100}{8}} \leftarrow \text{formas de sacar las restantes 8 ampolletas de la caja}$$

La Distribución HiperGeométrica

Ejercicio 2

- En una caja de N ampolletas hay $M < N$ defectuosas. Si usted saca n ampolletas de la caja ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente k sean defectuosas?.
  - Supongamos que en cada extracción cada ampolleta tiene la misma probabilidad de ser seleccionada.

$$\boxed{\binom{N}{n}} \leftarrow \text{formas de sacar } n \text{ ampolletas de la caja}$$

$$\boxed{\binom{M}{k}} \leftarrow \text{formas de sacar } k \text{ ampolletas defectuosas de la caja}$$

$$\boxed{\binom{N-M}{n-k}} \leftarrow \text{formas de sacar las restantes } n-k \text{ ampolletas de la caja}$$

La Distribución Hiper-Geométrica
FDP

Definición

Una v.a. discreta X se dice Hiper-Geométrica con parámetros (N, M, n) si su f.d.p esta dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\dbinom{M}{x}\dbinom{N-M}{n-x}}{\dbinom{N}{n}} & \text{si } x \in R_x \\ & \text{etoc} \end{cases},$$

donde recorrido de la variable es

$$R_x = \{x : x \in \mathbb{Z} \text{ y } \min(0, n-(N-M)) < x < \max(M, n)\}$$

Se anota $X \sim \text{HiperGeo}(N, M, n)$.

La Distribución Hiper-Geométrica
Características

Momentos de la Distribución Hiper-Geométrica

$$E(X) := n \cdot \left(\frac{M}{N}\right)$$

$$Var(X) := \left(\frac{N-n}{N-1}\right) \cdot n \cdot \left(\frac{M}{N}\right) \cdot \left(1 - \frac{M}{N}\right) \quad \square$$

Observación

Una HiperGeo(N, M, n) se puede aproximar por una Bin(n, p) con $p = M/N$ cuando n/N es pequeño (digamos menos que 0.05) y p no está ni muy cerca de 0 ni de 1.

Diferencias y Supuestos Claves

Recordar!

Supongamos que observamos un fenómeno y nos preocupa la ocurrencia de un evento A (Experimento de Bernoulli).

- En la distribución Binomial está fijo el número de veces que observamos el fenómeno o repetimos el experimento. En cada repetición el evento A tiene una probabilidad constante de ocurrir p. Cada repetición es independiente.
- En la distribución de Poisson el número de veces que podemos observar el fenómeno o repetir el experimento es ∞. El evento A ocurre a una tasa constante, independiente de lo que haya ocurrido en observaciones anteriores.
- En la distribución de Binomial negativa nos preocupa el número de veces que tenemos que observar el fenómeno o repetir el experimento para observar A un número fijo de veces.
- En la distribución de Hiper-Geométrica el número de veces que observamos el fenómeno o repetimos el experimento es fijo, pero la probabilidad de observar A de una repetición a otra cambia, no es constante.