

# Modelo Matemático para Diseño Óptimo de Red de Distribución de Agua: Grupo 6

Javier Sola, Martín Caballero, Bastián Jiménez, Agustín Venegas

## 1. Conjuntos

- $\mathcal{N}$ : conjunto de todos los nodos, con  $|\mathcal{N}| = N$ 
  - $\mathcal{P} \subset \mathcal{N}$ : nodos plantas de tratamiento
  - $\mathcal{T} \subset \mathcal{N}$ : nodos tanques
  - $\mathcal{C}_t \subset \mathcal{N}$ : nodos clientes de transbordo
  - $\mathcal{C}_f \subset \mathcal{N}$ : nodos clientes finales
- $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ : conjunto de arcos posibles (únicamente entre columnas adyacentes), con  $|\mathcal{A}| = A$
- $\mathcal{D} = \{1, 3, 4\}$ : conjunto de diámetros permitidos para tuberías, con  $|\mathcal{D}| = D$
- $\mathcal{K} = \{a, b\}$ : tipos de costos de instalación, con  $|\mathcal{K}| = K$

## 2. Parámetros

- $\text{Cap}_d$ : capacidad máxima de flujo para diámetro  $d \in \mathcal{D}$  [l/min]

$$\text{Cap}_1 = 353, \quad \text{Cap}_3 = 1414, \quad \text{Cap}_4 = 2036$$

- $\text{Cost}_{dk}$ : costo de instalación para diámetro  $d$  y tipo  $k \in \mathcal{K}$ , según la tabla siguiente:

Diámetro		Costo tipo $a$	Costo tipo $b$
1	(50 mm)	16	45
3	(100 mm)	24	62
4	(120 mm)	27	68

- $c_{ij}$ , para  $i = 1, \dots, N$ ,  $j = 1, \dots, N$ : costo de transporte por unidad de flujo entre nodo  $i$  y nodo  $j$
- $d_j$ , para  $j \in \mathcal{C}_f$ : demanda de agua en nodo cliente final  $j$
- $S_i$ , para  $i \in \mathcal{P}$ : capacidad de suministro en planta  $i$

### 3. Variables de Decisión

- $x_{ij}^d \in \{0, 1\}$ , para  $i = 1, \dots, N$ ,  $j = 1, \dots, N$ ,  $d = 1, \dots, D$ : variable binaria que indica si se instala tubería de diámetro  $d$  en arco  $(i, j)$

$$x_{ij}^d = \begin{cases} 1 & \text{si se instala tubería de diámetro } d \text{ en arco } (i, j), \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

- $f_{ij} \geq 0$ , para  $i = 1, \dots, N$ ,  $j = 1, \dots, N$ : flujo de agua que circula por el arco  $(i, j)$

### 4. Función Objetivo

Minimizar el costo total de la red, que incluye costos de instalación y transporte:

$$\min \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{d=1}^D \sum_{k=1}^K \text{Cost}_{dk} \cdot x_{ijd} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_{ij} \cdot f_{ij}$$

### 5. Restricciones

1. **Capacidad máxima por tubería:**

$$f_{ij} \leq \sum_{d=1}^D \text{Cap}_d \cdot x_{ij}^d, \quad \forall i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, N$$

2. **Una única tubería por arco:**

$$\sum_{d=1}^D x_{ij}^d \leq 1, \quad \forall i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, N$$

3. **Conservación de flujo (balance nodal):**

- Para tanques y nodos clientes de transbordo  $i \in \mathcal{T} \cup \mathcal{C}_t$ :

$$\sum_{j=1}^N f_{ji} = \sum_{j=1}^N f_{ij}$$

- Para plantas  $i \in \mathcal{P}$ :

$$\sum_{j=1}^N f_{ij} \leq S_i$$

- Para nodos clientes finales  $i \in \mathcal{C}_f$ :

$$\sum_{j=1}^N f_{ji} = d_i$$

4. **Restricción de conectividad:** solo se permiten arcos entre columnas adyacentes:

$$\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{T}, \quad \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{C}_t, \quad \mathcal{C}_t \rightarrow \mathcal{C}_f$$

5. **Dominio y no negatividad:**

$$x_{ij}^d \in \{0, 1\}, \quad f_{ij} \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, N, \quad d = 1, \dots, D$$

# Código generador de instancias

## 0.1 Generación de Instancias

Para validar el modelo matemático, se generaron instancias clasificadas en tres tamaños: pequeño, mediano y grande. Los rangos para la cantidad de nodos de cada tipo se muestran en la Tabla 1.

Table 1: Rangos para generación de nodos según tamaño de instancia

Tamaño	Plantas	Pipes	Clientes Transbordo	Clientes Finales
Pequeño	1–2	5–10	5–10	10–20
Mediano	3–4	10–20	10–20	20–50
Grande	5–7	20–50	25–50	50–100

El proceso de generación de cada instancia consiste en:

- Selección aleatoria de la cantidad de nodos para cada tipo, dentro de los rangos definidos para el tamaño de la instancia, utilizando una semilla fija para asegurar reproducibilidad.
- Creación de nodos identificados de forma única para plantas, pipes, clientes de transbordo y clientes finales.
- Construcción de la red de conexiones (arcos) entre nodos de columnas adyacentes, generando arcos de plantas a pipes, pipes a clientes de transbordo y clientes de transbordo a clientes finales.
- Generación de demandas para los clientes finales mediante una distribución uniforme  $U(40, 100)$  litros por minuto.
- Asignación de costos de transporte por arco generados con distribución normal  $N(8, 2)$ , truncando valores menores a 1 para evitar costos irrealmente bajos.
- Distribución equitativa del suministro total requerido entre las plantas generadas.

Este método permite obtener instancias variadas y reproducibles para evaluar el comportamiento del modelo.

## 0.2 Condiciones de Factibilidad

Para asegurar que el modelo sea factible, se consideran las siguientes condiciones:

1. **Capacidad total de suministro:** La suma de las capacidades asignadas a las plantas debe ser al menos igual a la suma total de demandas de los clientes finales:

$$\sum_{i \in \text{Plants}} S_i \geq \sum_{j \in \text{Final\_Clients}} d_j$$

Esto garantiza que el agua demandada pueda ser suministrada desde las plantas sin exceder su capacidad máxima.

2. **Capacidades máximas de tuberías:** El flujo en cada arco debe respetar la capacidad máxima determinada por el diámetro de la tubería instalada:

$$f_{ij} \leq \max_{d \in Diameters} Cap_d, \quad \forall (i, j) \in Arcos$$

Esta restricción asegura que el flujo no sobrepase la capacidad hidráulica del tramo instalado.

3. **Costos positivos y definidos:** Los costos de instalación y transporte deben ser siempre positivos y definidos, evitando soluciones triviales o no realistas.
4. **Restricción de conectividad:** La red debe respetar la estructura de conexión entre columnas adyacentes:

$$Plants \rightarrow Pipes, \quad Pipes \rightarrow Transbord\_Clients, \quad Transbord\_Clients \rightarrow Final\_Clients$$

Esto mantiene la coherencia hidráulica y estructural del sistema.

El código se encuentra adjunto a este pdf en el buzón del aula. Además en el link a continuación puede ver el código para la generación de instancias: <https://github.com/RepublicaDePirque/Codigo-Proyecto-opti.git>