

Федеральное агентство по образованию  
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Национальный проект «Образование»  
Инновационная образовательная программа ННГУ. Образовательно-научный центр  
«Информационно-телекоммуникационные системы: физические основы и  
математическое обеспечение»

В.Т. Ермолаев, А.Г. Флакسمан

## Методы оценивания параметров источников сигналов и помех, принимаемых антенной решеткой

*Учебно-методические материалы по программе повышения  
квалификации «Новые подходы к проблемам генерации, обработки,  
передачи, хранения, защиты информации и их применение»*

Нижний Новгород

2007

*Учебно-методические материалы подготовлены в рамках  
инновационной образовательной программы ННГУ: Образовательно-  
научный центр «Информационно-телекоммуникационные  
системы: физические основы и математическое обеспечение»*

Ермолаев В.Т., Флакسمан А.Г. Методы оценивания параметров источников сигналов и помех, принимаемых антенной решеткой. Учебно-методический материал по программе повышения квалификации «Новые подходы к проблемам генерации, обработки, передачи, хранения, защиты информации и их применение». Нижний Новгород, 2007, 98 с.

Аннотация. Рассматриваются теоретические вопросы пространственной обработки сигналов в современных и перспективных радиотехнических системах (радиолокаторах, радиопеленгаторах, радионавигаторов и т.д.). Одной из основных задач, стоящих перед такими системами, является измерение угловых координат воздушных объектов или источников собственного излучения (активных шумовых помех). Для этих целей радиотехническая система оснащается приемной антенной решеткой и устройством многоканальной обработки входных сигналов. Анализируются методы обработки сигналов, которые используются в таких системах. Значительное место уделяется “сверхразрешающим” методам, обеспечивающим угловое разрешение, превышающее релейский предел. Учебно-методические материалы сформированы на основе отечественной и зарубежной литературы, а также оригинальных исследований авторов.

© Ермолаев В.Т., Флакسمан А.Г.

## ВВЕДЕНИЕ

Многие радиотехнические средства, такие как радиолокаторы, радионавигаторы, радиопеленгаторы, решают задачу определения координат источника излучения или объекта, который отражает часть электромагнитной энергии, подающей на него. Эта задача в современной постановке решается с помощью антенных решеток (АР). АР представляет собой систему отдельных антенн, расположенных в пространстве некоторым заданным образом. Каждая из антенн принимает сигнал, который усиливается, преобразуется в цифровую форму и подается в систему обработки сигналов. Система обработки анализирует принятые сигналы и применяет те или иные алгоритмы обработки для того, что найти значения координат источника излучения.

Специалисты, которые разрабатывают или эксплуатируют подобные системы, должны понимать принципы работы АР и знать современные алгоритмы пространственной обработки сигналов. Во многих случаях эти дисциплины преподаются на разных кафедрах и студенты не получают полного понимания, как решаются задачи определения координат источников излучения. Данный материал содержит достаточно подробные сведения из теории АР и теории пространственной обработки сигналов.

В первой главе даются основные положения из теории АР [1]. При описании принципов работы АР основное внимание уделяется сигналам, которые принимаются отдельными антеннами - элементами АР. Сначала рассматривается самый простой случай приема гармонического сигнала. Учитывая, что большинство радиосистем используют узкополосные сигналы, мы подробно останавливаемся на способах описания таких сигналов. В частности сигналы, принятые элементами АР, характеризуются комплексными амплитудами, фазы которых являются взаимосвязанными. Совокупность комплексных амплитуд мы рассматриваем как вектор принятых сигналов. Описание шумоподобных сигналов также опирается на понятие комплексной амплитуды. Однако в этом случае комплексная амплитуда сигнала считается случайной величиной.

В теории пространственной обработки сигналов важное значение имеет понятие корреляционной матрицы (КМ) принятых сигналов [2-9]. Она описывает статистические связи сигналов, принятых различными элементами антенной решетки. В данном материале можно найти сведения о свойствах КМ принятых сигналов.

АР рассматривается как сумматор принятых сигналов. Меняя весовые коэффициенты сумматора, можно получать различные характеристики АР. Одной из них является диаграмма направленности (ДН). Специалисты должны понимать, как следует выбирать расстояние между элементами антенной решетки, чтобы избежать появления

дифракционных лепестков. Подробно изучается вопрос об уменьшении боковых лепестков ДН [1].

Для приемных АР важным параметром является выходное отношение мощности полезного сигнала к средней мощности шума приемников, подключенных к отдельным антеннам решетки [2-9]. Этот параметр представлен в векторно-матричной форме.

Во второй главе изучаются методы определения параметров дискретных источников сигналов с помощью АР[2-9]. Каждый дискретный источник характеризуется амплитудой падающей волны и направлением ее прихода. Наиболее сложной является задача определения направления на источник излучения. Если источник один, то решение задачи простое и хорошо известно. Когда в пространстве имеется два и более дискретных источника, задача определения их параметров существенно более сложная.

Вначале рассматривается метод максимально правдоподобного оценивания параметров источников излучения. Этот метод предполагает, что число источников известно. Мы изучаем этот метод на примерах одного и двух источников (см., например [3,5,7,9]). В случае одного источника этот метод совпадает с методом сканирования лучом АР, который широко применяется на практике [1]. Однако, метод сканирования, примененный в случае двух и более источников, дает оценки параметров, несоответствующие методу максимального правдоподобия, особенно в тех случаях, когда источники являются близко расположенными. Если источники сосредоточены в пределах ширины главного луча ДН АР, метод сканирования не дает возможности различить эти источники. Долгое время считалось, что угловое разрешение источников возможно, если они находятся друг от друга на расстоянии, равном или большем ширины луча антенны. Это, так называемый релеевский предел разрешения.

Исследования в этой области показали [2-9], что предел разрешения зависит не только от ширины луча, но и от величины отношения сигнала к шуму (ОСШ). Причем, чем больше это отношение, тем выше разрешающая способность системы. В пределе при отсутствии шума приемных устройств разрешающая способность становится бесконечной и проблема заключается в том, чтобы найти алгоритмы обработки сигналов, которые реализуют такие возможности углового разрешения.

Подобного рода задача решалась также в области спектрального анализа, где исследовалась разрешающая способность дискретных спектральных линий [10,11]. В силу известных аналогий пространственной и временной обработок сигналов методы разрешения спектральных линий, разработанные в спектральном анализе, могут быть применены и для углового разрешения источников сигналов с помощью АР.

Известно большое число методов “сверхразрешения”, которые дают возможность определить параметры источников излучения, даже если они находятся в пределах ширины луча ДН. Первый метод, который мы подробно изучаем в этой главе, называется методом Кейпона. Этот метод имеет определенное сходство с методами адаптивной обработки сигналов в АР. Метод не требует априорного знания числа источников. Далее мы обобщаем метод Кейпона и показываем, каким образом и за счет чего угловая разрешающая способность может быть увеличена. Здесь мы опираемся в основном на опубликованные собственные работы [14, 24-29]. Обобщение метода Кейпона позволяет также прийти к проекционному методу углового разрешения, который в современной литературе часто называется методом MUSIC – Multi-Signal Classification. Подход, который мы излагаем, является оригинальным и опирается на свойства минимального многочлена КМ входных сигналов. Метод дает возможность одновременно оценить число дискретных источников и значения их параметров. Соответствующие результаты также опубликованы авторами.

В третьей главе изучаются методы определения параметров протяженных источников. Мы полагаем, что источник является некогерентным, т. е. отдельные его точки излучают некоррелированные колебания. Поэтому в случае протяженного источника представляет интерес угловое распределение его мощности излучения. Решение этой задачи сводится к решению уравнения свертки двух функций: ДН антенной системы по мощности и искомого распределения. Измеренное распределение мощности излучения имеет случайную погрешность из-за наличия собственных шумов приемных устройств. Однако нас будет интересовать систематическая погрешность, которая обусловлена влиянием конечного (не равного нулю) углового размера ширины луча антенны. Изучение характера систематической ошибки показывает, что в ряде случаев ошибка может быть уменьшена благодаря дополнительной обработке результатов измерения. Отмечается, что в общем случае задача относится к классу некорректно поставленных задач и для ее решения следует применять методы регуляризации [12].

Используя аналогичный подход, рассматривается задача измерения ДН по радиоизлучению Солнца. Здесь также решается уравнение свертки двух функций: распределения радиояркости по Солнцу и искомой ДН. Эта задача имеет важное практическое значение для настройки различных антенных систем, например радиолокаторов. Материал излагается в основном по результатам, опубликованным авторами [33].

Некоторые задачи радиоастрономии требуют приборов с очень высоким угловым разрешением в радиодиапазоне, составляющим порядка нескольких угловых минут. В

этом случае используют радиоинтерферометры [13]. Достаточно иметь только две антенны с относительно небольшими размерами и разнести их на достаточно большое расстояние, которое называется базой интерферометра. Корреляционная обработка сигналов, принятых этими антеннами при различных значениях базы интерферометра, дает возможность измерить коэффициенты в Фурье-разложении функции распределения радиоизлучения. Этот способ в конечном итоге также дает возможность определить функцию распределения излучения протяженного источника.

В Приложении приводятся основные математические векторно-матричные соотношения, которые являются весьма полезными для успешного решения задач в области пространственной обработки сигналов в АР.

В конце материалов приводится список использованной литературы и список принятых сокращений

## ГЛАВА 1. АНТЕННАЯ РЕШЕТКА

Для передачи и приема радиосигналов в радиосвязи, радиолокации, радиопеленгации и радионавигации часто используют антенную систему, которая получила название антенная решетка (АР). В общем случае АР представляет собой множество простых антенн, произвольным образом распределенных в пространстве и объединенных единой системой управления передачей или приемом сигналов. Простые антенны называют элементами АР. Как правило, элементы АР имеют геометрические размеры, не превышающие длину волны используемого радиочастотного диапазона, в то время как вся АР может иметь геометрические размеры, значительно превышающие эту длину волны. В большинстве случаев АР состоит из идентичных элементов, которые распределены в пространстве упорядоченным образом, например, на одинаковом друг от друга расстоянии. Это обстоятельство оправдывает термин “решетка”, используемый для таких антенных систем.

Если элементы АР распределены вдоль некоторой линии, то АР называется линейной. Эквидистантной линейной АР называется система, элементы которой расположены друг от друга на одинаковом расстоянии. Если каждый элемент АР предполагается излучающим равномерно по всем направлениям, то такая система называется эквидистантной линейной АР с изотропно излучающими элементами. Если элементы АР распределены на плоскости, то решетка называется плоской. Элементы АР могут быть распределены по цилиндрической или сферической поверхности. Соответственно, АР будет называться цилиндрической или сферической. В авиации применяются АР, которые сконструированы так, что их элементы распределены по поверхности фюзеляжа и крыльев. АР называются поверхностными, если их элементы распределены по искривленной поверхности.

В этом пособии мы рассматриваем исключительно приемные АР, которые обеспечивают прием сигналов и их обработку.

### 1.1 Прием гармонического сигнала с плоским волновым фронтом

Предположим, что  $N$  элементов АР распределены вдоль оси  $x$ , как это показано на рис. 1.1. Начало координат выбрано в точке расположения крайнего левого элемента решетки с номером 1. Межэлементное расстояние обозначено буквой  $d$ .



Рис. 1.1 Геометрия  $N$ -элементной линейной эквидистантной АР и плоской падающей волны

Предположим, что плоская монохроматическая волна единичной амплитуды падает на АР под углом  $\varphi$  по отношению к оси  $y$ . Волна возбуждает гармоническое электрическое колебание в каждом элементе АР. Без ограничения общности начало отсчета времени можно выбрать так, что при  $t=0$  фаза колебания равна нулю в первом элементе решетки. Таким образом, сигнал, принятый первым элементом, можно представить в виде

$$s_1(t) = \exp(jw_0 t), \quad (1.1)$$

где  $j$  - мнимая единица,  $w_0 = 2\pi f_0$  - циклическая частота, а  $f_0$  - частота колебания, выраженная в герцах.

Колебание во втором элементе АР опережает колебание в первом элементе на время  $t$ , которое легко определить, используя рис. 1.1. Из геометрических соображений находим, что

$$t = \frac{d \sin \varphi}{c}, \quad (1.2)$$

где  $c$  - скорость распространения электромагнитных волн, которую мы принимаем равной скорости света, так как не рассматриваем влияние среды.

За время  $t$  фаза колебания второго элемента АР увеличивается на величину  $w_0 t$  по отношению к фазе колебания в первом элементе. Поэтому сигнал, принятый вторым элементом, можно записать в виде

$$s_2(t) = \exp[jw_0(t + t)] = \exp(j2\pi f_0 t) \exp(jw_0 t). \quad (1.3)$$

Подставляя (1.2) в (1.3) и учитывая, что длина волны  $\lambda = c/f_0$ , находим колебание, возбуждаемое волной во втором элементе, в следующем виде



$$s_2(t) = \exp\left(j \frac{2p}{l} d \sin j\right) \exp(jw_0 t). \quad (1.4)$$

Выражение (1.4) легко получить также, применяя в качестве исходной формулу, описывающую распространение плоской волны

$$s(t, r) = \exp[j(w_0 t - kr)], \quad (1.5)$$

где  $k = \frac{2p}{l}$  - волновое число,  $r$  - расстояние, пробегаемое волной.

Из рис. 1.1 видно, что расстояние, которое волна проходит до второго элемента меньше, чем расстояние, которое она проходит до первого элемента, на величину  $d \sin j$ . Эта разница в расстояниях называется обычно разностью хода волны. Разность фаз колебаний, получающаяся из-за разности хода, определяется умножением разности хода на волновое число, как показывает формула (1.5). Таким образом, мы находим, что разность фаз равна  $\frac{2p}{l} d \sin j$ , что соответствует выражению (1.4).

Теперь легко понять, что колебания, возбуждаемые волной в разных элементах АР, отличаются только разностью фаз  $\Delta_n$ , которая зависит от номера элемента  $n$  следующим образом

$$\Delta_n = \frac{2p}{l} (n-1) d \sin j; \quad n = (1 \div N). \quad (1.6)$$

Обобщая (1.4) с помощью (1.6), получим выражение, описывающее колебания во всех элементах АР, в следующем виде

$$s_n(t) = \exp\left[j \frac{2p}{l} (n-1) d \sin j\right] \exp(jw_0 t); \quad n = (1 \div N). \quad (1.7)$$

Второй множитель в этом выражении зависит только от частоты колебания. Он одинаков для всех элементов АР и поэтому не несет информации о геометрии АР и направлении прихода волны. Во многих задачах этот множитель опускают из рассмотрения. Первый множитель называют комплексной амплитудой сигнала. Именно он имеет существенное значение в задачах, связанных с обработкой сигнала. Обозначим комплексную амплитуду как  $S_n$ . Тогда выражение (1.7) принимает вид

$$s_n(t) = S_n \exp(jw_0 t); \quad n = (1 \div N). \quad (1.8)$$

АР представляет собой многоканальную систему, так как волна возбуждает одновременно  $N$  колебаний различной амплитуды. Математика дает нам возможность

описать единообразно всю совокупность сигналов (1.8), если ввести вектор комплексных амплитуд  $\mathbf{S}$  и вектор сигналов  $\mathbf{s}(t)$  следующим образом

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \mathbf{M} \\ S_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \exp\left(j \frac{2p}{l} d \sin j\right) \\ \mathbf{M} \\ \exp\left[j \frac{2p}{l} (N-1) d \sin j\right] \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

$$\mathbf{s}(t) = \begin{pmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \\ \mathbf{M} \\ s_N(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \mathbf{M} \\ S_N \end{pmatrix} \exp(j\omega_0 t) = \mathbf{S} \exp(j\omega_0 t).$$

Выражения (1.7), (1.8) и (1.9) можно обобщить на случай АР произвольной конфигурации. На рис. 1.2 изображены элемент АР с номером 1, помещенным в начало система координат  $(x, y, z)$ , элемент решетки с номером  $n$ , положение которого в пространстве определяется вектором  $\vec{r}_n$ , углы  $\alpha$  и  $\beta$ , определяющие направление вектора  $\vec{r}_n$  и плоская волна, направление распространения которой характеризуется волновым вектором  $\vec{k}$ . Другие элементы АР не показаны.

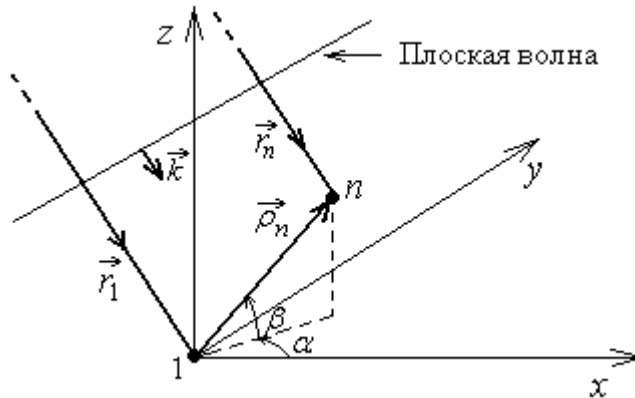


Рис. 1.2 Геометрические пояснения для АР произвольной конфигурации

Сигнал в элементе с номером  $n$  запишем в виде

$$s_n(t) = \exp[j\omega_0 t - j(\vec{k} \vec{r}_n)] \quad n = (1 \div N), \quad (1.10)$$

где  $(\vec{k} \vec{r}_n)$  - скалярное произведение векторов  $\vec{k}$  и  $\vec{r}_n$ .

Учтем, что  $\vec{r}_n = \vec{r}_1 + \vec{r}_n$ . Кроме того, фазу колебания в первом элементе, обусловленную вектором  $\vec{r}_1$ , примем равной 0, поскольку имеет значение только разность фаз колебаний в элементах АР. Тогда формула (1.10) преобразуется к следующему виду

$$s_n(t) = \exp[-j(k\mathbf{r}_n)] \exp(j\omega_0 t); \quad n = (1 \div N). \quad (1.11)$$

Сравнивая (1.11) и (1.8), находим, что компоненты вектора комплексных амплитуд сигналов определяются первым сомножителем в (1.11), т.е.

$$S_n = \exp[-j(k\mathbf{r}_n)] \quad n = (1 \div N). \quad (1.12)$$

Заметим, что начало координат можно выбирать в любой удобной точке пространства. При этом комплексные амплитуды сигналов также определяются формулой (1.12), а вектор  $\mathbf{r}_n$  задает положение элемента с номером  $n$  в выбранной системе координат. Выбор системы координат не влияет на величину разности фаз колебаний в двух различных элементах АР. Например, в случае сферической, цилиндрической или круговой АР целесообразно начало координат выбрать в центре симметрии этих геометрических фигур.

Для примера рассмотрим круговую АР, представленную на рис. 1.3.

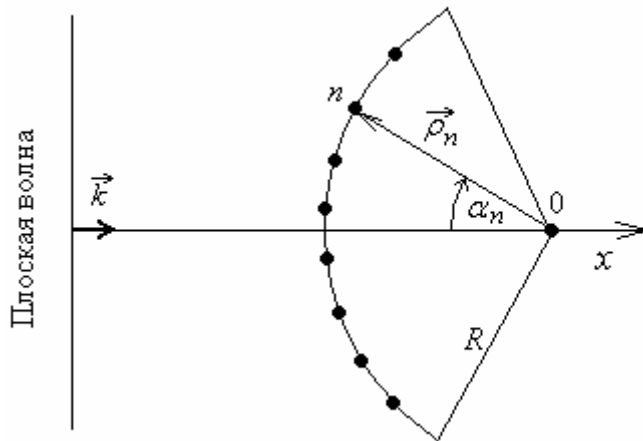


Рис. 1.3 Падение плоской волны на круговую АР

В этом случае скалярное произведение, входящее в формулу (1.12), равно

$$(k\mathbf{r}_n) = -\frac{2p}{l} R \cos \alpha_n. \quad (1.13)$$

Подставляя (1.13) в (1.12), находим, что комплексные амплитуды сигналов для круговой АР определяются выражением

$$S_n = \exp\left(j\frac{2p}{l} R \cos \alpha_n\right); \quad n = (1 \div N). \quad (1.14)$$

## 1.2 Прием узкополосного сигнала

подавляющее большинство радиотехнических систем функционируют, используя узкополосные сигналы. Существуют три эквивалентных способа представления действительного узкополосного сигнала. Первый из них выглядит следующим образом

$$s(t) = a(t) \cos[w_0 t + q(t)], \quad (1.15)$$

где  $a(t)$  - амплитуда сигнала,  $q(t)$  - фаза сигнала.

Предполагается, что амплитуда и фаза сигнала являются медленно меняющимися функциями времени. Изменения амплитуды и фазы обусловлены модуляцией высокочастотного колебания частоты  $\omega_0$ . Спектр такого сигнала занимает частотную полосу  $\Delta\omega$  вблизи частоты  $\omega_0$ . Узкополосные сигналы удовлетворяют условию  $\Delta\omega \ll \omega_0$ .

Используя тригонометрическую формулу преобразования косинуса суммы двух углов в выражении (1.15), получим второй способ представления узкополосного сигнала в виде

$$s(t) = [a(t) \cos q(t)] \cos w_0 t - [a(t) \sin q(t)] \sin w_0 t. \quad (1.16)$$

Такое представление узкополосного сигнала принято называть разложением сигнала по квадратурам. Именно это разложение сигнала используется в передающем устройстве для формирования передаваемого сигнала. Передатчик генерирует два взаимно ортогональных колебания  $\cos w_0 t$  и  $\sin w_0 t$ , модулирует их медленно меняющимися функциями  $a(t) \cos q(t)$  и  $a(t) \sin q(t)$ , соответственно, смешивает, усиливает и отправляет к передающей антенне для излучения в пространство. Приемник, получив сигнал  $s(t)$ , разделяет две квадратурные компоненты, используя их ортогональность. Для этого он умножает принятый сигнал  $s(t)$  как на  $\cos w_0 t$ , так и на  $\sin w_0 t$ . После интегрирования (усреднения по времени) выделяются модулирующие медленно меняющиеся функции  $a(t) \cos q(t)$  и  $a(t) \sin q(t)$ .

В некоторых устройствах (например, в радиолокаторах) достаточно генерировать и излучать лишь одну квадратуру. Однако приемник радиолокатора должен выделять обе квадратуры принимаемого сигнала, так как фаза принимаемого сигнала является случайной величиной. Кроме того, при отражении сигнала от цели происходит модуляция фазы из-за эффекта Доплера.

Третий способ представления узкополосного сигнала выглядит следующим образом

$$s(t) = \operatorname{Re}[S(t) \exp(jw_0 t)]; \quad S(t) = a(t) \exp[jq(t)]. \quad (1.17)$$

Здесь функция  $S(t)$  называется комплексной амплитудой или комплексной огибающей. Она несет информацию об изменениях амплитуды и фазы сигнала  $s(t)$ . Хотя в природе не

существует комплексных сигналов, использование понятия комплексной амплитуды существенно упрощает решение многих задач. Если, например, реальные сигналы подвергаются линейной обработке, то теоретический анализ этого преобразования более просто сделать с эквивалентным комплексным сигналом. После этого достаточно взять реальную часть полученного результата, чтобы получить правильный результат для преобразования реального сигнала. Более того, во многих случаях высокочастотный множитель  $\exp(j\omega_0 t)$  можно опустить и рассматривать только преобразование комплексной амплитуды  $S(t)$ . Это дополнительно упрощает теоретический анализ систем обработки узкополосных сигналов.

Гармонический сигнал, который мы рассматривали в предыдущем разделе, следует также отнести к классу узкополосных сигналов как предельный случай, если  $(\Delta\omega/\omega_0) \rightarrow 0$ . Возникает вопрос: “Как АР будет реагировать на прием узкополосного сигнала, в отличие от гармонического сигнала?”.

Поскольку элементы АР находятся в различных точках пространства, как мы видели раньше, необходимо учитывать задержки сигналов. Допустим, что максимальный размер АР равен  $L$ . Ему соответствует максимальная задержка сигнала  $\tau_{\text{макс}} = L/c$ . В случае гармонического сигнала это ведет к появлению разности фаз  $\omega_0 \tau_{\text{макс}}$ . В случае узкополосного сигнала кроме этого эффекта наблюдается задержка комплексной огибающей  $S(t)$ . Поэтому, строго говоря, в каждый момент времени значения комплексных амплитуд в различных элементах АР отличаются друг от друга. Однако следует учесть, что огибающая  $S(t)$  меняется очень медленно. Характерное время изменения обратно пропорционально ширине спектра сигнала и приблизительно равно  $(\Delta f)^{-1}$ . Если  $t_{\text{макс}} \ll (\Delta f)^{-1}$ , то можно считать, что огибающая  $S(t)$  имеет одинаковое значение для всех элементов АР. Фактически мы накладываем ограничение на размер АР. Чтобы огибающая узкополосного сигнала сохраняла свое значение во всех элементах АР, максимальный размер АР должен удовлетворять условию  $L \ll c(\Delta f)^{-1}$ . Допустим, что сигнал имеет ширину спектра 10 МГц ( $\Delta f = 10^7$  Гц). Принимая скорость света равной  $c = 3 \times 10^8$  м/с, получим, что  $L \ll 30$  м.

В действительности эта оценка может оказаться слишком сильной. Например, если мы рассматриваем линейную АР, и сигнал принимается с направления нормали к решетке, задержка равна нулю для всех элементов. В этом случае нет ограничения на размер АР. Отсюда ясно, что задержка сигнала зависит, строго говоря, не от размера АР, а от длины ее проекции на направление распространения волны. Именно длина этой проекции и должна удовлетворять приведенному выше неравенству.

В дальнейшем везде предполагается, что условие  $L \ll c(\Delta f)^{-1}$  выполняется и комплексная огибающая сигнала в каждом элементе АР одинакова.

В радиолокационных системах и системах цифровой связи сигнал имеет конечную длительность  $T$  и во многих случаях длительность сигнала и ширина его спектра связаны соотношением  $\Delta f \times T \approx 1$ . Такие радиотехнические системы обычно называют узкополосными. Существуют также системы, которые являются широкополосными. Система называется широкополосной, если она использует сигналы с большой базой ( $\Delta f \times T \gg 1$ ). Это сигналы с линейно частотной модуляцией, фазовой манипуляцией, а также сигналы, использующие мультиплексирование ортогональных частот (OFDM). Нужно иметь в виду, что такие сигналы остаются узкополосными, поскольку выполняется условие  $\Delta f \ll f_0$ . Таким образом, широкополосная система (например, система связи с кодовым разделением пользователей) использует узкополосные сигналы.

Сигнал на входе приемника почти всегда имеет случайное значение комплексной амплитуды. Для этого существует много причин.

Во-первых, комплексная амплитуда может меняться случайным образом в результате модуляции в передатчике. Например, в случае QPSK (Quaternary Phase Shift Keying) модуляции комплексная амплитуда принимает четыре значения  $(1/\sqrt{2})(\pm 1 \pm j)$  с равной вероятностью. Во-вторых, при многолучевом распространении сигнала на входе приемника суммируется множество копий одного и того же сигнала со случайными фазами и амплитудами. В результате комплексная амплитуда суммарного сигнала становится случайной величиной с нормальным распределением, а ее модульное значение (амплитуда реального сигнала) флуктуирует по релеевскому закону. В-третьих, в радиодиапазоне существуют шумы аппаратуры и окружающей среды, а также помехи различного происхождения. Шумы и помехи, принятые в частотной полосе приемника представляют собой узкополосные сигналы со случайными комплексными амплитудами.

Чтобы различать регулярную и случайную комплексные амплитуды, последнюю обозначим буквой  $X$ . Мы ограничимся далее рассмотрением гауссовских случайных величин с нулевым средним значением ( $\langle X \rangle = 0$ ). Угловые скобки обозначают статистическое среднее. Полный набор случайных комплексных амплитуд  $X_n$  ( $n=1 \div N$ ) для всех элементов АР для одного и того же момента времени представим в виде вектора-столбца  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n, \dots, X_N)^T$ , где верхний индекс “ $T$ ” обозначает операцию транспонирования. Многомерная функция плотности вероятности совокупности комплексных случайных величин  $X_n$  имеет следующий вид [32]

$$p(\mathbf{X}) = \frac{1}{p^N \det \mathbf{M}} \exp(-\mathbf{X}^H \mathbf{M}^{-1} \mathbf{X}), \quad (1.18)$$

где верхний индекс “ $H$ ” обозначает эрмитовое сопряжение, т.е. операции транспонирования и комплексного сопряжения выполняются одновременно.

Матрица  $\mathbf{M}$ , входящая в (1.18), называется КМ совокупности случайных величин  $X_n$  и по определению равна

$$\mathbf{M} = \langle \mathbf{X} \mathbf{X}^H \rangle. \quad (1.19)$$

где  $\langle \rangle$  обозначает статистическое среднее.

Как видно из формулы (1.18), статистические свойства совокупности гауссовских комплексных случайных величин  $X_n$  полностью определяются КМ (1.19).

В развернутом виде матрица  $\mathbf{M}$  может быть представлена следующим образом

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \langle X_1 X_1^* \rangle & \langle X_1 X_2^* \rangle & \mathbf{L} & \langle X_1 X_N^* \rangle \\ \langle X_2 X_1^* \rangle & \langle X_2 X_2^* \rangle & \mathbf{L} & \langle X_2 X_N^* \rangle \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{O} & \mathbf{M} \\ \langle X_N X_1^* \rangle & \langle X_N X_2^* \rangle & \mathbf{L} & \langle X_N X_N^* \rangle \end{pmatrix}, \quad (1.20)$$

где  $(.)^*$  - обозначает комплексное сопряжение.

Диагональный элемент этой матрицы дает среднюю мощность узкополосного случайного сигнала в соответствующей приемной антенне. Недиагональные элементы дают функции корреляции сигналов в различных элементах. Симметричные относительно диагонали элементы матрицы являются комплексно сопряженными. Такая матрица называется эрмитовой.

Рассмотрим некоторые частные случаи представления КМ.

1. *Собственный шум АР.* Этот шум обычно обусловлен собственным шумом усилителя, включенного в каждый элемент АР. Очевидно, что шумы в различных усилителях статистически независимы между собой. Поэтому каждый недиагональный элемент КМ собственного шума равен нулю. Будем предполагать, что средняя мощность собственного шума в каждом элементе АР одинакова и равна  $\sigma^2$ . В этом случае КМ собственного шума равна  $\mathbf{M} = \sigma^2 \mathbf{E}$ , где  $\mathbf{E}$  - единичная матрица.

2. *Внешний источник шума малого углового размера.* В этом случае сигнал источника распространяется в направлении АР в виде плоской волны (1.5) со случайной комплексной амплитудой  $a(t)$ . Этот сигнал принимается всеми элементами АР с некоторыми задержками, в результате чего комплексная амплитуда сигнала в  $n$ -ой приемной антенне будет равна  $X_n = a(t) S_n$ , где  $S_n$  дается формулой (1.12). В векторной

форме это эквивалентно соотношению  $\mathbf{X}=a(t)\mathbf{S}$ . Заметим, что вектор  $\mathbf{S}$  не является случайным. Далее из (1.19) находим, что КМ внешнего источника шума равна

$$\mathbf{M} = \langle |a(t)|^2 \rangle \mathbf{S} \mathbf{S}^H. \quad (1.21)$$

3. *Несколько внешних источников шума малого углового размера.* В этом случае вектор принятых сигналов  $\mathbf{X}$  равен

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^J a_i(t) \mathbf{S}_i, \quad (1.22)$$

где  $J$  – число внешних источников шума.

Предположим, что внешние источники создают статистически независимые колебания  $a_i(t)$ . Тогда, подставляя (1.22) в (1.19), КМ принятого шума можно получить в виде

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^J \langle |a_i(t)|^2 \rangle \mathbf{S}_i \mathbf{S}_i^H. \quad (1.23)$$

Сравнивая это выражение с (1.21), мы видим, что КМ шума нескольких некоррелированных внешних источников равна сумме КМ отдельных источников.

Иногда следует учитывать статистическую зависимость колебаний  $a_i(t)$ . Например, в условиях многолучевого распространения сигнала один источник может создать много волновых фронтов, приходящих к АР с различных направлений. Эту ситуацию можно рассматривать как прием коррелированных сигналов нескольких внешних источников. Для такого случая вместо (1.23) можно получить КМ следующего вида

$$\mathbf{M} = \sum_{k=1}^J \sum_{l=1}^J \langle a_k(t) a_l^*(t) \rangle \mathbf{S}_k \mathbf{S}_l^H. \quad (1.24)$$

Если ввести в рассмотрение матрицу  $\mathbf{A}$  с элементами  $\langle a_k(t) a_l^*(t) \rangle$  и матрицу  $\mathbf{F}=[\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \dots, \mathbf{S}_N]$ , столбцами которой являются векторы  $\mathbf{S}_k$ , тогда выражение (1.24) легко записать в матричном виде следующим образом

$$\mathbf{M} = \mathbf{F} \mathbf{A} \mathbf{F}^H. \quad (1.25)$$

Ясно, что это выражение обобщает и формулу (1.23), полученную для некоррелированных внешних источников шума. Для этого достаточно считать матрицу  $\mathbf{A}$  диагональной.

Шум внешних источников и собственный шум АР статистически независимы. Поэтому КМ суммарного шума равна

$$\mathbf{M} = \mathbf{F} \mathbf{A} \mathbf{F}^H + \sigma^2 \mathbf{E}. \quad (1.26)$$



Отметим важное свойство КМ, которое заключается в том, что ее вид не зависит от выбора системы координат. Действительно, переход из одной системы координат в другую ведет к появлению у матрицы  $\mathbf{F}=[\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \dots, \mathbf{S}_N]$  комплексного скалярного множителя с модулем, равным единице. Комплексно сопряженный множитель появляется и у матрицы  $\mathbf{F}^H$ . Учитывая это, из (1.26) находим, что матрица  $\mathbf{M}$  инвариантна по отношению к преобразованию системы координат.

### 1.3 Диаграмма направленности антенной решетки

Сигналы, принятые элементами АР далее подвергаются обработке. Наиболее широкое распространение получила линейная обработка сигналов, которая заключается в суммировании принятых сигналов с весовыми коэффициентами. Если весовые коэффициенты фиксированы, можно найти выходной сигнал. ДН антенной системы называется зависимость комплексной амплитуды выходного сигнала от направления прихода плоской волны единичной амплитуды. Учтем, что выражение (1.12) дает комплексные амплитуды сигналов, наводимых в элементах АР произвольной конфигурации, волной произвольного направления прихода и единичной амплитуды. Тогда в общем случае ДН можно представить в виде

$$F(\mathbf{k}) = \sum_{n=1}^N w_n^* \exp[-j(\mathbf{k} \mathbf{r}_n)], \quad (1.27)$$

где  $w_n^*$  - заданные комплексные числа.

ДН является комплексной функцией и, следовательно, имеет функцию модульного значения  $|F(\mathbf{k})|$  и функцию аргумента  $\Phi(\mathbf{k}) = \arg[F(\mathbf{k})]$ . Первая функция называется амплитудной ДН, а вторая - фазовой ДН. Амплитудная ДН не зависит от выбора системы координат. Здесь мы не учитываем поляризацию электромагнитной волны. Если поляризация принимается во внимание, необходимо оговаривать к какому компоненту электрического или магнитного поля относится ДН. Весовые коэффициенты в (1.27) обычно нормируются так, что

$$\sum_{n=1}^N |w_n|^2 = 1. \quad (1.28)$$

Рассмотрим более подробно свойства ДН линейной эквидистантной АР из изотропных элементов, которая изображена на рис. 1.1. В этом случае формула (1.27) принимает следующий вид

$$F(j) = \sum_{n=1}^N w_n^* \exp \left[ j \frac{2p}{I} d(n-1) \sin j \right]. \quad (1.29)$$

Здесь ДН является функцией одной переменной – угла прихода волны  $\varphi$ . Например, это может быть азимут или угол места источника сигнала.

Поскольку весовые коэффициенты  $w_n^*$  являются комплексными числами, сигналы, принятые АР, получают амплитудные и фазовые изменения. На практике для этого применяются различные СВЧ устройства или, если речь идет о цифровой обработке сигналов, вначале аналоговые сигналы преобразуются в цифровую форму, и затем выполняется весовая обработка (1.29). В данном случае весовые коэффициенты выберем следующим образом

$$w_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \exp \left[ j \frac{2p}{I} d(n-1)x \right], \quad (1.30)$$

где единственный параметр  $\zeta$  определяет все значения весовых коэффициентов.

Легко проверить, что эти весовые коэффициенты удовлетворяют условию нормировки (1.28). Подставляя (1.30) в комплексно сопряженном виде в (1.29), получим следующее выражение

$$F(j) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N \exp \left[ j \frac{2p}{I} d(n-1)(\sin j - x) \right]. \quad (1.31)$$

Суммирование ряда в (1.31) можно выполнить [1]. Для этого введем вспомогательное обозначение  $q = \exp \left[ j \frac{2p}{I} d(\sin j - x) \right]$ . Тогда (1.31) можно переписать в виде

$$F(j) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N q^{n-1}. \quad (1.32)$$

Применяя формулу суммы геометрической прогрессии, знаменатель которой равен  $q$ , (1.32) преобразуем к виду

$$F(j) = \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{1 - q^N}{1 - q}. \quad (1.33)$$

Теперь вернем выражение, обозначенное буквой  $q$ , и сделаем несложные алгебраические преобразования, после чего получим

$$F(j) = \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{\sin\left[p \frac{d}{l} N(\sin j - x)\right]}{\sin\left[p \frac{d}{l} (\sin j - x)\right]} \exp\left[jp \frac{d}{l} (N-1)(\sin j - x)\right]. \quad (1.34)$$

Как правило, наибольший интерес представляет амплитудная ДН, которая легко определяется из (1.34) в виде

$$|F(j)| = \sqrt{N} \frac{\left|\sin\left[p \frac{d}{l} N(\sin j - x)\right]\right|}{N \left|\sin\left[p \frac{d}{l} (\sin j - x)\right]\right|}. \quad (1.35)$$

Для анализа этого выражения удобно ввести вместо переменной  $\varphi$  обобщенную угловую переменную  $\Psi = p \frac{d}{l} N(\sin j - x)$  [1]. Тогда (1.35) будет иметь вид

$$|F(\Psi)| = \sqrt{N} \frac{|\sin \Psi|}{N \left|\sin \frac{\Psi}{N}\right|}. \quad (1.36)$$

На рис. 1.4 представлены графически три функции. Функция  $|\sin \Psi|$  представлена кривой 1, функция  $|\sin(\Psi/N)|$  изображена кривой 2, и ДН  $|F(\Psi)|$ , деленная на  $\sqrt{N}$ , показана в виде кривой 3. Расчеты сделаны для 5-ти элементной АР ( $N=5$ ).

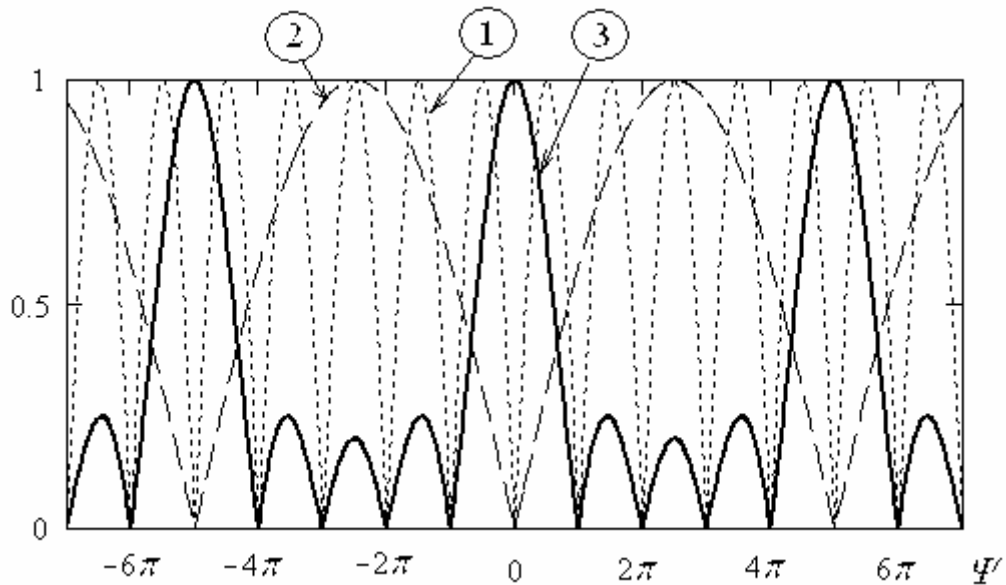


Рис. 1.4 Функции  $|\sin \Psi|$ ,  $|\sin(\Psi/N)|$  и нормированная ДН  $|F(\Psi)|$  АР (кривые 1,2,3, соответственно) для  $N=5$

Функция  $|\sin \Psi|$  имеет нули в точках  $\Psi = \pm pm$ , где  $m$  - целое число, в то время как функция  $|\sin(\Psi/N)|$  имеет нули только в точках  $\Psi = \pm pNm$ . Поскольку в этих точках числитель и знаменатель формулы (1.36) обращаются в нуль, необходимо раскрыть неопределенность. В результате в точках  $\Psi = \pm pNm$  мы наблюдаем максимумы ДН. Максимум в точке  $\Psi=0$  принято называть главным. Другие максимумы ДН того же уровня называются побочными или дифракционными. Наблюдаются также максимумы меньшего уровня, которые называют боковыми лепестками. Видно, что ДН является периодической функцией относительно обобщенной угловой переменной  $\Psi$ .

Теперь мы должны вернуться к угловой переменной  $\varphi$  и определить свойства ДН в области значений этой переменной. Прежде всего, найдем направление главного луча  $\varphi_0$ , полагая  $\Psi=0$ . В результате находим, что  $\sin j_0 = x$ . Главный луч будет направлен по нормали к АР, если  $x = 0$ . Луч будет изменять свое направление, если  $|x| \leq 1$ . Управление весовыми коэффициентами, при котором главный луч изменяет свое направление, в антенной технике называют сканированием.

Теперь определим ширину главного луча  $\Delta\varphi$ . Первые нули ДН вблизи главного луча находятся в точках  $\Psi = \pm\pi$ . Угловое расстояние между ними дает ширину луча, равную

$$\Delta j = 2 \arcsin \left( \frac{I}{dN \cos j_0} \right). \quad (1.37)$$

Мы видим, что ширина луча уменьшается при увеличении размера АР. Наблюдается также расширение луча при отклонении его от нормали. В антенной технике ширину главного луча принято определять по уровню ДН, равному -3 дБ относительно максимума. В этом случае вместо формулы (1.37) следует использовать выражение

$$(\Delta j)_{-3dB} = 2 \arcsin \left( \frac{0,451 I}{dN \cos j_0} \right). \quad (1.38)$$

АР конструируют таким образом, чтобы дифракционные лепестки ДН не попадали в область видимости. Найдем условие, при котором это выполняется. В силу симметрии задачи достаточно рассмотреть изменение угловой переменной в области переднего полукруга, т.е. считать, что  $-(p/2) \leq j \leq (p/2)$ . Когда угол  $\varphi$  меняется в этих пределах, обобщенная угловая переменная  $\Psi$  меняется в пределах

$$-p \frac{d}{l} N(1+x) \leq \Psi \leq p \frac{d}{l} N(1-x). \quad (1.39)$$

Эта область обобщенной угловой переменной  $\Psi$  называется областью видимости, или областью действительных углов. В области видимости не должно быть дифракционных лепестков. Как видно из рис. 1.4, это условие выполняется, если  $-p(N-1) \leq \Psi \leq p(N-1)$ . Сравнивая это неравенство с (1.39), мы получаем следующие два условия

$$p \frac{d}{l} N(1-x) < (N-1)p, \quad -p \frac{d}{l} N(1+x) > -(N-1)p. \quad (1.40)$$

Эти неравенства эквивалентны одному неравенству следующего вида

$$\frac{d}{l} \leq \frac{N-1}{N} \frac{1}{1+|x|}. \quad (1.41)$$

Если АР не предназначена для сканирования, и ее главный луч направлен по нормали, то величина  $x = 0$ . В этом случае для АР с большим числом элементов из (1.41) находим условие  $d \leq \lambda$ . Если предполагается сканирование лучом АР в секторе углов  $\pm \varphi_0$ , то в (1.41) следует положить  $x = \sin j_0$ . Отсюда также следует, что при сканировании во всем переднем полукруге ( $|j_0| \leq p/2$ ) требование к межэлементному расстоянию становится более сильным ( $d \leq 0,5\lambda$ ).

Боковые лепестки ДН оказывают отрицательное действие. Например, в радиолокации с целью противодействия создают помехи большой мощности, которые воздействуют по боковым лепесткам и не дают возможности регистрировать слабый отраженный от цели полезный сигнал. Поэтому разработчики антенн принимают меры к снижению уровня боковых лепестков ДН [1]. Данную задачу можно решить, выбирая соответствующим образом весовые коэффициенты в формулах (1.28) и (1.29). Существуют два способа для оптимального решения этой задачи.

В соответствии с первым способом минимизируется уровень боковых лепестков при фиксированной ширине главного луча. Решение было получено Дольфом в виде разложения ДН по полиномам Чебышева [1]. Поэтому АР такого типа называют дольф-чебышевскими. Пример ДН для 9-ти элементной дольф-чебышевской АР с весовыми коэффициентами равными  $w_1=w_9=0.38$ ;  $w_2=w_8=0.53$ ;  $w_3=w_7=0.76$ ;  $w_4=w_6=0.94$ ;  $w_5=1$  представлен на рис. 1.5 в виде кривой 2. Для сравнения здесь же приведена ДН АР с единичными весовыми коэффициентами (кривая 1). Видно, что боковые лепестки уменьшаются, а главный луч становится шире. Характерным является то, что все боковые лепестки имеют один и тот же уровень.

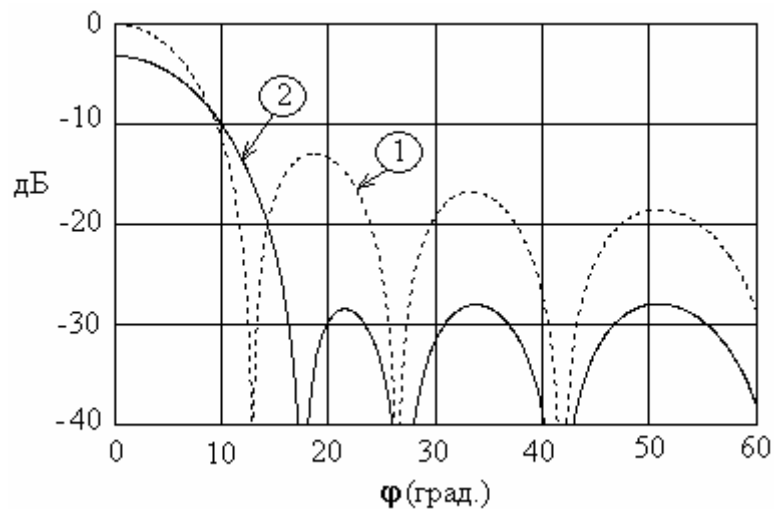


Рис. 1.5. ДН равномерно возбужденной (кривая 1) и дольф-чебышевской АР (кривая 2) при  $N=9$

Другой способ уменьшения уровня боковых лепестков предложен Ямпольским. Он основан на минимизации среднего уровня боковых лепестков, получаемого интегрированием ДН по мощности (квадрат амплитудной диаграммы) в области боковых лепестков. Пример ДН для 16-ти элементной АР представлен на рис. 1.6 в виде кривой 2. При этом весовые коэффициенты равны  $w_1=w_{16}=0.245$ ;  $w_2=w_{15}=0.371$ ;  $w_3=w_{14}=0.508$ ;  $w_4=w_{13}=0.646$ ;  $w_5=w_{12}=0.724$ ;  $w_6=w_{11}=0.882$ ;  $w_7=w_{10}=0.959$ ;  $w_8=w_9=1$ . Для сравнения здесь также приведена ДН АР с весовыми коэффициентами, равными единице, в виде кривой 1.

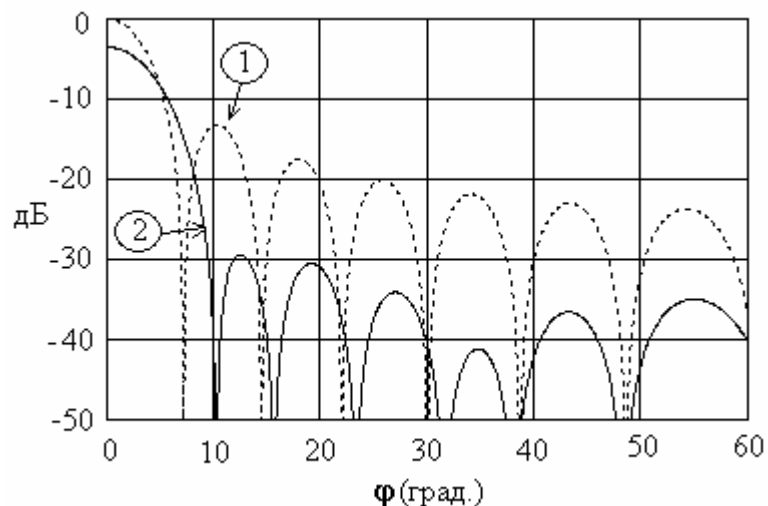


Рис. 1.6 ДН равномерно возбужденной АР (кривая 1) и АР с распределением Ямпольского (кривая 2) при  $N=16$

Снова мы видим, что уровни боковых лепестков уменьшаются, а главный луч становится шире.

Общая закономерность заключается в том, что для уменьшения среднего уровня боковых лепестков модульные значения весовых коэффициентов следует выбирать так, чтобы они уменьшались к краям АР.

#### 1.4 Выходное отношение мощности сигнала к средней мощности шума

АР обладает замечательным свойством увеличивать отношение мощности полезного сигнала к средней мощности шума (ОСШ). Даже если в одном элементе решетки ОСШ меньше единицы, на выходе АР это отношение может быть значительно больше единицы. Благодаря этому системы радиосвязи и радиолокации способны обнаруживать и регистрировать слабые полезные сигналы на фоне достаточно сильной внешней помехи и собственного шума приемных устройств АР.

Предполагая произвольными конфигурацию АР и форму волнового фронта, вектор-столбец полезного сигнала представим, как  $\mathbf{S} = a(S_1, S_2, \mathbf{L}, S_n, \mathbf{L}, S_N)^T$ , где компоненты  $S_n$  определяются из (1.12), если падающая волна плоской. Скалярная величина  $a$  дает амплитуду сигнала в одном элементе АР, в котором выбрано начало координат. Введем также вектор весовых коэффициентов  $\mathbf{W} = (w_1, w_2, \mathbf{L}, w_n, \mathbf{L}, w_N)^T$ . Тогда полезный сигнал на выходе АР можно записать в виде

$$S = a \sum_{n=1}^N w_n^* S_n = a \mathbf{W}^H \mathbf{S}. \quad (1.42)$$

Аналогично представим комплексную амплитуду шума на выходе АР

$$Z = \sum_{n=1}^N w_n^* X_n = \mathbf{W}^H \mathbf{X}, \quad (1.43)$$

где вектор-столбец шума на входе АР представлен как  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \mathbf{L}, X_n, \mathbf{L}, X_N)^T$ .

Сигнал мы предполагаем регулярным, поэтому его мощность на выходе равна

$$|S|^2 = |a|^2 \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N w_n^* w_m S_n S_m^* = |a|^2 |\mathbf{W}^H \mathbf{S}|^2. \quad (1.44)$$

Для средней мощности шума на выходе АР в результате последовательных преобразований получим, что

$$\begin{aligned} \langle |Z|^2 \rangle &= \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N w_n^* w_m \langle X_n X_m^* \rangle = \\ &= \langle |\mathbf{W}^H \mathbf{X}|^2 \rangle = \mathbf{W}^H \langle \mathbf{X} \mathbf{X}^H \rangle \mathbf{W} = \mathbf{W}^H \mathbf{M} \mathbf{W} \end{aligned} \quad (1.45)$$

Здесь принято во внимание определение КМ шума (1.19).

Теперь величину выходного ОСШ представим, используя (1.44) и (1.45), в виде

$$h = \frac{|a|^2 |\mathbf{W}^H \mathbf{S}|^2}{\mathbf{W}^H \mathbf{M} \mathbf{W}}. \quad (1.46)$$

С математической точки зрения ОСШ (1.46) представляет собой отношение двух положительно определенных квадратичных форм. Это отношение не зависит от нормировки весового вектора  $\mathbf{W}$ . Поэтому оптимальный весовой вектор, который обеспечивает максимальное ОСШ, может быть определен только с точностью до скалярного комплексного множителя.

Сначала предположим, что сигнал принимается на фоне собственного шума с КМ  $\mathbf{M} = \sigma^2 \mathbf{E}$ . Тогда (1.46) преобразуется к виду

$$h = \frac{|a|^2 |\mathbf{W}^H \mathbf{S}|^2}{\sigma^2 \mathbf{W}^H \mathbf{W}}. \quad (1.47)$$

Воспользуемся нормировкой весовых коэффициентов (1.28), которая в векторной форме эквивалентна выражению  $\mathbf{W}^H \mathbf{W} = 1$ . Теперь формула (1.47) существенно упрощается и принимает вид

$$h = \frac{|a|^2}{\sigma^2} |\mathbf{W}^H \mathbf{S}|^2. \quad (1.48)$$

Входящая сюда величина  $\mathbf{W}^H \mathbf{S}$  есть не что иное, как скалярное произведение векторов  $\mathbf{W}$  и  $\mathbf{S}$ . Величина скалярного произведения будет максимальной, если эти векторы параллельны. Таким образом, оптимальный весовой вектор может быть представлен так  $\mathbf{W}_0 = \gamma \mathbf{S}$ , где  $\gamma$  – произвольный скалярный множитель. Если теперь учесть принятую нормировку весового вектора ( $\mathbf{W}^H \mathbf{W} = 1$ ), то получим  $\gamma = (\mathbf{S}^H \mathbf{S})^{-0.5}$ . Следовательно, весовой вектор  $\mathbf{W}_0$  будет равен

$$\mathbf{W}_0 = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{S}^H \mathbf{S}}} \mathbf{S}. \quad (1.49)$$

Подставляя оптимальный весовой вектор в (1.48), получим следующую формулу для максимального выходного ОСШ

$$h_{\max} = \frac{|a|^2}{\sigma^2} (\mathbf{S}^H \mathbf{S}) = \frac{|a|^2}{\sigma^2} \sum_{n=1}^N |S_n|^2. \quad (1.50)$$



Первый множитель  $|a|^2/s^2$  в этой формуле определяет ОСШ в одном элементе АР. Второй множитель  $(\mathbf{S}^H \mathbf{S})$  показывает, во сколько раз ОСШ увеличивается на выходе АР за счет весового суммирования. Если комплексные амплитуды сигнала удовлетворяют выражению (1.12), то весовое суммирование является оптимальным, и сумма в (1.50) равна числу  $N$  элементов АР. Таким образом, ОСШ увеличивается в  $N$  раз.

Обработка сигнала на фоне собственного шума с весовым вектором (1.49) называется согласованной. В этом случае, как не трудно видеть из формул (1.42) и (1.44), происходит когерентное суммирование сигнала. В то время собственные шумы приемных устройств складываются не когерентно. Такое различие приводит к тому, что выходное ОСШ АР увеличивается в  $N$  раз.

Когда речь идет о плоских волнах, мы пользуемся понятием ДН. С учетом (1.27) принятый сигнал (1.42) можно записать так  $S = aF(\vec{k})$ , а его мощность равна  $|S|^2 = |a|^2 |F(\vec{k})|^2$ . В силу принятой нормировки весового вектора ( $\mathbf{W}^H \mathbf{W} = 1$ ) средняя мощность собственного шума на выходе равна  $\sigma^2$ . Действительно, из (1.45) находим, что  $\mathbf{W}^H \mathbf{M} \mathbf{W} = \sigma^2 (\mathbf{W}^H \mathbf{W}) = \sigma^2$ . Теперь ОСШ может быть выражено через ДН следующим образом

$$h = \frac{|a|^2}{s^2} |F(\vec{k})|^2. \quad (1.51)$$

Очевидно, что максимальное ОСШ будет наблюдаться в случае, когда направление на источник сигнала будет совпадать с максимумом ДН. Однако, здесь нужно иметь в виду, что максимальное ОСШ зависит от выбора весовых коэффициентов при формировании ДН (1.29). Если все весовые коэффициенты равны по модулю ( $|w_n| = 1/\sqrt{N}$ ), то прием полностью согласован с плоской волной, и ОСШ равно (1.50). Если предполагается уменьшение уровней боковых лепестков ДН, и весовые коэффициенты выбираются уменьшающимися по модулю к краям антенны, то наблюдаются потери в величине ОСШ. Это хорошо видно на рис. 1.5 и рис. 1.6.

Теперь вернемся к выражению (1.46), где КМ  $\mathbf{M}$  предполагается общего вида, т.е. принимаются во внимание все источники шума. Как следует из определения (1.19), КМ матрица  $\mathbf{M}$  является эрмитовой, т.е.  $\mathbf{M}^H = \mathbf{M}$ . Введем вспомогательный вектор  $\mathbf{V}$ , такой, что  $\mathbf{W} = \mathbf{M}^{-0.5} \mathbf{V}$ . Тогда (1.46) мы можем переписать следующим образом

$$h = \frac{|a|^2 |\mathbf{V}^H \mathbf{M}^{-0.5} \mathbf{S}|^2}{\mathbf{V}^H \mathbf{V}}. \quad (1.52)$$

Чтобы ОСШ было максимальным, вектор  $\mathbf{V}$  должен быть параллельным вектору  $\mathbf{M}^{-0.5}\mathbf{S}$ . Следовательно, оптимальный вектор  $\mathbf{W}$  можно записать в виде

$$\mathbf{W}_0 = g\mathbf{M}^{-1}\mathbf{S}, \quad (1.53)$$

где  $\mathbf{M}^{-1}$  – матрица, обратная по отношению к КМ шума.

Подставим (1.53) в (1.46). В результате получим следующее выражение для максимального ОСШ:

$$h_{\max} = |a|^2 \mathbf{S}^H \mathbf{M}^{-1} \mathbf{S}. \quad (1.54)$$

Эта формула обобщает полученную ранее формулу (1.50) на произвольную шумовую обстановку, которая характеризуется матрицей КМ  $\mathbf{M}$ .

## **ГЛАВА 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ДИСКРЕТНЫХ ИСТОЧНИКОВ СИГНАЛОВ С ПОМОЩЬЮ АНТЕННОЙ РЕШЕТКИ**

Источники сигналов могут быть дискретными или протяженными. Дискретный источник имеет предельно малый угловой размер, так что он характеризуется угловым положением в выбранной системе координат. Кроме того, дискретный источник характеризуется мощностью излучения. Примерами дискретных источников являются передающие антенны систем связи и радиолокации, удаленные на расстояния, много большие их линейных размеров, специально созданные источники помех радиолокационным средствам, радиомаяки, дискретные источники космического радиоизлучения типа ‘Кассиопея’, ‘Лебедь’ и другие. Протяженные источники могут иметь конечные угловые размеры или распространяться на всю полусферу. Например, Солнце можно отнести к протяженному источнику, имеющему линейный угловой размер 0,5 град. Распределенное космическое радиоизлучение исходит из любой точки неба. Значит это протяженный источник излучения. Тепловое излучение земной поверхности также имеет угловую протяженность. Различные участки протяженного источника могут излучать по-разному. Поэтому характеристикой такого источника является угловая плотность мощности и ее зависимость от угловых координат.

В случае дискретных источников мы будем изучать методы определения их угловых положений и уровней мощностей. В случае протяженных источников основное внимание будет уделяться определению зависимости плотности мощности от угловой переменной. Все задачи мы решаем в одномерном случае, т.е. рассматриваем только одну угловую переменную. Вначале рассмотрим случай дискретных источников.

### **2.1 Метод максимального правдоподобия**

Отметим вначале, что метод максимального правдоподобия относится к так называемым параметрическим методам. Для применения таких методов, необходимо, исходя из имеющихся априорных данных, построить математическую сигнальную модель. Например, в отношении источников сигналов часто делается предположение об их малом угловом размере (дискретные источники), о характере волнового фронта (плоский, цилиндрический, сферический), а также о числе источников. Конфигурация АР, также обычно считается заданной. Неизвестными являются направления прихода волн и их амплитуды (или средние мощности), которые задаются в виде числовых параметров в математической сигнальной модели. Задачей параметрических методов и является оценка этих параметров. К параметрическим методам оценивания относятся метод максимального правдоподобия и метод наименьших квадратов.

**2.1.1. Один источник сигнала.** Рассмотрение начнем с простейшего случая одного источника, угловое положение которого задается углом  $\varphi$ , а амплитуда падающей плоской волны равна  $a$ . Мы ставим задачу определить направление прихода сигнала и его амплитуду с помощью АР. Предположим, что имеется линейная АР из  $N$  элементов, расположенных произвольным образом вдоль оси  $x$ , как показано на рис. 2.1.

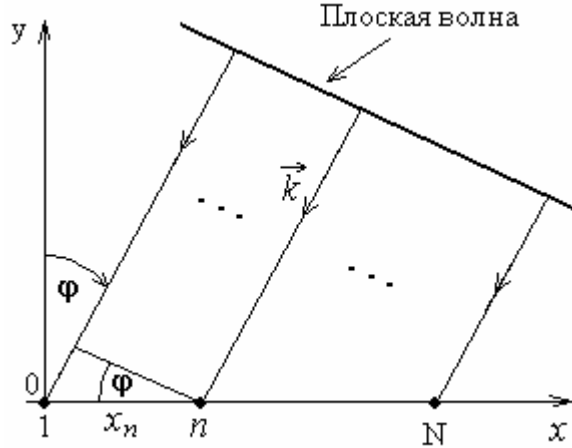


Рис. 2.1 Линейная АР в выбранной системе координат

Смесь полезного сигнала и шума в векторной форме запишем в виде

$$\mathbf{Z} = a\mathbf{S}(j) + \mathbf{X}, \quad (2.1)$$

где вектор сигнала  $\mathbf{S}$  имеет компоненты  $S_n(j) = \exp\left[j \frac{2p}{l} x_n \sin j\right]$ ;  $n = (1 \div N)$ .

Будем считать, что сигнал является регулярным и регистрируется решеткой на фоне собственного шума с КМ  $\mathbf{M} = \sigma^2 \mathbf{E}$ .

Используя (1.18), многомерную функцию плотности вероятности собственного шума запишем в виде [32]

$$p(\mathbf{X}) = \frac{1}{p^N s^{2N}} \exp\left(-\frac{|\mathbf{X}|^2}{s^2}\right). \quad (2.2)$$

Вектор  $\mathbf{Z}$  смеси полезного сигнала и шума является случайным. Его функцию плотности вероятности найдем из (2.2) и (2.1). В результате будем иметь, что

$$p(\mathbf{Z}, j, a) = \frac{1}{p^N s^{2N}} \exp\left(-\frac{|\mathbf{Z} - a\mathbf{S}(j)|^2}{s^2}\right). \quad (2.3)$$

Допустим, в результате приема сигналы получена некоторая реализация вектора  $\mathbf{Z}$ . Тогда, подставляя  $\mathbf{Z}$  в формулу (2.3), получим функцию, которая зависит от угла  $\varphi$  и

амплитуды  $a$ . Эту функцию называют функцией правдоподобия. Исследуя функцию правдоподобия в зависимости от  $\varphi$  и  $a$ , найдем такие значения этих переменных, при которых функция правдоподобия достигает своего максимального значения. Полученные значения переменных называются оценками максимального правдоподобия.

Нетрудно видеть, что функция правдоподобия (2.3) достигает максимума, когда функция

$$g(j, a) = |\mathbf{Z} - a\mathbf{S}(j)|^2 \quad (2.4)$$

имеет минимальное значение.

Метод оценивания параметров путем минимизации (2.4), называется методом наименьших квадратов. В данном случае метод наименьших квадратов и метод максимального правдоподобия дают один и тот же результат.

Векторы  $\mathbf{Z}$  и  $\mathbf{S}$  являются векторами  $N$ -мерного пространства. Вектор  $\mathbf{Z}$  фиксирован и не меняет своего положения. Наоборот, вектор  $\mathbf{S}$  изменяет свое положение, когда мы подставляем различные значения неизвестного угла  $\varphi$ . На рис. 2.2 показаны векторы  $\mathbf{Z}$  и  $\mathbf{S}$ . Кроме того, там представлены компоненты вектора  $\mathbf{Z}$ , одна из которых параллельна вектору  $\mathbf{S}$ , а другая ортогональна ему.

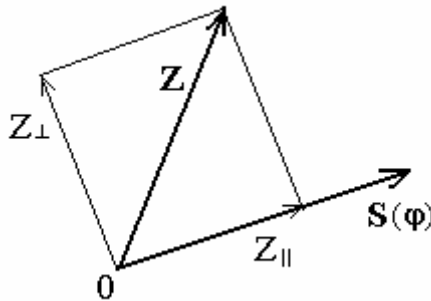


Рис. 2.2. Пример расположения векторов  $\mathbf{Z}$  и  $\mathbf{S}$  в  $N$ -мерном пространстве

Теперь формулу (2.4) можно записать по-другому, а именно:

$$g(j, a) = |\mathbf{Z}_{\parallel} - a\mathbf{S}(j)|^2 + |\mathbf{Z}_{\perp}|^2. \quad (2.5)$$

Первое слагаемое всегда можно свести к нулю, выбирая подходящим образом амплитуду  $a$ . Второе слагаемое минимизируется только за счет выбора угла  $\varphi$ . Поэтому сначала следует минимизировать второе слагаемое, найти оценку угла  $\varphi$ , а затем, приравняв к нулю первое слагаемое, можно найти оценку амплитуды  $a$ .

Введем в рассмотрение матрицы проектирования. Пусть в пространстве размерности  $N$  заданы два произвольных вектора  $\mathbf{Z}$  и  $\mathbf{S}$ . Тогда матрицы проектирования имеют следующий вид [31]

$$\mathbf{\Pi} = \frac{\mathbf{S}\mathbf{S}^H}{\mathbf{S}^H\mathbf{S}}; \quad \mathbf{E} - \mathbf{\Pi} = \mathbf{E} - \frac{\mathbf{S}\mathbf{S}^H}{\mathbf{S}^H\mathbf{S}}. \quad (2.6)$$

Матрица  $\mathbf{\Pi}$  проектирует любой вектор  $\mathbf{Z}$   $N$ -мерного пространства на вектор  $\mathbf{S}$ . Вторая матрица порождает компонент вектора  $\mathbf{Z}$ , ортогональный вектору  $\mathbf{S}$ . Матрицы проектирования обладают следующими свойствами:

$$\mathbf{\Pi}^2 = \mathbf{\Pi}; \quad (\mathbf{E} - \mathbf{\Pi})^2 = (\mathbf{E} - \mathbf{\Pi}); \quad \mathbf{\Pi}(\mathbf{E} - \mathbf{\Pi}) = [\mathbf{0}], \quad (2.7)$$

где нуль в квадратных скобках обозначает нулевую матрицу.

Применяя матрицы проектирования к вектору  $\mathbf{Z}$ , получим компоненты этого вектора в виде

$$\mathbf{Z}_{11} = \mathbf{\Pi}\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{S}^H\mathbf{Z}}{\mathbf{S}^H\mathbf{S}}\mathbf{S}; \quad \mathbf{Z}_{\perp} = (\mathbf{E} - \mathbf{\Pi})\mathbf{Z} = \mathbf{Z} - \mathbf{Z}_{11}. \quad (2.8)$$

Теперь, используя формулы (2.7) и (2.8), легко выразить каждое из слагаемых, входящих в (2.5), следующим образом.

$$|\mathbf{Z}_{11} - a\mathbf{S}(j)|^2 = \left| \frac{\mathbf{S}^H(j)\mathbf{Z}}{\mathbf{S}^H(j)\mathbf{S}(j)} - a \right|^2 |\mathbf{S}(j)|^2, \quad (2.9)$$

$$|\mathbf{Z}_{\perp}|^2 = |\mathbf{Z}|^2 - |\mathbf{Z}_{11}|^2 = |\mathbf{Z}|^2 - \frac{|\mathbf{S}^H(j)\mathbf{Z}|^2}{\mathbf{S}^H(j)\mathbf{S}(j)}. \quad (2.10)$$

Выражение (2.10) имеет минимум тогда, когда второе слагаемое имеет максимум, так как первое слагаемое фиксировано. Для дальнейшего анализа удобно ввести нормированный весовой вектор (1.49). Тогда второе слагаемое в (2.10) будет иметь вид

$$\frac{|\mathbf{S}^H(j)\mathbf{Z}|^2}{\mathbf{S}^H(j)\mathbf{S}(j)} = |\mathbf{W}^H(j)\mathbf{Z}|^2. \quad (2.11)$$

Как мы показали в подразделе 1.5, обработка сигнала (2.11) с весовым вектором (1.49) обеспечивает максимальное ОСШ на выходе, если параметры сигнала и весового вектора совпадают. В данном случае обработка является согласованной с плоской волной сигнала.

Допустим, что истинные значения искоемых параметров будут:  $\varphi = \varphi_0$  и  $a = a_0$ . Тогда вектор принятого сигнала (2.1) равен

$$\mathbf{Z} = a_0 \mathbf{S}(\mathbf{j}_0) + \mathbf{X}. \quad (2.12)$$

Если пренебречь влиянием шума и учесть, что  $\mathbf{S}^H(\mathbf{j})\mathbf{S}(\mathbf{j}) = |\mathbf{S}(\mathbf{j})|^2 = N$ , то из (2.12) и (2.11) получим следующий результат

$$\frac{|\mathbf{S}^H(\mathbf{j})\mathbf{Z}|^2}{\mathbf{S}^H(\mathbf{j})\mathbf{S}(\mathbf{j})} = \frac{|a_0|^2}{N} |\mathbf{S}^H(\mathbf{j})\mathbf{S}(\mathbf{j}_0)|^2 = \frac{|a_0|^2}{N} \left| \sum_{n=1}^N \exp \left[ j \frac{2p}{l} x_n (\sin \mathbf{j}_0 - \sin \mathbf{j}) \right] \right|^2. \quad (2.13)$$

Нетрудно видеть, что выражение (2.13) достигает максимума при  $\varphi = \varphi_0$ . Если АР эквидистантная, то  $x_n = d(n-1)$ , и формула (2.13) может быть преобразована аналогично тому, как было преобразовано выражение (1.31) в (1.35). В результате получим, что

$$\frac{|\mathbf{S}^H(\mathbf{j})\mathbf{Z}|^2}{\mathbf{S}^H(\mathbf{j})\mathbf{S}(\mathbf{j})} = |a_0|^2 |F(\mathbf{j}, \mathbf{j}_0)|^2. \quad (2.14)$$

Функция  $|F(\mathbf{j}, \mathbf{j}_0)|^2$  представляет собой отклик нашего “прибора” (антенной решетки) на плоскую волну единичной амплитуды. Ее можно назвать аппаратной функцией. Функция  $|F(\mathbf{j}, \mathbf{j}_0)|^2$  совпадает с ДН АР по мощности. Иногда метод оценивания угла прихода (2.11) называют методом сканирования лучом антенны.

Если сигнал отсутствует и вместо смеси  $\mathbf{Z}$  в (2.11) входит только шум  $\mathbf{X}$ , то средняя мощность шума на выходе равна  $\sigma^2$ . Это мы определили ранее в подразделе 1.5.

Теперь будем полагать, что сигнал принимается на фоне шума. Тогда выход измерительной системы (2.11) представляет собой случайную функцию угловой переменной  $\varphi$ . Найдем среднее и среднеквадратическое отклонение этой функции. Для этого (2.12) подставим в (2.11) и найдем статистическое среднее. В результате получим, что

$$\langle |\mathbf{W}^H(\mathbf{j})\mathbf{Z}|^2 \rangle = |a_0|^2 |F(\mathbf{j}, \mathbf{j}_0)|^2 + \sigma^2. \quad (2.15)$$

Функции, рассчитанные для эквидистантной АР по формуле (2.15), и нормированные к своим максимальным значениям, представлены на рис. 2.3 ( $\varphi_0=0$ ) и рис. 2.4 ( $\varphi_0=20^\circ$ ) в идеальном случае отсутствия шума, а также при ОСШ  $|a_0|^2/\sigma^2$  в одном элементе АР равном 3 дБ и -3 дБ. Параметры  $N=16$ ,  $d/\lambda=0.5$ . Во всех случаях мы наблюдаем, что максимум отклика совпадает с направлением на источник сигнала, хотя в области боковых лепестков наблюдается существенные изменения.

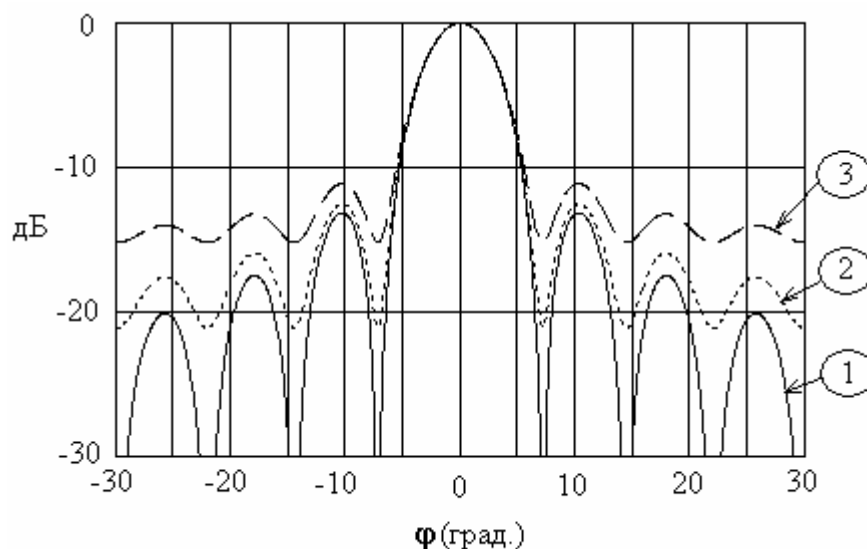


Рис. 2.3. Функция (2.15) при  $\varphi_0=0$  для разных ОСШ в приемной антенне, равных  $\infty$ , 3 дБ и -3 дБ, кривые 1,2,3, соответственно.  $N=16$ ,  $d/\lambda=0.5$

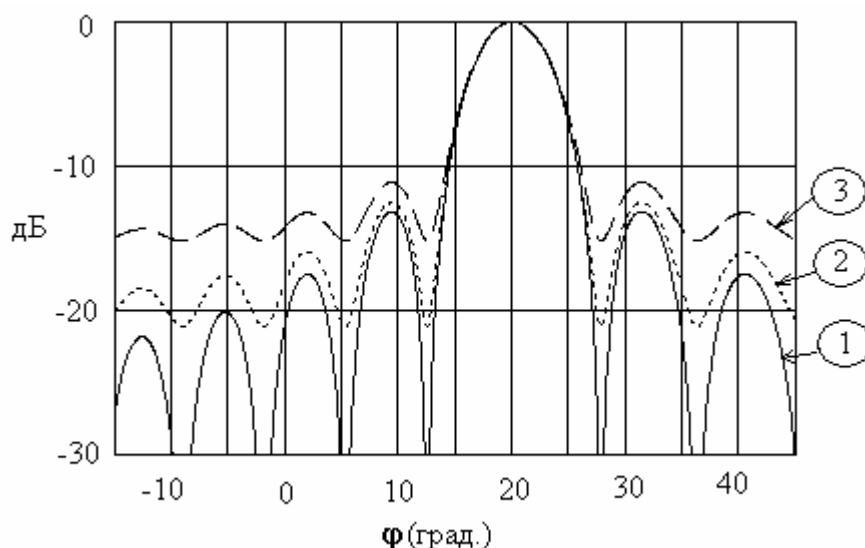


Рис. 2.4. Функция (2.15) при  $\varphi_0=20^\circ$  для разных ОСШ в приемной антенне, равных  $\infty$ , 3 дБ и -3 дБ, кривые 1,2,3, соответственно.  $N=16$ ,  $d/\lambda=0.5$

Таким образом, если в системе предусмотрено усреднение результатов измерения, то хорошая оценка направления прихода волны может быть получена и для очень слабых сигналов. Например, в радиоастрономии для юстировки больших антенн используются достаточно слабые источники космического радиоизлучения, координаты которых известны с высокой точностью. Прием сигнала осуществляется радиометрами, которые созданы специально для приема шумовых сигналов, существенно более слабых, чем собственный шум.



Теперь найдем среднеквадратическое отклонение (СКО) интересующей нас функции (2.11) от ее среднего (2.15). По определению СКО равно

$$s_0 = \sqrt{\langle \left( |\mathbf{W}^H(j)\mathbf{Z}|^2 - \langle |\mathbf{W}^H(j)\mathbf{Z}|^2 \rangle \right)^2 \rangle}. \quad (2.16)$$

Подставляя сюда (2.12) и (2.15), найдем, что

$$s_0 = s \sqrt{2|a|^2 |F(j, j_0)|^2 + s^2}. \quad (2.17)$$

СКО (2.17) характеризует количественно возможные случайные отклонения отдельных реализаций отклика (2.11) от средней величины (2.15). На рис. 2.5 приведены три кривые. Под номером 1 дан средний отклик (2.15) при  $\varphi_0=0$  и ОСШ в одном элементе АР, равном единице (0 дБ). Кривые под номерами 2 и 3 получены путем вычитания и добавления СКО (2.17) к среднему значению (2.15). Таким образом, область отдельных реализаций отклика заключена в основном между кривыми 2 и 3. Для большей детализации кривых в области главного луча эти же результаты представлены на рис. 2.6.

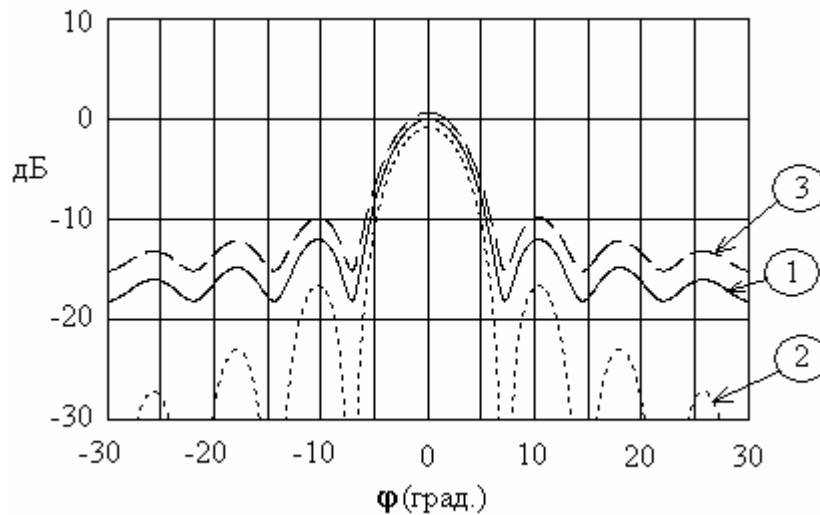


Рис. 2.5. Средний отклик АР (кривая 1) и средний отклик АР с вычитенной или с добавленной СКО (кривые 2 и 3, соответственно).  $\varphi_0=0$ , ОСШ в одном элементе АР равно 0 дБ

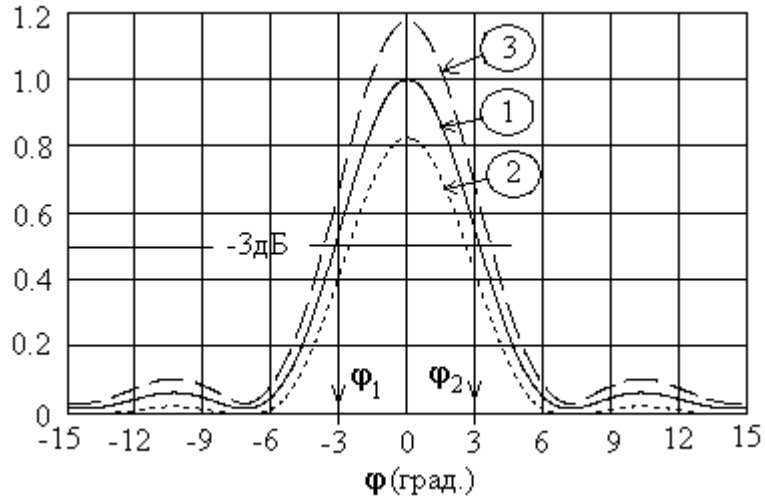


Рис. 2.6. Средний отклик АР (кривая 1). Средний отклик с вычтенной или с добавленной СКО (кривые 2 и 3, соответственно).  $\varphi_0=0$ , ОСШ в одном элементе АР равно 0 дБ

С помощью этого рисунка оценим точность пеленгации источника излучения. Учитывая симметрию аппаратной функции  $|F(j, j_0)|^2$ , направление на максимум определяют следующим образом. На уровне -3 дБ (уровень половинной мощности) проводят прямую горизонтальную линию и находят две точки пересечения с измеренной кривой отклика прибора. Пусть координаты этих точек будут  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . Тогда направление на источник сигнала оценивается, как среднее арифметическое, т.е.

$$j_0 = \frac{j_1 + j_2}{2}. \quad (2.18)$$

Из рис. 2.6 видно, что координаты  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  являются случайными величинами. В данном примере размах относительно среднего для каждой координаты примерно равен  $2\sigma=1,5^\circ$ . Считая оценки координат  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  статистически независимыми, находим, что среднеквадратическая ошибка пеленгации источника равна  $0,53^\circ$ . Ширина луча равна примерно  $6^\circ$ . Поэтому относительная погрешность пеленгации источника равна 8,9%.

После того, как получена оценка направления прихода волны  $j_0$ , можно оценить ее амплитуду. Для этого выражение (2.9) приравняется к нулю, и оценка амплитуды  $a$  получается в виде

$$a = \frac{\mathbf{S}^H(j_0)\mathbf{Z}}{\mathbf{S}^H(j_0)\mathbf{S}(j_0)} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N Z_n \exp\left[j \frac{2p}{I} x_n \sin j_0\right]. \quad (2.19)$$

Подставляя сюда  $\mathbf{Z}$  из (2.12) и усредняя по реализациям шума, найдем среднее значение в виде

$$\langle j \rangle = \frac{\mathbf{S}^H(j_0) \langle \mathbf{Z} \rangle}{\mathbf{S}^H(j_0) \mathbf{S}(j_0)} = a_0 \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \exp \left[ j \frac{2p}{l} x_n (\sin j_0 - \sin j_0) \right]. \quad (2.20)$$

Если выполнить также усреднение по оценкам направления на источник сигнала  $j_0$ , то мы найдем, что среднее значение оценки амплитуды равно амплитуде сигнала. Значит, оценка будет не смещенная.

**2.1.2. Два дискретных источника.** В этом случае сигнальная модель (2.1) должна быть записана в виде

$$\mathbf{Z} = a_1 \mathbf{S}(j_1) + a_2 \mathbf{S}(j_2) + \mathbf{X}. \quad (2.21)$$

Сначала мы исследуем результат, который получается, если в данном случае применить обработку сигнала (2.11), которая является оптимальной в предположении только одного источника сигнала. Для этого рассмотрим два примера.

В первом примере мы предположим, что оба источника имеют одинаковые и равные единице амплитуды волн, т.е.  $a_1=a_2=1$ . Выберем два варианта направлений углов прихода:  $j_1 = -p/32, j_2 = p/32$  в первом варианте и  $j_1 = -p/64, j_2 = p/64$  во втором варианте. Предположим, что измерение углов прихода волн выполняется с помощью линейной эквидистантой АР из 16 элементов ( $N=16$ ) и полуволновым межэлементным расстоянием ( $d/l=0.5$ ). Подставляя (2.21) в (2.11) и пренебрегая влиянием собственного шума, мы вычислим функцию ДН АР по мощности в виде

$$|F(j)|^2 = \frac{|\mathbf{S}^H(j) [\mathbf{S}(j_1) + \mathbf{S}(j_2)]|^2}{\mathbf{S}^H(j) \mathbf{S}(j)}. \quad (2.22)$$

Функция  $|F(j)|$ , вычисленная для первого и второго вариантов, представлена на рис. 2.7 в виде двух кривых. Мы видим, что в первом варианте (кривая 1) функция  $|F(j)|$  имеет два максимума, положения которых точно совпадают с направлениями прихода волн. Во втором варианте (кривая 2) наблюдается единственный максимум в направлении  $\varphi=0$ . В этом случае АР не может различить две волны отдельно. В чем причина такого явления?

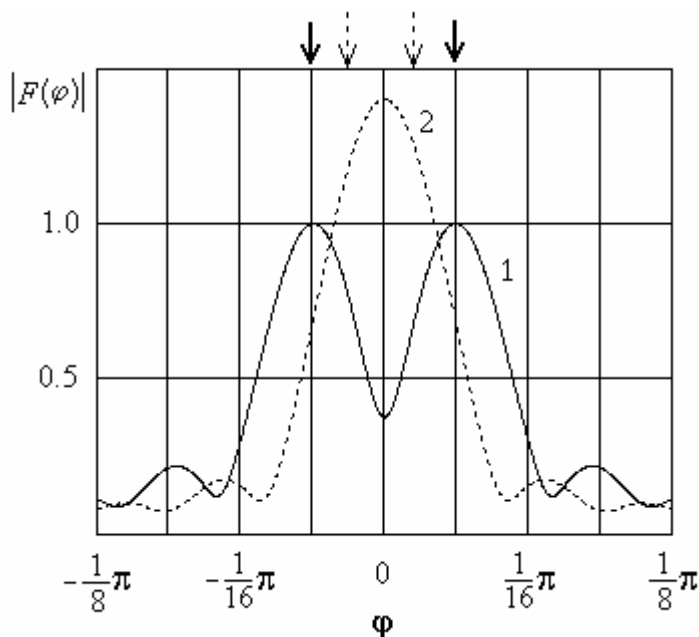


Рис. 2.7 Отклики АР в случае двух (показано стрелками) источников сигналов одинаковой мощности  $a_1=a_2=1$

Чтобы ответить на этот вопрос, сравним ширину главного луча ДН нашей АР и угловое расстояние между направлениями прихода волн. Ширина главного луча ДН, вычисленная по формуле (1.38), равна  $\pi/28$ . Угловое расстояние между источниками в первом варианте равно  $\pi/16$ , а во втором варианте  $\pi/32$ . Следовательно, в первом случае расстояние между источниками больше ширины луча антенны, а во втором случае источники расположены на расстоянии, меньшем ширины луча. Можно предположить, что предел углового разрешения АР определяется именно шириной главного луча антенны. Это, так называемый релеевский предел разрешения.

Релей рассматривал аналогичную задачу, но в области спектрального анализа. Он изучал возможность разрешения двух спектральных линий реальным спектральным анализатором. Отклик анализатора на одну спектральную линию называется аппаратной функцией. В нашем случае это ДН АР. Релей установил, что две спектральные линии одинаковой интенсивности могут быть разрешены, если они удалены более чем на ширину аппаратной функции. По аналогии с этим правилом мы можем сказать, что два источника одинаковой мощности могут быть разрешены, если они удалены более чем на ширину ДН антенны.

Далее мы увидим, что это правило справедливо только в случае согласованной обработки сигналов, которая определяется выражением (2.11). Эта формула была получена, исходя из априорного предположения о существовании только одного источника сигнала. В настоящее время установлено [2-9, 22, 23], что два или более

сигналов могут быть разрешены, даже если они находятся в пределах ширины ДН АР. Методы, которые позволяют обеспечить решение такой задачи, называются методами “сверхразрешения”. Такое название связано с тем, что эти методы превосходят предел разрешения Релея.

Рассмотрим также второй пример, в котором амплитуды волн различны и отличаются в два раза, т.е.  $a_1=1$ ;  $a_2=0.5$ . Угловые положения источников такие же, как в предыдущем примере. Функция  $|F(j)|$ , вычисленная для этого примера, представлена на рис. 2.8. Видно, что кривая 1 имеет два максимума, как и в предыдущем примере. Направление первого максимума совпадает с направлением на источник с большей амплитудой сигнала, в то время как направление второго максимума несколько смещено от направления на источник с меньшей амплитудой сигнала. Видно, что амплитуда второго сигнала оценивается со смещением. Это значит, что имеются систематические ошибки измерения углов прихода и амплитуд сигналов. Кривая 2 имеет один максимум, как и в предыдущем примере, но его положение смещено в сторону более мощного сигнала.

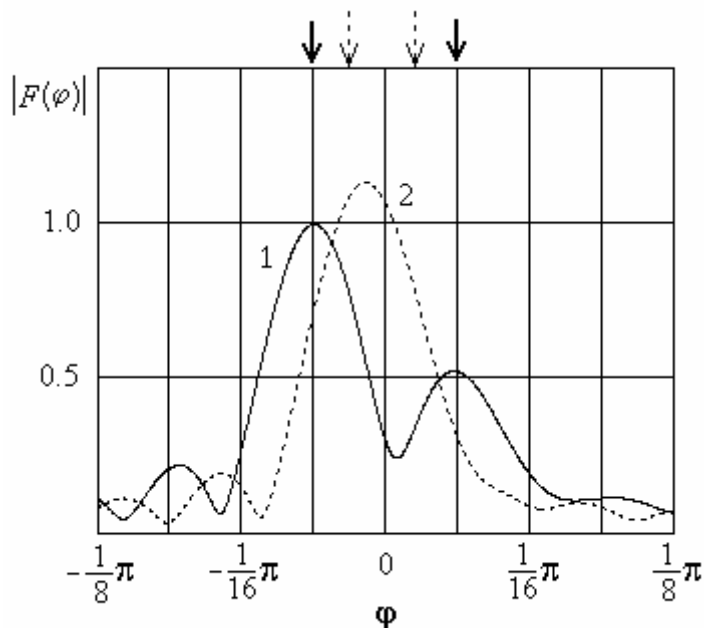


Рис. 2.8 Отклики АР в случае двух (показано стрелками) источников сигналов разной мощности  $a_1=1$ ;  $a_2=0.5$

Приведенные примеры показывают, что метод измерения параметров источников сигналов в соответствии с (2.11), разработанный исходя из априорного предположения о наличии одного источника, не является оптимальным в случае двух источников сигналов.

Чтобы получить оптимальный метод измерения параметров двух сигналов, мы должны априори предположить, что в пространстве имеется два источника. Теперь в (2.21) мы имеем четыре неизвестных параметра: углы прихода двух плоских волн  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  и их

амплитуды  $a_1, a_2$ . Если принята некоторая реализация вектора  $\mathbf{Z}$ , то согласно методу наименьших квадратов мы должны минимизировать функцию 4-х переменных, которую можно записать следующим образом

$$g(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, a_1, a_2) = |\mathbf{Z} - a_1 \mathbf{S}(\mathbf{j}_1) - a_2 \mathbf{S}(\mathbf{j}_2)|^2. \quad (2.23)$$

Векторы  $\mathbf{S}(\mathbf{j}_1)$  и  $\mathbf{S}(\mathbf{j}_2)$  образуют плоскость, если  $\varphi_1 \neq \varphi_2$ . Также мы полагаем, что число элементов решетки  $N > 2$ . Поэтому вектор  $\mathbf{Z}$  имеет размерность больше двух и представим в виде суммы двух ортогональных векторов  $\mathbf{Z}_{11}, \mathbf{Z}_{\perp}$ , таких, что первый лежит в плоскости векторов  $\mathbf{S}(\mathbf{j}_1), \mathbf{S}(\mathbf{j}_2)$ , а второй ортогонален ей. Аналогично (2.5) выражение (2.23) можно переписать следующим образом

$$g(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, a_1, a_2) = |\mathbf{Z}_{11} - a_1 \mathbf{S}(\mathbf{j}_1) - a_2 \mathbf{S}(\mathbf{j}_2)|^2 + |\mathbf{Z}_{\perp}|^2. \quad (2.24)$$

Чтобы построить матрицу проектирования на заданную плоскость, векторы-столбцы  $\mathbf{S}(\mathbf{j}_1), \mathbf{S}(\mathbf{j}_2)$  объединим в матрицу  $\mathbf{F} = [\mathbf{S}(\mathbf{j}_1), \mathbf{S}(\mathbf{j}_2)]$ . Тогда матрица проектирования на плоскость строится следующим образом [31]

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{F}(\mathbf{F}^H \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^H. \quad (2.25)$$

Матрица ортогонального проектирования будет иметь такой вид

$$\mathbf{E} - \mathbf{\Pi} = \mathbf{E} - \mathbf{F}(\mathbf{F}^H \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^H \quad (2.26)$$

Свойства (2.7), справедливые для проекционных матриц (2.6), выполняются также и для проекционных матриц (2.25) и (2.26).

Рассмотрим более подробно проекционную матрицу (2.25). Входящую сюда матрицу  $\mathbf{F}^H \mathbf{F}$  представим в виде

$$\mathbf{F}^H \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}^H(\mathbf{j}_1) \mathbf{S}(\mathbf{j}_1) & \mathbf{S}^H(\mathbf{j}_1) \mathbf{S}(\mathbf{j}_2) \\ \mathbf{S}^H(\mathbf{j}_2) \mathbf{S}(\mathbf{j}_1) & \mathbf{S}^H(\mathbf{j}_2) \mathbf{S}(\mathbf{j}_2) \end{pmatrix}. \quad (2.27)$$

В случае эквидистантной линейной АР компоненты вектора  $\mathbf{S}$  мы задаем в виде  $S_n(\mathbf{j}_{1,2}) = \exp\left[j \frac{2p}{l} d(n-1) \sin \mathbf{j}_{1,2}\right]$ ;  $n = (1 \div N)$ . Отсюда можно найти компоненты матрицы (2.27). В результате будем иметь, что

$$\mathbf{S}^H(\mathbf{j}_k) \mathbf{S}(\mathbf{j}_l) = \sum_{n=1}^N \exp\left[j \frac{2p}{l} d(n-1) (\sin \mathbf{j}_l - \sin \mathbf{j}_k)\right]; \quad (k, l = 1, 2). \quad (2.28)$$

Похожее выражение встречалось в формуле (1.31). Выполняя суммирование в (2.28), получаем выражение, подобное (1.34)

$$\mathbf{S}^H(\mathbf{j}_k)\mathbf{S}(\mathbf{j}_l) = F(\mathbf{j}_k, \mathbf{j}_l) = \frac{\sin\left[p \frac{d}{l} N(\sin \mathbf{j}_l - \sin \mathbf{j}_k)\right]}{\sin\left[p \frac{d}{l} (\sin \mathbf{j}_l - \sin \mathbf{j}_k)\right]} \exp\left[jp \frac{d}{l} (N-1)(\sin \mathbf{j}_l - \sin \mathbf{j}_k)\right]. \quad (2.29)$$

Отсюда следует, что диагональные элементы ( $k=l$ ) матрицы  $\mathbf{F}^H\mathbf{F}$  в (2.27) равны  $N$ . Если расстояние между элементами АР выбрано так, что дифракционные лепестки отсутствуют, то недиагональные элементы матрицы (2.27) меньше диагональных элементов. В тех случаях, когда  $(\sin \mathbf{j}_l - \sin \mathbf{j}_k) = \frac{l}{dN}q$ , ( $q = \pm 1, 2, \mathbf{L}$ ), недиагональные элементы равны нулю и матрица (2.27) имеет диагональный вид. В этих случаях говорят, что векторы  $\mathbf{S}(\mathbf{j}_1), \mathbf{S}(\mathbf{j}_2)$  являются ортогональными. Математики называют матрицу (2.27) матрицей скалярных произведений векторов или матрицей Грама. Чем больше элементов в АР, тем больше число ситуаций, когда векторы  $\mathbf{S}(\mathbf{j}_1), \mathbf{S}(\mathbf{j}_2)$  являются ортогональными.

Чтобы определить координату каждого источника, мы должны минимизировать в (2.24) квадрат модуля ортогональной проекции  $|\mathbf{Z}_\perp|^2$  равный

$$|\mathbf{Z}_\perp|^2 = |(\mathbf{E} - \mathbf{\Pi})\mathbf{Z}|^2 = |\mathbf{Z}|^2 - |\mathbf{Z}_{11}|^2 = |\mathbf{Z}|^2 - \left|\mathbf{F}(\mathbf{F}^H\mathbf{F})^{-1}\mathbf{F}^H\mathbf{Z}\right|^2. \quad (2.30)$$

Угловые координаты  $\varphi_1, \varphi_2$  являются независимыми переменными, и, поэтому мы должны исследовать функцию (2.30) на плоскости переменных  $\varphi_1, \varphi_2$ . Минимум квадрата модуля ортогональной проекции будет в точке, где максимален квадрат модуля  $|\mathbf{Z}_{11}|^2$  проекции, параллельной плоскости, образуемой векторами  $\mathbf{S}(\mathbf{j}_1), \mathbf{S}(\mathbf{j}_2)$ . Поэтому мы будем исследовать величину  $|\mathbf{Z}_{11}|^2 = \left|\mathbf{F}(\mathbf{F}^H\mathbf{F})^{-1}\mathbf{F}^H\mathbf{Z}\right|^2$ .

Вернемся к примеру, который мы рассматривали выше. Мы предполагали, что оба источника имеют одинаковые и равные единице амплитуды волн, т.е.  $a_1=a_2=1$ , а углы прихода волн равны  $\mathbf{j}_1 = p/64, \mathbf{j}_2 = -p/64$ . Как прежде, предположим, что измерение углов прихода волн выполняется с помощью линейной эквидистантой АР из 16 элементов ( $N=16$ ) и полуволновым межэлементным расстоянием ( $d/l=0.5$ ). Метод (2.11), который мы назвали методом сканирования лучом АР, не способен был различить два сигнала (кривая 2 на рис. 2.7), так как оба источника находятся на расстоянии, меньшем ширины главного луча антенны. Теперь мы попробуем применить метод (2.30), который априори предполагает, что в пространстве имеется два источника, а неизвестными являются их угловые координаты и амплитуды волн.

Чтобы определить угловые координаты источников, рассмотрим изолинии функции  $|\mathbf{Z}_{11}|^2 = \left| \mathbf{F}(\mathbf{F}^H \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^H \mathbf{Z} \right|^2$  на плоскости  $\varphi_1, \varphi_2$ . Напомним, что изолинией функции двух переменных по определению называется линия в плоскости переменных, на которой функция принимает фиксированное значение. Картина изолиний для данного примера представлена на рис. 2.9.

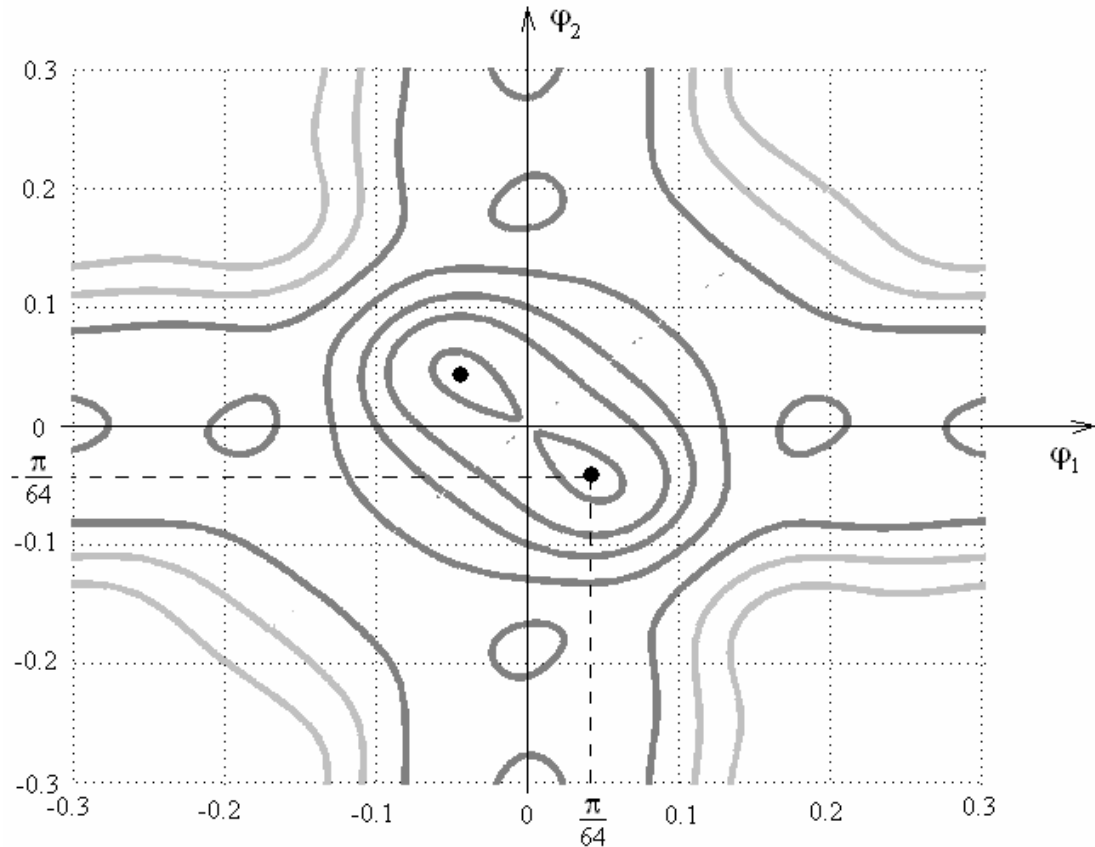


Рис. 2.9 Картина изолиний при разрешении двух источников одинаковой мощности  $a_1=a_2=1$

Картина изолиний является симметричной относительно диагонали  $\varphi_1=\varphi_2$ . Это связано с тем, что нумерация источников произвольная и функция  $|\mathbf{Z}_{11}|^2 = \left| \mathbf{F}(\mathbf{F}^H \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^H \mathbf{Z} \right|^2$  симметрична относительно перестановки индексов 1 и 2. Максимум функции наблюдается в точке с координатами  $j_1 = p/64, j_2 = -p/64$ , а также в симметричной относительно диагонали точке  $j_1 = -p/64, j_2 = p/64$ . Таким образом, мы видим, что этот метод позволяет оценить координаты двух источников, даже если они находятся в пределах ширины главного луча АР.

Рассмотрим также второй пример, в котором амплитуды волн различны и отличаются в два раза, т.е.  $a_1=1; a_2=0.5$ . Угловые положения источников такие же, как в предыдущем примере. Мы видели, что источники не могут быть разрешены, если применять метод



сканирования (см. рис. 2.8). Метод максимального правдоподобия позволяет обнаружить эти источники, что подтверждает картина изолиний функции  $|\mathbf{Z}_{11}|^2 = |\mathbf{F}(\mathbf{F}^H \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^H \mathbf{Z}|^2$ , приведенная для этого случая на рис. 2.10.

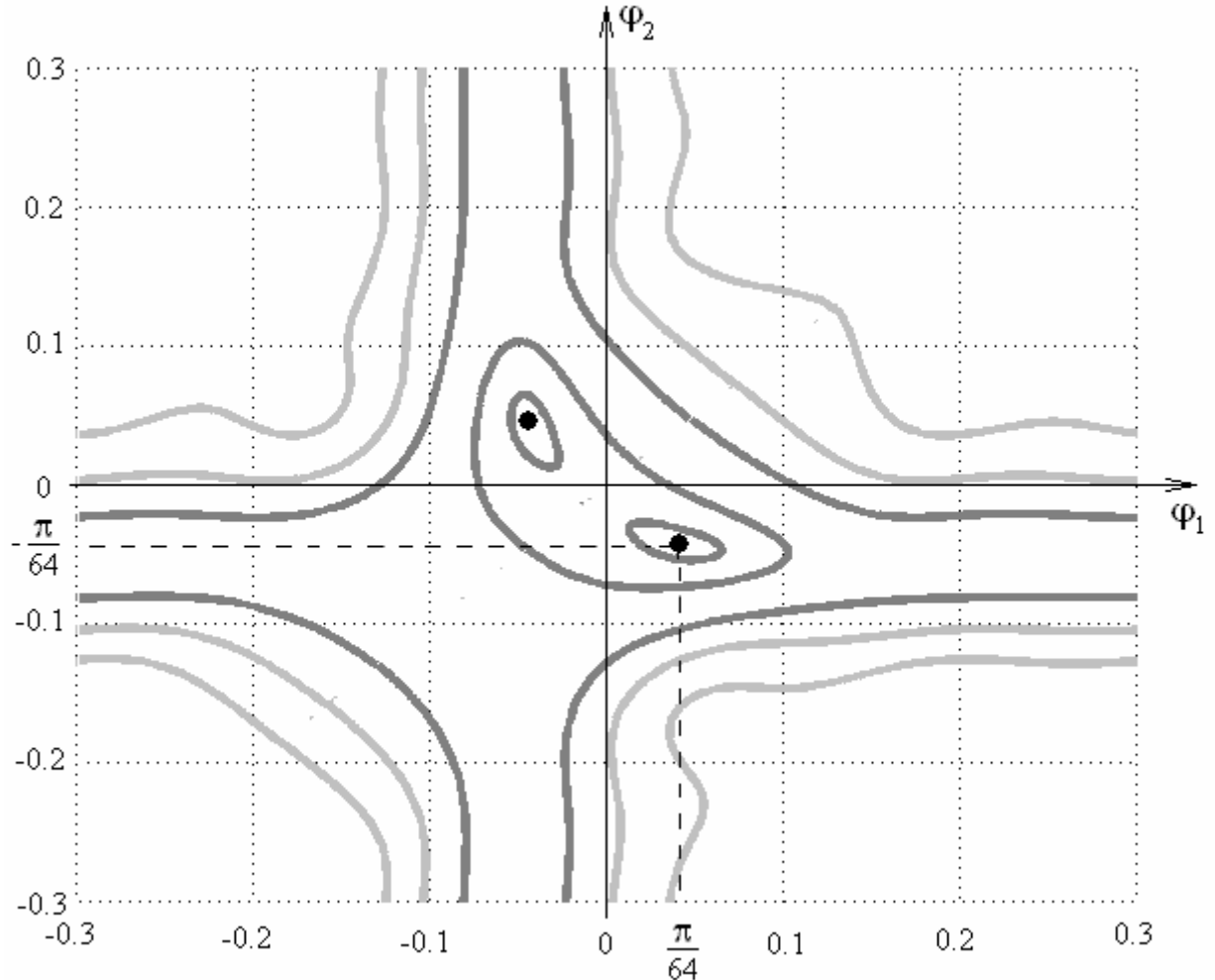


Рис. 2.10 Картина изолиний при разрешении двух источников разной мощности  $a_1=1$ ,  $a_2=0,5$

После того, как определены направления прихода волн, амплитуды волн находятся путем минимизации выражения (2.23).

Конечно, в наших рассуждениях не учитывалось влияние шума, уровень которого будет определять точность измерения параметров источников, а значит и разрешающую способность измерительной системы. Тем не менее, мы можем сделать следующие выводы. Для того чтобы измерить координаты двух источников, угловое расстояние между которыми меньше ширины главного луча АР, необходимо достаточно высокое ОСШ и априорное знание, что в пространстве имеется два источника.

**2.1.3. Число дискретных источника больше двух.** Метод оценивания параметров источников сигналов с помощью АР, основанный на критериях максимума функции правдоподобия или минимума наименьших квадратов и рассмотренный выше для частных

случаев одного и двух дискретных источников, может быть обобщен на большее количество дискретных источников. Чтобы воспользоваться этим методом, необходимо выполнить следующие условия:

- Число источников должно быть известно априори;
- Число элементов АР должно быть больше числа источников сигналов. Только в этом случае мы можем построить проекционные матрицы, подобные (2.6), (2.25) и (2.26);
- Характер волны, падающей на решетку, должен быть одинаковым для всех источников и известным. Это может быть плоская, цилиндрическая, сферическая волны или их комбинации. Знание характера волны необходимо для того, чтобы построить векторы  $\mathbf{S}(j_1), \mathbf{S}(j_2), \mathbf{L}, \mathbf{S}(j_n)$ .

На практике, независимо от числа источников, используется самый простой метод, метод сканирования. В случае одного источника сигнала он дает наилучшую точность оценивания параметров, однако в случае большего числа источников метод дает оценки с ошибками даже при отсутствии шума. Оптимальные методы, учитывающие дополнительную информацию о числе источников сигналов, не используются по следующим причинам.

Во-первых, число требуемых вычислительных операций увеличивается. Действительно, применяя метод сканирования (2.11), мы решаем одномерную задачу и должны анализировать функцию на оси  $\varphi$ . Допустим, что мы выбрали минимальный интервал  $\Delta\varphi$  и делаем анализ функции для  $K$  таких интервалов. Оптимальный метод в случае двух источников требует анализа функции двух переменных  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , как показано на рис. 2.9 и рис. 2.10. Число элементарных интервалов для анализа функции увеличивается и становится равным  $K^2$ . Если мы учтем симметрию функции относительно диагонали  $\varphi_1 = \varphi_2$ , то число элементарных интервалов для анализа функции можно уменьшить вдвое до величины  $0.5K^2$ . Таким образом, мы видим, что количество требуемых операций имеет квадратическую зависимость и, следовательно, всегда будет больше, чем для метода сканирования.

Во-вторых, на практике, как правило, число источников априори не известно. Априорная неопределенность числа источников в какой-то степени преодолевается путем увеличения размера АР и увеличения разрешающей способности системы за счет уменьшения ширины ДН.

## 2.2 Метод Кейпона

Теперь мы рассмотрим методы оценивания углов прихода источников сигналов, которые относятся к классу “сверхразрешающих”. Таких методов предложено большое количество [2-9], и мы не претендуем на полное и всестороннее их описание. Достаточно рассмотреть лишь некоторые из них, чтобы понять общий принцип, на основе которого строятся эти методы.

Начнем изучение с метода Кейпона. Метод был предложен в 1969 году для разрешения спектральных компонент дискретного спектра [10]. Используя аналогию частотного и пространственного спектров, метод был предложен также для оценивания углов прихода сигналов с помощью АР.

Модель сигналов, принимаемых АР из  $N$  элементов, может быть представлена следующим образом

$$\mathbf{Z} = \sum_{k=1}^J a_k \mathbf{S}(j_k) + \mathbf{X}, \quad (2.31)$$

где  $J$  - число дискретных источников;  $a_k; j_k$  - комплексная амплитуда и угол прихода волны, соответствующей индексу  $k$ ;  $\mathbf{S}(j_k)$  -  $N$ -мерный вектор сигналов, принимаемых решеткой от источника с номером  $k$ ;  $\mathbf{X}$  -  $N$ -мерный вектор собственного шума элементов АР;  $\mathbf{Z}$  -  $N$ -мерный вектор принятого сигнала.

Модель предполагает, что комплексные амплитуды волн различных источников статистически независимы, т.е.

$$\langle a_k a_m^* \rangle = \begin{cases} S_k^2 & (k = m), \\ 0 & (k \neq m). \end{cases} \quad (2.32)$$

Поскольку источники дискретные, то сигналы в элементах решетки для каждого источника предполагаются коррелированными (коэффициент корреляции равен единице). Это значит, что вектор сигнала  $\mathbf{S}(j_k)$  каждого источника является детерминированным и описывает одновременно характер волнового фронта и конфигурацию АР. Примеры таких векторов мы приводили в первом разделе в виде формул (1.9), (1.12) и (1.14). Шумы в элементах АР предполагаются некоррелированными и равной мощности.

Задача ставится следующим образом: необходимо найти весовой вектор  $\mathbf{W}$ , который минимизирует среднюю мощность на выходе АР при условии, что для некоторого угла прихода  $\varphi$  коэффициент передачи решетки фиксирован и равен, например, единице. Математически эту задачу запишем следующим образом:

$$\min_{\mathbf{W}} \langle |\mathbf{W}^H \mathbf{Z}|^2 \rangle \quad \text{при условии} \quad \mathbf{W}^H \mathbf{S}(j) = 1. \quad (2.33)$$

Это задача на условный экстремум. Для ее решения мы должны составить функционал Лагранжа в виде

$$\Phi(\mathbf{W}) = \langle |\mathbf{W}^H \mathbf{Z}|^2 \rangle - c(\mathbf{W}^H \mathbf{S}(j) - 1), \quad (2.34)$$

где  $c$  – неопределенный множитель Лагранжа.

Первое слагаемое в (2.34) запишем так

$$\langle |\mathbf{W}^H \mathbf{Z}|^2 \rangle = \mathbf{W}^H \langle \mathbf{Z} \mathbf{Z}^H \rangle \mathbf{W} = \mathbf{W}^H \mathbf{M} \mathbf{W}, \quad (2.35)$$

где  $\mathbf{M} = \langle \mathbf{Z} \mathbf{Z}^H \rangle$  – КМ сигналов на входе АР.

Свойства КМ мы исследовали в первом разделе. Для принятой модели сигналов (2.31) нетрудно вычислить КМ при условии (2.32). В результате получим

$$\mathbf{M} = \sum_{k=1}^J s_k^2 \mathbf{S}(j_k) \mathbf{S}^H(j_k) + \sigma^2 \mathbf{E}, \quad (2.36)$$

где  $\sigma^2$  – средняя мощность шума в одном элементе АР.

С учетом (2.35) выражение (2.34) преобразуется к виду

$$\Phi(\mathbf{W}) = \mathbf{W}^H \mathbf{M} \mathbf{W} - c(\mathbf{W}^H \mathbf{S}(j) - 1). \quad (2.37)$$

Градиент этого функционала приравняем к нулю и получим следующее равенство

$$\mathbf{M} \mathbf{W} = \mathbf{S}(j). \quad (2.38)$$

Отсюда находим весовой вектор

$$\mathbf{W} = c \mathbf{M}^{-1} \mathbf{S}(j), \quad (2.39)$$

где  $\mathbf{M}^{-1}$  – обратная КМ входных сигналов.

Теперь весовой вектор (2.39) следует подставить в требуемое условие (2.33) и тогда неопределенный множитель  $c$  можно найти в виде

$$c = [\mathbf{S}^H(j) \mathbf{M}^{-1} \mathbf{S}(j)]^{-1}. \quad (2.40)$$

Окончательное решение задачи получается, если (2.40) подставить в (2.39). В результате весовой вектор, минимизирующий выходную среднюю мощность по критерию Кейпона, получается в виде

$$\mathbf{W} = \frac{1}{\mathbf{S}^H(j) \mathbf{M}^{-1} \mathbf{S}(j)} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{S}(j). \quad (2.41)$$

В оптимальном состоянии, когда весовые коэффициенты АР установлены в соответствии с (2.41), средняя выходная мощность находится подстановкой (2.41) в (2.35). Эта величина является разрешающей функцией, которую мы обозначим  $\eta_1(\varphi)$ . Таким образом, для метода Кейпона разрешающая функция получается равной

$$h_1(j) = \frac{1}{\mathbf{S}^H(j) \mathbf{M}^{-1} \mathbf{S}(j)}. \quad (2.42)$$

Средняя выходная мощность может быть измерена. Поэтому эта величина представляет интерес с точки зрения углового разрешения источников. Чтобы понять механизм “сверхразрешения”, мы рассмотрим простые примеры.

1. Допустим, что в пространстве имеется один источник. Этот пример полезно рассмотреть, хотя в случае одного источника вопрос об угловом разрешении не имеет смысла. В данном случае КМ (2.36) принимает вид

$$\mathbf{M} = s_1^2 \mathbf{S}(j_1) \mathbf{S}^H(j_1) + s^2 \mathbf{E}. \quad (2.43)$$

Чтобы воспользоваться выражением (2.42), мы должны найти обратную КМ  $\mathbf{M}^{-1}$ . Прямая и обратная КМ являются эрмитовыми положительно определенными. Следовательно, мы можем воспользоваться следующим представлением эрмитовых матриц [31]

$$\mathbf{M} = \sum_{k=1}^N m_k \mathbf{U}_k \mathbf{U}_k^H, \quad (2.44)$$

где  $m_k$  - собственные числа,  $\mathbf{U}_k$  - ортонормированные собственные векторы. Для эрмитовых положительно определенных матриц собственные числа являются положительными числами.

Разложение (2.44) удобно использовать, поскольку обратная матрица получается очень просто, а именно

$$\mathbf{M}^{-1} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{m_k} \mathbf{U}_k \mathbf{U}_k^H. \quad (2.45)$$

Для интересующей нас матрицы (2.43) собственные числа и векторы находятся легко. Напомним, что, если некоторый вектор  $\mathbf{A}$  является собственным вектором матрицы  $\mathbf{M}$ , то справедливо равенство:  $\mathbf{M}\mathbf{A} = \mu\mathbf{A}$ , где  $\mu$  – собственное число, соответствующее

собственному вектору  $\mathbf{A}$ . Умножим (2.43) справа на вектор  $\mathbf{S}(\mathbf{j}_1)$ . В результате получим следующее равенство

$$\mathbf{M}\mathbf{S}(\mathbf{j}_1) = [\mathbf{s}_1^2 \mathbf{S}^H(\mathbf{j}_1)\mathbf{S}(\mathbf{j}_1) + \mathbf{s}^2]\mathbf{S}(\mathbf{j}_1). \quad (2.46)$$

Отсюда мы видим, что вектор  $\mathbf{S}(\mathbf{j}_1)$  является собственным, а соответствующее ему собственное число равно

$$m_1 = \mathbf{s}_1^2 \mathbf{S}^H(\mathbf{j}_1)\mathbf{S}(\mathbf{j}_1) + \mathbf{s}^2. \quad (2.47)$$

После нормировки вектора  $\mathbf{S}(\mathbf{j}_1)$  мы получаем первый нормированный вектор в виде

$$\mathbf{U}_1 = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{S}^H(\mathbf{j}_1)\mathbf{S}(\mathbf{j}_1)}}\mathbf{S}(\mathbf{j}_1) = \frac{\mathbf{S}(\mathbf{j}_1)}{|\mathbf{S}(\mathbf{j}_1)|}. \quad (2.48)$$

Теперь возьмем вектор  $\mathbf{V}$ , ортогональный вектору  $\mathbf{S}(\mathbf{j}_1)$ . Это значит, что скалярное произведение этих векторов равно нулю, т.е.  $\mathbf{S}^H(\mathbf{j}_1)\mathbf{V} = 0$ . Умножим матрицу (2.43) справа на вектор  $\mathbf{V}$ , в результате чего получим

$$\mathbf{M}\mathbf{V} = \mathbf{s}^2\mathbf{V}. \quad (2.49)$$

Таким образом, любой вектор, ортогональный сигнальному вектору  $\mathbf{S}(\mathbf{j}_1)$ , является собственным. Число таких линейно независимых векторов равно  $N-1$ , поскольку размерность векторного пространства равна  $N$ . Подпространство векторов, ортогональное сигнальному вектору  $\mathbf{S}(\mathbf{j}_1)$ , называется шумовым подпространством. В этом подпространстве мы можем выбрать любой ортонормированный базис  $\mathbf{U}_k$  ( $k=2,3,\dots,N$ ) и рассматривать его как собственный базис матрицы  $\mathbf{M}$ . Собственные числа, соответствующие векторам шумового подпространства равны между собой и равны средней мощности шума в одном элементе решетки, т.е. величине  $\sigma^2$ , как это следует из уравнения (2.49).

Таким образом, разложения (2.44) и (2.45) для матрицы (2.43) могут быть записаны в следующем виде

$$\mathbf{M} = m_1\mathbf{U}_1\mathbf{U}_1^H + \mathbf{s}^2\sum_{k=2}^N\mathbf{U}_k\mathbf{U}_k^H, \quad (2.50)$$

$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{m_1}\mathbf{U}_1\mathbf{U}_1^H + \frac{1}{\mathbf{s}^2}\sum_{k=2}^N\mathbf{U}_k\mathbf{U}_k^H. \quad (2.51)$$

Далее выражения (2.50) и (2.51) можно преобразовать следующим образом. Применим разложение (2.44) к единичной матрице  $\mathbf{E}$ . Поскольку все собственные числа равны единице, получаем следующее разложение

$$\mathbf{E} = \sum_{k=1}^N \mathbf{U}_k \mathbf{U}_k^H. \quad (2.52)$$

Здесь в качестве собственных векторов можно взять любой ортонормированный базис векторов. Поэтому мы полагаем, что в выражениях (2.50), (2.51) и (2.52) используется один и тот же базис собственных векторов. Тогда, учитывая (2.48), из (2.52) находим, что

$$\sum_{k=2}^N \mathbf{U}_k \mathbf{U}_k^H = \mathbf{E} - \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_1^H = \mathbf{E} - \frac{\mathbf{S}(\mathbf{j}_1) \mathbf{S}^H(\mathbf{j}_1)}{\mathbf{S}^H(\mathbf{j}_1) \mathbf{S}(\mathbf{j}_1)}. \quad (2.53)$$

Заметим, что это выражение совпадает по форме с формулой (2.6). Следовательно, данное выражение имеет смысл матрицы проектирования на шумовое подпространство. Используя (2.47), (2.48) и (2.53), формулы (2.50) и (2.51) можно записать так

$$\mathbf{M} = \left( s_1^2 \mathbf{S}^H(\mathbf{j}_1) \mathbf{S}(\mathbf{j}_1) + s^2 \right) \frac{\mathbf{S}(\mathbf{j}_1) \mathbf{S}^H(\mathbf{j}_1)}{\mathbf{S}^H(\mathbf{j}_1) \mathbf{S}(\mathbf{j}_1)} + s^2 \left( \mathbf{E} - \frac{\mathbf{S}(\mathbf{j}_1) \mathbf{S}^H(\mathbf{j}_1)}{\mathbf{S}^H(\mathbf{j}_1) \mathbf{S}(\mathbf{j}_1)} \right), \quad (2.54)$$

$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{\left( s_1^2 \mathbf{S}^H(\mathbf{j}_1) \mathbf{S}(\mathbf{j}_1) + s^2 \right) \mathbf{S}^H(\mathbf{j}_1) \mathbf{S}(\mathbf{j}_1)} + \frac{1}{s^2} \left( \mathbf{E} - \frac{\mathbf{S}(\mathbf{j}_1) \mathbf{S}^H(\mathbf{j}_1)}{\mathbf{S}^H(\mathbf{j}_1) \mathbf{S}(\mathbf{j}_1)} \right). \quad (2.55)$$

Теперь мы вернемся к уравнению (2.42), подставив туда обратную КМ в виде (2.55). В результате получим, что

$$h_1(\mathbf{j}) = \frac{1}{\frac{|\mathbf{S}^H(\mathbf{j}) \mathbf{S}(\mathbf{j}_1)|^2}{\left( s_1^2 |\mathbf{S}(\mathbf{j}_1)|^2 + s^2 \right) |\mathbf{S}(\mathbf{j}_1)|^2} + \frac{1}{s^2} \left( |\mathbf{S}(\mathbf{j})|^2 - \frac{|\mathbf{S}^H(\mathbf{j}) \mathbf{S}(\mathbf{j}_1)|^2}{|\mathbf{S}(\mathbf{j}_1)|^2} \right)}. \quad (2.56)$$

Будем рассматривать это выражение как функцию угла  $\varphi$ . Когда  $\varphi = \varphi_1$ , вектор  $\mathbf{S}(\mathbf{j})$  совпадает с вектором  $\mathbf{S}(\mathbf{j}_1)$  и мы можем сказать, что вектор  $\mathbf{S}(\mathbf{j})$  лежит в сигнальном подпространстве. В этом случае второе слагаемое в знаменателе равно нулю и выражение (2.56) принимает вид

$$h_1(\mathbf{j}_1) = s_1^2 + \frac{s^2}{|\mathbf{S}(\mathbf{j}_1)|^2}. \quad (2.57)$$

В том случае, когда  $\varphi \neq \varphi_1$  и, кроме того, векторы  $\mathbf{S}(j)$  и  $\mathbf{S}(j_1)$  ортогональные, вектор  $\mathbf{S}(j)$  лежит в шумовом подпространстве. В этом случае первое слагаемое в знаменателе равно нулю и выражение (2.56) принимает вид

$$h_1(j) = \frac{s^2}{|\mathbf{S}(j)|^2}. \quad (2.58)$$

Если мы имеем дело с линейной АР, то  $|\mathbf{S}(j)|^2 = |\mathbf{S}(j_1)|^2 = N$  и

$$|\mathbf{S}^H(j) \mathbf{S}(j_1)|^2 = \left| \sum_{n=1}^N \exp \left[ j \frac{2p}{l} x_n (\sin j_1 - \sin j) \right] \right|^2 = f(j, j_1). \quad (2.59)$$

В этом случае формулы (2.56), (2.57) и (2.58) преобразуются к виду

$$h_1(j) = \frac{1}{\frac{f(j, j_1)}{[s_1^2 N + s^2]N} + \frac{1}{s^2} \left( N - \frac{f(j, j_1)}{N} \right)}, \quad (2.60)$$

$$h_1(j_1) = s_1^2 + \frac{s^2}{N}, \quad (2.61)$$

$$h_1(j) = \frac{s^2}{N}. \quad (2.62)$$

Интересно сравнить результаты, полученные методом Кейпона, с результатами, которые получаются, если применить метод сканирования. Для метода сканирования мы будем использовать нормированный весовой вектор (1.49), а среднюю мощность на выходе АР найдем по формуле

$$\langle |\mathbf{W}_0^H \mathbf{Z}|^2 \rangle = \mathbf{W}_0^H \mathbf{M} \mathbf{W}_0 = \frac{\mathbf{S}^H(j) \mathbf{M} \mathbf{S}(j)}{|\mathbf{S}(j)|^2}. \quad (2.63)$$

Подставляя сюда КМ (2.43) или (2.54) и учитывая (2.59), получим следующий результат

$$\langle |\mathbf{W}_0^H \mathbf{Z}|^2 \rangle = s_1^2 \frac{f(j, j_1)}{N} + s^2. \quad (2.64)$$

Когда  $\varphi = \varphi_1$ , т.е. когда вектор  $\mathbf{S}(j)$  лежит в сигнальном подпространстве, эта формула дает среднюю выходную мощность

$$\langle |\mathbf{W}_0^H \mathbf{Z}|^2 \rangle = s_1^2 N + s^2. \quad (2.65)$$



Если  $\varphi \neq \varphi_1$  и вектор  $\mathbf{S}(j)$  лежит в шумовом подпространстве, т.е. векторы  $\mathbf{S}(j)$  и  $\mathbf{S}(j_1)$  ортогональные, мы получаем среднюю выходную мощность, равной

$$\langle |\mathbf{W}_0^H \mathbf{Z}|^2 \rangle = S^2. \quad (2.66)$$

Если теперь сравнить формулу (2.61) с (2.65) и формулу (2.62) с (2.66), то можно заметить, что они отличаются только на постоянный множитель  $N$ . Это значит, что отношение мощности сигнала и шума на выходе той и другой системы одинаковое. Однако, если выражения (2.60) с (2.64) рассматривать, как функции угловой координаты  $\varphi$ , то мы заметим существенное различие в поведении этих функций. На рис 2.11 кривая 1 изображает функцию (2.64), кривая 2 изображает функцию (2.60). Расчеты выполнялись для линейной эквидистантой АР с числом элементов  $N=16$  и полуволновым расстоянием между элементами. Предполагалось, что плоская волна от источника приходит по направлению нормали к АР, т.е.  $\varphi_1=0$ . Средняя мощность полезного сигнала и собственного шума в каждом элементе принимались соответственно  $S_1^2 = 10$  и  $S^2 = 1$ .

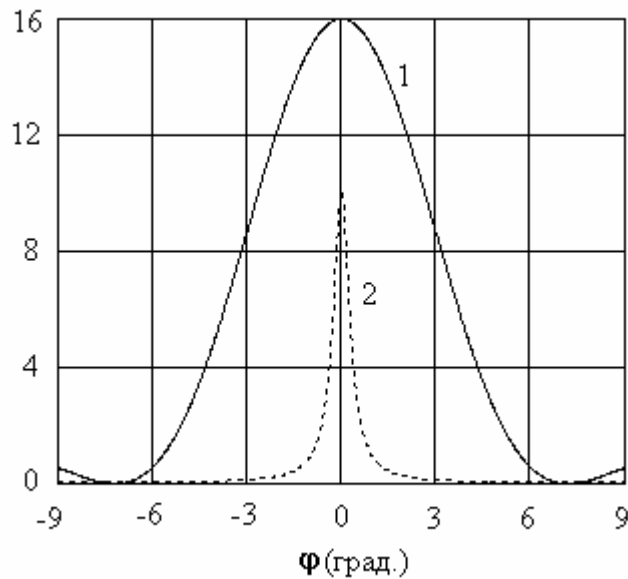


Рис. 2.11 Средняя мощность на выходе АР для метода сканирования (кривая 1) и метода Кейпона (кривая 2) при  $N=16$ ,  $d=0,5l$ ,  $\varphi_1=0$ ,  $S_1^2 = 10$  и  $S^2 = 1$ .

АР, оптимизированная по критерию Кейпона, стремится подавить любой сигнал, волновой фронт которого отличается от вектора  $\mathbf{S}(j)$ . Поэтому средняя мощность на выходе решетки минимальна везде, кроме узкой области углов, где располагается источник. Непосредственно в направлении на источник функция  $h_1(j)$  в (2.60) имеет максимум, поскольку волновой фронт источника сигнала  $\mathbf{S}(j_1)$  совпадает с вектором  $\mathbf{S}(j)$  и коэффициент передачи АР фиксирован и равен единице. Следовательно, сигнал от

источника не может быть подавлен АР. Заметим, чтобы этот механизм поиска и оценки угла прихода сигнала работал, решетка не должна вносить амплитудные и фазовые неопределенности (например, из-за ошибок измерения или шума приемника) в принятые сигналы. Достаточно небольшого отклонения принятого сигнала от вектора  $\mathbf{S}(j)$ , чтобы АР стала подавлять этот сигнал.

2. Допустим теперь, что в пространстве имеется два источника. Тогда КМ принятых сигналов (2.36) принимает вид

$$\mathbf{M} = s_1^2 \mathbf{S}(j_1) \mathbf{S}^H(j_1) + s_2^2 \mathbf{S}(j_2) \mathbf{S}^H(j_2) + s^2 \mathbf{E}. \quad (2.67)$$

В этом случае разложения (2.44) и (2.45) для прямой и обратной КМ могут быть представлены в виде

$$\mathbf{M} = m_1 \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_1^H + m_2 \mathbf{U}_2 \mathbf{U}_2^H + s^2 (\mathbf{E} - \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_1^H - \mathbf{U}_2 \mathbf{U}_2^H), \quad (2.68)$$

$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{m_1} \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_1^H + \frac{1}{m_2} \mathbf{U}_2 \mathbf{U}_2^H + \frac{1}{s^2} (\mathbf{E} - \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_1^H - \mathbf{U}_2 \mathbf{U}_2^H). \quad (2.69)$$

Если (2.69) подставить в (2.42), то средняя мощность на выходе АР можно записать следующим образом

$$h_1(j) = \frac{1}{\frac{1}{m_1} |\mathbf{S}^H(j) \mathbf{U}_1|^2 + \frac{1}{m_2} |\mathbf{S}^H(j) \mathbf{U}_2|^2 + \frac{1}{s^2} \mathbf{S}^H(j) [\mathbf{E} - \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_1^H - \mathbf{U}_2 \mathbf{U}_2^H] \mathbf{S}(j)}. \quad (2.70)$$

Третье слагаемое в знаменателе (не учитывая величину  $1/\sigma^2$ ) дает квадрат модульного значения проекции вектора  $\mathbf{S}(j)$  на шумовое подпространство. Оно равно нулю, если угол  $\varphi = \varphi_1$  или  $\varphi = \varphi_2$ , т.е. тогда, когда вектор  $\mathbf{S}(j)$  попадает в сигнальное подпространство. Сигнальное подпространство в данном случае представляет собой плоскость, образованную двумя векторами  $\mathbf{S}(j_1)$  и  $\mathbf{S}(j_2)$ .

Для дальнейшего анализа формулы (2.70) мы должны найти собственные числа  $\mu_1$  и  $\mu_2$  и собственные векторы  $\mathbf{U}_1$  и  $\mathbf{U}_2$  КМ  $\mathbf{M}$  в (2.67). Сначала рассмотрим первые два слагаемых матрицы  $\mathbf{M}$ , каждое из которых определяет КМ входных сигналов одного источника, а их сумма дает КМ входных сигналов двух внешних некоррелированных между собой источников. Суммарную матрицу можно представить таким образом

$$s_1^2 \mathbf{S}(j_1) \mathbf{S}^H(j_1) + s_2^2 \mathbf{S}(j_2) \mathbf{S}^H(j_2) = \mathbf{F} \mathbf{F}^H, \quad (2.71)$$

где введена матрица  $\mathbf{F} = [s_1 \mathbf{S}(j_1), s_2 \mathbf{S}(j_2)]$  размерности  $N \times 2$ .

Матрица  $\mathbf{F}\mathbf{F}^H$  в (2.71) имеет размерность  $N \times N$ , однако ее ранг равен 2. Можно показать, что ненулевые собственные числа этой матрицы равны собственным числам матрицы  $\mathbf{F}^H\mathbf{F}$ , размерность которой равна  $2 \times 2$ . Запишем эту более простую матрицу в виде

$$\mathbf{F}^H\mathbf{F} = \begin{pmatrix} s_1^2 |\mathbf{S}(\mathbf{j}_1)|^2 & s_1 s_2 \mathbf{S}^H(\mathbf{j}_1) \mathbf{S}(\mathbf{j}_2) \\ s_1 s_2 \mathbf{S}^H(\mathbf{j}_2) \mathbf{S}(\mathbf{j}_1) & s_2^2 |\mathbf{S}(\mathbf{j}_2)|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ c^* & b \end{pmatrix}, \quad (2.72)$$

где для упрощения вида матрицы введены числа  $a$ ,  $b$  и  $c$ .

Собственные числа матрицы (2.72) определяются как корни следующего уравнения

$$\det \begin{pmatrix} a - g & c \\ c^* & b - g \end{pmatrix} = 0, \quad (2.73)$$

где  $\det(\cdot)$  – определитель матрицы.

Очевидно, что (2.73) есть квадратное уравнение вида  $g^2 - (a+b)g + ab - |c|^2 = 0$ , а его корни можно представить следующим образом

$$g_{1,2} = \frac{a+b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + |c|^2}. \quad (2.74)$$

Теперь вместо чисел  $a$ ,  $b$  и  $c$  подставим их значения из формулы (2.72). В результате получим, что

$$g_{1,2} = \frac{s_1^2 |\mathbf{S}(\mathbf{j}_1)|^2 + s_2^2 |\mathbf{S}(\mathbf{j}_2)|^2}{2} \pm \sqrt{\left[ \frac{s_1^2 |\mathbf{S}(\mathbf{j}_1)|^2 - s_2^2 |\mathbf{S}(\mathbf{j}_2)|^2}{2} \right]^2 + s_1^2 s_2^2 |\mathbf{S}^H(\mathbf{j}_1) \mathbf{S}(\mathbf{j}_2)|^2}. \quad (2.75)$$

Если мы имеем дело с линейной АР, то  $|\mathbf{S}(\mathbf{j}_1)|^2 = |\mathbf{S}(\mathbf{j}_2)|^2 = N$  и аналогично (2.59)

$|\mathbf{S}^H(\mathbf{j}_1) \mathbf{S}(\mathbf{j}_2)|^2 = f(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2)$ . В результате выражение (2.75) упрощается и сводится к виду

$$g_{1,2} = N \frac{s_1^2 + s_2^2}{2} \pm \sqrt{N^2 \left( \frac{s_1^2 - s_2^2}{2} \right)^2 + s_1^2 s_2^2 f(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2)}, \quad (2.76)$$

где  $f(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2) = \left| \sum_{n=1}^N \exp \left[ j \frac{2p}{I} x_n (\sin \mathbf{j}_2 - \sin \mathbf{j}_1) \right] \right|^2$ .

Теперь, чтобы получить собственные числа КМ (2.67), необходимо учесть третье слагаемое в (2.67), которое дает КМ собственного шума АР. Этот учет сводится просто к добавлению в (2.75) и (2.76) мощности собственного шума  $\sigma^2$ .

Таким образом, в случае линейной АР два собственных числа КМ (2.67) можно записать в виде

$$m_{1,2} = s^2 + N \frac{s_1^2 + s_2^2}{2} \pm \sqrt{N^2 \left( \frac{s_1^2 - s_2^2}{2} \right)^2 + s_1^2 s_2^2 f(j_1, j_2)}. \quad (2.77)$$

Другие  $(N-2)$  собственных чисел, соответствующие шумовому подпространству, равны  $\sigma^2$ , как в ранее рассмотренном примере с одним источником.

Теперь нам необходимо найти собственные векторы  $\mathbf{U}_1$  и  $\mathbf{U}_2$  КМ (2.67), соответствующие собственным числам  $\mu_1$  и  $\mu_2$ . Эти векторы являются собственными также и для матрицы (2.71). В свою очередь свойства матрицы (2.71) тесно связаны со свойствами матрицы (2.72). Мы уже видели, что они имеют равные собственные числа. Их собственные векторы также взаимосвязаны. Допустим, что вектор  $\mathbf{V}$  является собственным для матрицы (2.72). Тогда справедливо соотношение:  $(\mathbf{F}^H \mathbf{F})\mathbf{V} = g\mathbf{V}$ , где  $g$  - собственное число. Покажем, что собственным вектором матрицы (2.71) будет вектор  $\mathbf{FV}$ . Для этого умножим матрицу (2.71) на этот вектор. В результате получим, что

$$(\mathbf{FF}^H)\mathbf{FV} = \mathbf{F}(\mathbf{F}^H \mathbf{F})\mathbf{V} = g\mathbf{FV}. \quad (2.78)$$

Таким образом, наша задача сводится к определению двух собственных векторов матрицы (2.72). Покажем, как это можно сделать для собственного числа  $v_1$ . Соответствующий ему собственный вектор  $\mathbf{V}_1$  удовлетворяет следующему уравнению

$$\begin{pmatrix} a & c \\ c^* & b \end{pmatrix} \mathbf{V}_1 = g_1 \mathbf{V}_1. \quad (2.79)$$

Эквивалентное уравнение можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} a - g_1 & c \\ c^* & b - g_1 \end{pmatrix} \mathbf{V}_1 = [\mathbf{0}]. \quad (2.80)$$

В силу (2.73) и (2.74) детерминант этой однородной системы уравнений равен нулю. Поэтому следует искать только один компонент вектора  $\mathbf{V}_1$ , задавая другой произвольным образом. Будем искать вектор  $\mathbf{V}_1$  в виде  $\mathbf{V}_1 = (c, x)^T$ . Решая первое уравнение в (2.80), найдем собственный вектор в виде  $\mathbf{V}_1 = (c, a - g_1)^T$ . Теперь собственный вектор матрицы (2.71) будет равен  $\mathbf{FV}_1$ . Нормируя его, получим необходимый нам собственный вектор  $\mathbf{U}_1$ .

Возвращаясь к формуле (2.70), мы видим, что все входящие сюда параметры могут быть вычислены через параметры источников. Вернемся снова к примеру, который мы рассматривали выше. Мы предполагаем, что оба источника имеют одинаковые средние

мощности в каждом элементе АР. Мы также полагаем, что отношение мощности сигнала одного источника к мощности собственному шуму в каждом элементе равно единице, т.е.,  $S_1^2 = S_2^2 = S^2 = 1$ . Углы прихода волн полагаем равными  $j_1 = p/64, j_2 = -p/64$ . Как прежде, предположим, что измерение углов прихода волн выполняется с помощью линейной эквидистантой АР из 16 элементов ( $N=16$ ) и полуволновым межэлементным расстоянием ( $d/l=0.5$ ). Метод (2.11), который мы называли методом сканирования лучом антенной решетки, не способен был различить два сигнала (кривая 2 на рис. 2.7), так как оба источника находятся на расстоянии, меньшем ширины главного луча антенны. Метод максимального правдоподобия был способен различить эти источники, о чем свидетельствует рис. 2.9. Однако этот метод требует значительного объема вычислений и предполагает априорное знание числа источников. Теперь мы попробуем применить метод Кейпона (2.42), который не требует априорного знания числа источников, а опирается только на знание КМ входных сигналов.

Используя формулу (2.70), была рассчитана средняя выходная мощность принятых сигналов в зависимости от угла  $\varphi$ , по отношению к которому устанавливается ограничение коэффициента передачи АР в методе Кейпона. Результаты расчета представлены на рис. 2.12. Мы видим, что имеются два максимума, положения которых очень близки к направлениям на источники сигналов. Уровень каждого максимума близок к единице, т.е. к величине  $S_1^2 = S_2^2 = 1$ .

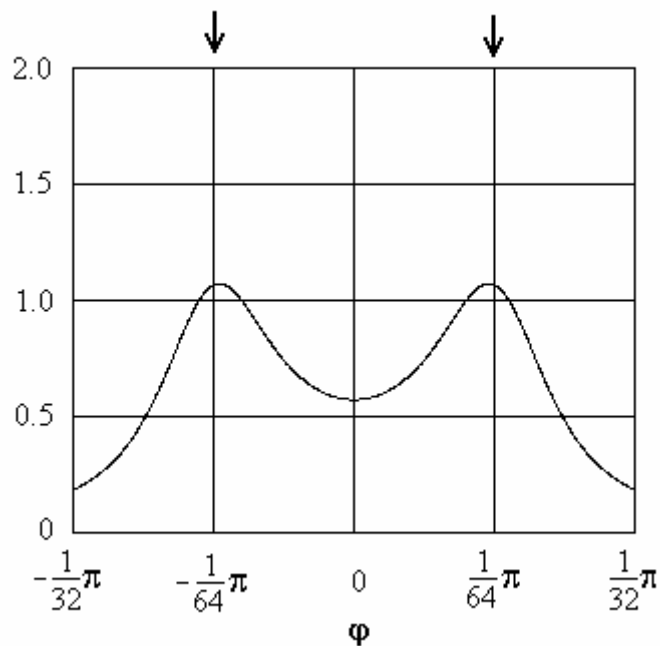


Рис. 2.12 Средняя выходная мощность АР в зависимости от угла  $\varphi$  при  $S_1^2 = S_2^2 = 1, S^2 = 1$ .  
Стрелками указаны направления прихода сигналов двух источников.

Если среднюю мощность каждого источника увеличить в 10 раз, т.е. считать, что  $S_1^2 = S_2^2 = 10$ ,  $S^2 = 1$ , то средняя выходная мощность принятых сигналов в зависимости от угла  $\varphi$  будет выглядеть так, как представлено на рис. 2.13. Сравнивая рис. 2.13 с рис. 2.12 мы видим, что максимумы стали более отчетливо выражены. Их положения точно соответствуют направлениям на источники сигналов. Уровень каждого максимума увеличился и стал равным 10, что соответствует средней мощности сигнала одного источника в одном элементе АР.

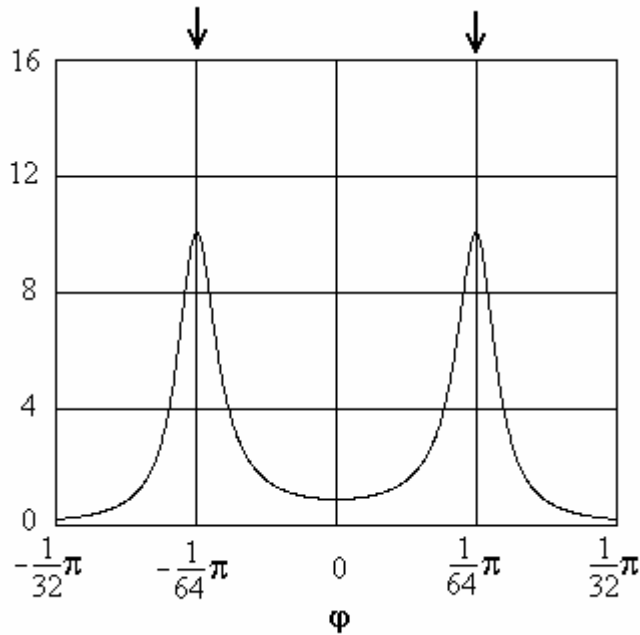


Рис. 2.13 Средняя выходная мощность АР в зависимости от угла  $\varphi$  при  $S_1^2 = S_2^2 = 10$ ,  $S^2 = 1$ .  
Стрелками указаны направления прихода сигналов двух источников.

Как следует объяснить формирование максимумов в направлениях на источники сигналов? АР, оптимизированная по критерию Кейпона, стремится подавить любой сигнал, волновой фронт которого отличается от вектора  $\mathbf{S}(j)$ . Этот вектор мы строим, исходя из геометрии решетки и геометрии волнового фронта. Средняя мощность на выходе АР получается минимальной везде, кроме углов вблизи направлений на источники. Непосредственно в направлении на каждый источник функция имеет максимум, поскольку волновой фронт  $\mathbf{S}(j_1)$  одного источника сигнала и волновой фронт  $\mathbf{S}(j_2)$  другого источника совпадают с вектором  $\mathbf{S}(j)$ . Благодаря ограничению на коэффициент передачи сигналы источников в этом случае не подавляются АР. Заметим, чтобы этот механизм поиска и оценки угла прихода сигнала работал, АР не должна вносить амплитудные и фазовые неопределенности (например, из-за ошибок измерения

или шума приемника) в принятые сигналы. Достаточно небольшого отклонения принятого сигнала от вектора  $\mathbf{S}(j)$ , чтобы АР стала подавлять этот сигнал.

3. Обобщить результаты, полученные на примерах, несложно на произвольное число источников  $J$ . Допустим, что вектор входных сигналов задается формулой (2.31), а источники являются некоррелированными между собой. Число элементов АР должно быть больше числа источников сигналов ( $N > J$ ). В этом случае обратная КМ входных сигналов может быть представлена в виде

$$\mathbf{M}^{-1} = \sum_{k=1}^J \frac{1}{m_k} \mathbf{U}_k \mathbf{U}_k^H + \frac{1}{\sigma^2} \left( \mathbf{E} - \sum_{k=1}^J \mathbf{U}_k \mathbf{U}_k^H \right). \quad (2.81)$$

Подставляя это выражение в формулу (2.42), мы получаем следующий результат

$$h_1(j) = \frac{1}{\sum_{k=1}^J \frac{1}{m_k} |\mathbf{S}^H(j) \mathbf{U}_k|^2 + \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{S}^H(j) \left[ \mathbf{E} - \sum_{k=1}^J \mathbf{U}_k \mathbf{U}_k^H \right] \mathbf{S}(j)}. \quad (2.82)$$

Разрешающая способность метода Кейпона зависит от величины ОСШ на входе АР. Чем выше это отношение, тем выше разрешающая способность. Это можно видеть из формулы (2.82). Заметим сначала, что все сигнальные собственные числа  $\mu_k$  больше шумового собственного числа, т.е.  $\mu_k > \sigma^2$ . Если ОСШ каждого источника непрерывно увеличивать, то все сигнальные собственные числа  $\mu_k$  будут стремиться к бесконечности. Это значит, что первое слагаемое в знаменателе формулы (2.82) стремиться принять нулевое значение. Второе слагаемое не зависит от сигнальных собственных чисел  $\mu_k$ . Оно имеет смысл квадрата модуля проекции вектора  $\mathbf{S}(j)$  на шумовое подпространство, если не учитывать величину  $\sigma^2$ . Второе слагаемое может обращаться в нуль только тогда, когда вектор  $\mathbf{S}(j)$  попадает в сигнальное подпространство, т.е. когда угол  $\varphi$  будет совпадать с направлением прихода одного из сигналов. Это приводит к образованию максимумов функции (2.82) в направлениях на источники сигналов.

Что происходит, если два источника слипаются вместе и образуют один источник? В этом случае одно из сигнальных собственных чисел  $\mu_k$  становится равным шумовому собственному числу, размерность шумового подпространства увеличивается, а сигнального уменьшается на единицу. Размер области, где два источника становятся неразличимыми, зависит от числа элементов решетки. Чем больше элементов в решетке, тем меньше эта область.

Завершая обсуждение метода Кейпона, необходимо указать на возможные способы технической реализации этого метода.

Первый способ является совершенно очевидным. Берется АР с известной геометрией и заданным числом элементов. Сигналы, принятые каждым элементом АР, должны быть представлены в цифровой форме. После этого вычислительное устройство вычисляет сигнальную КМ, делает ее обращение и вычисляет среднюю выходную мощность в соответствии с формулой (2.42) для различных значений угла  $\varphi$ . Для оценки направлений прихода сигналов вычислительное устройство находит максимумы этой функции и их координаты.

Второй способ может быть реализован с помощью цифровых или аналоговых устройств. Схема обработки сигналов представлена на рис. 2.14.

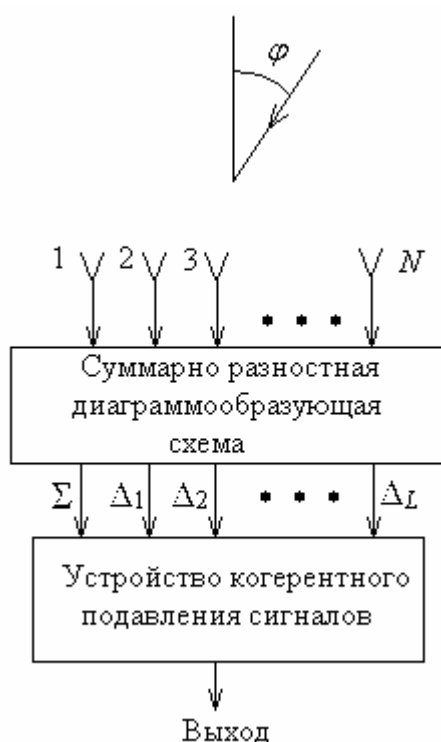


Рис. 2.14 Схема обработки сигналов, реализующая метод Кейпона

Сигналы, принятые элементами АР, после усиления и необходимого преобразования вначале поступают на суммарно разностную диаграммообразующую схему (ДОС). Весовой вектор суммарного канала  $\Sigma$  обеспечивает формирование его ДН с максимумом в направлении нормали к АР ( $\varphi=0$ ). Другие выходы ДОС создаются разностными каналами  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_L$ , весовые векторы которых являются ортогональными весовому вектору суммарного канала. В результате ДН всех разностных каналов имеют в направлении нормали к АР нулевые коэффициенты передачи. Число разностных каналов может быть не более  $N-1$ . Заметим, что суммарно разностная ДОС не является адаптивной. Сигналы с выходов ДОС поступают на устройство когерентного подавления сигналов. Это адаптивное устройство. Оно минимизирует среднюю выходную мощность сигналов. На



регулируемые входы этого устройства подаются сигналы разностных каналов, а сигнал с выхода суммарного канала подается на нерегулируемый вход.

Чтобы обеспечить угловое разрешение сигналов и оценку координат источников, необходимо поворачивать АР так, чтобы направление нормали пробежало все необходимые значения угловой переменной  $\varphi$ . Если направление прихода сигнала совпадает с нормалью к АР, то устройство подавления не может аннулировать (занулить) этот сигнал, так как этот сигнал отсутствует в разностных каналах. Во всех других случаях сигнал будет подавлен. Таким образом, мы видим, что эта схема удовлетворяет условиям Кейпона и может быть использована на практике.

### 2.3 Обобщение метода Кейпона

Изучая метод Кейпона, мы убедились, что разрешающая способность дискретных некоррелированных источников зависит от величины ОСШ. Чем выше это отношение, тем более высокое угловое разрешение можно получить. Возникает, однако, вопрос о существовании других методов “сверхразрешения”, которые давали бы более высокое угловое разрешение источников при одинаковом ОСШ. Действительно, такие методы существуют, и мы укажем большой класс таких методов.

Вскоре после появления метода Кейпона был предложен так называемый метод “теплого шума” [11]. Идея метода опирается на свойства адаптивной АР, критерием эффективности которой является величина отношения мощности сигнала к средней суммарной мощности внешней помехи и собственного шума на выходе (ОСШ). Допустим, что полезный сигнал, принимаемый АР, задается вектором  $\mathbf{S}(j)$ , а КМ помеховых сигналов описывается некоторой матрицей  $\mathbf{M}$ . Без ограничения общности можно предположить, что амплитуда волны полезного сигнала и средняя мощность собственного шума в одном элементе АР равны единице. Тогда величина ОСШ на выходе равна

$$h = \frac{\mathbf{W}^H \mathbf{S} \mathbf{S}^H \mathbf{W}}{\mathbf{W}^H \mathbf{M} \mathbf{W}}, \quad (2.83)$$

где  $\mathbf{W}$  – весовой вектор обработки принимаемых сигналов.

Решение этой задачи хорошо известно [2-9]. Оптимальный весовой вектор адаптивной АР равен

$$\mathbf{W} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{S}(j). \quad (2.84)$$

Эта формула похожа на (2.39) и (2.41). Однако, КМ  $\mathbf{M}$  в (2.84) не содержит сигнальной составляющей и зависит только от помеховых источников. В то же время, КМ  $\mathbf{M}$  в (2.39) строится с учетом всех сигналов.

Адаптивная АР подавляет помеховые сигналы. Вместе с помеховыми сигналами подавляется и часть собственного шума. Это можно объяснить следующим образом. Собственный шум однороден в  $N$ -мерном сигнальном пространстве и его КМ равна  $\sigma^2 \mathbf{E}$ . Любое направление в этом пространстве содержит долю шума. Пусть внешний источник возбуждает в АР сигнальный вектор  $\mathbf{S}$ . Некоторая доля шума, приходящаяся на этот вектор, добавляется к сигналу. Теперь, если АР подавляет вектор сигнала  $\mathbf{S}$ , она неизбежно подавляет и эту часть собственного шума. В результате собственный шум становится неоднородным в  $N$ -мерном пространстве. Это значит, что собственный шум на выходе адаптивной АР несет информацию об угловых положениях источников. Метод “теплового шума” основан на анализе свойств собственного шума адаптивной АР.

Допустим, что в пространстве имеется некоторое количество помеховых источников, и АР, оценив КМ, использует для обработки сигналов весовой вектор (2.84). Вычислим величину мощности собственного шума  $P_0$  на выходе системы. В результате получим, что

$$P_0 = \mathbf{W}^H (\mathbf{S}^2 \mathbf{E}) \mathbf{W} = \mathbf{S}^2 [\mathbf{S}^H(j) \mathbf{M}^{-2} \mathbf{S}(j)]. \quad (2.85)$$

В качестве функции, которая обеспечивает угловое разрешение в методе “теплового шума”, рассматривается величина, обратная мощности собственного шума  $P_0$ , т.е.

$$h_2(j) = \frac{1}{\mathbf{S}^H(j) \mathbf{M}^{-2} \mathbf{S}(j)}. \quad (2.85)$$

Сравним это выражение с функцией (2.42), которая обеспечивает угловое разрешение в методе Кейпона. Отличие состоит в том, что здесь используется обратная КМ, взятая в квадрате. В базисе собственных векторов обратная КМ может быть представлена в виде (2.45). Если эту матрицу возвести в квадрат, то получим следующее выражение

$$\mathbf{M}^{-2} = \sum_{k=1}^N (m_k)^{-2} \mathbf{U}_k \mathbf{U}_k^H. \quad (2.86)$$

В случае двух источников существуют два сигнальных и  $N-2$  шумовых собственных чисел. Поэтому формула (2.86) примет следующий вид

$$\mathbf{M}^{-2} = \frac{1}{(m_1)^2} \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_1^H + \frac{1}{(m_2)^2} \mathbf{U}_2 \mathbf{U}_2^H + \frac{1}{\mathbf{S}^4} (\mathbf{E} - \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_1^H - \mathbf{U}_2 \mathbf{U}_2^H). \quad (2.87)$$

Подставляя (2.87) в (2.85), получим в случае двух источников следующий результат

$$h_2(j) = \frac{1}{\frac{1}{(m_1)^2} |\mathbf{S}^H(j) \mathbf{U}_1|^2 + \frac{1}{(m_2)^2} |\mathbf{S}^H(j) \mathbf{U}_2|^2 + \frac{1}{s^4} \mathbf{S}^H(j) [\mathbf{E} - \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_1^H - \mathbf{U}_2 \mathbf{U}_2^H] \mathbf{S}(j)}. \quad (2.88)$$

Чтобы сравнить разрешающие способности методов Кейпона и “теплового шума”, мы должны сравнить функции  $h_1(j)$  и  $h_2(j)$  в (2.88) и (2.70). Эти функции зависят от угловой координаты  $j$ . Допустим, что параметры модели источников заданы и сигнальные собственные числа определены. Если угол  $\varphi = \varphi_1$  или  $\varphi = \varphi_2$ , то вектор  $\mathbf{S}(j)$  попадает в сигнальное подпространство. При этом третье слагаемое в знаменателе равно нулю как в (2.70), так и в (2.88). Поэтому эти формулы соответственно дают, что

$$h_1(j) = \frac{1}{\frac{1}{m_1} |\mathbf{S}^H(j) \mathbf{U}_1|^2 + \frac{1}{m_2} |\mathbf{S}^H(j) \mathbf{U}_2|^2}, \quad (2.89)$$

$$h_2(j) = \frac{1}{\frac{1}{(m_1)^2} |\mathbf{S}^H(j) \mathbf{U}_1|^2 + \frac{1}{(m_2)^2} |\mathbf{S}^H(j) \mathbf{U}_2|^2}. \quad (2.90)$$

Так как значения сигнальных собственных чисел превышают значение мощности собственного шума ( $m_1 > 1$ ,  $m_2 > 1$ ), то из сравнения (2.89) и (2.90) видно, что  $h_2(j) > h_1(j)$ . Это говорит о том, что максимумы в направлениях на источники в случае применения метода ‘теплового шума’ будут выше, что свидетельствует о более высоком угловом разрешении источников.

Очевидно, что методы Кейпона и “теплового шума” могут быть рассмотрены с единой точки зрения и на основе этого могут быть предложены новые методы сверхразрешения [24-29]. Можно ожидать, что характеристики вида  $h_n(j) = [\mathbf{S}^H(j) \mathbf{M}^{-n} \mathbf{S}(j)]^{-1}$  при показателе степени  $n > 0$  обладают повышенной эффективностью углового разрешения по сравнению с обычным методом сканирования лучом антенны и оценки выходной мощности. Действительно, при точно заданной матрице  $\mathbf{M}$  разрешающая способность характеристик  $h_n(j)$  с ростом  $n$  монотонно возрастает и при  $n \rightarrow \infty$  асимптотически приближается к разрешающей способности метода собственных векторов, которая является в этом идеальном случае бесконечно высокой.

Предположим, что в каналы AP попадают колебания от  $J$  ( $J \leq N-1$ ), узкополосных, некоррелированных между собой внешних источников излучения, находящихся в дальней зоне. Мощность некоррелированного по каналам внутреннего шума в элементе полагаем равной единице ( $\sigma^2 = 1$ ). КМ  $\mathbf{M}$  входных колебаний в этом случае является эрмитовой и

имеет связанное с внутренним шумом минимальное собственное число  $m_{\min} = 1$ , которое соответствует  $(N-J)$ -мерному шумовому подпространству, ортогональному всем векторам направлений внешних источников.

Обратную КМ (2.81) возведем в степень  $n$  и получим следующий результат

$$\mathbf{M}^{-n} = \sum_{k=1}^J \frac{1}{(m_k)^n} \mathbf{U}_k \mathbf{U}_k^H + \left( \mathbf{E} - \sum_{k=1}^J \mathbf{U}_k \mathbf{U}_k^H \right). \quad (2.91)$$

Поскольку мощность внутреннего шума в элементе равна единице, то сигнальные собственные числа  $m_k > 1$ . Поэтому операция возведения в степень в выражении (2.91) способствует выделению из матрицы  $\mathbf{M}^{-n}$  проектирующей матрицы равной

$$\mathbf{D} = \left( \mathbf{E} - \sum_{k=1}^J \mathbf{U}_k \mathbf{U}_k^H \right). \quad (2.92)$$

В пределе при неограниченном увеличении степени ( $n \rightarrow \infty$ ) матрица  $\mathbf{M}^{-n}$  стремится к проектирующей матрице  $\mathbf{D}$  ( $\mathbf{M}^{-n} \rightarrow \mathbf{D}$ ). Это означает, что квадратичная форма  $\mathbf{S}^H(j) \mathbf{M}^{-n} \mathbf{S}(j) \rightarrow \mathbf{S}^H(j) \mathbf{D} \mathbf{S}(j)$ .

Квадратичная форма  $\mathbf{S}^H(j) \mathbf{D} \mathbf{S}(j)$  является неотрицательно определенной и равна нулю только в направлениях на источники излучения, так как любой другой вектор направления имеет ненулевую проекцию на подпространство, связанное с собственным числом  $m_{\min}$  и ортогональное векторам направлений источников излучения. Следовательно, величина

$$h_n(j) = [\mathbf{S}^H(j) \mathbf{M}^{-n} \mathbf{S}(j)]^{-1} \quad (2.93)$$

может быть использована для оценки пространственного спектра источников излучения. С ростом  $n$  разрешающая способность адаптивной АР с выходной характеристикой  $h_n(j)$  будет монотонно возрастать, так как  $h_n(j)$  будет стремиться к  $[\mathbf{S}^H(j) \mathbf{D} \mathbf{S}(j)]^{-1}$ .

Характеристику  $h_n(j)$  можно представить следующим образом

$$h_n(j) = [h_{c.s.}^{-1}(j) + a_n(j)]^{-1}, \quad (2.94)$$

где  $h_{c.s.}(j) = [\mathbf{S}^H(j) \mathbf{D} \mathbf{S}(j)]^{-1}$  - спектральная оценка по методу собственных векторов (она обладает бесконечно высоким разрешением) и  $a_n(j) = \sum_{k=1}^J m_k^{-n} [\mathbf{S}^H(j) \mathbf{U}_k \mathbf{U}_k^H \mathbf{S}(j)]$  -

уменьшающаяся с ростом  $n$  регулярная ошибка, которая ухудшает разрешающую способность характеристики  $h_n(j)$  по сравнению с  $h_{c.в.}(j)$ .

Из (2.92) непосредственно следует, что оценка пространственного спектра по методу “теплого шума” имеет более высокую разрешающую способность, чем оценка по методу Кейпона. Эти характеристики отличаются различной ошибкой  $a_n(j)$  и, следовательно, различной степенью приближения к оценке пространственного спектра по методу собственных векторов. Такая общая трактовка методов Кейпона ( $n=1$ ), “теплого шума” ( $n=2$ ) и предложенного в [27] более общего метода ( $n>2$ ) позволяет рассматривать спектральные оценки  $h_n(j)$  при различных  $n$  как результат единого преобразования, выделяющего характеристику  $h_{c.в.}(j)$  с различной степенью точности.

Рис. 2.15 демонстрирует разрешающую способность функции  $h_n(j)$  при различных значениях  $n=1, 2, 3, 5$  и  $7$ . В этом примере пять близко расположенных источников одинаковой мощности (ОСШ равно 20 дБ в одном элементе АР) пеленговались с помощью 16-элементной эквидистантной АР с полуволновым расстоянием между элементами. Стрелками указаны направления прихода сигналов каждого источника. Видно, что при  $n=7$  источники могут быть разрешены, в то время как методы Кейпона ( $n=1$ ) и “теплого шума” ( $n=2$ ) не могут обеспечить угловое разрешение источников.

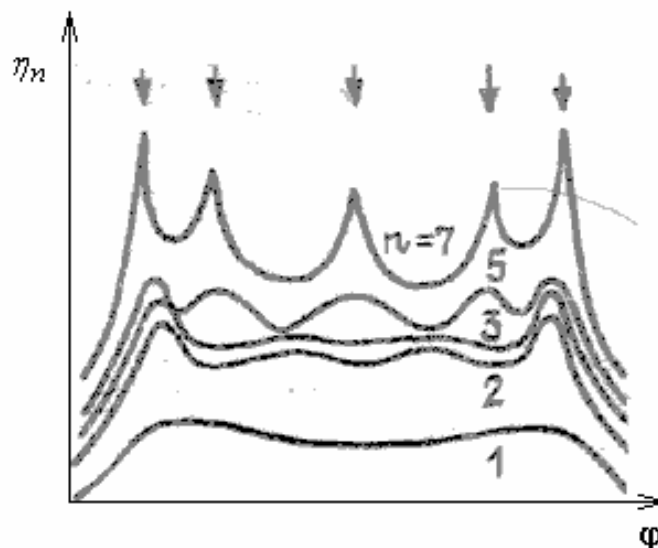


Рис. 2.15 Функции  $h_n(j)$  при различных значениях  $n=1, 2, 3, 5$  и  $7$ . Стрелки показывают угловое положение источников сигналов.

Интересно получить аналитические выражения для разрешающей способности. Такие результаты удастся получить для методов Кейпона и “теплого шума” в предположении, что в пространстве имеются два источника одинаковой мощности [27, 28]. Будем считать

источники излучения разрешенными в том случае, если адаптивная характеристика  $h_n(j)$  формирует отдельный максимум в каждом из направлений  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . Очевидно, что если источники имеют одинаковую мощность, то эти максимумы равны, то есть  $h_n(j_1) = h_n(j_2)$ . Следовательно, критерий разрешения для двух одинаковых по мощности источников можно представить в виде

$$h_2(j_0) < h_1(j_1), \quad (2.95)$$

где  $\varphi_0$  - координата среднего направления  $j_0 = (j_1 + j_2)/2$  между рассматриваемыми источниками.

Согласно этому критерию для методов Кейпона можно получить следующее выражение, для оценки пределов относительного углового разрешения

$$\frac{j_2 - j_1}{\Delta j} \approx \left( \frac{-3,125 + \sqrt{1,082nN + 1,573}}{0,427nN - 3,231} \right)^{1/2}, \quad (2.96)$$

где  $\Delta\varphi$  – ширина главного луча АР по уровню половинной мощности,  $\nu$  – ОСШ в одном элементе АР для одного источника.

В предельном случае  $\nu N \gg 1$  (2.96) переходит в более простую формулу

$$(j_2 - j_1)/\Delta j \approx 1,55(nN)^{-1/4}. \quad (2.97)$$

Для метода «теплового шума» в случае  $\nu N \gg 1$  получается следующий результат

$$(j_2 - j_1)/\Delta j \approx 1,3(nN)^{-1/3}. \quad (2.98)$$

Таким образом, при  $\nu N \gg 1$  разрешающая способность метода «теплового шума» в  $\approx 1,2(nN)^{1/12}$  раз выше, чем метода Кейпона. Например, если  $\nu=10$  и  $N=10$ , то это различие составляет 1,76 раза.

На рис. 2.16 приведены зависимости величины  $(j_2 - j_1)/\Delta j$  для методов Кейпона и «теплового шума», полученные как с помощью аналитических формул (2.97) и (2.98), так и более точным численным методом. Число элементов АР  $N=10$ , а период составляет половину длины волны. Из рисунка видно хорошее соответствие в области  $\nu N \gg 1$  приближенных теоретических оценок разрешающей способности с соответствующими численными оценками.

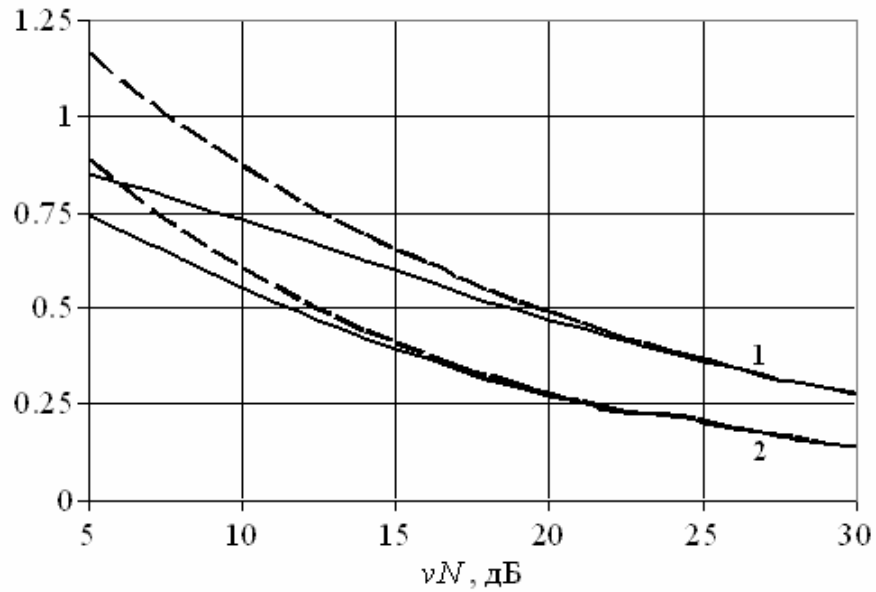


Рис. 2.16 Минимальное угловое расстояние между двумя разрешаемыми источниками одинаковой мощности  $\nu$  для методов Кейпона (кривые 1) и теплового шума (кривые 2). Сплошные кривые соответствуют моделированию, а пунктирные - аналитическим формулам

Представляет интерес также анализ устойчивости обобщенного метода сверхразрешения к влиянию случайных ошибок, возникающих вследствие конечного числа отсчетов вектора входных колебаний при оценке КМ  $\mathbf{M}$ . В реальных системах оценка КМ формируется максимально правдоподобно по конечному числу статистически независимых отсчетов вектора входного сигнала  $\mathbf{Z}$ .

Такая оценка дается формулой (см., например, [2-8])

$$\hat{\mathbf{M}} = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L \mathbf{z}_j \mathbf{z}_j^H. \quad (2.99)$$

Численные результаты для разрешающей способности в случае двух источников одинаковой мощности и параметра  $n=1, 2, 3, 5, 7$  сведены в табл.2.1. При моделировании число отсчетов  $L$  при оценке КМ выбиралось равным 500. Рассматривалась 10-элементная АР ( $N=10$ ) с полуволновым межэлементным расстоянием ( $d/l=0.5$ ). Полученная разрешающая способность выражена в единицах ширины луча АР по уровню половинной мощности и усреднена по десяти реализациям.

Таблица 2.1.

ОСШ(дБ)	$(j_2 - j_1)/\Delta j$				
	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=5$	$n=7$
-10	0,920	0,864	0,812	0,726	0,662
0	0,691	0,532	0,438	0,357	0,334

10	0,435	0,269	0,209	0,181	0,176
20	0,255	0,134	0,109	0,099	0,099
30	0,145	0,071	0,058	0,056	0,054

Анализируя приведенные в таблице результаты, можно убедиться, что разрешающая способность АР возрастает как с увеличением ОСШ, так и с увеличением степени  $n$  обратной КМ.

Теоретический анализ флуктуаций разрешающей характеристики  $h_n(j)$  выполнялся в работе [28]. Было установлено, что из-за неточного задания КМ входных сигналов дисперсия функции, обратной к разрешающей характеристики  $h_n(j)$ , равна

$$\langle (\hat{\mathbf{x}}^{(n)} - \mathbf{x}^{(n)})^2 \rangle = \frac{n^2}{L} (\mathbf{x}^{(n)})^2, \quad (2.100)$$

где  $\mathbf{x}^{(n)} = [\mathbf{h}_n(j)]^{-1}$ ,  $L$ - число выборок в (2.99),  $n$  – степень обратной КМ.

Физический смысл (2.100) заключается в том, что дисперсия флуктуации адаптивной оценки пространственного спектра будет возрастать при уменьшении числа отсчетов  $L$ , а улучшение разрешающей способности путем увеличения степени  $n$  требует соответствующего повышения точности оценки КМ  $\mathbf{M}$  ( $L \sim n^2$ ).

#### 2.4 Проекционный метод углового разрешения источников сигналов

Обобщение метода Кейпона показало, что с ростом степени  $n$  разрешающая способность адаптивной АР с выходной характеристикой  $h_n(j)$  (2.91.2) монотонно возрастает, а сама разрешающая функция  $h_n(j)$  при неограниченном увеличении параметра  $n$  стремиться к величине  $[\mathbf{S}^H(j) \mathbf{D} \mathbf{S}(j)]^{-1}$ , где  $\mathbf{D} = \left( \mathbf{E} - \sum_{k=1}^J \mathbf{U}_k \mathbf{U}_k^H \right)$  - матрица проектирования на шумовое подпространство. Такой метод можно назвать проекционным и обозначить разрешающую функцию как  $h_\infty(j)$ .

Чтобы воспользоваться этим методом, надо уметь оценивать размерность шумового подпространства и строить проекционную матрицу, используя входные сигналы. Оценивание размерности шумового подпространства равносильно оцениванию числа  $J$  внешних сигналов, принимаемых АР, поскольку размерность шумового подпространства равна  $N-J$ . Нетрудно понять, что это обстоятельство принципиально отличает проекционный метод от методов Кейпона и “теплового шума”, где размерность шумового подпространства не оценивается.



Пусть  $N$ -элементная АР произвольной геометрии принимает сигналы от  $J$  источников с угловыми координатами  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_J$  и мощностями  $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_J$ , а также аддитивные собственные шумы приемных каналов. Проекционный метод можно использовать только в случае, когда число источников меньше числа приемных каналов АР ( $J < N$ ). Будем также считать, что сигналы и аддитивные шумы представляют собой случайные, нормально распределенные комплексные величины с нулевым средним значением.

1. Рассмотрим вначале идеальный случай, когда число выборок бесконечно ( $L \rightarrow \infty$ ), то есть, известна точная КМ  $\mathbf{M}$  входного процесса. Векторное  $N$ -мерное пространство разбивается на два подпространства: сигнальное и шумовое. Первое из них имеет размерность  $J$  и соответствует сигнальным собственным числам КМ ( $m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_J \geq 1$ ). Второе подпространство является ортогональным первому, имеет размерность  $N-J$  и соответствует шумовым собственным числам КМ ( $m_{J+1} = m_{J+2} = \dots = m_N = 1$ ).

КМ, как и раньше, можно представить в виде разложения (2.44) по собственным векторам  $\mathbf{U}_k$  ( $k=1, 2, \dots, N$ ). Так как эта матрица имеет кратные собственные числа, то (2.44) удобнее представить в другом эквивалентном виде

$$\mathbf{M} = \sum_{k=1}^{N'} m_k \mathbf{\Pi}_k, \quad (2.101)$$

где  $\mathbf{\Pi}_k$  - матрица-проектор на собственное подпространство, соответствующее собственному числу  $m_k$ ;  $N'$  - число неравных между собой собственных чисел ( $N' \leq J+1$ ).

Число неравных между собой собственных чисел  $N'$  равно степени минимального многочлена КМ  $\mathbf{M}$ . Минимальным многочленом матрицы называют многочлен минимальной степени с коэффициентом при старшем члене, равным единице, который является делителем характеристического многочлена [31]. Это значит, что собственные числа матрицы являются простыми корнями минимального многочлена. Таким образом, минимальный многочлен можно записать в виде

$$y(m) = (m - m_1)(m - m_2) \dots (m - m_{N'}). \quad (2.102)$$

Минимальный многочлен матрицы обладает следующим интересным свойством. Он аннулирует собственную матрицу, т.е. матрица  $y(\mathbf{M})$  является нулевой матрицей. Чтобы доказать этот факт, подставим в (2.102) в качестве аргумента матрицу  $\mathbf{M}$ , и тогда мы получаем следующее выражение

$$y(\mathbf{M}) = (\mathbf{M} - m_1 \mathbf{E})(\mathbf{M} - m_2 \mathbf{E}) \dots (\mathbf{M} - m_{N'} \mathbf{E}) \quad (2.103)$$

Первый сомножитель  $(\mathbf{M} - m_1 \mathbf{E})$  способен аннулировать (занулить) любые векторы первого собственного подпространства. Это значит, что любой вектор из этого собственного подпространства будучи умноженным на матрицу  $(\mathbf{M} - m_1 \mathbf{E})$  дает нулевой вектор. Поскольку в (2.103) присутствуют все  $N\zeta$  сомножителей, то матрица  $\mathbf{Y}(\mathbf{M})$  аннулирует любой вектор  $N$ -мерного пространства. Это возможно только тогда, когда  $\mathbf{Y}(\mathbf{M}) = [0]$ .

Если в (2.103) уменьшить число сомножителей до  $N^2$  ( $N^2 < N\zeta$ ), то получим ненулевую матрицу:  $\mathbf{Y}_0(\mathbf{M}) \neq [0]$ . Эта матрица будет аннулировать любой вектор  $\mathbf{F}_0$ , который принадлежит совокупности выбранных собственных подпространств, т.е.  $\mathbf{Y}_0(\mathbf{M})\mathbf{F}_0 = [0]$ . В частности, если исключить из (2.103) только один  $i$ -ый сомножитель, то получим матрицу  $\mathbf{Y}_{N'-1}^{(i)}(\mathbf{M})$ , которая будет проектировать любой вектор на  $i$ -ое собственное подпространство. Таким образом, можно построить входящие в (2.101) матрицы-проекторы  $\mathbf{\Pi}_k$  ( $k=1, 2, \dots, N\zeta$ ) в виде матричных многочленов

$$\mathbf{\Pi}_k = \left[ \prod_{p=1, p \neq k}^{N'} (\mathbf{M} - m_p \mathbf{E}) \right] \left[ \prod_{p=1, p \neq k}^{N'} (m_k - m_p) \right]^{-1}. \quad (2.104)$$

Свойства матриц-проекторов такого типа можно найти в [3]. Отметим, что соответствующее  $k$ -му подпространству собственное число матрицы  $\mathbf{\Pi}_k$  равно единице, а ее остальные ( $N\zeta - 1$ ) собственных чисел равны нулю.

Построение матриц-проекторов  $\mathbf{\Pi}_k$  ( $k=1, 2, \dots, N\zeta$ ) в принципе решает поставленные выше задачи обработки сигналов. При этом важную роль играет матрица-проектор  $\mathbf{\Pi}_{noise}$  на шумовое подпространство, которую можно получить из (2.104), полагая  $k=N\zeta$  и  $m_{N\zeta}=1$ . В результате будем иметь

$$\mathbf{\Pi}_{noise} = \left[ \prod_{p=1}^{N'-1} (\mathbf{M} - m_p \mathbf{E}) \right] \left[ \prod_{p=1}^{N'-1} (1 - m_p) \right]^{-1}. \quad (2.105)$$

В этом выражении матрица проектирования на шумовое подпространство выражена через КМ и ее собственные числа. Таким образом, мы избежали сложную с вычислительной точки зрения процедуру вычисления собственных векторов КМ.

Теперь, зная матрицу проектирования на шумовое подпространство, можно определить число источников по формуле

$$J = N - Sp(\mathbf{\Pi}_{noise}), \quad (2.106)$$

где  $Sp(\cdot)$  – след матрицы. Значение  $Sp(\Pi_{noise})$  совпадает с размерностью шумового подпространства.

Направления на источники сигналов отождествляются согласно проекционному методу с максимумами функции

$$h_{\infty}(j) = [\mathbf{S}^H(j) \Pi_{noise} \mathbf{S}(j)]^{-1}. \quad (2.107)$$

Выражение в квадратных скобках (2.107) имеет физический смысл части выходной мощности АР, соответствующей подпространству собственного шума. Если текущий угол  $\varphi$  у вектора  $\mathbf{S}(\varphi)$  совпадает с направлением на любой источник сигнала ( $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_J$ ), то этот вектор будет принадлежать сигнальному подпространству, а его проекция на шумовое подпространство будет равна нулю. Поэтому в этой точке функция  $h_{\infty}(j)$  имеет особенность типа  $0^{-1}$ . По пикам функции  $h_{\infty}(j)$  определяются угловые положения на источники сигналов.

В случае одного источника сигналов ( $J=1$ ) КМ  $\mathbf{M}$  имеет два собственных числа  $m_1 > 1$  и  $m_2 = 1$ . Проектор  $\Pi_{noise}$  на шумовое подпространство и функция  $h_{\infty}(j)$  будут равны

$$\Pi_{noise} = (\mathbf{M} - m_1 \mathbf{E})(1 - m_p)^{-1}, \quad (2.108)$$

$$h_{\infty}(j) = (1 - m_1) [\mathbf{S}^H(j) \mathbf{M} \mathbf{S}(j) - m_1]^{-1}. \quad (2.109)$$

В этом случае проекционный метод полностью эквивалентен согласованной обработке, которая является оптимальной и сводится к измерению выходной мощности  $\mathbf{S}^H(j) \mathbf{M} \mathbf{S}(j)$  при сканировании лучом антенны. В случае двух и более источников сигналов ( $J > 2$ ) метод согласованной обработки перестает быть оптимальным и отличается от проекционного метода, который дает точные значения параметров сигналов.

2. Рассмотрим теперь случай, когда число выборок входного процесса конечно и равно  $L$ . Поэтому вместо точной КМ мы должны использовать ее максимально правдоподобную оценку  $\hat{\mathbf{M}}$  из (2.99). Элементы оценочной КМ являются случайными величинами и имеют совместное распределение плотности вероятности Уишарта [5, 6].

В силу случайного характера вероятность появления кратных собственных чисел ничтожно мала. Поэтому, при  $L \geq N$  матрица  $\hat{\mathbf{M}}$  имеет  $N$  случайных положительных собственных чисел  $\mu_1 > \mu_2 > \dots > \mu_N > 0$ . Шумовое собственное число, равное единице и имеющее кратность  $N - J$  для точной КМ, расщепляется на  $N - J$  простых собственных чисел оценочной КМ  $\hat{\mathbf{M}}$ . Разброс шумовых собственных чисел возрастает с уменьшением числа выборок  $L$ . Они могут принимать значения, существенно меньшие единицы. При  $L < N$

выборочная матрица  $\hat{\mathbf{M}}$  является вырожденной и имеет  $L$  положительных собственных чисел, а  $N-L$  ее собственных чисел равны нулю. Подпространство, соответствующее нулевым собственным числам, ортогонально подпространству выборочных векторов  $\mathbf{Z}(l)$  и называется ядром матрицы  $\hat{\mathbf{M}}$ .

Теперь многочлен (2.102) состоит из  $N$  сомножителей и имеет вид

$$y(m) = (m - m_1)(m - m_2) \dots (m - m_N). \quad (2.110)$$

то есть является характеристическим многочленом КМ  $\hat{\mathbf{M}}$  степени  $N$ . Отсюда следует, что  $y(\hat{\mathbf{M}}) = [\mathbf{0}]$  и линейно независимыми будут  $N$  степенных матриц  $\mathbf{E}, \hat{\mathbf{M}}, \hat{\mathbf{M}}^2, \dots, \hat{\mathbf{M}}^{N-1}$ . Таким образом, при переходе от точной КМ  $\mathbf{M}$  к ее оценке  $\hat{\mathbf{M}}$  число линейно независимых матриц увеличивается от  $N\zeta$  до  $N$ . Это обусловлено влиянием собственного шума и появлением множества шумовых собственных чисел вместо одного. Поэтому для оценки числа и параметров источников сигналов нельзя использовать выражения (2.105)-(2.107), основанные на проекционных матрицах (2.104), а необходимо сначала оценить степень минимального многочлена КМ  $\hat{\mathbf{M}}$ .

Для оценки степени минимального многочлена в [26] предложено использовать статистику вида

$$I^{(m)} = \min_{b_n} \|\mathbf{I}^{(m)}(\hat{\mathbf{M}})\|^2, \quad \mathbf{I}^{(m)}(\hat{\mathbf{M}}) = \mathbf{E} - \sum_{n=1}^m b_n \hat{\mathbf{M}}^n. \quad (2.111)$$

Степень минимального многочлена находится из решения пороговой задачи с использованием априорной информации о статистических свойствах собственного шума. Если собственный шум имеет единичную КМ, то априори можно утверждать, что при отсутствии внешних сигналов степень минимального многочлена  $N \notin 1$ . Полагая в (2.111)  $m=1$  и считая, что в (2.99) выборки берутся только из собственного шума, в [26] найдены среднее ( $\langle I^{(1)} \rangle$ ) и дисперсия  $\sigma_1^2$  для статистики  $I^{(1)}$  в виде

$$\langle I^{(1)} \rangle = \frac{N^2 - 1}{N + L}, \quad \sigma_1^2 = 2 \frac{N^2 - 1}{(N + L)^2} \left[ 1 + \frac{(2N^2 - 3)}{NL} \right]. \quad (2.112)$$

С помощью (2.112) определяется порог  $r_{target}$ , который можно принять равным, например,  $r_{target} = \langle I^{(1)} \rangle$  или  $r_{target} = \langle I^{(1)} \rangle + \sigma_1$ . Величина порога зависит от числа выборок  $L$  и числа  $N$  элементов АР. При  $L \rightarrow \infty$  значение  $r_{target} \rightarrow 0$ .

При наличии не только собственного шума, но и сигналов, статистика  $I^{(1)}$  будет превышать значение порога. Так как с ростом  $m$  от 1 до  $N$  функционал (2.111) убывает до нуля, то всегда существует такое значение  $m = \hat{N}'$ , при котором  $I^{(m)} < r_{target}$ . Оценка  $\hat{N}'$

принимается за оценку степени минимального многочлена, так как дальнейшее уменьшение  $I^{(m)}$  будет обусловлено влиянием шумовых собственных чисел. Получаемая при этом матрица  $\mathbf{I}^{(m)}(\mathbf{M})$  будет наиболее близкой к нулевой матрице.

Теперь используя оценку степени минимального многочлена можно построить алгоритм для оценки числа источников сигналов и их параметров. Матрица  $\mathbf{I}^{(m)}(\mathbf{M})$  представляет собой матричный многочлен степени  $m$ . Соответствующий ему алгебраический многочлен имеет вид

$$y^{(m)}(m) = 1 - \sum_{n=1}^m b_n m^n = \prod_{n=1}^m (1 - z_n m), \quad (2.113)$$

где  $z_n$  – величина, обратная корню многочлена  $y^{(m)}(m)$ .

Многочлен такого типа получается из минимального многочлена (2.102) путем его деления на не равное нулю число  $(-1)^n m_1 m_2 \dots m_m$ . В соответствии с (2.113) статистику (2.111) запишем в другом виде

$$I^{(m)} = \min_{z_n} \left\| \mathbf{I}^{(m)}(\mathbf{M}) \right\|^2, \quad \mathbf{I}^{(m)}(\mathbf{M}) = \prod_{n=1}^m (\mathbf{E} - z_n \mathbf{M}), \quad (2.114)$$

где минимизация  $I^{(m)}$  достигается за счет выбора чисел  $z_n$ .

Аналогично (2.103) матрица  $\mathbf{I}^{(m)}(\mathbf{M})$  имеет ряд сомножителей и будет аннулировать любой вектор при  $m=N$ , так как  $\mathbf{I}^{(N)}(\mathbf{M}) = [\mathbf{0}]$ . При  $m < N$  векторы будут аннулироваться в некоторую сферу минимального размера. Минимальными будут и значения собственных чисел матрицы  $\mathbf{I}^{(m)}(\mathbf{M})$ , так как критерий (2.114) можно записать в виде

$$I^{(m)} = \min_{z_n} \sum_{i=1}^N \prod_{n=1}^m (1 - z_n m_i)^2. \quad (2.115)$$

Условия минимума этого функционала можно записать как

$$dI^{(m)} / dz_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, m. \quad (2.116)$$

Отсюда получим следующую систему нелинейных уравнений для коэффициентов  $z_n$  ( $n=1, 2, \dots, m$ ) [26]:

$$z_n = Sp \left[ \prod_{i=1, i \neq n}^m \mathbf{M} (\mathbf{E} - z_i \mathbf{M})^2 \right] \left\{ Sp \left[ \prod_{i=1, i \neq n}^m \mathbf{M}^2 (\mathbf{E} - z_i \mathbf{M})^2 \right] \right\}^{-1}. \quad (2.117)$$

Эта система решается итерационным путем для каждого  $m$ . Причем  $m$  значений  $z_n$ , вычисленные для функционала  $I^{(m)}$ , являются начальными приближениями для

вычисления  $(m+1)$  чисел  $z_n$  для функционала  $I^{(m+1)}$ . При  $m=1$  итераций не требуется и из (2.117) сразу имеем, что  $z_1 = Sp(\dot{\mathbf{M}})/Sp(\dot{\mathbf{M}}^2)$ . Практика вычислений показывает, что итерационный процесс сходится быстро. Например, достаточно не более пяти итераций, чтобы значения  $z_n$  были вычислены с точностью до  $10^{-4}$  при  $m=4$ .

Полученный таким образом набор чисел  $z_n$  дает оценки величин, обратных собственным числам КМ  $\mathbf{M}$ . Поэтому оценками собственных чисел будут величины  $z_n^{-1}$ . Наименьшее из них дает оценку шумового собственного числа, а другие дают оценки сигнальных собственных чисел.

Теперь аналогично (2.104) построим оценки матриц-проекторов в виде

$$\dot{\mathbf{H}}_k = \left[ \prod_{p=1, p \neq k}^{\dot{N}'} (\mathbf{E} - \dot{\mathbf{M}}) \right] \left[ \prod_{p=1, p \neq k}^{\dot{N}'} \left( 1 - \frac{z_p}{z_k} \right) \right]^{-1}. \quad (2.118)$$

Выражение (2.118) перейдет в (2.104) при  $L \rightarrow \infty$ , если учесть, что  $\dot{N}' \rightarrow N'$ ,  $\dot{\mathbf{M}} \rightarrow \mathbf{M}$ ,  $z_p \rightarrow m_p^{-1}$ ,  $z_k \rightarrow m_k^{-1}$ , и сделать простые алгебраические преобразования.

Оценка проектора  $\dot{\mathbf{H}}_{noise}$  на подпространство собственного шума получается при подстановке в (2.118) в качестве  $z_k$  наибольшего из полученных чисел  $z_n$ .

Теперь число действующих источников  $J$  можно оценить по формуле

$$J = N - \lfloor Sp(\dot{\mathbf{H}}_{noise}) \rfloor, \quad (2.119)$$

где  $\lfloor \cdot \rfloor$  - обозначает округление до целого числа. Выражение (2.119) является аналогом точного выражения (2.106).

Угловые координаты источников сигналов будут отождествляться с максимумами функции

$$\dot{h}_{\infty}(j) = [\mathbf{S}^H(j) \dot{\mathbf{H}}_{noise} \mathbf{S}(j)]^{-1}. \quad (2.120)$$

Выражение (2.120) является аналогом точной формулы (2.107). Максимум функции  $\dot{h}_{\infty}(j)$  совпадает с минимумом функции  $\mathbf{S}^H(j) \dot{\mathbf{H}}_{noise} \mathbf{S}(j)$ . В свою очередь глубина минимума этой функции зависит от того, насколько близки к нулю сигнальные собственные числа матрицы  $\mathbf{I}^{(m)}(\dot{\mathbf{M}})$ . Так как в соответствии с критерием (2.114) эта матрица выбирается наиболее близкой к нулевой матрице, то ее собственные числа будут также наиболее близки к нулю. Поэтому матрица  $\dot{\mathbf{H}}_{noise}$  наиболее эффективно аннулирует векторы сигнального подпространства.

Предположим теперь, что число выборок входного процесса меньше числа элементов АР, т.е.  $L < N$ . В этом случае выборочная КМ  $\hat{\mathbf{M}}$  в (2.99) имеет  $L$  отличных от нуля собственных чисел и  $N-L$  нулевых. Приведенные выше рассуждения будут справедливыми, если их отнести не ко всему  $N$ -мерному пространству, а к  $L$ -мерному подпространству выборочных векторов. В частности, в (2.114) матрицу  $\mathbf{I}^{(m)}(\hat{\mathbf{M}})$  необходимо записать в виде:

$$\mathbf{I}^{(m)}(\hat{\mathbf{M}}) = \mathbf{P}_{||} - \sum_{n=1}^m b_n \hat{\mathbf{M}}^n, \quad (2.121)$$

где  $1 \leq m \leq L$ ,  $\mathbf{P}_{||}$  - тождественный проектор на подпространство выборочных векторов.

Минимизировать квадрат нормы матрицы в (2.121) невозможно, так как заранее не известна матрица-проектор  $\mathbf{P}_{||}$ . Поэтому к правой части (2.121) добавим ортогональный проектор  $\mathbf{P}_{\perp}$  на ядро матрицы  $\hat{\mathbf{M}}$ . Это приведет нас вновь к выражению (2.111), так как  $\mathbf{P}_{||} + \mathbf{P}_{\perp} = \mathbf{E}$ . При этом

$$I^{(m)} = \min_{b_n} Sp \left[ \mathbf{P}_{||} - \sum_{n=1}^m b_n \hat{\mathbf{M}}^n \right]^2 + Sp(\mathbf{P}_{\perp}^2). \quad (2.122)$$

Второе слагаемое в этом выражении является постоянной величиной равной  $Sp(\mathbf{P}_{\perp}^2) = N - L$ . Поэтому минимум функционала (2.111) совпадает с минимумом первого слагаемого в (2.122), которое равно квадрату нормы матрицы в (2.121). Таким образом, при  $L < N$  вместо (2.121) можно использовать матрицу  $\mathbf{I}^{(m)}(\hat{\mathbf{M}})$  из (2.111), если учесть, что с ростом  $m$  величина  $I^{(m)}$  уменьшается не до нуля, а до величины  $N-L$ . Отметим, что для оценки параметров  $J$  источников минимально необходимое число выборок составляет  $L = J + 1$ . В этом случае существует одно шумовое собственное число КМ  $\hat{\mathbf{M}}$  и, следовательно, можно получить оценку проектора  $\hat{\mathbf{P}}_{noise}$ .

Приведем результаты моделирования эффективности рассмотренного метода для линейной 10-элементной АР с шагом равным половине длины волны. На рис. 2.17 приведены вероятности правильной оценки числа источников сигналов в зависимости от их мощности при длине выборки входного процесса  $L=100$ . Рассмотрены случаи одного и двух источников сигналов одинаковой мощности с различным угловым расстоянием друг относительно друга, составляющим  $\varphi_1 - \varphi_2 = 0,5\Delta\varphi$  и  $\varphi_1 - \varphi_2 = 0,2\Delta\varphi$ , где  $\Delta\varphi = 10^\circ$  - ширина луча АР по уровню половинной мощности. Толстые кривые построены для более высокого порога  $r_{target} = \langle I^{(1)} \rangle + S$ , а тонкие - для более низкого порога  $r_{target} = \langle I^{(1)} \rangle$ . Предельные значения вероятности правильной оценки при  $\nu \rightarrow 0$  для случая одного сигнала, дают

значение «ложной тревоги», когда значение функционала  $I^{(1)}$  превышает порог при наличии только собственного шума.

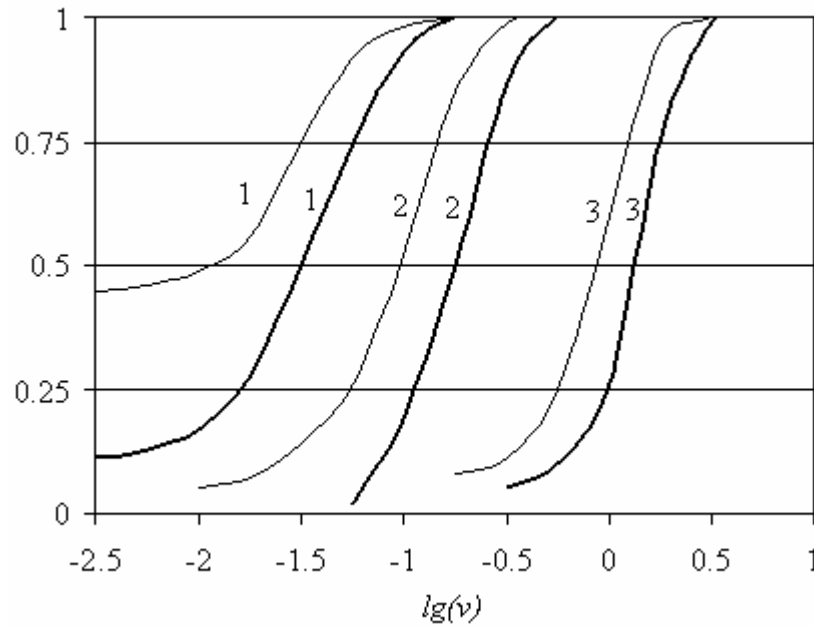


Рис. 2.17 Вероятность правильной оценки числа источников сигналов в зависимости от их мощности при одном (кривые 1) и двух (кривые 2, 3) источниках. Длина выборки  $L=100$ , угловое расстояние между источниками составляет 0,5 (кривые 2) и 0,2 ширины луча (кривые 3). Толстые и тонкие кривые построены для высокого и низкого порогов, соответственно

Из рисунка видно, что предложенный метод обладает высокой эффективностью. Если сравнить полученные результаты с аналогичными результатами, приведенными в [20], то оказывается, что предложенный метод более эффективен, чем метод MDL (minimum description length) [19] и метод AIC (Akaike information criterion) и обладает примерно одинаковой эффективностью с методом EDT (eigenvector detection technique) [21]. Однако последний из них предполагает знание некоторой априорной информации [20]: вида волнового фронта (например, плоский), угловой координаты центра расположения источников, что достаточно трудно определить на практике. В то же время предложенный выше метод подобной априорной информации не требует. Более того, он не требует знания волнового фронта и геометрии AP. Необходимо только, чтобы AP находилась в области когерентности сигналов.

Рассмотрим теперь задачу оценки параметров сигналов. Пусть имеется один источник ( $J=1$ ), расположенный по нормали к AP. Угловую координату  $\varphi_1$  будем оценивать как точку максимума функции  $\hat{h}_\infty(j)$  в (2.120), а мощность сигнала оценим с помощью выражения  $n_1 = \mathbf{S}_1^H(j) \hat{\mathbf{M}} \mathbf{S}_1(j) - 1$ , где компоненты вектора  $\mathbf{S}_1(j)$  соответствуют оценке  $\hat{j}_1$  положения сигнала. На рис. 2.18 кружками приведена (в долях ширины луча)



среднеквадратическая ошибка оценки координаты сигнала в зависимости от длины выборки  $L$  для различных мощностей сигнала.

Аналогичные данные для относительной СКО оценки мощности (в дБ) приведены на рис. 2.19, на котором точки, кружки и звездочки относятся к случаям, когда мощность источника  $\nu=100; 10; 1$ ; соответственно. Сплошными кривыми показана потенциальная точность соответствующих оценок (границы Крамера-Рао), которая определяется следующими выражениями [3]

$$S_j^2 = \left[ 2nNL \left( \frac{dS^H}{dj} \Pi_{noise} \frac{dS}{dj} \right) \right]^{-1}; \quad S_n^2 = \frac{n}{L}. \quad (2.123)$$

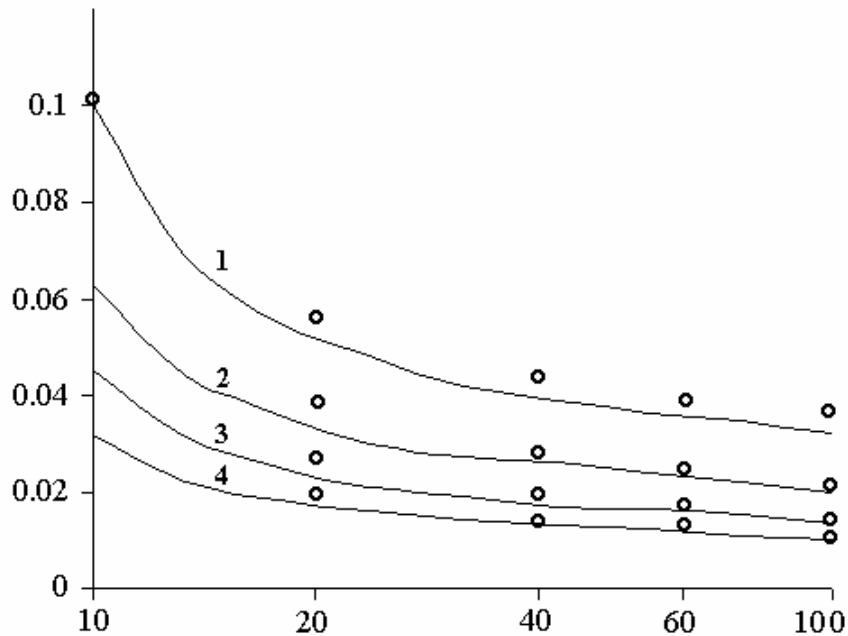


Рис. 2.18 СКО оценки (кружки) координаты источника в зависимости от длины выборки для мощности  $\nu=0,2; 0,5; 1; 2$  (кривые 1,2,3,4, соответственно). Сплошные кривые - границы Крамера-Рао

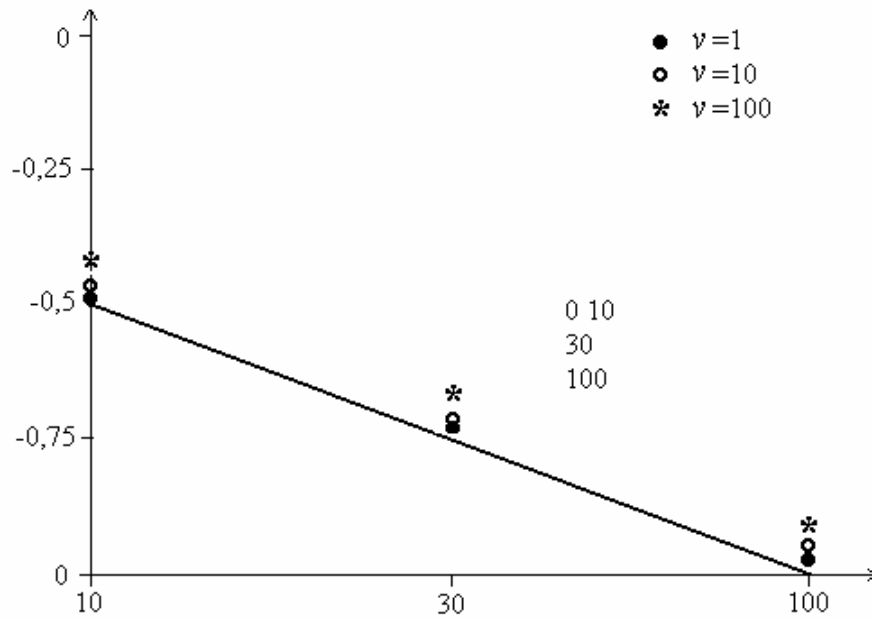


Рис. 2.19 SKO оценки мощности источника сигнала в зависимости от длины выборки  $L$  для мощности  $\nu=100, 10$ , и  $1$  (точки, кружки и звездочки, соответственно). Сплошные кривые - границы Крамера-Рао.

В случае двух источников сигналов одинаковой мощности результаты, полученные с помощью проекционного метода, сравним с результатами по методу Кейпона, в котором угловые координаты источников сигналов отождествляются с максимумами функции  $h_1(j) = [\mathbf{S}^H(j) \mathbf{M}^{-1} \mathbf{S}(j)]^{-1}$ . В таблице 2.2 приведены оценки углового положения источников сигналов, усредненные по 100 реализациям, и SKO  $s_\varphi$  этих оценок в зависимости от мощности сигналов  $\nu$  для углового расстояния между источниками  $\Delta\varphi=0,5\Delta\varphi$  ( $\varphi_1=-2,5^\circ$  и  $\varphi_2=2,5^\circ$ ) и длины выборки входного процесса  $L=100$ . Из сравнения приведенных данных видно, что проекционный метод обладает значительно большей эффективностью. Во-первых, метод Кейпона не разрешает слабые источники. Во-вторых, систематические и случайные ошибки для метода Кейпона имеют большие значения. Только при достаточно больших интенсивностях источников методы дают одинаковые результаты.

Таблица 2.2.

Мощность источ. $\nu$ (дБ)	Проекционный метод			Метод Кейпона		
	$\hat{f}_1$ (гр.)	$\hat{f}_2$ (гр.)	$s_\varphi$ (гр.)	$\hat{f}_1$ (гр.)	$\hat{f}_2$ (гр.)	$s_\varphi$ (гр.)
0	-2,17	1,99	0,46	-	-	-
2,5	-2,25	2,12	0,35	-	-	-
5	-2,35	2,29	0,25	-	-	-

7,5	-2,42	2,40	0,18	-1,48	1,54	0,34
10	-2,45	2,45	0,14	-1,92	1,92	0,21
12,5	-2,47	2,47	0,10	-2,19	2,20	0,13
15	-2,48	2,49	0,08	-2,32	2,32	0,09
17,5	-2,49	2,49	0,06	-2,40	2,41	0,08
20	-2,49	2,50	0,04	-2,44	2,45	0,05

## 2.5 Метод углового разрешения коррелированных источников

Методы углового разрешения дискретных источников, рассмотренные выше, справедливы для некоррелированных источников. Возникает вопрос, как быть, если колебания источников имеют статистическую связь? Существует много примеров, когда необходимо учитывать коррелированность источников. Допустим, линейная АР расположена вертикально над землей на некоторой высоте  $h$  ( $h \gg \lambda$ ) и принимает сигнал от источника (например, спутника, самолета и т.п.), расположенного под углом  $\alpha$  к горизонту.

Нетрудно понять, что в этой ситуации, когда земная поверхность является ровной и гладкой, АР будет принимать два сигнала: прямой, приходящий под углом  $\alpha$ , и отраженный от земли и приходящий под углом  $-\alpha$ . Эти сигналы являются когерентными. Второй сигнал можно интерпретировать, как сигнал мнимого источника, расположенного под углом  $-\alpha$ . Угловое расстояние между реальным и мнимым источниками равно  $2\alpha$ . Если стоит задача измерить угол места источника сигнала, то при малых значениях  $\alpha$  возникает проблема углового разрешения двух когерентных источников.

Задача становится более сложной, когда земная поверхность имеет неровности (холмы, например). В этом случае может возникать множество когерентных сигналов, отраженных от земли. Таким образом, в условиях многолучевого распространения сигнала один источник может создать много волновых фронтов, приходящих к АР с различных направлений. Эту ситуацию можно рассматривать как прием коррелированных сигналов нескольких внешних источников.

Для такого случая в разделе 1 мы получили КМ следующего вида (формула (1.25)):

$$\mathbf{M} = \mathbf{F} \mathbf{A} \mathbf{F}^H + \mathbf{E}, \quad (2.124)$$

где матрица  $\mathbf{A}$  имеет элементы  $\langle a_k(t) a_l^*(t) \rangle$ ,  $a_k$  – случайная комплексная амплитуда волны  $k$ -го источника, матрица  $\mathbf{F} = [\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \dots, \mathbf{S}_J]$ ,  $J$  – число источников излучения.

Столбцами матрицы  $\mathbf{F}$  являются сигнальные векторы  $\mathbf{S}_k$  коррелированных источников. Мощность собственного шума в одном элементе АР принята в (2.124) равной единице.

Матрица  $\mathbf{A}$  имеет размерность  $J \times J$  и может быть представлена в виде

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} n_1 & \sqrt{n_1 n_2} r_{12} & \mathbf{L} & \sqrt{n_1 n_J} r_{1J} \\ \sqrt{n_1 n_2} r_{21} & n_2 & \mathbf{L} & \sqrt{n_2 n_J} r_{2J} \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{O} & \mathbf{M} \\ \sqrt{n_1 n_J} r_{J1} & \sqrt{n_2 n_J} r_{J2} & \mathbf{O} & n_J \end{bmatrix}, \quad (2.125)$$

где  $n_k = \langle |a_k(t)|^2 \rangle$  - мощность излучения  $k$ -го источника, которая при единичной мощности собственного шума может рассматриваться, как ОСШ в элементе АР для  $k$ -го источника,  $r_{pq} = |r_{pq}| \exp(j\varphi_{pq})$  - коэффициент корреляции комплексных амплитуд  $p$ -го и  $q$ -го источников,  $\varphi_{pq}$  - средняя разность фаз колебаний этих источников в точке отсчета фазы (обычно в центре апертуры или в первом элементе АР).

Если источники не коррелированы, то матрица  $\mathbf{A}$  является диагональной. При полной корреляции отдельных источников (когда модуль коэффициента их взаимной корреляции равен единице) матрица  $\mathbf{A}$  вырождается и имеет ранг, меньший числа источников  $J$ .

Проекционный метод углового разрешения источников сигналов, рассмотренный выше, в случае коррелированных источников ведет себя следующим образом. Метод включает в себя два этапа. На первом этапе формируется оценка КМ входных сигналов и оценивается число источников излучения, т.е. размерности сигнального и шумового подпространств. На втором этапе строится оценка матричного проектора  $\hat{\mathbf{P}}_{noise}$  на шумовое подпространство и оценки углов прихода сигналов с помощью разрешающей функции вида (2.120).

Ясно, что существует вероятность ошибки при определении ранга шумового проектора. Такая ошибка сильно ухудшает характеристики разрешения, так как приводит либо к пропуску сигналов (если оценка ранга занижена), или к появлению ложных источников (если оценка ранга завышена). В случае коррелированных источников некоторые из сигнальных собственных чисел точной КМ становятся близкими к шумовому собственному числу и в пределе при полной коррелированности – точно равными этому числу. Из-за ошибки оценивания такие сигнальные собственные числа могут быть приняты за шумовые числа и наоборот, шумовое собственное число может быть принято за сигнальное. Для повышения эффективности проекционного метода в условиях коррелированных источников в ряде работ предложена дополнительная процедура пространственного сглаживания корреляционной матрицы [24, 25].

Пространственное сглаживание реализуется путем разбиения АР на  $K$  перекрывающихся подрешеток размерности  $Q < N$ , сдвинутых друг относительно друга на один приемный элемент. КМ оценивается для каждой подрешетки и, таким образом, получается  $K$  матриц размерности  $Q \times Q$ . Процедура пространственного сглаживания завершается определением средней матрицы.

Можно показать, что средняя КМ имеет вид, аналогичный (2.124), но элементы матрицы (2.125) содержат коэффициенты корреляции вида

$$\tilde{r}_{pq} = r_{pq} \frac{\sin[K(u_p - u_q)/2]}{K \sin[(u_p - u_q)/2]} \exp\left[j \frac{K-1}{2}(u_p - u_q)\right], \quad (2.126)$$

где  $u_p = 2pd l^{-1} \sin j_p$  - обобщенная угловая переменная.

Из формулы (2.126) видно, что для пары источников ( $u_p \neq u_q$ ) и при  $K > 1$  имеет место неравенство

$$|\tilde{r}_{pq}| < |r_{pq}|. \quad (2.127)$$

Таким образом процедура сглаживания приводит к декорреляции источников, причем выбором числа подрешеток  $K$  можно регулировать значение  $|\tilde{r}_{pq}|$ .

Рассмотрим теперь условия, которым должна удовлетворять общая размерность АР  $N$ . Для того чтобы после пространственного сглаживания можно было применять проекционный метод, необходимо  $Q > J$ . Кроме того, чтобы матрица  $\mathbf{A}$  имела полный ранг, равный  $J$ , необходимо, чтобы число подрешеток было больше или равно числу полностью коррелированных источников, т.е. в общем случае нужно брать  $K \geq J$ . Отсюда нетрудно получить, что  $N \geq 2J$ . Таким образом, число элементов решетки должно, по крайней мере, превышать вдвое число источников.

Допустим теперь, что число  $N$  элементов АР задано. Как следует выбрать размер подрешетки, чтобы эффективность углового разрешения была наилучшей. Если мы выберем большой размер подрешетки, то число таких подрешеток будет мало, и процедура сглаживания будет не эффективной. Если выбрать маленький размер подрешетки, то число подрешеток будет большим, но из-за малого размера подрешетки эффективность углового разрешения уменьшится. Теоретический анализ показывает [25], что субоптимальный размер подрешетки может быть вычислен по формуле  $Q_{\text{субопт.}} = 0.6(N+1)$ . В таблице 2.3 приведены для сравнения субоптимальный размер подрешетки, вычисленный по этой формуле и округленный до целого числа, и

оптимальный размер подрешетки  $Q_{\text{опт.}}$ , полученный путем математического моделирования.

Таблица 2.3.

$\varphi_{12}$	$N=10$		$N=25$		$N=50$	
	$Q_{\text{субопт.}}$	$Q_{\text{опт.}}$	$Q_{\text{субопт.}}$	$Q_{\text{опт.}}$	$Q_{\text{субопт.}}$	$Q_{\text{опт.}}$
0	7	6	16	16	31	30
$\pi/4$	7	7	16	16	31	31
$\pi/2$	7	7	16	16	31	31
$\pi$	7	7	16	17	31	34

Предполагалось, что два близко расположенных источника жестко коррелированы, т.е.  $|r_{12}|=1$ , разность фаз колебаний этих источников в первом элементе решетки задавалась параметром  $\varphi_{12}$ . АР предполагалась линейной эквидистантной с полуволновым расстоянием между элементами. Из таблицы видно, что приближенная формула для субоптимального размера подрешетки дает достаточно точную оценку оптимального размера подрешетки.

## ГЛАВА 3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ПРОТЯЖЕННЫХ ИСТОЧНИКОВ СИГНАЛОВ С ПОМОЩЬЮ АНТЕННОЙ РЕШЕТКИ

### 3.1 Измерение углового распределения мощности протяженного источника

На рис. 3.1 изображена система координат, где углы  $\varphi$  и  $q$  дают азимут и угол места элементарного телесного угла  $d\Omega$ , внутри которого сосредоточена доля излучения протяженного источника. АР, принимающая это излучение, расположена в начале координат.

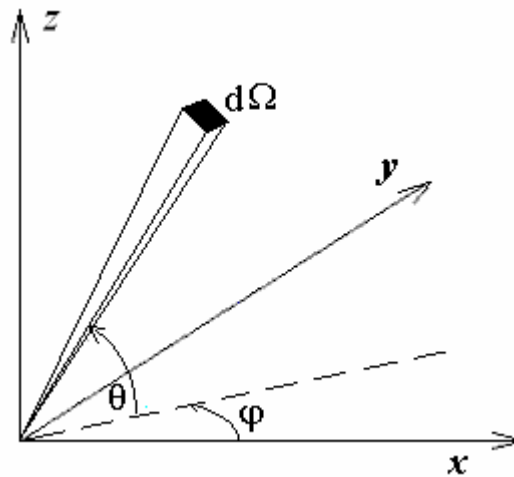


Рис. 3.1 Система координат

Комплексная амплитуда плоской волны, приходящей с направления  $(j, q)$  внутри элементарного телесного угла  $d\Omega$  может быть представлена в виде функции  $z(j, q)d\Omega$ . Тогда амплитуда выходного сигнала находится путем суммирования плоских волн, приходящих внутри телесного угла всего протяженного источника. Это есть интеграл следующего вида

$$s = \int_{4\pi} f(j, q) z(j, q) d\Omega, \quad (3.1)$$

где функция  $f(j, q)$  описывает комплексную ДН антенны в сферической системе координат.

Мы предполагаем, что излучение источника имеет шумовой характер, так что функция  $z(j, q)$  является случайной функцией угловых координат. Средняя мощность выходного сигнала равна

$$P = \langle ss^* \rangle = \langle |s|^2 \rangle = \int \int_{4\pi 4\pi} f(j, q) f^*(j', q') \langle z(j, q) z^*(j', q') \rangle d\Omega d\Omega', \quad (3.2)$$

Далее мы будем рассматривать протяженные источники с некоррелированным излучением. Это значит, что излучения, переносимые в любых двух элементарных телесных углах, являются не коррелированными. Математически этот факт мы запишем в виде

$$\langle z(j, q) z^*(j', q') \rangle = s(j, q) d(j - j', q - q'), \quad (3.3)$$

где  $s(j, q)$  дает функцию углового распределения мощности протяженного источника, а  $d(j - j', q - q')$  есть дельта функция.

Подставляя (3.3) в (3.2) мы получим следующее выражение для средней выходной мощности

$$P = \int_{4p} |f(j, q)|^2 s(j, q) d\Omega. \quad (3.4)$$

Наша задача, показать, как может быть измерена функцию углового распределения мощности протяженного источника  $s(j, q)$ .

Для упрощения рассмотрим одномерную задачу, т.е. ДН и функцию источника представим в виде функций одной угловой переменной  $\varphi$ . Кроме того, мы учтем, что ДН имеет выраженный главный максимум в некотором направлении  $\varphi_0$ . В таком случае формулу (3.4) можно переписать в виде

$$P(j_0) = \int_{-\infty}^{\infty} F(j - j_0) s(j) dj. \quad (3.5)$$

где  $F(j - j_0) = |f(j - j_0)|^2$  - ДН АР по мощности.

Здесь мы предполагаем, что ширина главного луча ДН мала по сравнению с  $2p$ , а боковые лепестки ДН имеют малый уровень. Поэтому изменение пределов интегрирования существенно не влияет на результат исследования. Мы также предполагаем, что положение главного луча ДН может изменяться благодаря сканированию или вращению антенны. В результате этого выходная мощность изменяется и рассматривается, как функция положения главного луча  $j_0$ .

Надо сказать, что форма ДН зависит от длины волны принимаемого излучения и угла сканирования. Однако мы пренебрегаем небольшими отклонениями ДН в пределах ширины частотной полосы приемника и пределов сканирования, и считаем, что функция  $F(j - j_0)$  зависит только от разности углов  $(j - j_0)$ . Для этой функции удобно ввести нормировку следующего вида



$$\int_{-\infty}^{\infty} F(j - j_0) dj = 1. \quad (3.6)$$

Уравнение (3.5) является уравнением свертки двух функций и при сделанных выше предположениях удовлетворяет следующим свойствам.

1.

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(j - j_0) s(j) dj = \int_{-\infty}^{\infty} F(j) s(j - j_0) dj. \quad (3.7)$$

Физически первое свойство означает, что мы получим одинаковый результат, если антенна будет неподвижная, а протяженный источник перемещаться в системе заданных угловых координат. Например, в радиоастрономии это достигается за счет вращения Земли.

2.

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(j - j_0) [s_1(j) + s_2(j)] dj = \int_{-\infty}^{\infty} F(j - j_0) s_1(j) dj + \int_{-\infty}^{\infty} F(j - j_0) s_2(j) dj. \quad (3.8)$$

Это свойство линейности свертки. Если распределение излучения вдоль источника можно представить в виде суммы двух и более функций, то свертка (3.5) распадается на сумму сверток.

3. Наконец, если проинтегрировать уравнение (3.5), то получим следующий результат

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(j_0) dj_0 = \left( \int_{-\infty}^{\infty} s(j) dj \right) \left( \int_{-\infty}^{\infty} F(x) dx \right). \quad (3.9)$$

Если принять нормировку (3.6), то, то согласно выражению (3.9), измерение распределение излучения одного источника разными ДН, приводит только к некоторому перераспределению энергии, сохраняя полную мощность источника постоянной. Это позволяет разделить вопрос об искажении измеряемого распределения за счет формы ДН от вопросов, связанных с абсолютной интенсивностью излучения протяженного источника.

Нормировка (3.6) дает возможность использовать аппарат теории  $d$ -функции для описания предельного случая, когда антенна имеет бесконечно большую протяженность. В этом случае ДН становится бесконечно узкой и имеет вид  $\delta$ -функции, то есть  $F(j - j_0) = d(j - j_0)$ . В результате получим, что

$$P(j_0) = \int_{-\infty}^{\infty} d(j - j_0) s(j) dj = s(j_0). \quad (3.10)$$

Таким образом, неискаженный результат измерения распределения интенсивности протяженного источника можно получить только в идеальном случае бесконечного размера используемой АР.

Ясно, что соотношение (3.5) связывает истинное  $s(j)$  и наблюдаемое  $P(j_0)$  распределения интенсивности излучения. Подобные соотношения встречаются во многих физических задачах, в частности в задачах спектрального оценивания. Во всех случаях речь идет о линейном интегральном соотношении между истинным распределением некоторой физической величины и экспериментальным распределением. Таким образом, задача определения истинного распределения интенсивности излучения  $s(j)$  сводится к решению уравнения свертки (3.5).

Решение этого уравнения чаще всего опирается на использование преобразования Фурье. Истинное распределение интенсивности излучения представляется в виде суперпозиции гармонических распределений, т.е.

$$s(j) = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} s(w) \exp(ij w) dw. \quad (3.11)$$

ДН по мощности также представляется с помощью аналогичного разложения

$$F(j) = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) \exp(ij w) dw. \quad (3.12)$$

Подставляя (3.11) и (3.12) в (3.5), получим хорошо известное для интегральной свертки соотношение

$$P(w) = F(w)s(w), \quad (3.13)$$

где

$$P(w) = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} P(j) \exp(-ij w) dj. \quad (3.14)$$

Формальное решение проблемы становится очевидным. После измерения функции  $P(j)$  необходимо из (3.14) найти ее спектральный образ  $P(w)$ . Функция ДН и ее спектральный образ считаются известными точно. Поэтому из (3.13) мы находим спектральный образ  $s(w)$  и подставляем его в выражение (3.11). В результате решение задачи имеет вид

$$s(j) = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(w)}{F(w)} \exp(ij w) dw. \quad (3.15)$$

Воспользоваться этой формулой можно при следующих обстоятельствах:

- Измерения должны быть сделаны с высокой точностью, так чтобы шумовая ошибка не искажала спектральный образ  $P(w)$  на всех частотах.
- Пределы интегрирования необходимо ограничить таким образом, чтобы в область интегрирования не попадали точки на частотной оси, где  $F(w)=0$ . Как следует из уравнения (3.13) в этих точках мы не имеем информации о спектральном образе источника  $s(w)$ . Функция  $P(w)$  содержит в этих точках только измерительный шум.

Таким образом, к решению уравнения (3.5) необходимо подходить с осторожностью. В самом общем случае задача решения интегрального уравнения свертки относится к классу так называемых некорректно поставленных задач. Основной особенностью таких задач является неустойчивость к погрешностям измеренных величин, например, к ДН АР, которая обычно находится путем измерений и, поэтому, всегда известна с некоторой погрешностью. Следовательно, функция  $F(w)$  в (3.15) также является неточно известной. Даже малые погрешности этой функции могут приводить к большим погрешностям в полученной с помощью (3.15) оценке распределения интенсивности излучения  $s(j)$ . Поэтому необходимо применять методы регуляризации [12, 15-17].

### 3.2 Измерение диаграммы направленности по радиоизлучению Солнца

Радиоизлучение Солнца является достаточно интенсивным и может регистрироваться современными малощумящими приемными устройствами. При необходимости могут использоваться специальные приемники слабого шумового излучения, которые называют радиометрами. Координаты Солнца легко рассчитываются по астрономическим формулам. Все это дает прекрасную возможность использовать Солнце, как природный источник радиоизлучения для различных целей настройки радиосистем пеленгации, радиолокации и радиосвязи. В частности, с помощью Солнца может быть измерена ДН антенной системы [13].

Принимая во внимание свойство интегральной свертки (3.7), выражение (3.5) запишем в другом виде

$$P(j_0) = \int_{-\infty}^{\infty} s(j - j_0) F(j) dj . \quad (3.16)$$

Теперь нас интересует функция  $F(j)$ , а распределение  $s(j - j_0)$  радиоизлучения на Солнце мы считаем известным. Угол  $j_0$  дает координату центра источника излучения.

Солнце имеет угловой размер 0.5 градуса. Поэтому измерение ДН с шириной главного луча, значительно большей углового размера Солнца выполняется без искажений. Но в тех случаях, когда ширина главного луча сравнима с угловым размером Солнца, или когда ДН имеет явно выраженный периодический характер, и период сравним с угловым размером Солнца, необходимо принимать во внимание возникающие искажения. Это равносильно задаче решения уравнения (3.16) относительно функции  $F(j)$ .

Аналогично (3.15) решение может быть записано в виде

$$F(j) = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(w)}{s(w)} \exp(ij w) dw. \quad (3.17)$$

Приближенное решение этого уравнения получается следующим путем. Добавляя и вычитая функцию  $P(w)$  под интегралом, преобразуем уравнение (3.17) к виду

$$F(j) = P(j) + \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} P(w) \left[ \frac{1}{s(w)} - 1 \right] \exp(ij w) dw. \quad (3.18)$$

Второе слагаемое дает величину отклонения истинной ДН  $F(j)$  от измеренной по радиоизлучению Солнца функции  $P(j)$ . Это есть систематическая ошибка измерения, которая обусловлена размером Солнца. Ошибка может быть уменьшена, применяя один из следующих способов разложения функции  $\left[ \frac{1}{s(w)} - 1 \right]$ , входящей в подынтегральное выражение в (3.18).

Рассмотрим сначала разложение в степенной ряд

$$\frac{1}{s(w)} - 1 = \sum_n b_n w^n. \quad (3.19)$$

Подставим это выражение в (3.18) и изменим порядок суммирования и интегрирования. В результате будем иметь, что

$$F(j) = P(j) + \sum_n b_n \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} w^n P(w) \exp(ij w) dw. \quad (3.20)$$

Получающиеся интегралы вычисляются  $n$ -кратным дифференцированием функции  $P(j)$ . В результате приходим к следующему выражению

$$F(j) = P(j) + \sum_n \frac{b_n}{i^n} \frac{d^n P(j)}{dj^n}. \quad (3.21)$$

Эта формула показывает, что, используя измеренную функцию  $P(j)$  и ее производные, можно устранить искажения, возникающие при измерении ДН.

Если представить функцию  $\left[ \frac{1}{S(w)} - 1 \right]$  в виде тригонометрического ряда

$$\frac{1}{S(w)} - 1 = \sum_n b_n \exp(-ianw), \quad (3.22)$$

то решение получим в виде

$$F(j) = P(j) + \sum_n b_n P(j - an). \quad (3.23)$$

Такое решение было использовано в работе [33]. Для практического использования в этой работе рекомендовано простое выражение следующего вида

$$F(j) = P(j) + \left[ P(j) - \frac{P(j+a) + P(j-a)}{2} \right], \quad (3.24)$$

где  $a=(1/3)\Delta$ ,  $\Delta$ - угловой размер Солнца.

### 3.3 Применение радиоинтерферометров для измерения распределения интенсивности радиоизлучения протяженных источников

Объекты исследования в радиоастрономии часто имеют очень малые угловые размеры, которые характеризуются угловыми минутами и секундами. Чтобы решить задачу измерения распределения радиоизлучения такого объекта, требуются антенна очень большого размера, достигающего нескольких сотен километров. Ясно, что создать АР такого размера технически сложно и очень дорого.

На практике такая задача решается с помощью устройства, которое называется радиоинтерферометром. Такое устройство содержит только два антенных элемента, разнесенные на достаточно большое расстояние  $d$ . Будем полагать, что обе антенны идентичны и в собственных системах координат их комплексные ДН одинаковые и описываются функцией  $f(j)$ . Введем единую систему координат с центром в первой антенне. Вторую антенну поместим на оси  $x$  на расстоянии  $d$  от начала координат. Тогда вторая антенна в этой системе координат будет иметь ДН в виде

$$f_2(j) = f(j) \exp\left(-j \frac{2p}{l} d \cos j\right).$$

Сигналы, принятые первой и второй антеннами можно записать следующим образом

$$s_1 = \int_{2p} f(j) z(j) dj , \quad (3.25)$$

$$s_2 = \int_{2p} f(j) \exp\left(-j \frac{2p}{l} d \cos j\right) z(j) dj . \quad (3.26)$$

Обработка принятых сигналов в радиоинтерферометре сводится к определению функции взаимной корреляции. Следовательно, выход радиоинтерферометра запишем, используя (3.25) и (3.26) в виде

$$G_{12} = \langle s_1 s_2^* \rangle = \int_{2p} |f(j)|^2 \exp\left(j \frac{2p}{l} d \cos j\right) s(j) dj . \quad (3.27)$$

При выводе этой формулы мы учли, что  $\langle z(j) z^*(j') \rangle = s(j) d(j - j')$ . В пределах угловых размеров источника функция ДН  $|f(j)|^2$  меняется незначительно, так как ширина ДН много больше этих угловых размеров. Поэтому в интеграле (3.27) эту функцию можно принять, как постоянную величину, равную единице. В результате выражение (3.27) упрощается и принимает вид

$$G_{12} = \int_{2p} s(j) \exp\left(j \frac{2p}{l} d \cos j\right) dj . \quad (3.28)$$

Теперь мы будем полагать, что интересующий нас источник располагается так, что направление на его центр совпадает с направлением нормали к базе интерферометра. Распределение излучения будем изучать в зависимости от угла  $a = p/2 - \varphi$ . Область углов  $a$  предполагается небольшой, так что мы можем приближенно считать в (3.28), что  $\cos j = \cos(p/2 - a) = \sin a \approx a$ . Кроме того, введем безразмерный параметр  $u = d/l$ . Это дает дальнейшее упрощение формулы (3.28), которая теперь примет вид:

$$G_{12}(u) = \int_{2p} s(a) \exp(j 2p u a) da . \quad (3.29)$$

Полученное выражение показывает, что функция  $G_{12}(u)$  может быть интерпретирована, как Фурье преобразование от функции распределения радиоизлучения  $s(a)$ . Это значит, что с помощью радиоинтерферометра мы измеряем не саму функцию распределения радиояркости источника, а одну из его компонент в разложении Фурье. Но мы имеем возможность перемещать антенны и менять расстояние между ними, меняя тем самым параметр  $u$ . Это позволяет измерять и другие Фурье компоненты. После того, как

функция  $G_{12}(u)$  измерена, с помощью обратного преобразования Фурье находится и интересующая нас функция углового распределения радиоизлучения  $s(a)$ .

## ПРИЛОЖЕНИЕ. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ВЕКТОРНО-МАТРИЧНОГО АНАЛИЗА

**Векторное представление сигналов.** Предположим, что сигнал представлен своими  $N$  значениями  $(x_1, x_2, \dots, x_N)$ . Например, это может быть смесь полезных сигналов, собственных шумов и внешних помех в приемных каналах  $N$ -элементной адаптивной АР. Тогда в векторной форме совокупность  $N$  сигналов можно представить в виде  $N$ -мерного вектора-столбца или вектора-строки

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \mathbf{K} \\ x_N \end{pmatrix} = (x_1, x_2, \mathbf{K}, x_N)^T, \quad (\text{П1})$$

где  $(\cdot)^T$  – обозначает операцию транспонирования, которая преобразует вектор-столбец  $\mathbf{X}$  в вектор-строку:  $\mathbf{X}^T$ .

Евклидова норма вектора является его длиной в  $N$ -мерном векторном пространстве и равна

$$\|\mathbf{X}\| = \left( \sum_{p=1}^N |x_p|^2 \right)^{1/2} = \sqrt{\mathbf{X}^H \mathbf{X}} \quad (\text{П2})$$

где  $(\cdot)^H$  – обозначает эрмитовое сопряжение, которое представляет собой одновременное транспонирование и комплексное сопряжение.

Скалярное произведение двух комплексных векторов  $\mathbf{X}^T = (x_1, x_2, \mathbf{K}, x_N)$  и  $\mathbf{Y}^T = (y_1, y_2, \mathbf{K}, y_N)$  одинаковой размерности определяется выражением  $\mathbf{X}^H \mathbf{Y} = \sum_{p=1}^N x_p^* y_p$ .

Оно удовлетворяет неравенству Коши-Шварца  $|\mathbf{X}^H \mathbf{Y}| \leq \|\mathbf{X}\| \cdot \|\mathbf{Y}\|$ . Векторы  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$  ортогональны между собой, когда их скалярное произведение равно вектору с нулевыми компонентами:  $\mathbf{X}^H \mathbf{Y} = \mathbf{Y}^H \mathbf{X} = \mathbf{0}$ .

Векторы  $\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}, \dots, \mathbf{X}^{(N)}$  являются линейно независимыми, если их линейная комбинация дает нулевой вектор только при всех нулевых коэффициентах, то есть

$$a_1 \mathbf{X}^{(1)} + a_2 \mathbf{X}^{(2)} + \mathbf{K} + a_N \mathbf{X}^{(N)} = \mathbf{0} \quad \text{if} \quad a_1 = 0, a_2 = 0, \mathbf{K}, a_N = 0 \quad (\text{П3})$$

Если в (П3) хотя бы один из коэффициентов  $a_p$  отличен от нуля, то  $\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}, \dots, \mathbf{X}^{(N)}$  – линейно зависимые векторы. Пусть, например,  $a_1 \neq 0$ , тогда первый вектор  $\mathbf{X}^{(1)}$  выражается через остальные векторы  $\mathbf{X}^{(2)}, \dots, \mathbf{X}^{(N)}$ . В самом деле, нетрудно видеть, что  $\mathbf{X}^{(1)} = -a_2 a_1^{-1} \mathbf{X}^{(2)} - a_3 a_1^{-1} \mathbf{X}^{(3)} - \mathbf{K} - a_N a_1^{-1} \mathbf{X}^{(N)}$ .



Если набор из  $N$  векторов  $\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}, \dots, \mathbf{X}^{(N)}$  является линейно независимыми, то любой другой вектор  $\mathbf{X}$  можно представить в виде их линейной комбинации

$$\mathbf{X} = \sum_{p=1}^N a_p \mathbf{X}_p \quad (\text{П4})$$

Это означает, что векторы  $\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}, \dots, \mathbf{X}^{(N)}$  формируют базис в векторном пространстве, а число  $N$  называется размерностью пространства. Очевидно, что данный базис не является единственным.

**Основные операции с матрицами.** Рассмотрим прямоугольную матрицу  $\mathbf{A}=\{a_{ij}\}$  с элементами  $a_{ij}$ , которая состоит из  $N$  строк и из  $M$  столбцов. Если  $N=M$ , то матрица  $\mathbf{A}$  становится квадратной.

Матрица  $\mathbf{A}$  называется симметричной, если она не изменяется при транспонировании ( $\mathbf{A}^T=\mathbf{A}$ ), и эрмитово сопряженной она остается постоянной при эрмитовом сопряжении ( $\mathbf{A}^H=\mathbf{A}$ ). Основные свойства этих операций являются одинаковыми, поэтому приведем их на примере эрмитового сопряжения:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^H = \mathbf{A}^H + \mathbf{B}^H, \quad (\mathbf{A}^H)^H = \mathbf{A}, \quad (\mathbf{AB})^H = \mathbf{B}^H \mathbf{A}^H \quad (\text{П5})$$

Матрицу  $\mathbf{A}$  часто представляют в виде набора  $M$  векторов-столбцов  $\mathbf{A}_j$  размерности  $N$  каждый или из  $N$  векторов-строк  $\mathbf{B}_i$  размерности  $M$ :

$$\mathbf{A} = (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_M) = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1^H \\ \mathbf{B}_2^H \\ \mathbf{K} \\ \mathbf{B}_N^H \end{pmatrix}. \quad (\text{П6})$$

Важным параметром матрицы  $\mathbf{A}$  является ее ранг, который определяется как число линейно независимых столбцов или строк в (П6). Основные свойства ранга следующие:

$$\text{rank}\{\mathbf{A}\} = \text{rank}\{\mathbf{AA}^H\} = \text{rank}\{\mathbf{A}^H \mathbf{A}\}, \quad \text{rank}\{\mathbf{A}\} \leq \min\{N, M\}, \quad \text{rank}\{\mathbf{AB}\} \leq \text{rank}\{\mathbf{A(B)}\} \quad (\text{П7})$$

Если  $\text{rank}\{\mathbf{A}\} = \min\{N, M\}$ , то матрица  $\mathbf{A}$  называется матрицей полного ранга.

Для квадратной матрицы  $\mathbf{A}$  полного ранга ( $\text{rank}\{\mathbf{A}\} = N = M$ ) существует обратная матрица  $\mathbf{A}^{-1}$  такая, что  $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}_N$ , где  $\mathbf{I}_N$  – единичная (тождественная) матрица размерности  $N \times N$  с элементами  $a_{ij}=1$  ( $i=j$ ) и  $a_{ij}=0$  ( $i \neq j$ ). Квадратная матрица  $\mathbf{A}$  неполного ранга ( $\text{rank}\{\mathbf{A}\} < N$ ), называется сингулярной матрицей и не имеет обратной матрицы  $\mathbf{A}^{-1}$ .

Некоторые свойства обращения матриц:  $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ ,  $(\mathbf{A}^H)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^H$ . В теории ААР часто используется следующая лемма об обращении матриц. Предположим, что  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ ,

$\mathbf{C}$  и  $\mathbf{D}$  – матрицы размерности  $(N \times N)$ ,  $(N \times M)$ ,  $(M \times M)$  и  $(M \times N)$ , соответственно. Пусть также  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{C}$  – не сингулярные матрицы. Тогда

$$(\mathbf{A} + \mathbf{BCD})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{C}^{-1} + \mathbf{DA}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{DA}^{-1} \quad (\text{П8})$$

В случае, когда  $M=1$ , матрица  $\mathbf{C}$  вырождается в скаляр ( $\mathbf{C}=c$ ), а матрицы  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{D}$  – в вектор-столбец  $\mathbf{B}_1$  и в вектор-строку  $\mathbf{D}_1^H$ , соответственно ( $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1$ ;  $\mathbf{D} = \mathbf{D}_1^H$ ). Полагая  $c=1$ , получим тождество Вудбури (Woodbury):

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}_1\mathbf{D}_1^H)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}_1\mathbf{D}_1^H\mathbf{A}^{-1}}{1 + \mathbf{D}_1^H\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}_1}. \quad (\text{П9})$$

В другом случае, когда матрицы  $\mathbf{B}=\mathbf{I}$  и  $\mathbf{D}=\mathbf{I}$ , из (П8) имеем, что

$$(\mathbf{A} + \mathbf{C})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{C}^{-1} + \mathbf{A}^{-1})^{-1}\mathbf{A}^{-1}. \quad (\text{П10})$$

Определителем квадратной матрицы  $\mathbf{A}$  размерности  $N \times N$ , называется величина равная

$$\det \mathbf{A} = \sum_{k=1}^N (-1)^{i+k} a_{ik} \det \mathbf{A}_{ik} \quad (\text{П11})$$

где  $\mathbf{A}_{ij}$  – матрица меньшей размерности  $(N-1) \times (N-1)$ , формируемая из матрицы  $\mathbf{A}$  путем исключения в ней  $i$ -ой строки и  $j$ -го столбца. Если определитель квадратной матрицы  $\mathbf{A}$  не равен нулю ( $\det \mathbf{A} \neq 0$ ), то  $\mathbf{A}$  – обратимая (не сингулярная) матрица.

Основные свойства определителей:

$$\begin{aligned} \det\{\mathbf{AB}\} &= \det \mathbf{A} \times \det \mathbf{B}; & \det\{a\mathbf{A}\} &= a^N \det \mathbf{A}; \\ \det \mathbf{A}^{-1} &= (\det \mathbf{A})^{-1}; & \det \mathbf{A}^T &= \det \mathbf{A}. \end{aligned} \quad (\text{П12})$$

Для любой матрицы  $\mathbf{A}$

$$\det \begin{pmatrix} a & \mathbf{X}_1^H \\ \mathbf{Y} & \mathbf{A} \end{pmatrix} = \det \mathbf{A} \times (\mathbf{X}_1^H \mathbf{A}^{-1} \mathbf{Y}) \quad (\text{П13})$$

В теории ААР часто используется след матрицы  $\mathbf{A}$  равный сумме диагональных элементов  $Sp\{\mathbf{A}\} = (a_{11} + a_{22} + \dots + a_{NN})$ . След обладает следующими свойствами:

$$Sp\{\mathbf{A} + \mathbf{B}\} = Sp\{\mathbf{A}\} + Sp\{\mathbf{B}\}; \quad Sp\{\mathbf{ABC}\} = Sp\{\mathbf{BCA}\} = Sp\{\mathbf{CAB}\}. \quad (\text{П14})$$

**Линейные уравнения.** Во многих практических приложениях, в частности, при нахождении весового вектора ААР, необходимо решить систему линейных уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \mathbf{K} + a_{1M}x_M = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \mathbf{K} + a_{2M}x_M = b_2 \\ \mathbf{K} \\ a_{N1}x_1 + a_{N2}x_2 + \mathbf{K} + a_{NM}x_M = b_N \end{cases} \quad (\text{П15})$$

Обычно используют матричную форму записи (13)

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B} \quad (\text{П16})$$

где  $\mathbf{A}=\{a_{ij}\}$  – прямоугольная матрица размерности  $(N \times M)$ ,  $\mathbf{B}$  – вектор- столбец, состоящий из  $N$  элементов.

Имеются три основных варианта системы (15), отличающихся видом матрицы  $\mathbf{A}$ .

**а)**  $\mathbf{A}$  – квадратная матрица  $(M=N)$ . Решение системы (15) зависит от того, сингулярная или не сингулярная матрица  $\mathbf{A}$ . Если  $\mathbf{A}$  – не сингулярная матрица, то обратная матрица  $\mathbf{A}^{-1}$  существует и решение системы (П12) имеет вид

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \quad (\text{П17})$$

При сингулярной матрице  $\mathbf{A}$  обратная матрица  $\mathbf{A}^{-1}$  не существует и система (П15) либо не имеет решения, либо имеет множество решений.

**б)**  $\mathbf{A}$  – прямоугольная матрица с числом столбцов меньшим числа строк  $(M < N)$ . При этом в системе (П15) число уравнений больше числа неизвестных. Такая система называется *переопределенной*. Если  $\mathbf{A}$  – матрица полного ранга  $\text{rank}\{\mathbf{A}\} = M$ , то матрица  $\mathbf{A}^H\mathbf{A}$  является не сингулярной и для решения системы уравнений (П12) используется *метод наименьших квадратов*. Данный метод основан на минимизации квадрата нормы  $\|\mathbf{E}\|^2 = \|\mathbf{B} - \mathbf{A}\mathbf{X}\|^2$  вектора ошибки  $\mathbf{E}$  (часто его называют вектором «невязки») между левой и правой частью в (П13). В результате последовательных преобразований получим, что

$$\begin{aligned} \|\mathbf{E}\|^2 &= (\mathbf{B} - \mathbf{A}\mathbf{X})^H (\mathbf{B} - \mathbf{A}\mathbf{X}) = \mathbf{B}^H\mathbf{B} - \mathbf{X}^H\mathbf{A}^H\mathbf{B} - \mathbf{B}^H\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{X}^H\mathbf{A}^H\mathbf{A}\mathbf{X} = \\ &= [\mathbf{X} - (\mathbf{A}^H\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^H\mathbf{B}]^H (\mathbf{A}^H\mathbf{A})^{-1} [\mathbf{X} - (\mathbf{A}^H\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^H\mathbf{B}] + [\mathbf{B}^H\mathbf{B} - \mathbf{B}^H\mathbf{A}(\mathbf{A}^H\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^H\mathbf{B}] \end{aligned} \quad (\text{П18})$$

Второе слагаемое в (П16) не зависит от неизвестного вектора  $\mathbf{X}$ . Поэтому минимум квадрата нормы вектора ошибки  $\mathbf{E}$  достигается при векторе  $\mathbf{X}$  равном

$$\mathbf{X} = (\mathbf{A}^H\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^H\mathbf{B}. \quad (\text{П19})$$

Матрица  $\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^H\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^H$  - называется псевдо-обратной матрицей к матрице  $\mathbf{A}$ .

Наилучшая аппроксимация (оценка) вектора  $\mathbf{B}$  при использовании метода наименьших квадратов имеет вид

$$\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H \mathbf{B} = \mathbf{P}_A \mathbf{B}. \quad (\text{П20})$$

Здесь  $\mathbf{P}_A = \mathbf{A}(\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H$  - так называемая проекционная матрица, которая играет важную роль в теории адаптивной пространственной обработки сигналов. Основные свойства матрицы  $\mathbf{P}_A$  следующие. Матрица-проектор не изменяется при возведении ее в квадрат, то есть  $(\mathbf{P}_A)^2 = \mathbf{P}_A$ . Если некоторый вектор  $\mathbf{C}$  принадлежит векторному подпространству, образованному векторами-столбцами  $\mathbf{A}_q$  ( $q=1,2,\dots,M$ ) матрицы  $\mathbf{A}$  в (6), то  $\mathbf{P}_A \mathbf{C} = \mathbf{C}$ . В противоположном случае  $\mathbf{P}_A \mathbf{C} = \mathbf{0}$ . Другими словами, проекционная матрица  $\mathbf{P}_A$  проецирует любой вектор на подпространство векторов  $\mathbf{A}_q$  матрицы  $\mathbf{A}$ .

Минимальное значение квадрата нормы вектора ошибки  $\mathbf{E}$  можно найти подставляя (П19) в (П18). В результате получим, что

$$\|\mathbf{E}\|_{\min}^2 = \|\mathbf{B} - \mathbf{A}\mathbf{X}\|^2 = \|(\mathbf{I} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H) \mathbf{B}\|^2 = \|(\mathbf{I} - \mathbf{P}_A) \mathbf{B}\|^2 = \|\mathbf{P}_A^\perp \mathbf{B}\|^2 = \mathbf{B}^H \mathbf{P}_A^\perp \mathbf{B} \quad (\text{П21})$$

где  $\mathbf{P}_A^\perp = \mathbf{I} - \mathbf{P}_A$  - матрица-проектор на подпространство, ортогональное подпространству, образованному векторами-столбцами  $\mathbf{A}_q$  ( $q=1,2,\dots,M$ ) матрицы  $\mathbf{A}$  в (П6). В (П19) учтено также, что  $(\mathbf{P}_A^\perp)^2 = \mathbf{P}_A^\perp$ .

Заметим, что решение по методу наименьших квадратов можно получить, умножая уравнение (П16) слева на матрицу  $\mathbf{A}^H$ . В результате получим, что  $\mathbf{A}^H \mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{A}^H \mathbf{B}$ . Отсюда следует формула (П19).

с)  $\mathbf{A}$  – прямоугольная матрица, в которой число столбцов больше числа строк ( $M > N$ ). В этом случае число уравнений меньше, чем неизвестных. Такая система называется *недоопределённой* и имеет множество решений.

**Квадратичная и эрмитова формы.** Квадратичная форма реальной симметричной или комплексной эрмитовой матрицы  $\mathbf{A}$  соответственно равна  $Q(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X}$  и  $Q(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^H \mathbf{A} \mathbf{X}$ . Симметричная или эрмитова матрица  $\mathbf{A}$  положительно определенной, если любого вектора  $\mathbf{X}$  величина  $Q(\mathbf{X}) > 0$ .

**Собственные значения и собственные векторы.** Рассмотрим характеристическое уравнение квадратной матрицы  $\mathbf{A}$  размерности ( $N \times N$ ):  $\mathbf{A}\mathbf{U} = I\mathbf{U}$ , где  $\mathbf{U}$  – некоторый вектор. Это уравнение эквивалентно системе однородных линейных уравнений  $(\mathbf{A} - I\mathbf{I})\mathbf{U} = \mathbf{0}$ . Поэтому матрица  $(\mathbf{A} - I\mathbf{I})$  является сингулярной. Следовательно, ее определитель равен нулю:  $p(I) = \det(\mathbf{A} - I\mathbf{I}) = 0$ . Многочлен  $p(I)$  называется характеристическим и имеет  $N$  корней  $I_i$  – собственных чисел матрицы  $\mathbf{A}$ .

Для каждого  $I_i$  матрица  $(\mathbf{A} - I_i \mathbf{I})$  является сингулярной и, поэтому, имеется как минимум один ненулевой собственный вектор  $\mathbf{U}_i$ , который удовлетворяет уравнению  $\mathbf{A}\mathbf{U}_i = I_i \mathbf{U}_i$ .

Векторы  $\mathbf{U}_i$  ( $i=1,2,\dots,N$ ) можно нормировать так, что их норма  $\|\mathbf{U}_i\|=1$ . Приведем пять свойств для собственных чисел и векторов.

1. Собственные векторы  $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \dots, \mathbf{U}_N$ , соответствующие разным собственным числам линейно независимы.

2. Если  $\text{rank}\{\mathbf{A}\} = m$ , то имеется  $(N-m)$  независимых решений однородного уравнения  $\mathbf{A}\mathbf{U}=\mathbf{0}$ , которые формируют нулевое подпространство (ядро) матрицы  $\mathbf{A}$ .

3. Собственные числа эрмитовой матрицы – действительные числа. В самом деле, из характеристического уравнения имеем, что  $\mathbf{U}_i^H \mathbf{A} \mathbf{U}_i = I_i \mathbf{U}_i^H \mathbf{U}_i$ . Применяя эрмитовое сопряжение получим, что  $\mathbf{U}_i^H \mathbf{A}^H \mathbf{U}_i = I_i^* \mathbf{U}_i^H \mathbf{U}_i$ . Так как  $\mathbf{A}^H = \mathbf{A}$ , то из сравнения этих уравнений, будем иметь, что  $I_i = I_i^*$ , то есть  $I_i$  – действительное число.

4. Эрмитова матрица положительно определена, если и только, если ее собственные числа положительны. Определитель матрицы равен произведению ее собственных чисел  $\det \mathbf{A} = I_1 I_2 \dots I_N$ . Поэтому матрица  $\mathbf{A}$  является обратимой (не сингулярной), если и только, если все собственные числа отличны от нуля.

5. Собственные векторы эрмитовой матрицы, соответствующие несовпадающим собственным числам  $I_i \neq I_j$ , ортогональны между собой ( $\mathbf{U}_i^H \mathbf{U}_j = \mathbf{0}$ ). В самом деле, умножим первое уравнение  $\mathbf{A} \mathbf{U}_i = I_i \mathbf{U}_i$  на вектор  $\mathbf{U}_j^H$ , а второе уравнение  $\mathbf{A} \mathbf{U}_j = I_j \mathbf{U}_j$  - на вектор  $\mathbf{U}_i^H$ . Затем возьмем эрмитовое сопряжение от второго уравнения и учтем, что  $\mathbf{A}^H = \mathbf{A}$  и  $I_j = I_j^*$ . Получим, что  $\mathbf{U}_j^H \mathbf{A} \mathbf{U}_i = I_j \mathbf{U}_j^H \mathbf{U}_i$ . Теперь вычтем это уравнение из первого уравнения. Будем иметь, что  $\mathbf{0} = (I_i - I_j) \mathbf{U}_j^H \mathbf{U}_i$ . Однако  $I_i \neq I_j$ , поэтому  $\mathbf{U}_j^H \mathbf{U}_i = \mathbf{0}$ , что и требовалось доказать. Отметим, что данное свойство ортогональности векторов можно обобщить на случай совпадающих собственных чисел.

**Разложение квадратной матрицы по собственным векторам.** Матрицу  $\mathbf{A}$  можно представить в виде  $\mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}^{-1}$ . В самом деле, набор собственных уравнений  $\mathbf{A} \mathbf{U}_i = I_i \mathbf{U}_i$  ( $i=1,2,\dots,N$ ) можно записать одним уравнением  $\mathbf{A} \mathbf{U} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda}$ , где не сингулярная матрица  $\mathbf{U}$  состоит из собственных векторов  $\mathbf{U} = (\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \dots, \mathbf{U}_N)$ , а диагональная матрица  $\mathbf{\Lambda}$  - из собственных чисел векторов  $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}\{I_1, I_2, \dots, I_N\}$ . Умножая справа это уравнение на обратную матрицу  $\mathbf{U}^{-1}$ , получим требуемое уравнение  $\mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}^{-1}$ .

Учтем далее, что для эрмитовой матрицы в силу ортогональности собственных векторов  $\mathbf{U}^H \mathbf{U} = \mathbf{I}_N$ , то есть матрица  $\mathbf{U}$  является унитарной ( $\mathbf{U}^H = \mathbf{U}^{-1}$ ). Поэтому

разложение квадратной матрицы по собственным векторам можно записать двумя эквивалентными выражениями:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^H, \quad \mathbf{A} = \sum_{i=1}^N I_i \mathbf{U}_i \mathbf{U}_i^H. \quad (\text{П22})$$

Используя свойство унитарности матрицы  $\mathbf{A}$  нетрудно найти обратную матрицу через разложение собственным векторам. Имеем, что

$$\mathbf{A} = (\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^H)^{-1} = (\mathbf{U}^H)^{-1} \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{U}^H \quad (\text{П23})$$

или

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{I_i} \mathbf{U}_i \mathbf{U}_i^H \quad (\text{П24})$$

Отсюда следует важное свойство, которое заключается в том, что обращение эрмитовой матрицы не изменяет собственных векторов, а только трансформирует ее собственные числа ( $I_i \rightarrow 1/I_i$ ).

Во многих приложениях теории ААР матрицы могут быть плохо обусловленными, что приводит к неустойчивости при их обращении. Поэтому для стабилизации обращения такой матрицы к ее диагональным элементам добавляют постоянную величину  $a$ , то есть вместо матрицы  $\mathbf{B}$  обращают матрицу  $\mathbf{A} = \mathbf{B} + a\mathbf{I}_N$ . Такая операция не изменяет собственные векторы, однако смещает собственные числа. В самом деле,  $\mathbf{A}\mathbf{U}_i = \mathbf{B}\mathbf{U}_i + a\mathbf{U}_i = (I_i + a)\mathbf{U}_i$ , где  $I_i$  и  $\mathbf{U}_i$  – собственные числа и векторы матрицы  $\mathbf{B}$ .

След матрицы  $\mathbf{A}$  и обратной матрицы  $\mathbf{A}^{-1}$  можно выразить через собственные числа следующим образом:

$$Sp\{\mathbf{A}\} = \sum_{i=1}^N I_i, \quad Sp\{\mathbf{A}^{-1}\} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{I_i} \quad (\text{П25})$$

Часто необходимо иметь простую оценку верхней границы для максимального собственного числа  $I_{max}$ . Из (П22) имеем, что  $I_{max} \leq Sp\{\mathbf{A}\}$ .

**Сингулярное разложение (singular value decomposition - SVD) прямоугольной матрицы.** Прямоугольную матрицу  $\mathbf{A}$  размерности  $(N \times M)$  можно представить в виде  $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^H$ . В этом разложении  $\mathbf{L} = \text{diag}\{I_1, I_2, \dots, I_K\}$  – диагональная матрица ненулевых собственных чисел  $I_i$  матрицы  $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$  или матрицы  $\mathbf{H}^H\mathbf{H}$ ,  $(M \wedge K)$ -размерная матрица  $\mathbf{U} = (\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \dots, \mathbf{U}_K)$  состоит из собственных векторов матрицы  $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$ , а матрица

$\mathbf{V} = (\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \dots, \mathbf{V}_K)$ , имеющая размерность  $(N \times K)$ , составлена из собственных векторов матрицы  $\mathbf{H}^H \mathbf{H}$ .

Векторы  $\mathbf{U}_i$  и  $\mathbf{V}_i$  образуют ортонормированные векторные системы и связаны между собой следующими соотношениями [31]:  $\mathbf{U}_i = I_i^{-1/2} \mathbf{H} \mathbf{V}_i$  и  $\mathbf{V}_i = I_i^{-1/2} \mathbf{H}^H \mathbf{U}_i$ . Отметим, что ненулевые собственные числа матриц  $\mathbf{H} \mathbf{H}^H$  и  $\mathbf{H}^H \mathbf{H}$  совпадают между собой. Однако матрица  $\mathbf{H} \mathbf{H}^H$  имеет размерность  $N \times N$ , а размерность матрицы  $\mathbf{H}^H \mathbf{H}$  равна  $M \times M$ . Поэтому в случае  $M > N$  удобнее использовать матрицу  $\mathbf{H} \mathbf{H}^H$ , и, наоборот, при  $M < N$  более простой является матрица  $\mathbf{H}^H \mathbf{H}$ . Поэтому, можно записать, что

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^N I_i \mathbf{U}_i \mathbf{V}_i^H \quad (N < M), \quad \mathbf{A} = \sum_{i=1}^M I_i \mathbf{U}_i \mathbf{V}_i^H \quad (N > M). \quad (\text{П26})$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Марков Г.Т., Сазонов Д.М. Антенны. М.: Энергия, 1975. 528 с.
2. Журавлев А. К., Лукошкин А. П., Поддубный С. С. Обработка сигналов в адаптивных антенных решетках. Л.: Изд-во Лен. универ., 1983. 240 с.
3. Караваев В.В., Сазонов В.В. Статистическая теория пассивной локации. М.: Радио и связь, 1987. 240 с.
4. Ширман Я. Д., Манжос В.Н. Теория и техника обработки радиолокационной информации на фоне помех. М.: Радио и связь, 1981. 416 с.
5. Монзинго Р.А., Миллер Т.У. Адаптивные антенные решетки: Введение в теорию. Пер. с англ. М.: Радио и связь, 1986. 448 с.
6. Уидроу Б., Стирнз С. Адаптивная обработка сигналов. Пер. с англ. М.: Радио и связь, 1989. 440 с.
7. Куликов Е.И., Трифонов А.П. Оценка параметров сигналов на фоне помех. М.: Сов. радио, 1978. 296 с.
8. Пистолькорс А.А., Литвинов О.С. Введение в теорию адаптивных антенн. М.: Наука, 1991. 200 с.
9. Турчин В.И. Введение в современную теорию оценки параметров сигналов. Н.Новгород: ИПФ РАН, 2005.-116с.
10. Кейпон Дж. Пространственно-временной спектральный анализ с высоким разрешением // ТИИЭР. 1969. Т. 57, № 8. С. 59-69.
11. Джонсон Д. Х. Применение методов спектрального оценивания к задачам определения угловых координат источников излучения // ТИИЭР. 1982. Т. 70, № 9. С. 126-138.
12. Тихонов А.И., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 288 с.
13. Цейтлин Н.М. Применение методов радиоастрономии в антенной технике. М.: Советское радио, 1966. 216 с.
14. Ermolaev V.T., Gershman A.B. Fast Algorithm for Minimum-Norm Direction-of-Arrival Estimation / IEEE Trans. Signal Processing, 1994. V. 42, No. 9. P. 2389-2394.
15. Черемисин О.П. Эффективность адаптивного алгоритма с регуляризацией выборочной корреляционной матрицы // Радиотехника и электроника. 1982. Т. 27, № 10. С. 1933-1941.



16. Черемисин О.П. О выборе параметра для регуляризованного метода адаптивной оптимизации фильтров // Радиотехника и электроника. 1985. Т. 30, № 12. С. 2369-2377.
17. Абрамович Ю.И. Регуляризованный метод адаптивной оптимизации фильтров по критерию максимума отношения сигнал/помеха // Радиотехника и электроника. 1981. Т. 26, № 3. С. 543-551.
18. Wax M., Kailath T. Detection of signal by information theoretic criteria // IEEE Trans. Acoustic, Speech, and Signal Processing. 1985. V. ASSP-33, No. 4. P. 387-392.
19. Wax M., Ziskind I. Detection of the number of coherent signal by the MDL principle // IEEE Trans. Acoustic, Speech, and Signal Processing. 1989. V. ASSP-37, No. 10. P. 1190-1196.
20. Lee H., Li F. An eigenvector technique for detecting the number of emitters in a Cluster // IEEE Trans. Signal Processing. 1994. V. 42, No. 9. P. 2380-2388.
21. Akaike H. A new look at the Statistical Model Identification // IEEE Trans. Autom. Control. 1974. V. AC-19, No. 6. P. 716-723.
22. Bienvenu G., Kopp L. Optimality of high resolution array processing using the eigensystem approach // IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing. 1983. V. ASSP-31, No. 5. P. 1235-1248.
23. Stoica P., Nehorai A. MUSIC, maximum likelihood, and Cramer-Rao bound // IEEE Trans. Acoust., Speech., Signal Processing. 1989. V. ASSP-37, No. 5. P. 720-741.
24. Гершман А.Б. Ермолаев В.Т. Анализ собственных чисел корреляционной матрицы входных колебаний адаптивной антенной решетки и возможности углового сверхразрешения в условиях коррелированных внешних источников // Изв. Вузов. Радиофизика. 1988. Т. 31, № 10. С. 1236-1240.
25. Гершман А.Б. Ермолаев В.Т. Исследование проекционного метода углового разрешения на основе анализа собственных чисел корреляционной матрицы // Препринт № 272. НИРФИ. Горький. 1989. 30 с.
26. Ермолаев В.Т., Флакман А.Г., Анулин А.А. Оценивание параметров сигналов, принимаемых антенной решеткой // Изв. Вузов. Радиофизика. 1996. Т.39, № 9. С. 1144-1160.
27. Гершман А.Б., Ермолаев В.Т., Флакман А.Г. Адаптивное разрешение некоррелированных источников по угловой координате // Изв. Вузов. Радиофизика. 1988, Т.31, № 8. С. 941-946.
28. Гершман А.Б., Ермолаев В.Т., Флакман А.Г. Анализ сверхразрешения некоррелированных источников излучения в адаптивных антенных решетках // Изв. Вузов. Радиофизика. 1988, Т.31, № 11. С. 1374-1379.

29. Гершман А.Б., Ермолаев В.Т., Флакман А.Г. Повышение разрешающей способности обобщенного алгоритма пеленгации Кейпона // Электромагнитные волны и электронные системы. 1997. Т. 2, № 4. С. 16-19.
30. Леховицкий Д.И., Флексер П.М., Атаманский Д.В., Кириллов И.Г. Статистический анализ сверхразрешающих методов пеленгации источников шумовых излучений в АР при конечном объеме обучающей выборки // Сб. Антенны. 2000. Вып. 2 (45). С. 23-39.
31. Воеводин В.В. Линейная алгебра. М.: Наука, 1980. 400 с.
32. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. - М.: Радио и связь, 1989. 656 с.
33. Ермолаев В.Т, Флакман А.Г. Коррекция систематической ошибки измерения диаграммы направленности антенны, возникающей за счет угловой протяженности Солнца. Изв. Вузов. Радиофизика. 1975. Т. 18, № 3. С. 410-417.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Введение</b>	3
<b>Глава 1. Антенная решетка</b>	7
1.1. Прием гармонического сигнала с плоским волновым фронтом	7
1.2. Прием узкополосного сигнала	12
1.3. Диаграмма направленности антенной решетки	17
1.4. Выходное отношение мощности сигнала к средней мощности шума	23
<b>Глава 2. Определение параметров дискретных источников     сигналов с помощью антенной решетки</b>	27
2.1. Метод максимального правдоподобия	27
2.2. Метод Кейпона	43
2.3. Обобщение метода Кейпона	57
2.4. Проекционный метод углового разрешения источников сигналов	64
2.5. Метод углового разрешения коррелированных источников	74
<b>Глава 3. Определение параметров протяженных источников сигналов     с помощью антенной решетки</b>	78
3.1. Измерение углового распределения мощности протяженного источника	78
3.2. Измерение диаграммы направленности по радиоизлучению Солнца	82
3.3. Применение радиоинтерферометров для измерения распределения интенсивности радиоизлучения протяженных источников	84
<b>Приложение</b>	86
<b>Литература</b>	94

## СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ СОКРАЩЕНИЙ

АР	антенная решетка;
ААР	адаптивная антенная решетка
ДН	диаграмма направленности
ДОС	диаграммообразующая схема
МП	максимально правдоподобный
КМ	корреляционная матрица
ОСШ	отношение средней мощности сигнала к средней мощности помехи
СКО	среднеквадратическая ошибка
AIC	Akaike information criterion
EDT	eigenvector detection technique
MDL	minimum description length
MUSIC	Multi-Signal Classification
SVD	singular value decomposition