# Конспекты к экзамену по дифференциальным уравнениям

May 31, 2016

## Contents

# 1 Вопросы по дифференциальным уравнениям

1. Основные понятия:
   - Дифференциальные уравнения
   - Решение дифференциального уравнения
   - Общее решение
   - Общий интеграл
   - Геометрическая интерпретация
   - Задача Коши
   - Изоклины
2. Теорема существования и единственности для скалярного уравнения (формулировка. Пример неединственности
3. Задача о распаде радиоактивного вещества
4. Уравнение с разделяющимися переменными. Однородное уравнение
5. Линейное дифференциальное уравнение первого порядка
6. Уравнение Бернулли
7. Уравнение Риккати
8. Уравнение в полных дифференциалах
9. Необходимый и достаточный признак уравнения в полных дифференциалах
10. Интегрирующий множитель
11. Система дифференциальных уравнений
12. Комплексные решения. Теорема сущестования и единственности для систем (формулировка)
13. Теорема существования и единственности для уравнения $n$-го порядка и для линейных систем дифференциальных уравнений
14. Функция $e^x$ и её свойства
15. Линейное дифференциальное уравнение $n$-го порядка. Свойства многочленов от $p$.
16. Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения $n$-го порядка с постоянными коэффициентами (случай простых корней)
17. Необходимый и достаточный признак $k$-кратного корня многочлена
18. Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения $n$-го порядка с постоянными коэффициентами (случай кратных корней)

19. Выделение вещественных корней. Математический маятник
20. Устойчивые многочлены. Оценка решений уравнений с устойчивым характеристическим многочленом
21. Устойчивость многочленов 1-го и 2-го порядков. Необходимый и достаточный критерий устойчивости вещественного многочлена
22. Критерий Рауса-Гурвица. Устойчивость многочлена третьего порядка
23. Линейное неоднородное дифференциальное уравнение $n$-го порядка. Структура общего решения. Квазиполином. Структура общего решения с правой частью в виде квазиполинома
24. Частные решения уравнения со специальной правой частью
25. Метод комплексных амплитуд
26. Линейное дифференциальное уравнение $n$-го порядка с переменными коэффициентами. Линейное однородное уравнение и его свойства. Линейная зависимость функций
27. Вронскиан и его применение для определения линейной зависимости решений линейных дифференциальных уравнений
28. Фундаментальная система решений и её свойства
29. Восстановление линейного дифференциального уравнения по его фундаментальной системе. Формула Остроградского-Лиувилля
30. Понижение порядка дифференциального уравнения
31. Метод вариации произвольных постоянных
32. Двухточечная краевая задача и её преобразования
33. Построение функции Грина и вывод её свойств
34. Необходимое и достаточное условие существования функции Грина. Задача о собственных значениях краевой задачи
35. $\varepsilon$-решения. Существование $\varepsilon$-решений. Ломаные Эйлера
36. Теорема Пеано. Теорема единственности решения

# 2 Системы линейных дифференциальных уравнений

## 2.1 Def. (Линейная система дифференциальных уравнений)

Система

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) & = a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + \ldots + a_{1n}(t)x_n(t) + b_1(t) \\ \dot{x}_2(t) & = a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) + \ldots + a_{2n}(t)x_n(t) + b_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) & = a_{n1}(t)x_1(t) + a_{n2}(t)x_2(t) + \ldots + a_{nn}(t)x_n(t) + b_n(t) \end{cases}$$

Здесь:
$a_{ij} : (q_1, q_2) \mapsto \mathbb{R}, \quad i, j = \overline{1, n}$,
$b_i \in \mathbb{R} \quad i = \overline{1, n}$ — заданные коэффициенты, а
$x_i : (q_1, q_2) \mapsto \mathbb{R}, \quad i = \overline{1, n}$ — искомые функции,
называется **линейной системой дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами**.

### 2.1.1 В векторном виде:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t)$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \quad & : (q_1, q_2) \quad \mapsto \mathbb{R}^n \\ \mathbf{b} \quad & : (q_1, q_2) \quad \mapsto \mathbb{R}^n \\ A \quad & : (q_1, q_2) \quad \mapsto \mathbb{R}^{n \times n} \end{aligned}$$

### 2.1.2 Nota bene:

Далее это уравнение будем записывать в виде

$$\dot{x} = Ax + b$$

, подразумевая тождественное равенство функций на некотором промежутке

## 2.2 Def. (ЛНСДУ)

Линейная система называется неоднородной, если $\sum_j |b_j| \neq 0$ (где 0 — функция, тождественно равная нулю)

## 2.3 Def. (ЛОСДУ)

Линейная система называется однородной, если $\sum_j |b_j| \equiv 0$

## 2.4 Def. (Решение ЛСДУ)

Решение линейной системы дифференциальных уравнений $\dot{x} = Ax+b$ называется векторная функция $\phi : (q_1, q_1) \mapsto \mathbb{R}^n$, определённая на некотором интервале $(q_1, q_2)$, обращающая уравнение в тождество на этом интервале.

## 2.5 Def. (Общее решение)

Общим решением системы называется семейство функций $\phi_{c_1,c_2,\ldots,c_n}$, зависящих от параметров $c_1, c_2, \ldots, c_n$, такое что $\forall c_1, \ldots, c_n \quad \phi_{c_1\ldots c_n}$ является решением, и $\forall$ решения $\phi$ $\exists c_1, \ldots, c_n : \quad \phi = \phi_{c_1\ldots c_n}$.

## 2.6 Def. (Задача Коши для ЛСДУ)

Найти решение системы $\dot{x} = Ax+b$, удовлетворяющее *начальным условиям*

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0^0 & x_1^0 & \cdots & x_n^0 \end{pmatrix}^{\mathtt{T}}$$

## 2.7 Th. (Формулировка теоремы существования и единственности)

Если $A$ и $b$ непрерывны на $(q_1, q_2)$,

то $\forall t_0 \in (q_1, q_2) \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n$

задача Коши

$$\begin{cases} \dot{x} & = Ax + b \\ x(t_0) & = x_0 \end{cases}$$

имеет единственное решение, определённое на $(q_1, q_2)$.

## 2.8 Формула Лиувилля

### 2.8.1 Def. (След матрицы)

Выражение $\mathrm{Tr}A = \sum_{j=1}^{n} a_{jj}$ называется **следом матрицы**. (Tr for *trace*)
Альтернативная нотация: $\mathrm{Sp}A$ (ger. *Spur*).

### 2.8.2 Th. (Формула Лиувилля)

Для определителя вронского $\mathbb{W}$ системы решений ЛОДУ (1) справедлива **формула Лиувилля**:

$$\mathbb{W} = \mathbb{W}(t_0)\exp(\int_{t_0}^{t} \mathrm{Tr}A(s)\mathrm{d}s)$$

*Proof.* Найдём $\dot{\mathbb{W}}$:

$$\dot{\mathbb{W}} = \begin{vmatrix} \dot\phi_{11} & \cdots & \dot\phi_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{n1} & \cdots & \phi_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} \phi_{11} & \cdots & \phi_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dot\phi_{n1} & \cdots & \dot\phi_{nn} \end{vmatrix}$$

Заметим:

$$\dot{x}_j = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, \quad j = \overline{1,n}$$

$$\cdots$$

$$\phi_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\phi_{jk}$$

Следовательно:

$$\dot{\mathbb{W}} = \begin{vmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\phi_{j1} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\phi_{jn} \\ \phi_{21} & \cdots & \phi_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{n1} & \cdots & \phi_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} \phi_{11} & \cdots & \phi_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{n-1,1} & \cdots & \phi_{n-1,n} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}\phi_{j1} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{nj}\phi_{jn} \end{vmatrix}$$

Теперь в первом определителе

1. Прибавим к первой строке вторую, домноженную на $-a_{12}$
2. Прибавим к первой строке третью, домноженную на $-a_{13}$
3. $\cdots$

n. Прибавим к первой строке $n$-й строку, домноженную на $-a_{1n}$

Аналогично поступим с остальными определителями. В результате останется:

$$\dot{\mathbb{W}} = \begin{vmatrix} a_{11}\phi_{11} & \cdots & a_{11}\phi_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{n1} & \cdots & \phi_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} \phi_{11} & \cdots & \phi_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nn}\phi_{n1} & \cdots & a_{nn}\phi_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} \phi_{11} & \cdots & \phi_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{n1} & \cdots & \phi_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + a_{nn}\begin{vmatrix} \phi_{11} & \cdots & \phi_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{n1} & \cdots & \phi_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{jj}\mathbb{W}$$

Это скалярное линейное Д.У. первого порядка, его решение имеет вид:

$$\mathbb{W}(t) = \mathbb{W}(t_0)\exp(\int_{t_0}^{t} \mathrm{Tr}A(s)\mathrm{d}s)$$

□

## 2.9 Матричное дифференциальное уравнение

Наряду с векторными уравнениями $\dot{x} = Ax$ рассмотрим матричные уравнения:

$$\begin{aligned} &\dot{X} = AX \\ &X : (q_1, q_2) \mapsto \mathbb{R}^{n\times n} \\ &A : (q_1, q_2) \mapsto \mathbb{R}^{n\times n} \end{aligned}$$

## 2.10 Связь между векторными и матричными Д.У.

Пусть дано матричное уравнение

$$\dot{X} = AX$$

Матрицу $X$ запишем в виде $X = (X_1, \dots, X_n)$, где $X_j$ — $j$-й столбец матрицы $X$. Матричное уравнение теперь можно записать в виде:

$$(\dot{X}_1, \dots, \dot{X}_n) = (AX_1, \dots, AX_n)$$

Тогда матричная функция будет являться решением данного матричного уравнения тогда и только тогда, когда её векторы-столбцы будут являться решениями векторного Д.У.

## 2.11 Фундаментальная матрица

### 2.11.1 Def. (Фундаментальная матрица)

Матричная функция Φ называется фундаментальной матрицей ЛОДУ $\dot{x} = Ax$, если её векторы-столбцы образуют ФСР этого уравнения

Очевидно, что для того чтобы Φ являлась фундаментальной матрицей, чтобы она была решением соответствующего матричного уравнения и была невырождена $\forall t \in (q_1, q_2)$

*Proof.* Необходимость:

Пусть Φ фундаментальная, тогда её векторы столбцы образуют ФСР, а значит они являются решениями и составленный из них определитель есть определитель Вронского, который не обращается в нуль, т.е. матрица невырожденна.

Достаточность:

Пусть Φ невырождена, а её столбцы являются решениями. Тогда её столбцы составляют систему из $n$ линейно-независимых решений и образуют ФСР. □

### 2.11.2 Свойства фундаментальной матрицы

Если $\Phi$ — фундаментальная, а $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ невырожденная числовая матрица, То:

$$\Psi = \Phi C$$

также является фундаментальной матрицей этого уравнения

*Proof.* Требуется показать, что $\Psi$ является решением и невырождена:

$$\det \Phi C = \det \Phi \det C \neq 0$$
$$\dot{\Psi} = \dot{\Phi} C = A \Phi C = A \Psi$$

□