Algorithme Forward-Backward sur les chaînes de Markov cachées : Rescaling

Pour les chaînes de Markov longues, un problème peut apparaître en pratique dans le codage du forward-backward.

On Rappelle:

Probabilités forward:

- $\alpha_1(x_1) = p(x_1)p(y_1|x_1)$
- $\alpha_{n+1}(x_{n+1}) = \left[\sum_{x_n} \alpha_n(x_n)p(x_{n+1}|x_n)\right]p(y_{n+1}|x_{n+1})$

Probabilités backward:

- $\beta_N(x_N) = 1$
- $\beta_n(x_n) = \sum_{x_{n+1}} \beta_{n+1}(x_{n+1})p(x_{n+1}|x_n)\, p(y_{n+1}|x_{n+1})$

Algorithme Forward-Backward sur les chaînes de Markov cachées : Rescaling

Or $\forall n \; \beta_n(x_n) \leq 1 \; et \; \alpha_n(x_n) \leq 1$ (Ils sont assimilables à des probabilité).

Ainsi le calcul récursif des forwards et backwards implique (entre autre) un produit de N termes inférieur à 1.

Quand N est grand, les forwards et backwards vont prendre des valeurs extrêmement petites. Ces valeurs peuvent être assimilées à 0 par un ordinateur.

Algorithme Forward-Backward sur les chaînes de Markov cachées : Rescaling

Dans la suite nous allons présenter un moyen de modifier les formules des forwards et backwards pour s'affranchir de ce problème, **tout en ne changeant aucune des autres formules utilisant les résultats du forward-backward**.

Algorithme Forward-Backward sur les chaînes de Markov cachées : Rescaling

Probabilités forward normalisées:

- $\alpha_1(x_1) = p(x_1)p(y_1|x_1)$
  - Rescaling: $\alpha'_1(x_1) = \frac{\alpha_1(x_1)}{\sum_{x_1} \alpha_1(x_1)}$
- $\forall n, \alpha''_{n+1}(x_{n+1}) = \left[\sum_{x_n} \alpha'_n(x_n)p(x_{n+1}|x_n)\right]p(y_{n+1}|x_{n+1})$
  - Et enfin $\forall n, \alpha'_{n+1} = \frac{\alpha''_{n+1}(x_{n+1})}{\sum_{x_{n+1}} \alpha''_{n+1}(x_{n+1})}$

Au final, $A_n = \frac{1}{\sum_{x_n} \alpha''_n(x_n)}$ ne dépend pas de x_n, et donc $\alpha'_n(x_n) = A_0 \dots A_n \alpha_n(x_n)$

Algorithme Forward-Backward sur les chaînes de Markov cachées : Rescaling

Probabilités backward:

- $\beta_N(x_N) = 1$
  - Rescaling: $\beta'_N(x_N) = \frac{\beta_N(x_N)}{\sum_{x_N} \beta_N(x_N)}$
- $\forall n,\ \beta''_n(x_n) = \sum_{x_{n+1}} \beta'_n(x_n) p(x_{n+1}|x_n)\, p(y_{n+1}|x_{n+1})$
  - Et enfin $\forall n,\ \beta'_n(x_n) = \frac{\beta''_n(x_n)}{\sum_{x_n} \beta''_n(x_n)}$

Au final, $B_n = \frac{1}{\sum_{x_n} \beta''_n(x_n)}$ ne dépend pas de x_n, et donc $\beta'_n(x_n) = B_n \dots B_N \beta_n(x_n)$

Algorithme Forward-Backward sur les chaînes de Markov cachées : Rescaling

On a alors:

- $\frac{\alpha'_n(x_n)\beta'_n(x_n)}{\sum_{x_n}\alpha'_n(x_n)\beta'_n(x_n)} = \frac{A_0 \ldots A_n \alpha_n(x_n) B_n \ldots B_N \beta_n(x_n)}{A_0 \ldots A_n B_n \ldots B_N \sum_{x_n}\alpha_n(x_n)\beta_n(x_n)} = \frac{\alpha_n(x_n)\beta_n(x_n)}{\sum_{x_n}\alpha_n(x_n)\beta_n(x_n)} = p(x_n \mid y, \theta^k)$

- $\frac{\alpha'_n(x_n)p(x_{n+1}|x_n)p(y_{n+1}|x_{n+1})\beta'_{n+1}(x_{n+1})}{\sum_{x_{n+1},x_n}\alpha'_n(x_n)p(x_{n+1}|x_n)p(y_{n+1}|x_{n+1})\beta'_{n+1}(x_{n+1})} = \frac{A_0 \ldots A_n \alpha_n(x_n)p(x_{n+1}|x_n)p(y_{n+1}|x_{n+1})B_{n+1} \ldots B_N \beta_{n+1}(x_{n+1})}{A_0 \ldots A_n B_{n+1} \ldots B_N \sum_{x_{n+1},x_n}\alpha_n(x_n)p(x_{n+1}|x_n)p(y_{n+1}|x_{n+1})\beta_{n+1}(x_{n+1})} =$ $\frac{\alpha_n(x_n)p(x_{n+1}|x_n)p(y_{n+1}|x_{n+1})\beta_{n+1}(x_{n+1})}{\sum_{x_{n+1},x_n}\alpha_n(x_n)p(x_{n+1}|x_n)p(y_{n+1}|x_{n+1})\beta_{n+1}(x_{n+1})} = p(x_n, x_{n+1} | y, \theta^k)$