TD réseau de neurones

Gaston LENCZNER, Javiera CASTILLO NAVARRO,
Guillaume VAUDAUX RUTH, Adrien CHAN-HON-TONG

Notations et rappels :

- on note ^{T} la transposition matricielle
- $relu(x) = \max(x, 0) = [x]_+$ (par composante pour les vecteurs)
- les vecteurs colonnes dans $\mathbb{R}^J$ sont considérés comme des matrices $J \times 1$, et, $\forall (A, B) \in \mathbb{R}^{I\times J} \times \mathbb{R}^{J\times K}$ 2 matrices, AB est leur produit dans $\mathbb{R}^{I\times K}$
- un multi layer perceptron de profondeur P est une fonction qui peut s'écrire $W_P relu(W_{P-1} relu(...(W_2 relu(W_1 x + b_1) + b_2)...) + b_{P-1}) + b_P$ avec W_p des matrices et b_p des vecteurs
- **apprendre par coeur une base d'apprentissage $x_1, y_1, ..., x_N, y_N$ avec un modèle f c'est trouver w tel que $\forall n,\ y_n f(x_n, w) > 0$ - en particulier seul le signe compte !**

Partie 1 réseau préappris

Q1 On considère la fonction $f(x) = f((x_1 \ \ x_2)^T) = x_2 - relu(x_1 - x_2)$

Q1.1 : déterminez les zones où f est positive vs négative.

- déjà relu est toujours positif, donc si $x_2 < 0$, f est forcément négative
- maintenant même si $x_2 > 0$, f pourrait être négative en fonction de $x_1 - x_2$:
- soit $x_1 < 2x_2$ et $f(x) > 0$
- soit $x_1 > 2x_2$, et $f(x) < 0$

Q1.2 : écrivez cette fonction comme un réseau de neurones.

aide : $x = relu(x) - relu(-x)$ et si $x = (x_1 \ \ x_2)^T$ alors $x_1 = (1 \ \ 0)x$

$$f(x) = (1 \quad -1 \quad -1) relu\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x\right)$$

Q2 même questions avec $g((x_1 \ \ x_2)^T) = x_2 + relu(x_1 - x_2)$ et $h((x_1 \ \ x_2)^T) = x_1 + relu(x_2 - x_1)$, que remarquez vous ?

Si $x_1 > x_2$, $g(x) = x_1$ et si $x_1 < x_2$, $g(x) = x_2$ donc $g(x) = \max(x_1, x_2)$, donc $g(x) < 0 \Leftrightarrow x_1 < 0$ et $x_2 < 0$.

$$g(x) = (1 \quad -1 \quad 1) relu\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x\right)$$

$g = h$ alors qu'ils s'écrivent différemment - c'est une *symétrique* cachée.

Notez au passage qu'on peut construire le max de 2 neurones avec des relu, il faudra vous en rappeler pour le cours suivant, pour relativiser les nouveautés *introduites dans les CNN !*

Partie 2 réseau à déterminer (chercher des poids triviaux)

1 neurone

Q3.1 : Montrez qu'il est possible d'apprendre par coeur la base de données $((1 \;\; 1)^T, 1)$, $((-1 \;\; -1)^T, -1)$ avec 1 neurones sans biais (et sans activation puisque les activations concernent les couches cachées).

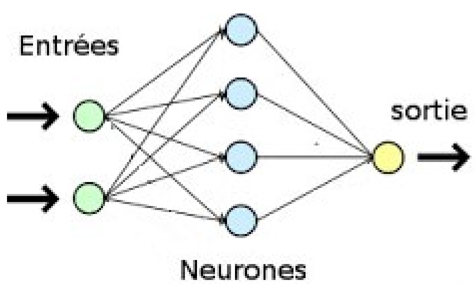
$f(x) = (1 \;\; 1)x$ car $(1 \;\; 1)(1 \;\; 1)^T = 2 > 0$ et $(1 \;\; 1)(-1 \;\; -1)^T = -2 < 0$

Q3.2 : Est-il possible d'apprendre par coeur la base de données $((0 \;\; 1)^T, 1)$, $((0 \;\; -1)^T, 1)$, $((1 \;\; 0)^T, -1)$, $((-1 \;\; 0)^T, -1)$ avec 1 neurones sans biais ?

Non : notons $w = (\alpha, \beta)$, alors $w(1,0)^T < 0$ et $w(-1,0)^T < 0$ implique $\alpha < 0$ et $-\alpha < 0$!

2 couches de neurones

Q4.1 : Montrez qu'il possible d'apprendre par coeur la base de données $((0 \;\; 1)^T, 1)$, $((0 \;\; -1)^T, 1)$, $((1 \;\; 0)^T, -1)$, $((-1 \;\; 0)^T, -1)$ avec le réseau ci dessous (sans biais et avec activation relu).



$f(x) = relu((0 \;\; 1)x) + relu((0 \;\; -1)x) - relu((1 \;\; 0)x) - relu((-1 \;\; 0)x)$ car :

$\Rightarrow relu((0 \;\; 1)(0 \;\; 1)^T) + relu((0 \;\; -1)(0 \;\; 1)^T) - relu((1 \;\; 0)(0 \;\; 1)^T) - relu((-1 \;\; 0)(0 \;\; 1)^T) = relu(1) + relu(-1) - 0 - 0 = 1 > 0$

$\Rightarrow relu((0 \;\; 1)(0 \;\; -1)^T) + relu((0 \;\; -1)(0 \;\; -1)^T) - relu((1 \;\; 0)(0 \;\; -1)^T) - relu((-1 \;\; 0)(0 \;\; -1)^T) = relu(-1) + relu(1) - 0 - 0 = 1 > 0$

$\Rightarrow relu((0 \;\; 1)(1 \;\; 0)^T) + relu((0 \;\; -1)(1 \;\; 0)^T) - relu((1 \;\; 0)(1 \;\; 0)^T) - relu((-1 \;\; 0)(1 \;\; 0)^T) = 0 + 0 - relu(1) - relu(-1) = -1 < 0$

$\Rightarrow relu((0 \;\; 1)(-1 \;\; 0)^T) + relu((0 \;\; -1)(-1 \;\; 0)^T) - relu((1 \;\; 0)(-1 \;\; 0)^T) - relu((-1 \;\; 0)(-1 \;\; 0)^T) = 0 + 0 - relu(-1) - relu(1) = -1 < 0$

Q4.2 : estimez les zones $f(x) > 0$ et $f(x) < 0$.

l'espace est partitionné en 4 par les 4 diagonales ($\pm x_1 \pm x_2 = 0$)

Q4.3 : Est-il possible d'apprendre avec le même réseau (mais d'autres poids) la base $((0\ \ 2)^T, 1)$, $((0\ \ -2)^T, 1)$, $((2\ \ 0)^T, 1)$, $((-2\ \ 0)^T, 1)$, $((0\ \ 0)^T, -1)$?

pas de biais implique $f((0\ \ 0)^T) = 0$, il est impossible d'avoir $f((0\ \ 0)^T) < 0$

2 couches de neurones avec biais

Q5 : Considérons encore même la base de données $((0\ \ 2)^T, 1)$, $((0\ \ -2)^T, 1)$, $((2\ \ 0)^T, 1)$, $((-2\ \ 0)^T, 1)$, $((0\ \ 0)^T, -1)$, ainsi que les 2 réseaux

— $\psi(x) = [(0\ \ 1)x]_+ + [(0\ \ -1)x]_+ + [(1\ \ 0)x]_+ + [(-1\ \ 0).x]_+ - 1$

— $\phi(x) = 2relu((-1\ \ 1)x - 1) + 2relu((1\ \ -1)x - 1) - 1$

Q5.1 : Montrez qu'ils apprennent la base par coeur.

faire comme en Q4.1 - tester chaque point

Q5.2 : Donnez la structure de chaque réseau.

réseau à 2 couches dans les 2 cas, 4 puis 1 neurones pour le premier, 2 puis 1 neurones pour le second.

Q5.3 : Dessinez les zones positives et négatives.

la frontière forme un losange pour le premier réseau mais 2 droites parallèles formant un bandeau *diagonal* pour le second.

Pour votre culture : *cette base est intéressant car il est possible de l'apprendre asymétriquement avec un réseau de 3 neurones. Mais pour obtenir une solution symétrique et bornée, il faut 5 neurones. Ainsi, dans cet exemple précis, plus de paramètres permet d'obtenir une solution plus élégante. Attention c'est plutôt faux en général !*