Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«УФИМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АВИАЦИОННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Общенаучный факультет

Кафедра математики

Направление 01.03.02 Прикладная математика и информатика

Квалификация: бакалавр прикладной математики и информатики

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ИЗ МОДЕЛЕЙ ТРЁХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Выпускная квалификационная работа

К защите допущен
Заведующий кафедрой
______________ Байков В.А.
(подпись)

«_____»____________ 2016 г.

Студент
______________ Абдулин И.Н.
(подпись)

Руководитель выпускной квалификационной работы
______________ Байков В.А.
(подпись)

Уфа 2016

«УТВЕРЖДАЮ»

Заведующий кафедрой

______________ Байков В.А.

«_____»____________ 2016 г.

ЗАДАНИЕ

на выполнение выпускной квалификационной работы

студенту Абдулину И.Н.

1. Тема выпускной квалификационной работы: **Точные решения одной из моделей трёхфазной фильтрации.**

Утверждена распоряжением декана от ____________ 2016 г. №_____

2. Срок сдачи студентом готовой работы ____________ 2016 г.

Содержание

Предисловие

В данной работе рассматриваются методы решения системы дифференциальных уравнений, описывающих процесс трехфазной фильтрации жидкостей в пористой среде, движение которых подчиняется ряду основополагающих допущений [1].

Важность аналитических решений данной задачи, даже при сильных ограничениях, проявляется в следующем

- быстрая интерпретация лабораторных экспериментов,
- анализ численных методов, когда аналитическое решение выступает в качестве образцового и т.д.

Особенностью построенной модели является строгая гиперболичность системы. В середине прошлого столетия С.К. Годуновым [2] была доказана теорема, которая утверждает, что в таких системах при линейной аппроксимации производных, имеется возможность достичь только первый порядок точности. Таким образом, главные задачи данной работы – это поиск и использование аналитических методов построения решения, а также сведение исходных уравнений к более простым.

Классическим методом упрощения строго гиперболических систем является построение инвариантов Римана данной системы [5]. Записывание системы в инвариантах Римана позволяет применять численный метод, предложенный Яненко[5]. В работе рассматривается один случай, который позволяет применить теорию инвариантов Римана и впоследствии построить точное решение системы.

Рассматриваемая система является системой гидродинамического типа, исследование которой осуществляли Е. В. Ферапонтов, С. П. Царев [4] и др. Как правило, исследования проводились для систем более общего вида (произвольная размерность, не диагонализируемость и т.д.), результаты которых весьма общие и сразу не приводят к решению.

Система, полученная для построения данной математической модели возникает и в других задачах, таких как уравнения хромотографии [4] (исследования проводились такими же методами [3], результаты которых можно рассматривать как частные случаи), вытеснения нефти горячей водой [3].

Центральное место этой работы занимает применение метода каскадного интегрирования Лапласа для линейного гиперболического уравнения второго порядка. Последние 20 лет метод стремительно развивается А.В. Жибером и другими уфимскими учеными. Сам аппарат точного интегрирования описан в учебном пособии [12]. В данной работе будет показано, как с помощью преобразования годографа [3] задачу можно свести к интегрированию линейного гиперболического уравнения, которое можно разрешить с помощью вышеописанного метода.

Изучение данной системы проводились в работах [1], [7]. Результаты были получены в рамках автомодельных решений. Главным результатом этих работ является построение численных решений и исследование в них разрывов. В данной работе основное внимание уделяется построению решений, которые не могут быть получены в рамках автомодельности и её обобщении.

В первой части работы кратко описываются основные уравнения теории фильтрации, классическая терминология, подробное описание ограничений модели, приведение уравнений к удобному для анализа виду.

Во второй главе приводится описания стратегий решения одной системы специального вида, частным случаем которой является наша модель.

В третьей главе рассматриваются некоторые частные случаи, для которых возможно построение аналитических решений.

В работе используется система компьютерной алгебры Maple 18, в приложение приведена программа, в которой реализован метод каскадного интегрирования строго гиперболических систем.

1. Постановка задачи

1.1 Основные уравнения фильтрации жидкости и газа

В данном параграфе проведем обзор классических уравнений теории фильтрации [6]. Рассматриваем представление пористой среды, как сплошную среду, для каждой точки которого физические характеристики можно определить как непрерывные функции от времени и пространственных переменных. Значения физических величин в данной точке характеризуются значениями некоторого элементарного объема, который содержит эту точку и является достаточно большим по сравнению с размером пор и достаточно малым по сравнению с размером пласта.

Для начала введем термины, которые будут фигурировать в данной главе и в работе в целом.

Пористость m – отношение объема пор в породе ко всему объему породы.

Проницаемость K - способность пород пласта пропускать к забоям скважин флюиды.

Абсолютная проницаемость k характеризует только физические свойства породы.

Фазовой (эффективной) проницаемостью k_l называется проницаемость породы по отношению к данному флюиду при движении в порах многофазных систем.

Относительная фазовая проницаемость (ОФП) k_{rl} – отношение фазовой проницаемости к абсолютной проницаемости.

Насыщенность s определяется как часть порового пространства, которую занимает данная фаза.

Капиллярное давление – разность давлений на границе между фазами.

Рассматривая фильтрацию однородной жидкости, в предельном случае можем записать уравнение неразрывности в дифференциальной форме

$$-\mathrm{div}(\rho u) = \frac{\partial}{\partial t}(m\rho) + \tilde{q}, \qquad (1.1.1)$$

где

$\tilde{q}$ — массовая интенсивность внешнего источника или стока,
ρ — плотность жидкости,
u — скорость фильтрации жидкости,
m — пористость.

Закон Дарси выражает линейную зависимость скорости фильтрации u от градиента давления ∇p. Для однородной жидкости

$$u = -\frac{k}{\mu}(\nabla p - \rho g \nabla z) \quad (1.1.2)$$

k — тензор абсолютной проницаемости пористой среды,
p — давление,
μ — вязкость жидкости,
g — ускорение свободного падения,
z — вертикальная координата, предполагается направленной вниз.

Обычно, при решениях практических задач, предполагается, что направление главных осей тензора проницаемости совпадает с направлением осей координат. В этом случае тензор проницаемости является диагональным.

Для случая многофазной многокомпонентной фильтрации уравнение (1.1.1) для j-ой компоненты можно записать в следующем виде [6]

$$-\sum_{l=1}^{n_l} \operatorname{div}(\rho_l c_{lj} u_l) = \frac{\partial}{\partial t}\left(m \sum_{l=1}^{n_l} s_l c_{lj} \rho_l\right) + \sum_{l=1}^{n_l} \tilde{q}_l \alpha_{lj} \;, j = 1\,..\,n_c, \quad (1.1.1)^*$$

где n_l — число фаз, n_c — число компонент,
c_{lj} — массовая концетрация j — го компонента в l — й фазе,
s_l — насыщенность l — й фазой (доля порового пространства элементарного объема, занятой этой фазой)
$\tilde{q}_l$ — интенсивность источника l — й фазы,
α_{lj} — массовая доля компонента j в l — й фазе
ρ_l — плотность l — й фазы.

Для случая многофазной многокомпонентной фильтрации уравнение (1.1.2) для l-ой фазы можно записать в следующем виде [6]

$$u_l = -\frac{k_l}{\mu_l}(\nabla p_l - \rho_l g \nabla z), \quad l = 1\,..\,n_l, \quad (1.1.2)^*$$

где k_l — фазовая проницаемость, определяется выражением $k_l = kk_{rl}$, где k – абсолютная проницаемость, является векторной скалярной величиной. Было экспериментально доказано, что при многофазной фильтрации данный закон Дарси в широких пределах является справедливым.

Подставляя уравнение $(1.1.2)^*$ в $(1.1.1)^*$ получаем

$$\sum_{l=1}^{n_l} \operatorname{div}\left(\rho_l c_{lj} \frac{kk_{rl}}{\mu_l} (\nabla p_l - \rho_l g \nabla z)\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(m \sum_{l=1}^{n_l} s_l c_{lj} \rho_l\right) + \sum_{l=1}^{n_l} \tilde{q}_l \alpha_{lj},$$

$$j = 1 \,..\, n_c. \qquad (1.1.3)$$

В данном уравнении плотности и вязкости фаз являются известными функциями давления и компонентного состава $\rho_l = \rho_l(p_l, c_{lj})$, $\mu_l = \mu_l(p_l, c_{lj})$. Относительные фазовые проницаемости тоже являются известными функциями насыщенности $k_{rl} = k_{rl}(s_1, \dots, s_{n_l})$.

Значения $\tilde{q}_l$ и α_{lj} определяются в соответствии с граничными условиями. Следует определить следующие неизвестные функции:

I. массовые концентрации компонентов в каждой из фаз c_{lj}, $j = 1 \,..\, n_c, l = 1 \,..\, n_l$;

II. давления в каждой из фаз $p_l, l = 1 \,..\, n_l$;

III. насыщенности $s_l, l = 1 \,..\, n_l$.

Получили $n_l n_c + 2n_l$ неизвестных, поэтому следует ввести дополнительные соотношения для решения задачи:

1. Гипотеза о существовании в каждой точке пористой среды локального термодинамического равновесия, $(n_l - 1)\, n_c$ соотношений

$$\frac{c_{lj}}{c_{mj}} = K_{jlm}(T, p, c_{ij}), l, m, i = 1, \dots, n_l, j = 1 \,..\, n_c.$$

Здесь K_{jlm} - константы фазового равновесия, которые вычисляются по законам термодинамики в зависимости от состава фаз, давления и температуры.

2. Разность давлений на границу между фазами определяется действием капиллярных сил, $n_l - 1$ соотношений

$p_l - p_m = p_{lm}(s_i), l, m, i = 1, \dots, n_l.$

Капиллярное давление $p_{lm}(s_i)$ определяется экспериментально, является известной функцией насыщенностей.

3. Условие заполнения флюидами всего порового пространства

$$\sum_{l=1}^{n_l} s_l = 1.$$

4. Сумма концентраций всех компонент в каждой фазе также равна единице, n_l соотношений

$$\sum_{i=1}^{n_c} c_{lj} = 1, j = 1 \dots n_l.$$

Таким образом, получаем $n_с + (n_l - 1)\, n_с + n_l - 1 + 1 + n_l = n_l n_с + 2n_l$ соотношений, задача корректно поставлена.

1.2 Обобщенная модель Баклея-Леверетта

Данная модель является обобщением модели двухфазной фильтрации трех несмешивающихся жидкостей в пористой среде [3].

Рассмотрим уравнение (1.1.3) при условии того, что фазы не смешиваются.

Пусть индексы $j = 1,2,3$ относятся к водному, газовому и нефтяному компонентам, а индексы $\mathrm{l} = \mathrm{w}, \mathrm{g}, \mathrm{o}$ определяют водную, газовую и нефтяную фазы. Тогда $c_{w1} = 1$, $c_{g2} = 1$, $c_{o3} = 1$, $c_{lj} = 0$ при других j и l.

Не учитывая гравитацию, в отсутствии источников и стоков и капиллярные силы между фазами малы, при постоянной плотности фаз, уравнения (1.1.3) записывается в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\left(\varphi \frac{S_w}{B_w}\right) - div\left(\frac{KK_{rw}}{\mu_w B_w} grad(p)\right) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\varphi \frac{S_g}{B_g}\right) - div\left(\frac{KK_{rg}}{\mu_g B_g} grad(p)\right) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\varphi \frac{S_o}{B_o}\right) - div\left(\frac{KK_{ro}}{\mu_o B_o} grad(p)\right) = 0, \end{cases} \tag{1.2.1}$$

где

$$\mathrm{p} = \mathrm{p}(\mathrm{t}, \mathrm{x}),\ \mathrm{S_g} = \mathrm{S_g}(\mathrm{t}, \mathrm{x}),\ \mathrm{S_w} = \mathrm{S_w}(\mathrm{t}, \mathrm{x}),\ \mathrm{S_o} = \mathrm{S_o}(\mathrm{t}, \mathrm{x}) -$$

искомые функции.

Условие того, что флюиды заполняют все порово пространство:

$$S_w + S_o + S_g = 1.$$

Далее используем допущение Стоуна [1], относительные проницаемости для воды и газа зависят только от насыщенности водой и газом соответственно, относительная проницаемость для нефти – от обеих насыщенностей:

$$\mathrm{K_{rw}} = \mathrm{K_{rw}}(\mathrm{S_w}),\ \mathrm{K_{ro}} = \mathrm{K_{ro}}(\mathrm{S_w}, \mathrm{S_g}),\ \mathrm{K_{rg}} = \mathrm{K_{rg}}(\mathrm{S_g}).$$

Данное утверждение было получено согласно экспериментальным данным.

А также введем следующие допущения:

1. Расчеты проводим при условии изотермической фильтрации, т.е. вязкости полагаются постоянными [6].

2. Без учета массообмена, объемные коэффициенты считаем постоянными в силу, без учета сжимаемости породы:

$$\varphi, K, B_o, B_w, B_g, \mu_o, \mu_w, \mu_g \equiv const,$$
$$\varphi, K, B_o, B_w, B_g, \mu_o, \mu_w, \mu_g \neq 0.$$

И наконец, будем рассматривать задачу (1.2.1) в одномерном случае.

Сделаем замену переменных

$$K^1(u) = \frac{KK_{rw}(u)}{\mu_w}, K^2(v) = \frac{KK_{rg}(v)}{\mu_g}, K^3(u,v) = \frac{KK_{ro}(u,v)}{\mu_o},$$
$$u = \varphi S_w, v = \varphi S_g,\ w = \varphi S_o.$$

Теперь, если из последнего уравнения системы (1.2.1) первые два, то она будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} &u_t - (K^1(u)p_x)_x = 0,\\ &v_t - (K^2(v)p_x)_x = 0,\\ &(1-u_t - v_t)_t - (K^3(u,v)p_x)_x = 0. \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

Сложим все уравнения в системе (1.2.2) и выразим p_x

$$((K^1(u) + K^2(v) + K^3(u,v))p_x)_x = 0,$$
$$(K^1(u) + K^2(v) + K^3(u,v))p_x = f(t),$$
$$p_x = \frac{f(t)}{K^1(u) + K^2(v) + K^3(u,v)} = f(t)F(u,v).$$

Подставим найденное выражение в систему (1.2.2)

$$\begin{aligned} &u_t - (K^1(u)f(t)F(u,v))_x = 0,\\ &v_t - (K^2(v)f(t)F(u,v))_x = 0. \end{aligned} \tag{1.2.3}$$

Замена переменных

$$S_t^1 = \tau_t^{'} S_\tau^1, \tau_t^{'} = f(t), \tau = \int f(t)dt,$$
$$G^1 = K^1(u)F(u,v), G^2 = K^2(v)F(u,v),$$

сводит систему уравнений (1.2.3) к системе

$$\begin{aligned} &S_\tau^1 - G_{s^1}^1(u,v)(u(t,x))_x - G_{s^2}^1(u,v)(v(t,x))_x = 0,\\ &S_\tau^1 - G_{s^1}^2(u,v)(u(t,x))_x - G_{s^2}^2(u,v)(v(t,x))_x = 0. \end{aligned} \tag{1.2.4}$$

Рассмотрим матрицу системы (1.2.4)

$$A(u,v)=\begin{pmatrix} -G_u^1 & -G_v^1 \\ -G_u^2 & -G_v^2 \end{pmatrix},$$

где

$$F(u,v)=\frac{1}{K^1(u)+K^2(v)+K^3(u,v)}.$$

Тогда систему (1.2.4) можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\binom{u}{v}+A(u,v)\frac{\partial}{\partial x}\binom{u}{v}=0. \tag{1.2.5}$$

2. Решение гиперболической системы 2 уравнений вида $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{t}}+\mathbf{A}(\mathbf{u})\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}=\mathbf{0}$

2.1 Приведение к однородному диагональному виду, инварианты Римана

Преобразование к инвариантам Римана.

Здесь будем рассматривать систему общего вида

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + a_{11}(u,v)\dfrac{\partial u}{\partial x} + a_{12}(u,v)\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + a_{21}(u,v)\dfrac{\partial u}{\partial x} + a_{22}(u,v)\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0. \end{cases} \tag{2.1.1}$$

Данная система является гиперболической, если собственные числа матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

являются вещественными и левые собственные векторы образуют базис, т.е. являются линейно независимыми.

Для начала введем понятие инвариантов Римана [1]. Обозначим

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \bar{u}_1 = u, \bar{u}_2 = v.$$

Найдем собственные числа системы (2.1.1)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Запишем характеристическое уравнение матрицы

$$|A - \lambda E| = 0.$$

Корни характеристического уравнения

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(a_{11} + a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4\, a_{12}\, a_{21}}\right).$$

Левые собственные векторы с точностью до множителя определяются из уравнения $\gamma A = \gamma \lambda$, отсюда получаем

$$\gamma_{1,2} = \{\, b_{21} \quad \lambda_{1,2} - b_{11}\}.$$

Замечание 2.1.1: Обратим внимание, что при умножении всех элементов матрицы на одну и ту же величину, собственные числа также умножаются на ту же величину, а левые собственные векторы, вообще говоря, определяются с точностью до множителя. Это легко увидеть из выражений для собственных чисел и определения левого собственного вектора. Этими свойствами мы часто будем пользоваться в дальнейшем.

Возвращаясь к определению гиперболической системы, стоит отметить, что для гиперболичности достаточно выполнение условия

$$\sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4\, a_{12}\, a_{21}} > 0. \qquad (2.1.2)$$

Умножая на левый собственный вектор γ_1 систему (2.1.1), получим скалярное уравнение

$$\gamma_1 \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \gamma_1 A \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = 0 \text{ или } \gamma_1 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) = 0.$$

Проводя те же действия с γ_2получим

$$\gamma_i \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) = 0, i = 1,2. \qquad (2.1.3)$$

Данный вид носит название характеристической формы [5] записи уравнения (2.1.1).

Рассмотрим дифференциальные формы $\gamma_k d\bar{u} = \gamma_k^m d\bar{u}_m$.
Пусть каждая из этих форм имеет интегрирующий множитель $\mu_k\left(\bar{u}_{1,}\bar{u}_2\right)$, такой что $\mu_k \gamma_k^m d\bar{u}_m = \frac{\partial r_k}{\partial u_m} d\bar{u}_m$ (суммирование только по индексу m).
Тогда, умножая каждое уравнение (2.1.3) соответственно на μ_1, μ_2 получим

$$\frac{\partial r_i}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial r_i}{\partial x} = 0, i = 1,2. \qquad (2.1.4)$$

В случае, если удается найти интегрирующий множитель, то переменные r_1, r_2 называются **инвариантами Римана**, а (2.1.4) называется системой, записанной в инвариантах Римана.

Замечание 2.1.2: Если в λ_1 или λ_2 равны нулю, то можно разрешить одно уравнение системы (2.1.4) (для определенности, не ограничивая общности $\lambda_1 = 0$)
$r_1 = H(x),$ где $H(x)$ – произвольная функция.

Подставляя во второе уравнение системы

$$\frac{\partial r_2}{\partial t} + \lambda_2(H(x), r_2) \frac{\partial r_2}{\partial x} = 0.$$

Делим полученное уравнение на $\lambda_2(\mathrm{H(x)}, \mathrm{r}_2)$

$$\frac{\partial r_2}{\partial x} + \frac{1}{\lambda_2(H(x), r_2)} \frac{\partial r_2}{\partial t} = 0.$$

Решение полученного уравнения, как известно [11]

$$t = \int_{t_0}^{t} \frac{dt}{\lambda_2(H(t), r_2)} + W(r_2),$$

где $W(r_2)$ произвольная функция. Таким образом, для системы (2.1.1) задача приведения к инвариантам Римана в случае, если одно из собственных чисел матрицы системы равно нулю, эквивалентна нахождению решения этой системы.

2.2 Сведение к одному линейному гиперболическому уравнению второго порядка, каскад Лапласа.

Проведем линеаризацию системы (2.1.1) с помощью преобразования Годографа [1, с. 34]. Суть метода – поменять зависимые и независимые переменные местами.

Для этого продифференцируем искомые функции по новым переменным.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial u} = 1 = \dfrac{\partial u}{\partial t}\dfrac{\partial t}{\partial u} + \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial v} = 0 = \dfrac{\partial u}{\partial t}\dfrac{\partial t}{\partial v} + \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial u} = 0 = \dfrac{\partial v}{\partial t}\dfrac{\partial t}{\partial u} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u}, \\ \dfrac{\partial v}{\partial v} = 1 = \dfrac{\partial v}{\partial t}\dfrac{\partial t}{\partial v} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v}. \end{cases}$$

Данные системы линейных уравнений относительно $\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}, \frac{\partial u_1}{\partial x}\right), \left(\frac{\partial u_2}{\partial t}, \frac{\partial u_2}{\partial x}\right)$ имеют одинаковые определители J – якобиан преобразования годографа. Система имеет единственное решение, если

$J \neq 0$.

Решая их методом Крамера получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{J}\frac{\partial x}{\partial v}, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{J}\frac{\partial t}{\partial v},$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{J}\frac{\partial x}{\partial u}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{J}\frac{\partial t}{\partial u}.$$

Подставляя их уравнение (2.1.1), получаем

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial v} - a_{11}(u,v)\dfrac{\partial t}{\partial v} + a_{12}(u,v)\dfrac{\partial t}{\partial u} = 0, \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} + a_{21}(u,v)\dfrac{\partial t}{\partial u_2} - a_{22}(u,v)\dfrac{\partial t}{\partial u} = 0. \end{cases} \tag{2.2.1}$$

Рассмотрим систему (2.1.1) в плоскости годографа (2.1.5).

В некоторых случая проще рассматривать одно линейное гиперболическое уравнение.

Для удобства обозначим $u_1 = u$, $u_2 = v$, поднимем наверх индексы у коэффициентов $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial v} - a^{11}(u,v)\dfrac{\partial t}{\partial v} + a^{12}(u,v)\dfrac{\partial t}{\partial u} = 0, \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} + a^{21}(u,v)\dfrac{\partial t}{\partial v} - a^{22}(u,v)\dfrac{\partial t}{\partial u} = 0. \end{cases} \tag{2.2.2}$$

Выразим $\dfrac{\partial x}{\partial v}, \dfrac{\partial x}{\partial u}$ соответственно из первого и второго уравнения (2.2.1) и продифференцируем эти выражения по u и v соответственно

$$(a^{11}t_v - a^{12}t_u)_u = (a^{22}t_u - a^{21}t_v)_v.$$

Раскрывая скобки, приводя подобные члены и умножая, получаем

$$a^{12}t_{uu} + (a^{22} - a^{11})t_{uv} - a^{21}t_{vv} + (a^{12}_u + a^{22}_v)t_u - (a^{11}_u + a^{21}_v)t_v = 0. \quad (2.2.3)$$

Обозначим

$$A = a^{12}, B = a^{22} - a^{11}, C = -a^{21}, D = a^{12}_u + a^{22}_v, E = -(a^{11}_u + a^{21}_v),$$

тогда

$$At_{uu} + Bt_{uv} + Ct_{vv} + Dt_u + Et_v = 0. \quad (2.2.4)$$

Рассмотрим произвольную замену независимых переменных уравнения (2.2.4)

$$\begin{aligned} \xi &= \xi\big(u, v(u)\big), \\ \eta &= \eta\big(u, v(u)\big), \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

где $\xi\big(u, v(u)\big), \eta\big(u, v(u)\big) -$ дважды непрерывно дифференцируемые функции, причем якобиан

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \xi}{\partial u} & \dfrac{\partial \xi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial u} & \dfrac{\partial \eta}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда уравнение (3) перейдет в

$$\overline{A}t_{\xi\xi} + \overline{B}t_{\xi\eta} + \overline{C}t_{\eta\eta} + \overline{D}t_{\xi} + \overline{E}t_{\eta} = 0,$$

где

$$\begin{aligned} \overline{A} &= A\xi_u^2 + B\xi_u\xi_v + C\xi_u^2, \\ \overline{B} &= 2A\xi_u\eta_u + B(\xi_u\eta_v + \eta_u\xi_v) + 2C\xi_v\eta_v, \\ \overline{C} &= A\eta_u^2 + B\eta_u\eta_v + C\eta_u^2, \\ \overline{D} &= A\xi_{uu} + B\xi_{uv} + C\xi_{vv} + D\xi_u + E\xi_v, \\ \overline{E} &= A\eta_{uu} + B\eta_{uv} + C\eta_{vv} + D\eta_u + E\eta_v. \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

Линейное уравнение в частных производных второго порядка с двумя независимыми переменными, как правило, исследуют с помощью характеристик [12]:

$$Adu^2 - Bdudv + Cdv^2 = 0$$

или

$$\frac{dv}{du} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2C}. \tag{2.2.7}$$

Если характеристики вещественны и различны, то уравнение (2.2.7) является гиперболическим, которые характеризуются тем, что задача Коши, заданная вне характеристической области, однозначно разрешима.

Рассмотрим корень в выражении (2.2.7).

В силу гиперболичности (2.1.1), получаем:

$$\sqrt{B^2 - 4AC} = \sqrt{(a^{22} - a^{11})^2 + 4a^{21}a^{12}} > 0.$$

Утверждение 2.2.1: Таким образом, квазилинейное уравнение вида (2.1.1) в плоскости годографа сводится к линейному уравнению второго порядка гиперболического типа.

Как известно (например [12]), уравнение гиперболического типа (2.2.4) с помощью замены переменных можно привести к каноническому виду:

$$\overline{B}t_{uv} + \overline{D}t_u + \overline{E}t_v = 0.$$

Пусть уравнения (2.2.7)проинтегрированы

$$\mathrm{c}^1 = \varphi^1(\mathrm{u}, \mathrm{v}(\mathrm{u})),$$
$$\mathrm{c}^2 = \varphi^2(\mathrm{u}, \mathrm{v}(\mathrm{u})),$$

делая замену переменных

$$\xi = \varphi^1(u, v(u)),$$
$$\eta = \varphi^2(u, v(u)),$$

получаем уравнение

$$\overline{B}t_{\xi\eta} + \overline{D}t_\xi + \overline{E}t_\eta = 0, \tag{2.2.8}$$

или

$$t_{\xi\eta}+\bar{A}(\xi,\eta)t_{\xi}+\overline{B}(\xi,\eta)t_{\eta}=0, \bar{A}(\xi,\eta)=\frac{\overline{D}}{\overline{\overline{B}}}, \overline{B}(\xi,\eta)=\frac{\overline{E}}{\overline{\overline{B}}}, \qquad (\widetilde{2.2.8})$$

где $\overline{B},\overline{D},\overline{E}$ определяются по формулам (2.2.6).

Далее будем использовать результаты, описанные в [12] и применять их для уравнения $(\widetilde{2.2.8})$.

Для уравнений $(\widetilde{2.2.8})$можно рассмотреть величины, называемые инвариантами Лапласа:

$$\begin{aligned} h &= \bar{A}_{\xi}+\bar{A}\overline{B}, \\ k &= \overline{B}_{\eta}+\bar{A}\overline{B}. \end{aligned} \qquad (2.2.9)$$

Используя данные величины, уравнение $(\widetilde{2.2.8})$можно переписать в одной их эквивалентных формах:

$$\left(\frac{\partial}{\partial\xi}+\overline{B}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\eta}+\bar{A}\right)t-ht=0,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\eta}+\bar{A}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\xi}+\bar{B}\right)t-kt=0,$$

которые соответственно эквивалентны системам:

$$\left(\frac{\partial}{\partial\eta}+\bar{A}\right)t=t_1, \quad \left(\frac{\partial}{\partial\xi}+\bar{B}\right)t_1-ht=0\,, \qquad (2.2.10)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\xi}+\bar{B}\right)u=t_{-1}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial\eta}+\bar{A}\right)t_{-1}-kt=0. \qquad (2.2.11)$$

В случае, если $h\equiv 0$, то решение (2.2.10):

$$t=\exp\left\{-\int\bar{A}d\eta\right\}\left(X(\xi)+\int Y(\eta)\exp\left\{\int\bar{A}d\eta-\bar{B}d\xi\right\}d\eta\right), \qquad (2.2.12)$$

где $X(\xi),Y(\eta)-$ произвольные функции;

если $k\equiv 0$, то решение (2.2.11):

$$t=exp\left\{-\int\bar{B}d\xi\right\}\left(Y(\eta)+\int X(\xi)\,exp\left\{\int\bar{B}d\xi-\bar{A}d\eta\right\}d\xi\right), \qquad (2.2.13)$$

где $X(\xi),Y(\eta)-$ произвольные функции;

если $k \equiv 0, h \equiv 0$ то решение (2.2.11):

$$t = exp\left\{-\int(\bar{B}d\xi + \bar{A}d\eta)\right\}\left(X(\xi) + Y(\eta)\right), \tag{2.2.14}$$

где $X(\xi), Y(\eta) -$ произвольные функции.

Таким образом, если один из инвариантов Лапласа равен нулю, то решения выписываются сразу.

В случае если ни один из инвариантов h или k не равен нулю, то из (2.2.10) или (2.2.11) можно выразить t и подставляя выписать уравнение на t_1 или t_{-1}:

$$t = \frac{1}{h}\left(\frac{\partial}{\partial\xi} + \overline{B}\right)t_1, \tag{2.2.15}$$

$$t = \frac{1}{k}\left(\frac{\partial}{\partial\xi} + \overline{B}\right)t_{-1}, \tag{2.2.16}$$

$$\frac{\partial^2 t_1}{\partial\xi\partial\eta} + \bar{A}_1(\xi,\eta)\frac{\partial t_1}{\partial\xi} + \overline{B}_1(\xi,\eta)\frac{\partial t_1}{\partial\eta} + c_1(\xi,\eta)t_1 = 0, \tag{E$_1$}$$

$$\frac{\partial^2 t_{-1}}{\partial\xi\partial\eta} + \bar{A}_{-1}(\xi,\eta)\frac{\partial t_{-1}}{\partial\xi} + \overline{B}_{-1}(\xi,\eta)\frac{\partial t_{-1}}{\partial\eta} + c_{-1}(\xi,\eta)t_{-1} = 0, \tag{E$_{-1}$}$$

где

$$\bar{A}_1 = \bar{A} - (ln\, h)_\eta, \overline{B}_1 = \overline{B}, c_1 = a_1\overline{B}_1 + \overline{B}_\eta - h,$$
$$\bar{A}_{-1} = \bar{A}, \overline{B}_{-1} = \overline{B} - (ln\, k)_\xi, c_{-1} = \bar{A}_{-1}\overline{B}_{-1} + \bar{A}_\xi - k.$$

Для данного уравнения можно также найти инварианты Лапласа

$$\begin{aligned} &h_1 = 2h - k - (ln\, h)_{\xi\eta}, h_{-1} = k,\\ &k_1 = h, k_{-1} = 2k - h - (ln\, k)_{\xi\eta}. \end{aligned} \tag{2.2.17}$$

В случае, если уравнения (2.2.15) или (2.2.16) получится проинтегрировать, то с помощью формул (2.2.14) или (2.2.15) можно найти решение уравнения $(\widetilde{2.2.8})$. Если же, уравнения (2.2.15) или (2.2.16) не получается проинтегрировать, то можем продолжить проделывать алгоритм построения новых уравнений по тому же правилу, которое использовали при переходе от уравнения $(\widetilde{2.2.8})$. к (E_1), (E_{-1}).

Обозначим уравнение $(\widetilde{2.2.8})$. за (E_0) и запишем последовательность, получаемых уравнений при использовании вышеописанного алгоритма

$$\dots, E_{-2}, E_{-1}, E_0, E_2, E_1, \dots\ .$$

В силу (2.2.15) и (2.2.16) данные уравнения связаны между собой так, что решение одного влечет решение остальных.

Из (2.2.17) следует, что $k_{i+1} = h_i$, поэтому достаточно рассматривать только последовательность

$$\{h_i\}_{i=\cdots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots}, h_0 = h.$$

Исходя из (2.2.17) элементы этой последовательности можно вычислять по рекуррентной формуле

$$h_{i+1} = 2h_i - h_{i-1} - (ln\, h_i)_{\xi\eta}, h_{-1} = k, h_0 = h.$$