# Решатель для динамической модели фильтрации в трещинах МГРП: обзор методов и выбор оптимального

**Ильдар Абдулин**
Уфимский государственный авиационный технический университет

**Введение**

Целью данной главы является разработка инструмента, который прогнозирует дебит скважины, используя динамическую модель фильтрации жидкости с учетом геофизических особенностей пористой среды (сжимаемая порода в зоне, затронутой МГРП).

Основные задачи:

- Выбрать оптимальный решатель фильтрационной модели с приемлемыми точностью, быстродействием и сложностью реализации для рассматриваемой задачи проведя кросс-проверку исходя из скорости и точности;
- Реализовать оптимальный решатель с вычислением необходимых величин прогноза.

Основные методы решения дифференциальных уравнений в прикладных задачах разделяются на численные, аналитические и полуаналитические. Также, иногда модель можно упростить, чтобы воспользоваться более удобным методом решения.

Таким образом рассмотрим следующие методы решения уравнения модели:

- методы основанные на упрощении модели;
- аналитические и приближенные аналитические методы;
- численные методы с простой реализацией (явная конечно-разностная схема);
- численные методы со сложной реализацией (требующие решение СЛАУ): неявная конечно-разностная схема (КРС)**,** метод конечных элементов (МКЭ) и т.д.

Критерии выбора инструмента:

1. Возможность применения;
2. Точность;
3. Быстродействие;
4. Простота реализации (возможность реализации на VBA).

Будем рассматривать методы в порядке от простых к сложным в реализации.

**Математическая модель и геометрия задачи**

$$\frac{\partial p}{\partial t} - div(\alpha(p) grad(p)) = 0,\ 0 < t \le T,\ \vec{l} < \vec{x} < \vec{L},$$

$p$ - давление жидкости, $\alpha(p)$ - коэффициент пьезопроводности, зависящий от вязкости, пористости, проницаемости и плотности жидкости; постоянен в трещине и зоне незатронутой ГРП (ЗНГРП).

Начальные условия

$$p(0,\vec{x}) = P_0 \text{ вне скважины, } p = P_{\text{скв}} \text{в окрестности скважины.}$$

краевые условия

$$\vec{n}\frac{k}{\mu}grad(p) = 0 \text{ на внешних границах ЗНГРП}, \quad p = 0 \text{ в окрестности скважины.}$$

$$Q = \sum_{i} n^{i}_{\vec{n}_{\text{скв}}} S^{i} \frac{k}{\mu} grad(p),$$

где $n^{i}_{\vec{n}_{\text{скв}}}$ — нормаль в направлении поверхности скважины с площадью равной $S^{i}$.

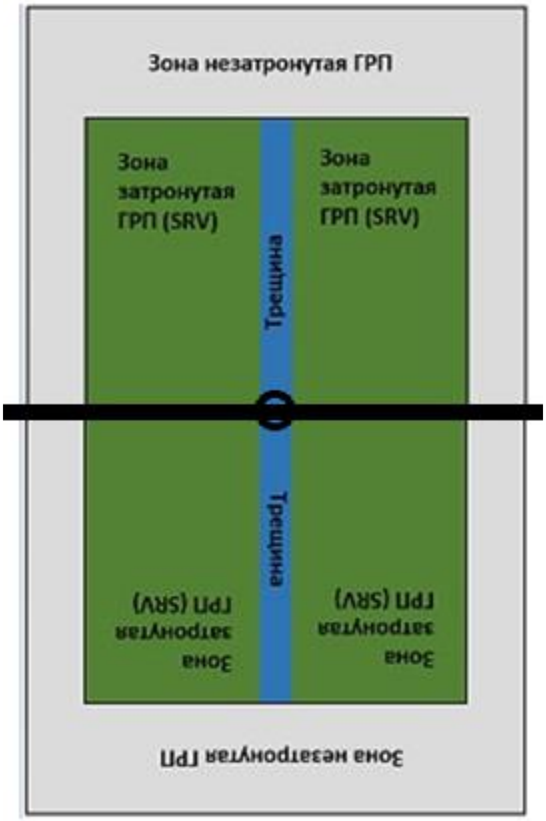



Рисунок 1 – Развитие трещины-сателлита

**Методы основанные на упрощении модели**

**Метод 1. Упрощение p≈p(x, t)**. В некоторых случаях можно рассматривать процесс одномерным. Так, в случае, если размер области по координате во много раз больше чем по другой, то процесс можно считать одномерным. В нашем случае размер области по координате y в десятки раз больше, чем по y. Поэтому в зонах затронутой и незатронутой ГРП можно считать процесс одномерным ($p(x, y, t) \approx p(x, t)$). Однако при расчете течения через трещину жидкость фильтруется по оси $y$. Если же рассматривать внутри трещины $p(x, y, t) \approx p(y, t)$, то неясно как сшивать решения на границе трещины и SRV. Поэтому данное упрощение невозможно при текущей геометрии.

**Метод 2. Упрощение k(p)≈k(x, y, t)**. Данное упрощение позволяет сильно упростить процессы получения аналитических и численных решений. Математическое обоснование возможности такого упрощения требует теоремы вида $\underline{p}\,(x, t) < p(x, y, t) < \bar{p}\,(x, t)$ при $\underline{k}\,(x, t) < k(p) < \bar{k}\,(x, t)$, которые можно получить только для частных случаев. Поэтому модель с k=k(p) в общем случае нельзя заменить на модель с $\mathrm{k} = \mathrm{k(x, y, t)}$.

Таким образом, модель в текущей постановке является самой простой, рассматриваемые упрощения возможны только после ее реализации (как аппроксимации модели).

**Аналитические и приближенные аналитические методы**

Аналитические методы. Данные методы являются точными, наиболее простыми в реализации и имеют самое высокое быстродействие. Однако получить их возможно только для специфичных нестационарных краевых условий, которые в нашем случае являются стационарными.

Приближенные аналитические методы. Приближенные аналитические методы - метод Фурье и любые другие методы с рядами. Проблема данных методов - низкая скорость сходимости и отсутствие универсальности по начально-краевым условиям. Так как задача обладает сложными геометрией и краевыми условиям, то данный метод не является проще по реализации, чем численные методы.

Таким образом, аналитические и полуаналитические методы не подходят по критерию возможности применения.

**Численные методы с простой реализацией (явная КРС)**

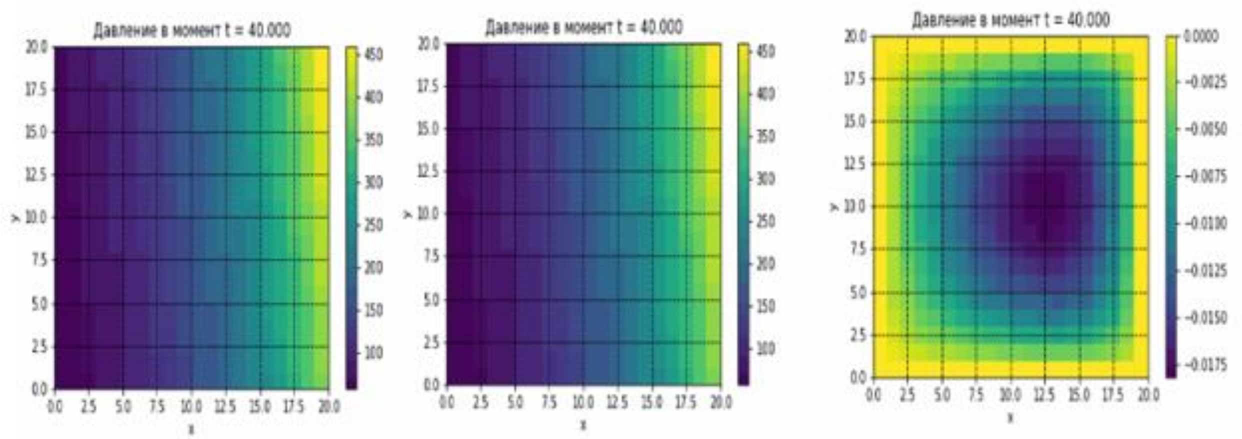



Рисунок 2 – Численный эксперимент

Главная проблема данного метода - это условная устойчивость, которая накладывает ограничение на шаг по времени при использовании решателя, что может привести к долгому расчету. Поэтому протестируем скорость расчета модели в зоне SRV при простых краевых условиях.

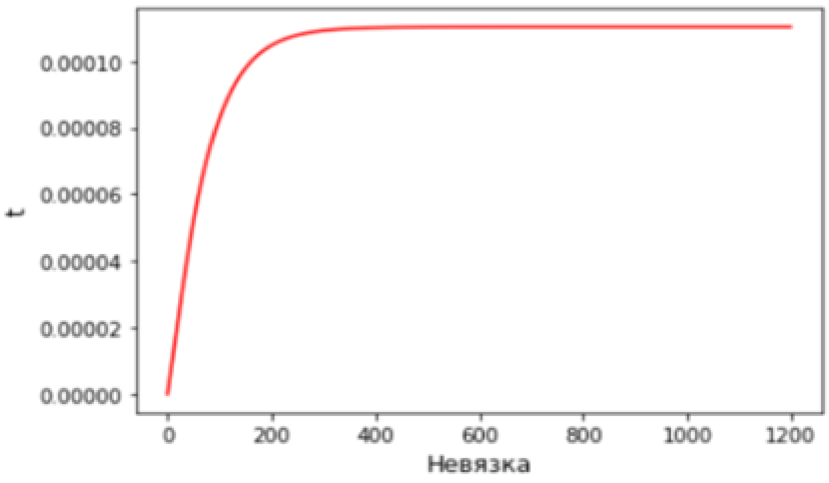



Рисунок 18 – График невязки

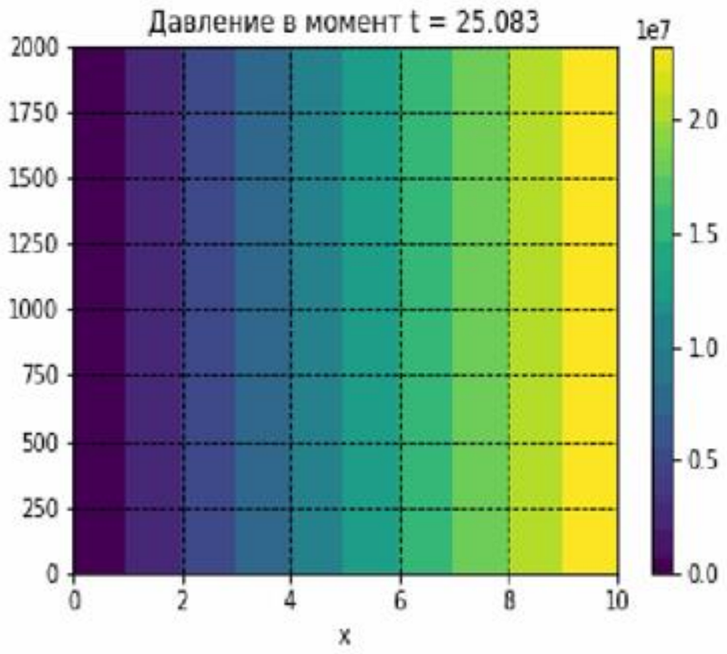



Рисунок 19 – Решение в зоне SVR с постоянной проницаемостью

Расчет для зоны SRV на 63 часа работы скважины занял 10 мин при 16ГБ RAM и Intel Core i7-4710MQ 3.5GHz. Таким образом расчет только в зоне SRV займет 20 часов. При этом шаг по времени в зоне трещины будет не менее чем в 100 тысяч раз меньше, что приведет к недопустимой скорости расчета модели.

Таким образом, ввиду низкой скорости расчета, явная КРС неприменима в зоне трещины, поэтому ее нельзя применить для рассматриваемой задачи.

**Численные методы со сложной реализацией (неявная КРС / МКЭ и т.д.)**

Главная проблема данного класса методов - очень сложная реализации в VBA ввиду отсутствия решателей СЛАУ. Однако у этих подходов нет недостатка предыдущего метода. Такие схемы, как правило, безусловно устойчивы, что дает возможность выбирать сетку по времени произвольно. Более того, они реализованы в множестве открытых библиотек Python. Методы конечных элементов более популярны чем конечно-разностные схемы. Одной из наиболее популярных библиотек, которая использует методы конечных элементов, является библиотека FiPy.

**О библиотеке FiPy ([https://www.ctcms.nist.gov/fipy/](https://www.ctcms.nist.gov/fipy/)).**

Бесплатное и открытое ПО. Первый релиз в 2002 году, последнее обновление 15 июня 2022 года.

**Тестовый расчет.**

Уравнение

$$\frac{\partial p}{\partial t} - div\big(\alpha grad(p)\big) = 0, \alpha = 1.$$

Начальные условия

$$p(0, \vec{x}) = 10$$

Краевые условия

$$p = 0 \text{ на левой грани, } p = 100 \text{ на остальных гранях.}$$

Размерность сетки 5x5, шаг по времени 1, конечное время 100.

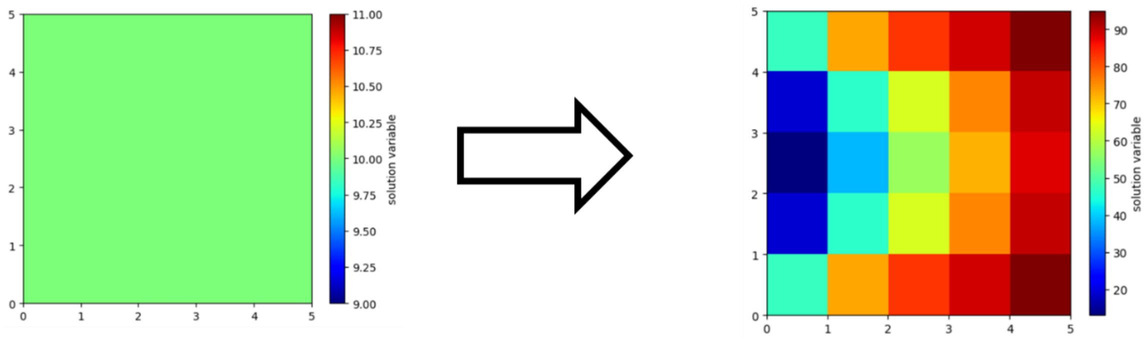



Рисунок 20 – Решение в зоне SVR с постоянной проницаемостью

Таким образом, простые расчеты библиотеки Fipy дают физически адекватный результат для уравнения модели. В отличии от явной КРС нет ограничений на шаг по времени.

**Методы основанные на упрощении модели.**

Обоснование того, что задача с нелинейной проницаемостью будет эквивалентна задаче с проницаемостью как функции от x, t, требует оценки решения для уравнения с k=k(p) которые известны только для частных случаев. Поэтому модель с k=k(p) в общем случае нельзя заменить на модель с k=k(x, t).

**Аналитические и полуаналитические методы.**

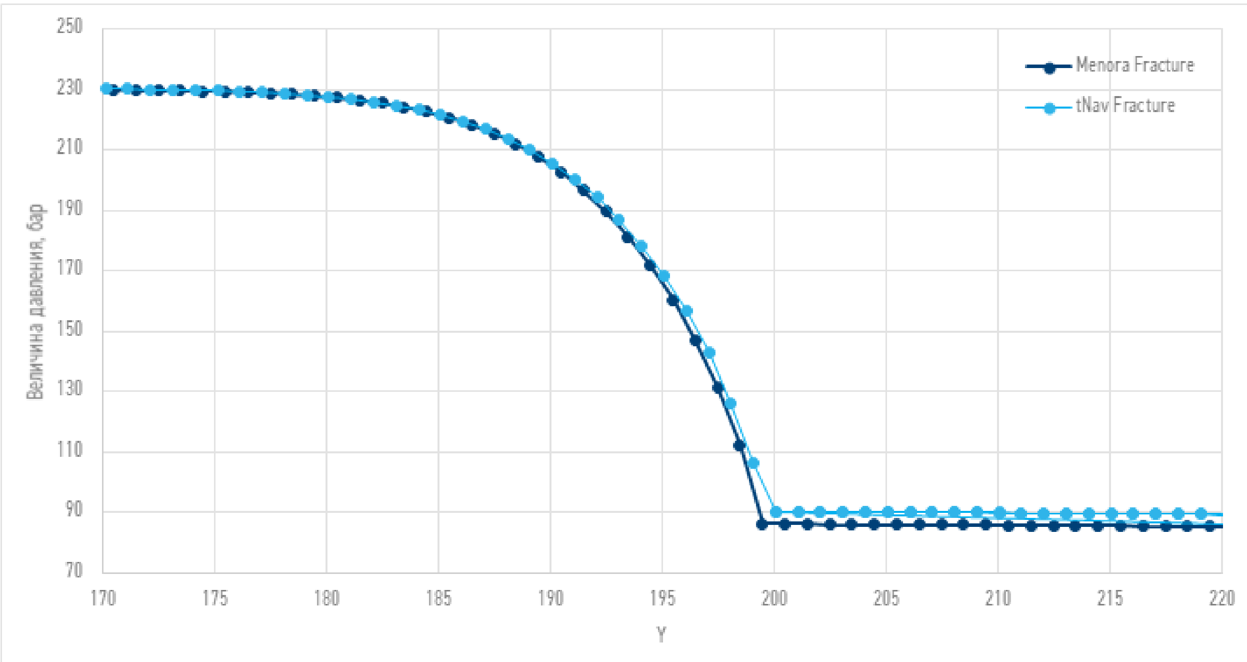
Точные и приближенные методы группового анализа дифференциальных уравнений, как правило, дают только частные автомодельные решения. Так как задача обладает сложной геометрией и в зависимости от краевых условий мы можем не получить в некоторых зонах аналитического решения.

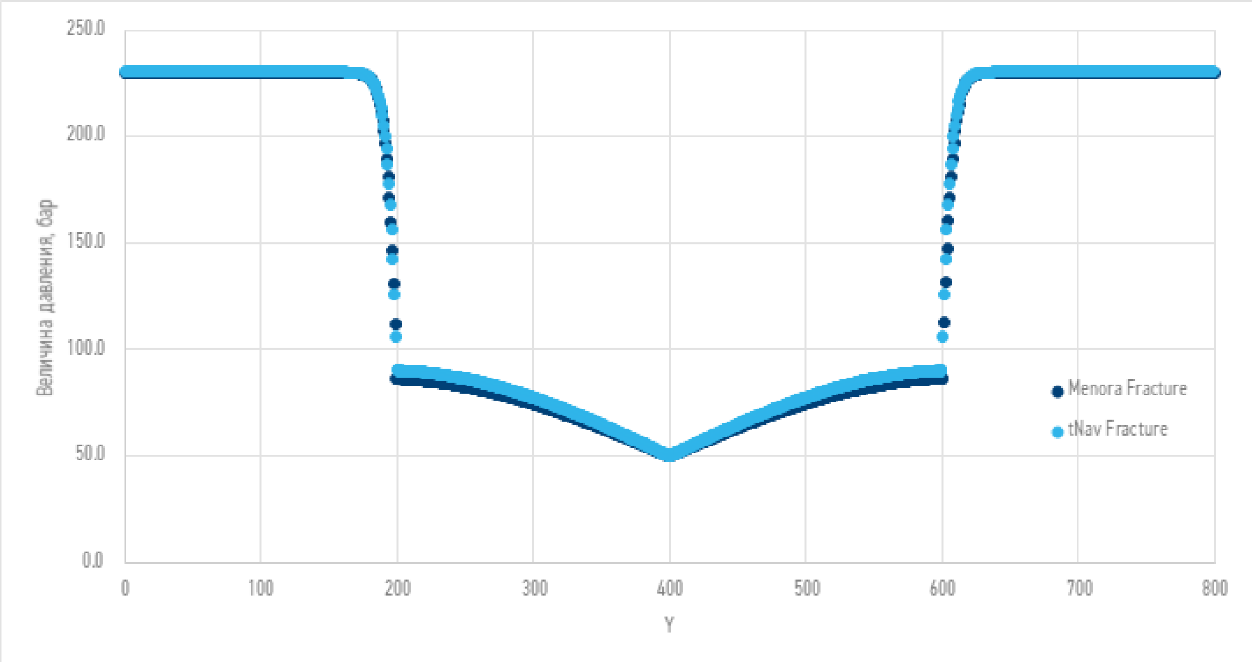
Приближенные аналитические методы, например, метод Фурье [7], также обладают своими недостатками. Проблемы данного класса методов - зачастую низкая скорость сходимости и необходимость разложения в ряды всех входящих в модель функций, что повышает вычислительную сложность модели.

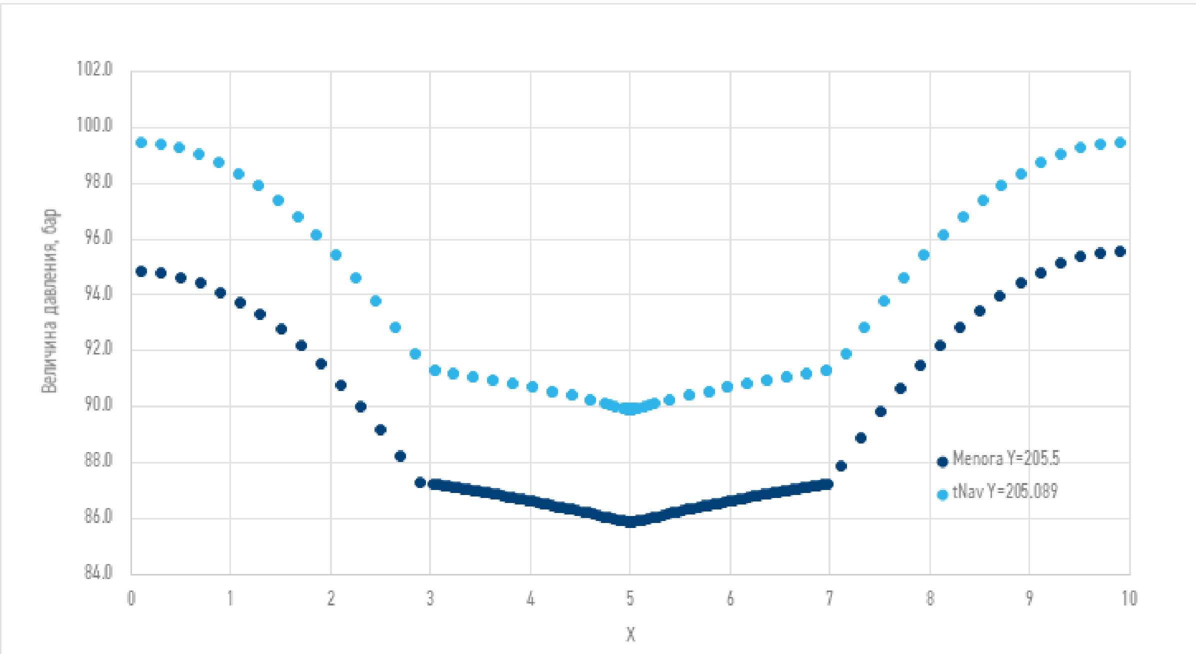
**Численные методы с простой реализацией: явная КРС.**

Расчет для зоны SRV на 63 часа работы скважины занял 10 мин при 16ГБ RAM и Intel Core i7-4710MQ 3.5GHz. Проблемы с измельчением сетки. Есть перспективы использовать для упрощения реализации модели в зонах SRV и матрицы.

Сравнение результатов расчетов решателя с коммерческим симулятором tNavigator

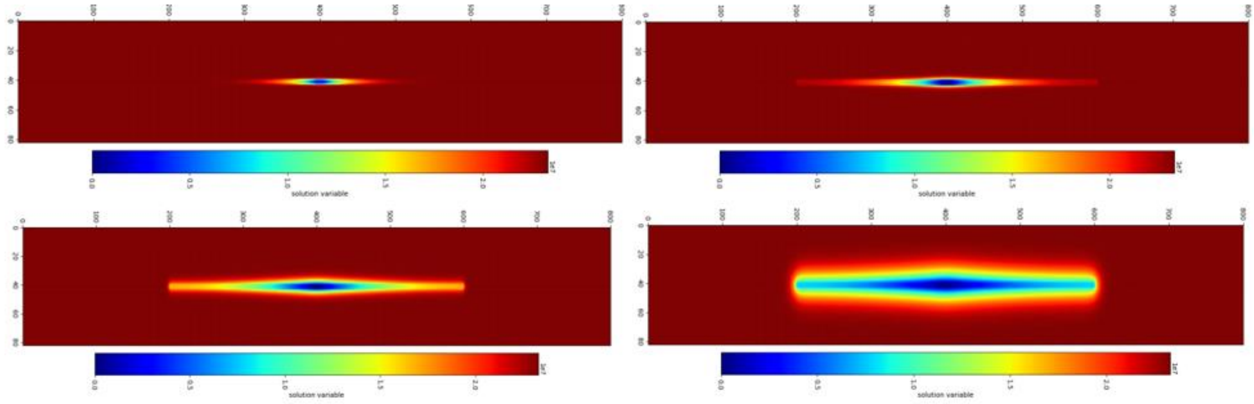




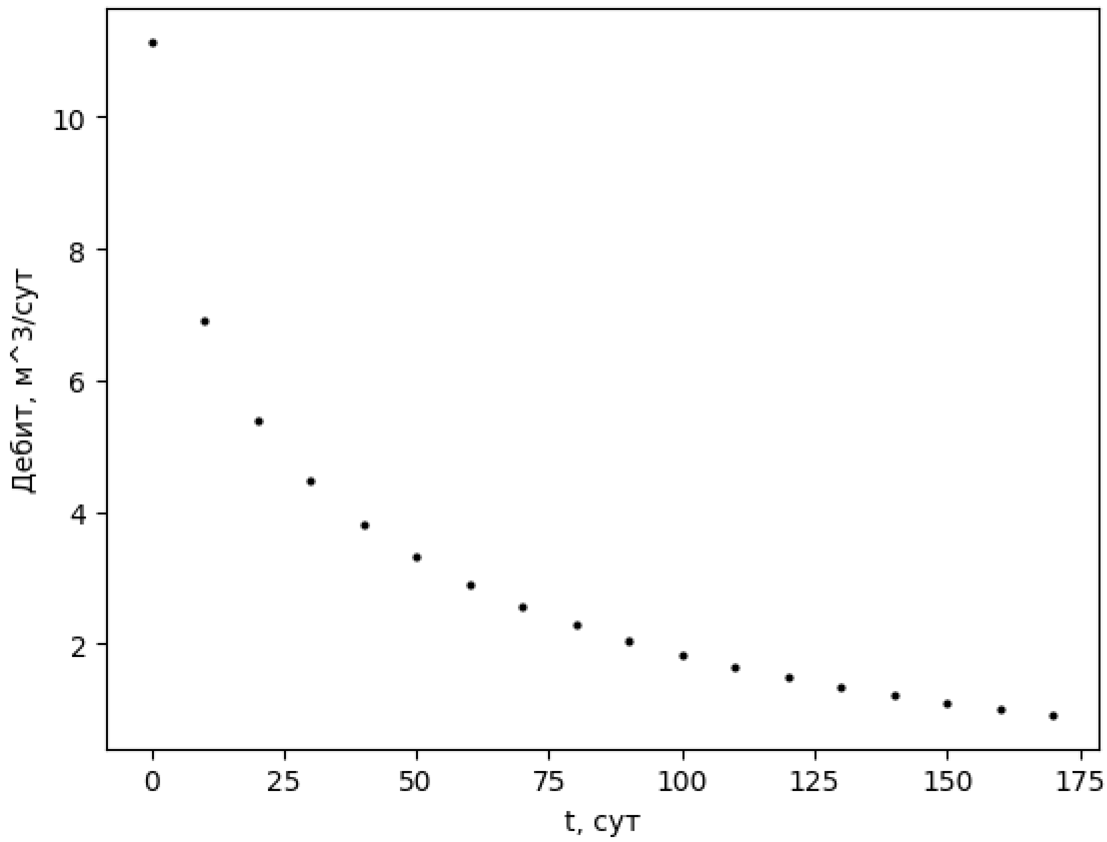



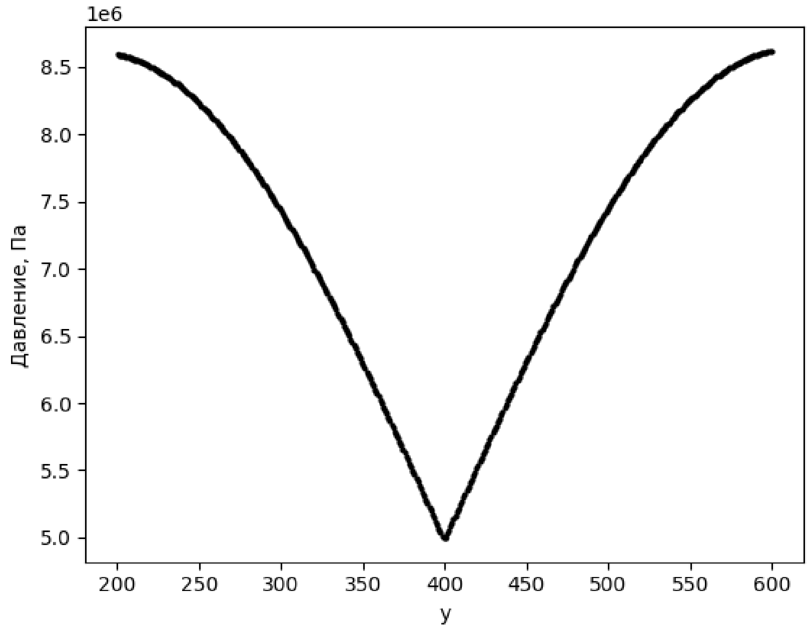

Давления в области максимальных расхождений – это вблизи кончика трещины. Максимальные расхождения на уровне 5%.

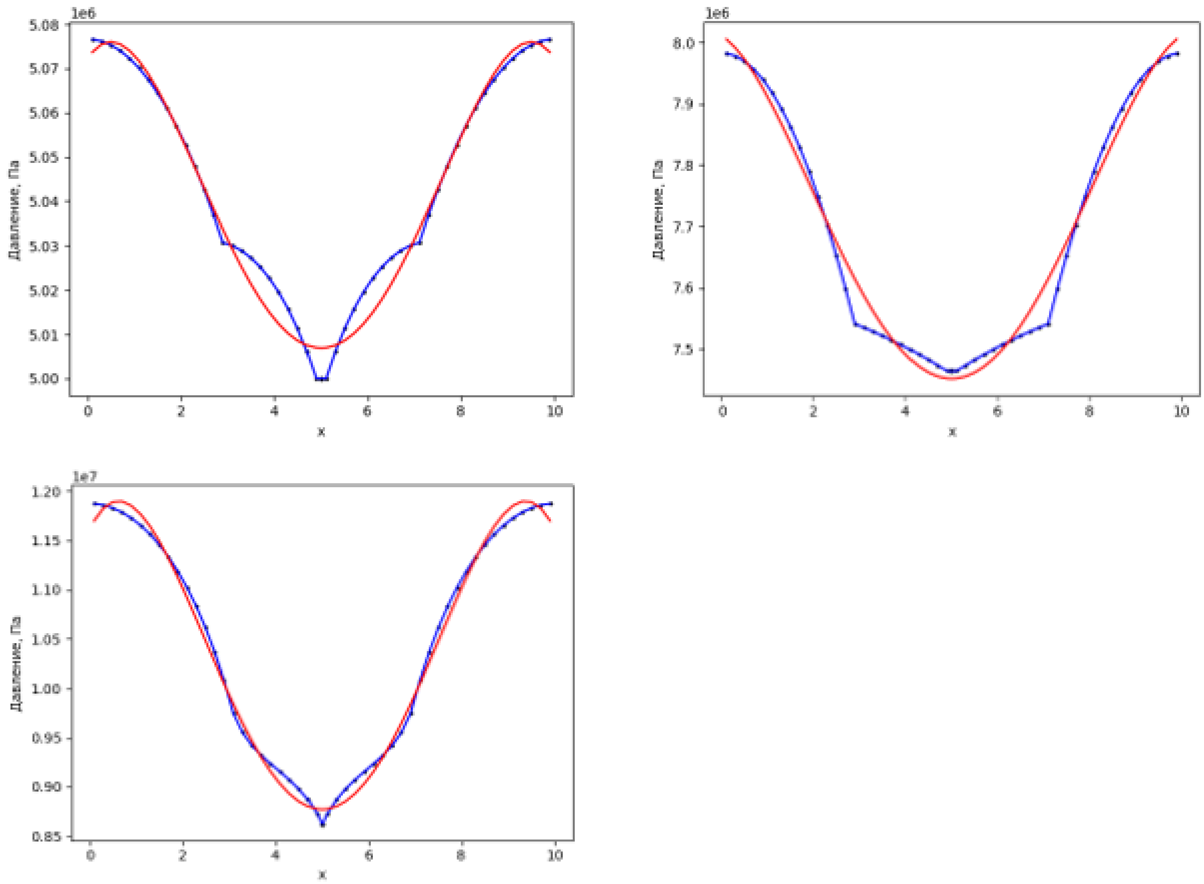
# Пример расчета



Распределения давления в пласте при t=1, 5, 25, 180 дней.






На рисунках выше представлены графики распределения давления при $y = 400.5$(слева), $500.5$(справа), $600.5$ (снизу). Реализован полиномиальный аппроксиматор давления, что позволяет упростить внедрение модели в VBA прототип (красный график - аппроксимация).

**Выводы**

1. Проведен обзор и выбран оптимальный решатель модели (библиотека FiPy) в соответствии с условиями задачи и требуемой скорости расчета, проведено тестирование основных методов решения.

2. Проведена реализация выбранного решателя модели, которая дала качественно и количественно физически адекватный результат.

3. Проведен прогноз поля давления для одной из скважин баженовской свиты. Проведена аппроксимация полей давления для упрощения дальнейшего внедрения результатов расчета в VBA прототип.

## Литература


1. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 400 с. – 1978.
2. Байков В. А., Газизов Р. К., Ибрагимов Н. Х. Приближенные преобразования эквивалентности. //Дифференциальные уравнения. – 1994. – Т. 30. – No. 10. – С. 1659-1664.
3. Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. – М.: Недра, 1972. – 288 с.
4. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Бином. Лаб. знаний, 2008. – 636 с.
5. Каневская Р. Д. Математическое моделирование гидродинамических процессов разработки месторождений углеводородов. – 2003.
6. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы математической физики //М.: Научный мир. – 2003. – Т. 161.
7. Полянин А. Д., Зайцев В. Ф. Справочник // Линейные уравнения математической физики, М., ФИЗМАТЛИТ. – 2001.