

Идентификация фрактальных свойств и апскейлинг параметров слоисто-неоднородного пласта

Identification of fractal properties and parameters upscaling of layered heterogeneous medium

I.N. Abdulin¹, V.A. Baikov^{2,1}

¹Ufa State Aviation Technical University, RF, Ufa

²RN-BashNIPIneft LLC, RF, Ufa

E-mail: Baikov@bnipl.rosneft.ru

Keywords: hydrodynamic modeling, identification of parameters, layered inhomogeneous medium, upscaling, permeability, fractals, power laws

Coarsening of computational spatial grids is one of the main ways to reduce the cost of computing resources in geological and hydrodynamic modeling of hydrocarbon reservoirs. The procedure of overriding reservoir properties in an upsized cell of the computational grid is called upscaling (averaging). The quality of this procedure is determined by degree of prognostic capability decreasing of applied models. The traditional way for determining the average value as the arithmetic mean is not always applicable in practice, since it does not take into account the spatial heterogeneity of the averaged values distribution. In this paper, we consider the case of a reservoir with formation reservoir properties (permeability and porosity) values close to power functions of the spatial variable. Proximity of reservoir properties to power function indicates to a fractal inhomogeneity of the porous medium. The power-law upscaling procedure is proposed for this case. An initial-boundary-value problem for a one-dimensional fractal model of unsteady-state filtration is considered. The identification procedure of fractal quantities of this model is proposed and investigated. The proposed methods tested on data from one of the fields in Western Siberia. A comparative analysis with the arithmetic mean method is performed on permeability data. The proposed techniques have a potential for use in reservoir engineering and monitoring.

Один из ключевых этапов построения геолого-технической модели пласта – гидродинамическое моделирование, при котором обычно используются вычислительные программные пакеты – симуляторы. При выполнении многовариантных гидродинамических расчетов важным фактором является время расчета, которое напрямую зависит от числа пространственных ячеек в модели. Во многих случаях для существенного сокращения времени расчета модели проводится ее апскейлинг (усреднение) – переход в модели от мелкой расчетной сетки к более крупной.

Корректность апскейлинга во многом определяется выбором метода подсчета среднего значения набора скважинных данных в рассматриваемой ячейке расчетной сетки. Самыми простыми и наиболее распространенными являются методы среднего взвешенного с одинаковыми весами. Однако в случае, если распределения скважинных данных имеют неоднородные включения в масштабах рассматриваемой ячейки, то использование подобных методов может привести к существенному снижению качества геолого-гидродинамического моделирования. Наличие таких неоднородностей может свидетельствовать о присутствии сложных структур в геологическом строении коллектора. Одним из методов, позволяющих улучшить моделирование объектов со

И.Н. Абдулин¹,
В.А. Байков^{2,1}, д.ф.-м.н.

¹Уфимский гос. авиационный технический университет

²ООО «РН-БашНИПНефть»

Адрес для связи: Baikov@bnipl.rosneft.ru

Ключевые слова: гидродинамическое моделирование, идентификация параметров, слоисто-неоднородная среда, апскейлинг, проницаемость, фракталы, степенные законы

DOI: 10.24887/0028-2448-2020-1-46-49

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (государственное задание 1.3103.2017/4.6)

сложными структурами, является метод, учитывающий их фрактальные свойства.

Применение фракталов в прикладных задачах берет начало в работах Б. Мандельброта [1]. Было замечено, что фрактальными свойствами могут обладать не только чисто абстрактные объекты, но и геометрические структуры, образованные в процессе природных явлений. Фракталы нашли применение в подземной гидродинамике – в описании процесса образования вязких пальцев в пористых средах [2], которые имеют фрактальную природу, описании перколяционных эффектов [3] и многих других задачах [1].

Одним из способов представления физических процессов во фрактальных средах является использование дробных производных [4]. Уравнения дробного порядка могут описывать процессы, обладающие остаточной памятью, которая может возникнуть из-за фрактальности среды. В работе [5] рассмотрен этот и другие методы учета фрактальных свойств среды при движении жидкости в пористой среде. Более обширный обзор методов, учитывающих фрактальность среды, представлен в работе [6].

Другим способом описания процесса фильтрации во фрактальной среде является использование уравнения переноса жидкости. В частности, для слабосжимаемой жидкости в плоскопараллельном случае оно имеет вид [7]

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mu \sigma x^{D-1} p) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{K}{\mu} x^{D-1-\omega} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 0, \quad (1)$$

где t , x – соответственно время и пространственная координата; m – пористость; σ – постоянная величина, зависящая от фрактальных свойств среды ($m\sigma x^{D-1}$ – пространственное распределение пор); D – фрактальная размерность среды; p – давление; μ – вязкость; K , ω – постоянные величины, описывающие аномальную проводимость фрактальной среды.

Практическое использование данной модели затруднено из-за проблемы эмпирической идентификации параметров, отвечающих за учет фрактальных свойств. В работе [8] для получения модели этого процесса предложен подход с заменой постоянных значений фильтрационно-емкостных свойств (ФЕС) степенными зависимостями от пространственной координаты. Определение параметров этих зависимостей предлагается проводить с помощью усреднения полей ФЕС с применением Фурье-анализа. В статье предложена и рассмотрена процедура идентификации фрактальных параметров по проницаемости как значений, при которых достигается минимума функционал близости решения со степенной функцией проницаемости к решению с кусочно-постоянной функцией проницаемости (промысловые данные).

Степенные законы для ФЕС в средах с фрактальными свойствами

Рассмотрим объект фрактальной формы, вдоль которого распределено вещество с единичной физической плотностью. В данном случае масса объекта будет подчиняться соотношению Б. Мандельброта $M \sim L^D$ (M – масса объекта; L – размер области усреднения) [1, 8]. Из этого соотношения следует, что средняя плотность объекта зависит от размеров пространственной области усреднения и оценивается выражением $\rho \sim L^{D-E}$ (E – размерность области усреднения, в рамках данной работы $E = 1$). Отсюда следует, что $\rho(x) = \tilde{\rho}x^{D-E}$, $\tilde{\rho} = \text{const}$.

В геолого-гидродинамическом моделировании аналогом плотности распределения пустот является пористость. Проницаемость может быть степенной функцией пористости [9]. С другой стороны, пористость m и абсолютная проницаемость k являются чисто геометрическими характеристиками пористой среды [10]. Соответственно можно предположить, что между распределениями этих параметров существует степенная зависимость, соответствующая средам с фрактальными свойствами. В работе [8] на основе следствия из соотношения Б. Мандельброта получены выражения

$$m = \tilde{m}x^{D_m-E}, \quad (2)$$

$$k = \tilde{k}x^{D_k-E}, \quad (3)$$

где D_m , \tilde{m} – фрактальные показатели по пористости; D_k , \tilde{k} – фрактальные показатели по проницаемости.

Величины D_m и D_k связаны с размерностью фрактальной среды следующим образом:

$$D_m = D, \quad D_k = D - \omega. \quad (4)$$

Постановка задачи идентификации фрактальных свойств среды

Из теоремы сравнения для уравнения фильтрации по функции пористости [11] следует, что ее наилучшей аппроксимации соответствует наилучшая аппроксимация величины давления p . В соответствии с этим D_m и m будем выбирать исходя из условия наилучшей аппроксимации этой функции на всем отрезке описываемой задачи.

Рассмотрим две одномерные модели фильтрации однофазного потока в неоднородной среде с равными степенными функциями пористости. В первом случае проницаемость является возрастающей кусочно-постоянной функцией, во втором – степенной функцией от пространственной координаты. В данном разделе предложена методика определения параметров степенного закона для проницаемости исходя из минимизации меры близости величин давлений обеих моделей.

Задача А. Краевая задача для модели нестационарной фильтрации, где проницаемость $k(x)$ является кусочно-постоянной функцией

$$\begin{aligned} \tilde{m}x^{D_m-1} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k(x)}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) &= 0, \\ x \in (l, L) \setminus X_{gr}, \quad l < x < L, \quad 0 < t \leq T \\ p(x, 0) &= p_0(x), \quad p(l, t) = p_l(t), \quad p(L, t) = p_L(t), \end{aligned} \quad (5)$$

где $X_{gr} = \{x_{gr}^i, i = 1, \dots, N\}$ – множество точек изменения $k(x)$.

Предполагается, что в точках раздела сред с разными проницаемостями соблюдаются условия «жесткого контакта». Тогда при $x \in X_{gr}$ выполняются условия непрерывности давления и потока: $p(x)|_{x=x_{gr}^i-0} = p(x)|_{x=x_{gr}^i+0}$,

$$k(x)p'(x)|_{x=x_{gr}^i-0} = k(x)p'(x)|_{x=x_{gr}^i+0}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Задача Б. Начально-краевая задача для нестационарного режима фильтрации во фрактальной среде

$$\begin{aligned} \tilde{m}x^{D_m-1} \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\bar{k}(x)}{\mu} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \right) &= 0, \quad \bar{k}(x) = bx^a, \\ \bar{p}(x, 0) &= \bar{p}_0(x), \quad \bar{p}(l, t) = \bar{p}_l(t), \quad \bar{p}(L, t) = \bar{p}_L(t). \end{aligned} \quad (6)$$

где a , b – коэффициенты.

Вариационная задача В. Задача определения коэффициентов a и b в функции $\bar{k}(x)$ (задача Б) из условия минимизации меры близости решений начально-краевых задач А и Б. В качестве меры близости взят интеграл от 0 до T суммы квадратов отклонений друг от друга давления, скорости его изменения по t и потока на отрезке $[l, L]$. Функционал близости решений

$$F(a, b) = \int_0^T \int_l^L \left((p(t, x) - \bar{p}(t, x; a, b))^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} \right)^2 \right) dx dt \rightarrow \min. \quad (7)$$

Проведение процедуры идентификации с использованием промысловых данных

Для повышения точности расчетов рассмотрим частный случай функций $p_0(x)$, $p_l(t)$, $p_L(t)$, при которых начально-краевая задача А обладает аналитическим решением. Такому случаю удовлетворяют линейные краевые условия $p_l(t) = p_{l1}t + p_{l2}$, $p_L(t) = p_{L1}t + p_{L2}$ (выбор $p_0(x)$ проводится в соответствии с согласованностью с условиями на краях и «жесткого контакта»), для них решение задачи А имеет вид

$$p(t, x) = \begin{cases} A_1(x^{D_m+1} + 2B_1t) + C_1, & l > x > x_{gr}^1, \\ A_2(x^{D_m+1} + 2B_2t) + C_2, & x_{gr}^1 > x > x_{gr}^2, \\ \dots, \\ A_{N+1}(x^{D_m+1} + 2B_{N+1}t) + C_{N+1}, & L > x > x_{gr}^N, \end{cases} \quad (8)$$

где постоянные A_i , B_i , C_i ($i = 1, \dots, N+1$) в соответствии с номером уравнения, условиями на краях $x = l$ и непрерывности потока удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} p_{l1} &= 2A_1B_1D_m(D_m+1), \quad p_{l2} = A_1l^{D_m+1} + C_1; \\ A_i(x_{gr}^i)^{D_m+1} + C_i &= A_{i+1}(x_{gr}^i)^{D_m+1} + C_{i+1}, \\ A_iB_i &= A_{i+1}B_{i+1}, \quad i = 1, \dots, N; \\ B_i &= D_m(D_m+1)k_i / (\tilde{m}\mu), \quad i = 1, \dots, N+1. \end{aligned} \quad (9)$$

В качестве исходных взяты данные гамма-каротажа скважины на одном из месторождений Западной Сибири. Величины $k(x)$, $m(x)$ восстановлены по данным каротажа в соответствии с зависимостями, полученными в работе [13], и нормированы относительно максимального значения.

Для рассмотренных данных из условия наилучшей аппроксимации на всем отрезке

$$\int_l^L (m(x) - \tilde{m}x^{D_m-1})^2 dx \rightarrow \min$$

получено: $\tilde{m} = 0,96$, $D_m = 0,04$.

Остальные параметры моделей выбраны следующим образом: $T = 100$, $l = 0$, $L = 1$, $\mu = 1$, $\bar{p}_0(x) = p_0(x)$, $\bar{p}_l(t) = p_l(t) = t$, $\bar{p}_L(t) = p_L(t) = t + 10$.

Интегралы в рассматриваемых функционалах рассчитывались методом левых прямоугольников на равномерной сетке. Задачи Б и В решались численно средствами встроенных процедур математического пакета Maple.

На рис. 1 представлен график функционала $F(a, b)$, который достигает минимума 0,14 (отмечен жирной точкой) при $a \approx 0,78$, $b \approx 0,914$.

Авторами установлено, что функционал $F(a, b)$ достигает минимума при значениях параметров, близких к точке минимума функционала $G(c, d) = \int_l^L (k(x) - \bar{k}(x; c, d))^2 dx$.

Отклонения полученных значений параметров $a_{\min} = 0,78$, $b_{\min} = 0,914$ от значений параметров $c_{\min} = 0,8$, $d_{\min} = 0,93$ данного функционала сопоставимы с погрешностью численного вычисления интегралов и численного решения задач Б и В, а отклонение значения $F(a_{\min}, b_{\min})$ от $F(c_{\min}, d_{\min})$ мало. Таким образом,

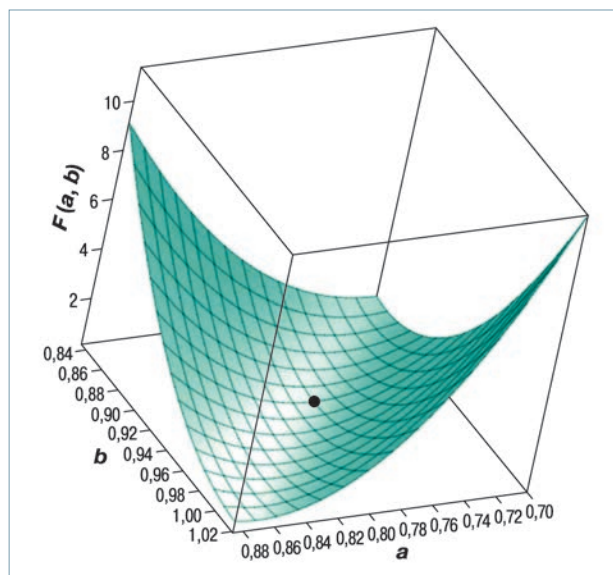


Рис. 1. График функционала близости решений $F(a, b)$

в рассмотренном случае вариационная задача В эквивалентна задаче $G(a, b) \rightarrow \min$.

На рис. 2 приведены графики проницаемости k , давления p и потока на отрезке kp_x , полученные при решении с нулевыми значениями показателя степени в функциях пористости и проницаемости (без учета фрактальности) и задач Б, А ($\tilde{m} = 0,96$, $D_m = 0,04$, $\bar{k} = b_{\min}$, $D_k = a_{\min}$). Из рис. 2, б, в видно, что выбор значения проницаемости как степенной функции с параметрами из условия (4) вместо среднего арифметического (постоянного) значения привел к значительному уменьшению отклонений величин давления и потока.

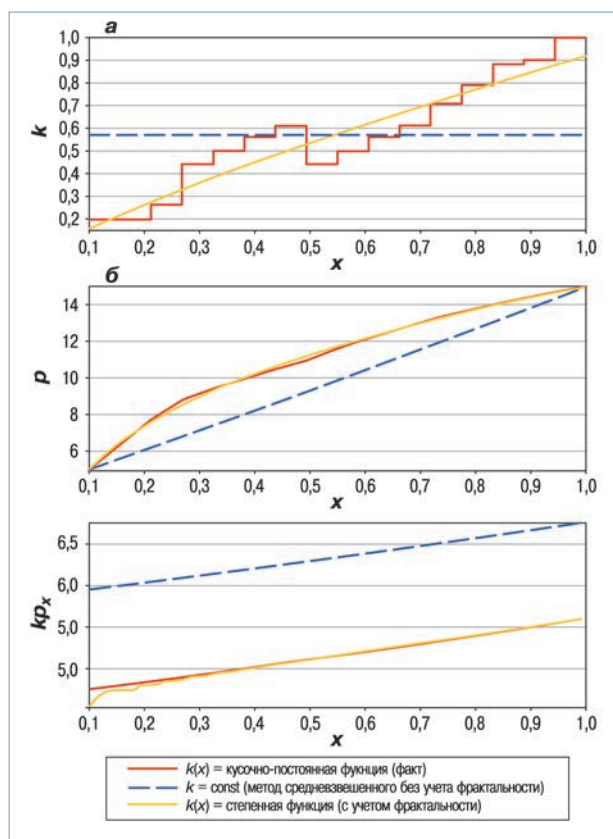


Рис. 2. Сопоставление методов аппроксимации (при $t = 5$ с) функции проницаемости k (а), давления p (б) и потока kp_x (в)

Процедура апскейлинга для среды с фрактальными свойствами

В основе апскейлинга лежит процедура подсчета усредненного значения в укрупненной пространственной ячейке. Предположение изотропности среды со средними значениями ФЕС нередко приводит к недостоверным результатам гидродинамического моделирования. В частности, как было показано в предыдущем разделе, к такому случаю относится случай проницаемости с ненулевым показателем степени аппроксимирующего степенного закона. В настоящем разделе предложена модификация метода среднего арифметического – метод средневзвешенного арифметического с учетом фрактальной неоднородности среды.

Учитывая степенную неоднородность с показателем степени b распределения величины \bar{f} , можно провести модификацию метода среднего арифметического. Очевидно, в этом методе в отличие от стандартного метода веса элементов усреднения не будут равномерно распределены. Полученная модификация имеет вид

$$\bar{f} = \frac{\sum_{i=1}^{N-1} (x_{i+1}^{b+1} - x_i^{b+1}) f_i}{(x_N^{b+1} - x_1^{b+1})}. \quad (10)$$

Для апробации полученной модификации процедуры усреднения взята величина проницаемости, в качестве примера расчета рассмотрены исходные данные из предыдущего раздела.

Используя метод среднего арифметического, получаем $\bar{k}_1 = 0,57$, по методу средневзвешенного с учетом фрактальности среды $\bar{k}_2 = 0,5$.

Для величин давления (рис. 3, а), модификация не привела к существенным изменениям. Однако уменьшение ошибки в вычислении величины потока посредством учета фрактальных свойств достигло примерно 20 % (см. рис. 3, б).

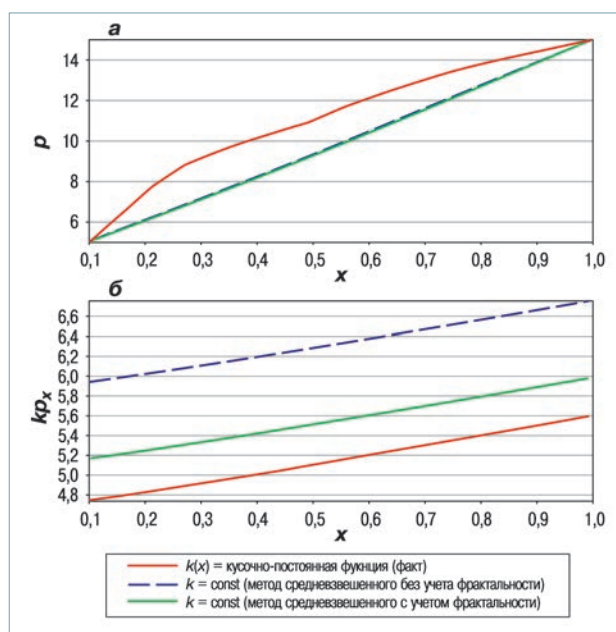


Рис. 3. Сопоставление методик средневзвешенного с учетом и без учета фрактальности функции давления p при $t = 5$ с (а) и потока $kр_x$ (б)

Выводы

1. Предложена методика эмпирической идентификации параметров фильтрационной модели во фрактальной среде исходя из минимума функционала близости к решению с кусочно-постоянной функцией проницаемости (промысловые данные).

2. Задача идентификации параметров посредством предложенной методики эквивалентна более простой задаче идентификации параметров исходя из наилучшей аппроксимации кусочно-постоянной функции степенной функцией на всем отрезке.

3. Предложена модифицированная процедура усреднения (апскейлинга) ФЕС, которая учитывает их степенной (фрактальный) закон распределения.

4. При апробировании предложенной процедуры на промысловых данных одной из скважин Западной Сибири получено, что модификация апскейлинга привела к улучшению соответствия величины потока фактической величине на 20 %. Это свидетельствует о большом потенциале применения данной методики при проектировании и мониторинге разработки месторождений.

Список литературы

1. Mandelbrot B.B. The Fractal Geometry of Nature. – San Francisco: Freeman, 1992. – 750 p.
2. Мирзаджанзаде А.Х., Хасанов М.М., Бахтизин Р.Н. Моделирование процессов нефтегазодобычи. Нелинейность, неравновесность, неопределенность. – М.: Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. – 307 с.
3. Feder J. Fractals. – Springer Science & Business Media, 2013. – 283 p.
4. Учайкин В.В. Метод дробных производных – Ульяновск: Артишок, 2008. – 512 с.
5. Барабанов В.Л. Фрактальная модель начальной стадии капиллярной пропитки горных пород. // Актуальные проблемы нефти и газа. – 2016. – № 1 (13). – С. 5/1–16.
6. Yu B. Analysis of flow in fractal porous media // Applied Mechanics Reviews. – 2008. – V. 61. – № 5. – P. 1–19.
7. O'Shaughnessy B., Procaccia I. Analytical solutions for diffusion on fractal objects // Physical Review Letters. – 1985. – V. 54. – № 5. – P. 455–458.
8. Методика интерпретации и определения параметров уравнения фильтрации в пористой среде с фрактальными свойствами / В.Х. Багманов, В.А. Байков, А.Р. Латыпов, И.Б. Васильев // Вестник УГАТУ. – 2006. – Т. 7. – № 2. – С. 146–149.
9. Xu P., Yu B. Developing a new form of permeability and Kozeny–Carman constant for homogeneous porous media by means of fractal geometry // Advances in water resources. – 2008. – Т. 31. – № 1. – С. 74–81.
10. Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. – М.: Недра, 1972. – 288 с.
11. Костин А.Б. Восстановление коэффициента перед $u(t)$ в уравнении теплопроводности по условию нелокального наблюдения по времени // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2015. – Т. 55. – № 1. – С. 89–104.
12. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. Осреднение процессов в периодических средах: Математические задачи механики композиционных материалов. – М.: Наука, 1984. – 352 с.
13. Петрофизическое моделирование сложнопостроенного терригенного коллектора / В.А. Байков, А.В. Жонин, С.И. Коновалова [и др.] // Территория НЕФТЕГАЗ. – 2018. – № 11. – С. 34–38.

References

1. Mandelbrot B.B., The fractal geometry of nature, San Francisco: Freeman, 1992, 750 p.
2. Mirzadzhanzade A.Kh., Khasanov M.M., Bakhtizin R.N., Modelirovaniye protsessov neftegazodobychi. Nelineynost', neravnovesnost', neopredelennost' (Modelling of oil and gas production processes. Nonlinearity, disequilibrium, uncertainty), Moscow: Izhevsk: Publ. of Institute of Computer Science, 2004, 368 p.
3. Feder J., Fractals, Springer Science & Business Media, 2013, 283 p.
4. Uchaykin V.V., Metod drobnnykh proizvodnykh (Fractional derivative method), Ulyanovsk: Artishok Publ., 2008, 512 p.
5. Barabanov V.L., The rocks capillary imbibition – The primary stage; fractal modelling (In Russ.), Aktual'nye problemy nefi i gaza, 2016, no. 1(13), pp. 5/1–16.
6. Yu B., Analysis of flow in fractal porous media, Applied Mechanics Reviews, 2008, V. 61, no. 5, pp. 1–19.
7. O'Shaughnessy B., Procaccia I., Analytical solutions for diffusion on fractal objects, Physical Review Letters, 1985, V. 54, no. 5, pp. 455–458.
8. Bagmanov V.Kh., Baykov V.A., Latypov A.R., Vasil'ev I.B., The technique of interpretation and determination of the parameters of the filtration equation in a porous medium with fractal properties (In Russ.), Vestnik UGATU, 2006, V. 7, no. 2, pp. 146–149.
9. Xu P., Yu B., Developing a new form of permeability and Kozeny–Carman constant for homogeneous porous media by means of fractal geometry, Advances in water resources, 2008, V. 31, no. 1, pp. 74–81.
10. Barenblatt G.I., Entov V.M., Ryzhik V.M., Teoriya nestatsionarnoy filtratsii zhidkosti i gaza (The theory of non-stationary filtration of liquid and gas), Moscow: Nedra Publ., 1972, 288 p.
11. Kostin A.B., Recovery of the coefficient of $u(t)$ in the heat equation from a condition of nonlocal observation in time (In Russ.), Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki, 2015, V. 55, no. 1, pp. 89–104.
12. Bakhvalov N.S., Panasenko G.P., Osrednenie protsessov v periodicheskikh sredakh: Matematicheskie zadachi mekhaniki kompozitsionnykh materialov (Averaging of processes in batch media: Mathematical problems in the mechanics of composite materials), Moscow: Nauka Publ., 1984, 352 p.
13. Baykov V.A., Zhonin A.V., Konovalova S.I. et al., Petrophysical modeling of complex terrigenous reservoirs (In Russ.), Territoriya NEFTEGAZ, 2018, no. 11, pp. 34–38.