

ELEKTRİK DEVRE ANALİZİ

Doç. Dr. TURGUT İKİZ

İÇİNDEKİLER

1.BÖLÜM

DEVRE DEĞİŞKENLERİ VE DEVRE ELEMANLARI

- 1.1. Giriş
 - 1.2. Devre Değişkenleri
 - 1.2.1. Elektrik Yükü
 - 1.2.2. Elektrik Akımı
 - 1.2.3. Elektrik gerilimi
 - 1.2.4. Güç
 - 1.2.5. Enerji
 - 1.3. Devre Elemanları
 - 1.4. Problemler
-

2.BÖLÜM

TEMEL YASALAR

- 2.1. Giriş
 - 2.2. Direnç ve Ohm Yasası
 - 2.2.1. Direnç
 - 2.2.2. Ohm Yasası
 - 2.2.3. İlekenlik
 - 2.3. Kirchhoff Yasaları
 - 2.3.1. Çevrim, Kol ve Düğüm Kavramı
 - 2.3.2. Kirchhoff Akım Yasası
 - 2.3.3. Kirchhoff Gerilim Yasası
 - 2.4. Devrelerin Seri-Paralel Basitletirilmesi
 - 2.4.1. Seri Bağlı Dirençlerin Eşdeğeri ve Gerili Bölücü Devreler
 - 2.4.2. Paralel Bağlı Dirençlerin Eşdeğeri
 - 2.4.3. Üçgen - Yıldız ve Yıldız - Üçgen Dönüşümleri
 - 2.4. Problemler
-

3.BÖLÜM

DEVRE ANALİZ METODLARI

- 3.1. Giriş
- 3.2. Göz Akımları Metodu

- 3.2.1. Süper-Göz Kavramı
 - 3.3. Düğüm Noktası Potansiyelleri Metodu
 - 3.3.1. Süper Düğüm Kavramı
 - 3.4. Analiz metodunun Seçimi
 - 3.5. Problemler
-

4.BÖLÜM

DEVRE TEOREMLERİ

- 4.1. Giriş
 - 4.2. Eşdeğerlik
 - 4.3. Doğrusallık
 - 4.4. Kaynak Dönüşümü
 - 4.5. Süper-pozisyon Teoremi
 - 4.6. Thevenin Teoremi
 - 4.6.1. Thevenin Eşdeğer Devresi
 - 4.6. Norton Teoremi
 - 4.6.1. Norton Eşdeğer Devresi
 - 4.7. Maksimum Güç Transfer Teoremi
 - 4.8. Problemler
-

5.BÖLÜM

İŞLEMSEL YÜKSELTİCİLER

- 5.1. Giriş
 - 5.2. İşlemsel Yükseltici Karakteristiği
 - 5.3. İdeal İşlemsel Yükseltici Yaklaşımı
 - 5.4. İşlemsel Yükseltici Uygulamaları
 - 5.4.1. Terslemeyen Yükseltici ve Gerilim Tutucu
 - 5.4.2. Toplam Yükseltici
 - 5.4.3. Fark Yükseltici
 - 5.3. Problemler
-

6.BÖLÜM

BOBİNLER VE KAPASİTÖRLER

- 6.1. Giriş

6.2. Bobinler

6.2.1. Seri Bağlı Bobinlerin Eşdeğer İndüktansı

6.2.2. Paralel Bağlı Bobinlerin Eşdeğer İndüktansı

2.2.3. İlekenlik

6.3. Kapasitörler

6.3.1. Seri Bağlı Kapasitörlerin Eşdeğer Kapasitansı

6.3.2. Paralel Bağlı Kapasitörlerin Eşdeğer Kapasitansı

6.4. İntegral ve Türev Yükselticiler

6.4.1. İntegral Yükselticiler

6.4.2. Türev Yükselticiler

6.5. Problemler

7.3. RL ve RC Devreleri Doğal ve Basamak Cevapları

7.3.1. RL Devresinin Doğal Cevabı

7.3.2. RC Devresinin Doğal Cevabı

7.3.3. RL Devresinin Basamak Cevabı

7.3.4. RC Devresinin Basamak Cevabı

7.4. Birinci Dereceden İşlemsel Yükseltici Devreleri

7.5. Problemler

7.BÖLÜM

BİRİNCİ DERECEDEKİ DEVRELER

7.1. Giriş

7.2. Birim Basamak Fonksiyonu

7.2.1. Birim Basamak Fonksiyonunun Türevi: Birim Darbe Fonksiyonu

7.2.2. Birim Basamak Fonksiyonunun İntegrali: Birim Rampa Fonksiyonu

7.3. RL ve RC Devreleri Doğal ve Basamak Cevapları

7.3.1. RL Devresinin Doğal Cevabı

7.3.2. RC Devresinin Doğal Cevabı

7.3.3. RL Devresinin Basamak Cevabı

7.3.4. RC Devresinin Basamak Cevabı

7.4. Birinci Dereceden İşlemsel Yükseltici Devreleri

7.5. Problemler

8.BÖLÜM

İKİNCİ DERECEDEKİ DEVRELER

8.1. Giriş

7.2. Birim Basamak Fonksiyonu

7.2.1. Birim Basamak Fonksiyonunun Türevi: Birim Darbe Fonksiyonu

7.2.2. Birim Basamak Fonksiyonunun İntegrali: Birim Rampa Fonksiyonu

1.BÖLÜM: DEVRE DEĞİŞKENLERİ ve DEVRE ELEMANLARI

1.1. GİRİŞ

Elektrik devreleri, devre elemanlarının, belirli bir amacı gerçekleştirmek üzere birbirleriyle uygun bağlantıları sonucu oluşturulmuş sistemlerdir. Sadece bir pil, bir anahtar ve bir alıcıdan oluşan basit bir sistem bir elektrik devresi oluşturabileceği gibi, birçok devre elemanı ve alıcılardan oluşan karmaşık bir sistem de bir devre oluşturabilir. Devre ne denli karmaşık olsa da, devrenin çözümlenmesinde uygulanacak temel yasalar değişmez. Zira, karmaşık bir devrenin analizinde kullanılan metotlar, en basit devrelerin analizinde kullanılan temel yasaların sistematik uygulamalarından oluşmaktadır. Temel yasalar ve bunlarla ilişkili olarak analiz metotlarının kavranabilmesi için, bazı temel kavramları ve temel devre değişkenlerini tanımlamak gerekir. Bunlar; elektrik yükü, elektrik akımı, elektrik potansiyeli ya da voltaj, güç ve enerji kavramlarıdır. Ayrıca, elektrik devrelerinde veya elektrik devrelerinin modellenmesinde kullanılan devre elemanlarının karakteristiklerinin de iyi anlaşılması zorunludur.

1.2.ELEKTRİK YÜKÜ

Bir elektrik devresinde en temel nicelik elektrik yüküdür. Elektrik yükü, elementlerin içerdiği atomik parçacıkların bir elektriksel özelliği olup birimi Kulon'dur (C). Bir elektronun sahip olduğu yük miktarı -1.602×10^{-19} C iken, bir protonun yükü aynı büyüklükte ve pozitifdir. Elektrik yükü yaratılamaz ve yok edilemez, ancak transfer edilebilir. Elektrik yükünün bu özelliği, *elektrik yükünün korunumu yasası* olarak adlandırılır.

1.BÖLÜM: DEVRE DEĞİŞKENLERİ ve DEVRE ELEMANLARI

ÖRNEK PROBLEM 1.1:

Bir küreye 2 milyar elektron enjekte edilmiştir. Kürenin sahip olduğu toplam elektrik yükünü bulunuz.

Cözüm:

Her elektron -1.602×10^{-19} Kulon elektrik yüküne sahip olduğundan kürenin toplam yükü,

$$Q_T = -1.602 \times 10^{-19} \cdot 2 \times 10^9 = -3.204 \times 10^{-10} \text{ C.}$$

ÖRNEK PROBLEM 1.2:

-1 Kulon'luk elektrik yüküne sahip bir yüzeyde kaç elektron bulunduğunu hesaplayınız.

Cözüm:

Toplam yük Q_T ve elektron sayısı n olmak üzere,

$$Q_T = n \cdot (-1.602 \times 10^{-19}) \quad \Rightarrow \quad n = \frac{Q_T}{-1.602 \times 10^{-19}} = \frac{-1}{-1.602 \times 10^{-19}} = 6.242197 \times 10^{18} \text{ adet.}$$

1.3.ELEKTRİK AKIMI

Bütün maddelerin yapı taşları atomlardır. Bir atom pozitif yüklü proton ve yüksüz nötronlardan ibaret bir çekirdek ve çekirdeğin etrafında belirli yörüngelerde dönen, negatif yüklü elektronlardan oluşur. Her elementin atomu farklı sayıda elektron (proton) içerir. Elektronlar çekirdek etrafındaki yörüngelerde şu şekilde dizilirler: En içteki yörünge tek bir kabuktan oluşur ve bu kabukta en fazla 2 elektron bulunabilir. 2. yörünge iki alt kabuktan oluşur, içteki alt kabuk 2, dıştaki alt kabuk 6 elektron bulundurabilir. 3. yörünge üç alt kabuktan oluşur, içten dışa doğru alt kabukların elektron sayıları 2, 6 ve 10 dur. 4. yörünge dört alt kabuktan oluşur ve bu alt kabukların bulundurabilecekleri elektron sayıları sırasıyla 2, 6, 10 ve 14 dür. 5. yörünge 4. yörünge ile aynıdır. Yörünge ve alt kabukların ifadesi,

$$1s \quad 2s \quad 2p \quad 3s \quad 3p \quad 3d \quad 4s \quad 4p \quad 4d \quad 4f \quad 5s \quad 5p \quad 5d \quad 5f \quad 6s \quad 6p \quad 6d$$

biçiminde olup, burada örneğin 4d ile, 4. yörüngeyi üçüncü alt kabuğu ifade edilir. Bir elementin atomuna ilişkin dağılım ifade edilirken, her alt kabukta bulunan elektron sayısı üst indis olarak yazılır. Örneğin 32 elektronlu germanyum atomu için,

$$1s^2 \quad 2s^2 \quad 2p^6 \quad 3s^2 \quad 3p^6 \quad 3d^{10} \quad 4s^2 \quad 4p^2$$

olup, üst indislerin toplamı 32 dir. Dikkat edilirse germanyum atomunun son yörüngesinde toplam 4 elektron iki alt kabuğa dağılmıştır. 29 elektronlu bakır atomunda elektron dağılımı ise,

$$1s^2 \quad 2s^2 \quad 2p^6 \quad 3s^2 \quad 3p^6 \quad 3d^{10} \quad 4s^1$$

1.BÖLÜM: DEVRE DEĞİŞKENLERİ ve DEVRE ELEMANLARI

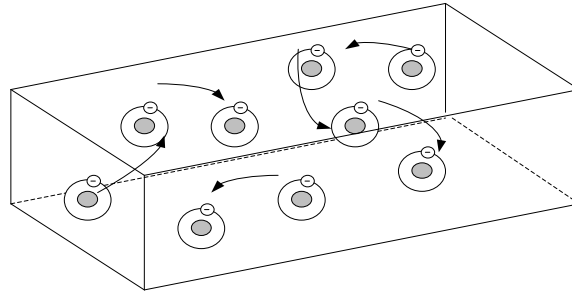
şeklinde olup, son yörüngesinde bir elektron barındırmaktadır.

Bu dizilişlerden açıkça görüldüğü gibi, her elementin son yörüngeleri farklı sayıda elektron içermekte ve bazı elementler için son yörünge sadece bir tek elektron bulundurabilmektedir. Bir elementin iletkenlik yeteneğini belirleyen etkenlerden biri, son yörüngesindeki elektron sayısıdır. Son yörüngedeki elektron sayısı ne kadar az ise element o denli iyi bir iletkenidir. Örneğin bakır atomu 29 elektrona sahiptir ve son yörüngesi sadece bir elektron içerir. Bu nedenle bakır elementi iyi bir iletken malzemedir. Bakır gibi gümüş ve altın atomları da son yörüngelerinde bir elektron içermektedirler. Ancak, gümüş bakırdan, altın da gümüşten daha iyi iletken malzemelerdir. Son yörüngelerindeki elektron sayıları aynı olmasına rağmen bu üç malzemenin farklı iletkenlik özelliklerine sahip olmalarının nedeni, her birinin, birim hacimde farklı sayıda atom içermeleridir. Altın gümüşten, gümüşte bakırdan daha ağır elementlerdir. Buna göre, bir malzemenin iletkenlik özelliğini belirleyen etkenler:

- Son yörüngesindeki elektron sayısı
- Birim hacimdeki atom sayısıdır.

Bunun dışında, elektriksel özelliği bakımından farklılık gösteren bir yapıda, son yörüngede 4 elektron bulunan diziliştir ki bu malzemeler (silikon, germanyum gibi) bazı koşullarda iyi bir yalıtkan iken bazı koşullarda iyi bir iletken özelliğine sahip olmakta ve yarı iletken olarak adlandırılmaktadırlar.

Bakır atomunun son yörüngesinde bulunan elektron, çekirdeğe çok zayıf bir kuvvetle bağlı olup, komşu bir atomun son yörüngesine geçebilir ve yerini bir başka komşu atomun son yörünge elektronu doldurabilir. Yani, son yörünge elektronları atomlar arasında değiştirilebilir ki, bu da bir elektrik yükü hareketi oluşturur. Son yörünge elektronu bu özelliği nedeniyle serbest elektron olarak adlandırılır. Şekil.1.1'de, bakır atomları arasında serbest elektron hareketleri görülmektedir. Burada, içteki gölgeli daire çekirdek ve ilk 28 elektronu ve dıştaki küçük daire de serbest elektronu göstermektedir.

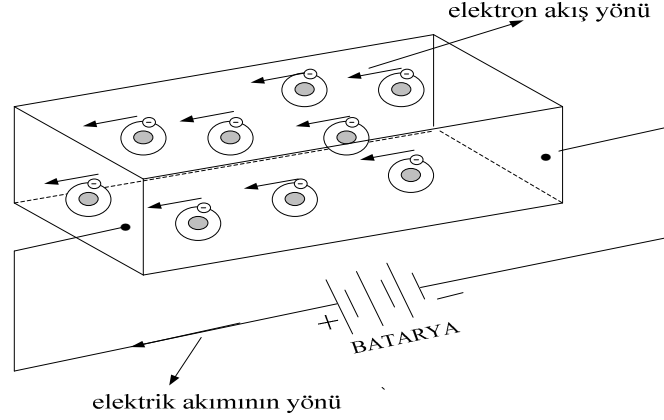


Şekil.1.1: Bakır atomlarının serbest elektron hareketleri

Serbest elektronların bu hareketleri bir yük hareketi oluşturur ancak, bir elektrik akımı oluşturmaz. Zira, bu hareketler rastgele olup, herhangi bir yönde net yük akışı her zaman sıfırdır. O halde elektrik akımını oluşturmak için serbest elektronların bir yönde, net akışının (yönlendirilmiş akışının) sağlanması gerekmektedir.

Elektrik akımı, elektrik yüklerinin, dışarıdan uygulanan bir kuvvet sonucunda bir yöndeki net akışıdır. Şekil.1.2'de görüldüğü gibi, yukarıdaki bakır malzemenin iki ucuna bir batarya bağlanmış olsun:

1.BÖLÜM: DEVRE DEĞİŞKENLERİ ve DEVRE ELEMANLARI



Şekil.1.2: Elektrik yüklerinin yönlendirilmiş hareketi elektrik akımını oluşturur

Batarya, iki terminali arasında bir elektromotor kuvveti yaratan üreteçtir. Bu kuvvet sonucunda bakır içindeki serbest elektronlar bataryanın pozitif terminaline doğru hareketlenir ve serbest elektronların yönlendirilmiş akışı, yani elektrik akımı elde edilir. Elektrik akımının yönü, elektron akış yönünün tersi olarak kabul edilir.

Şekil.2.1’de görülen bakır materyalin kesit alanından, $\Delta t = t_2 - t_1$ zaman aralığında, geçen toplam yük Δq ise, $t_2 - t_1$ zaman aralığında bu materyal üzerinden geçen ortalama elektrik akım şiddeti

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} \quad (1.1)$$

ile tarif edilir. Bu ifade birim zamanda transfer edilen ortalama yük miktarıdır. Açıktır ki, $t_2 - t_1$ zaman aralığı boyunca, yük transfer oranı sabit olmayabilir. Şayet serbest elektronlar üzerine uyguladığınız elektromotor kuvveti zamanla değişiyorsa, bu durumda, transfer olan yük miktarı da zamanla değişecektir. Bu hal için (1.1) eşitliği yine bir ortalama değer verecektir. Akımın bir ortalama değerini değil ama, her andaki değerini ifade edebilmek için, yani anlık değerini belirleyebilmek için, zaman aralıklarının çok küçük seçilmesi gerekecektir. Buna göre (1.1) eşitliği,

$$i(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt} \text{ (Amper)} \quad (1.2)$$

şekline dönüşecektir. O halde, elektrik akım şiddeti, yük miktarının zamana göre değişim oranıdır. Akım şiddeti birimi Kulon/saniye olmakla birlikte bu birim, elektrodinamiğin gelişmesinde önemli katkı sağlamış Andre Marie Ampere’e ithafen Amper olarak adlandırılmıştır.

ÖRNEK PROBLEM 1.3:

Bir devre elemanının üzerinden geçen yük miktarı, $q(t) = 10e^{-10t}$ mC ise, bu devre elemanı üzerindeki akımın zamana bağlı ifadesini ve $t = 0.1$ s’deki değerini bulunuz.

1.BÖLÜM: DEVRE DEĞİŞKENLERİ ve DEVRE ELEMANLARI

Çözüm:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = 1 \times 10^{-3} \frac{d}{dt} (10e^{-10t}) = -100e^{-10t} \text{ mA}$$

$$t = 0.1 \text{ s} \quad \Rightarrow \quad i(0.1) = -100e^{-10(0.1)} = -36.78 \text{ mA}.$$

Şayet akım ifadesi biliniyorsa, $t_2 - t_1$ gibi bir zaman aralığında transfer edilen yük miktarı, (1.2) eşitliğinin her iki tarafının $t_2 - t_1$ zaman aralığında integrali alınarak bulunabilir;

$$q(t_2) - q(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} i(t) dt. \quad (1.3)$$

ÖRNEK PROBLEM 1.4:

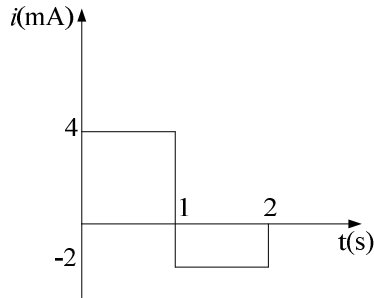
Bir devre elemanı üzerinden geçen akım $i(t) = 2t^2 - 1$ mA olduğuna göre 2. ve 4. saniyeler arasındaki zaman aralığında bu devre elemanı üzerinden geçen yük miktarını bulunuz.

Çözüm:

$$q(4) - q(2) = 1 \times 10^{-3} \int_2^4 (2t^2 - 1) dt = 1 \times 10^{-3} \left(\frac{2t^3}{3} - t \right) \Big|_2^4 = 35.33 \text{ mC}.$$

ÖRNEK PROBLEM 1.5:

Bir devre elemanı üzerinden geçen akımın zamanla değişimi aşağıdaki grafikte verilmiştir. Bu devre elemanı üzerinden geçen toplam yükü bulunuz.



Çözüm:

Akımın zamana bağlı ifadesi:

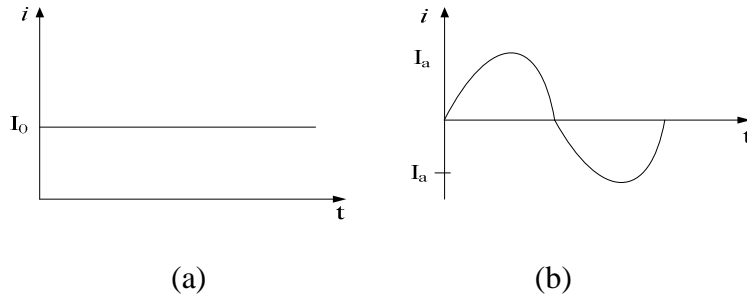
$$i(t) = \begin{cases} 4 \text{ mA}, & 0 \leq t \leq 1 \\ -2 \text{ mA}, & 1 < t \leq 2 \end{cases}$$

olduğundan toplam yük,

1.BÖLÜM: DEVRE DEĞİŞKENLERİ ve DEVRE ELEMANLARI

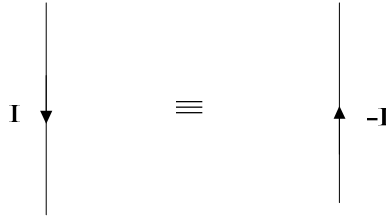
$$Q_T = q(2) - q(0) = 1 \times 10^{-3} \int_0^1 4dt - 1 \times 10^{-3} \int_1^2 2dt = 1 \times 10^{-3} (4t|_0^1 - 2t|_1^2)$$
$$Q_T = 2 \text{ mC.}$$

Yük miktarındaki değişim zamanın her hangi bir fonksiyonu şeklinde olabilir ancak, özellikle iki durum önemlidir: Şayet yükün zamanla değişimi sabitse, akım sabit bir değere sahip olacaktır. Sabit akım, doğru akım (dc) olarak isimlendirilir ve I (gerilim için V) ile ifade edilir. Şayet yükün zamanla değişimi sinüsoidal ise akımın formu da sinüsoidal olacaktır. Sinüsoidal akım, alternatif akım (ac) olarak adlandırılır. Zamanla değişen akım genel olarak i (gerilim için v) ile gösterilir. Şekil.1.3'de doğru akım ve alternatif akım formları görülmektedir.



Şekil.1.3: (a) Doğru akım (b) alternatif akım

Elektrik akımının yönü farklı şekillerde ifade edilebilir. Şekil.1.4'de pozitif akım ve negatif akım olarak isimlendirilen iki farklı ifade tarzı görülmektedir.



Şekil.1.4: Pozitif akım ve negatif akım gösterimleri

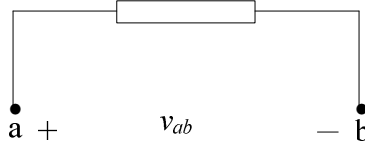
1.4. GERİLİM (VOLTAJ)

İletken içinde elektrik yükünün bir noktadan diğer bir noktaya hareketi için dışarıdan bir kuvvet uygulanması gerekir. Bu, elektrik yükünün transferi sırasında bir iş yapılması ya da bir miktar enerjinin harcanması demektir. Şekil.1.2'de bu kuvvet bataryanın terminalleri arasında (iletken içinde) oluşan elektromotor kuvvetidir. a ve b gibi iki nokta arasındaki potansiyel fark v_{ab} , a noktasından b noktasına, bir birimlik yükün taşınması için gerekli enerji ya da yapılan iş olarak tanımlanır ve birimi Volt'dur. O halde Δq yükünü a noktasından b noktasına taşımak için harcanan enerji Δw Jul ise, a-b noktaları arasındaki potansiyel farkı,

1.BÖLÜM: DEVRE DEĞİŞKENLERİ ve DEVRE ELEMANLARI

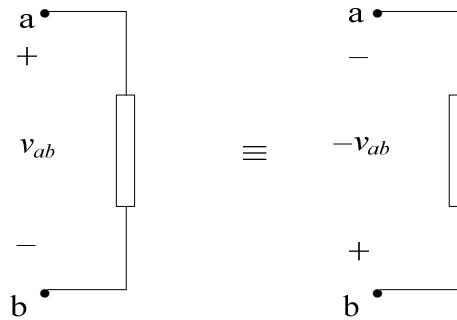
$$v_{ab} = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta q} = \frac{dw}{dq} \text{ (V)} \quad (1.4)$$

olacaktır. Bu ifadede, yükün diğer yük dağılımlarını etkilememesi için Δq çok küçük seçilmektedir. Bu tanıma göre bir devre elemanı üzerindeki voltaj (ya da potansiyel fark) o devre elemanı üzerinden bir birimlik elektrik yükünü transfer etmek için gerekli enerji miktarıdır. Şekil.1.5’de a-b terminalleri arasındaki v_{ab} potansiyel farkının gösterimi verilmiştir.



Şekil.1.5: v_{ab} geriliminin polaritesi

Şekil.1.5’deki gösterimle, a terminalinin potansiyelinin b terminaline göre v_{ab} kadar yüksek olduğu ya da, b terminalinin potansiyelinin a terminaline göre v_{ab} kadar düşük olduğu ifade edilmektedir. Bu, bir birim negatif elektrik yükünü b terminalinden a terminaline taşımak için v_{ab} Jul’lük bir iş yapılması gerektiğini ifade eder. Şekil.1.6’da iki farklı polarite ifade tarzı gösterilmiştir.



Şekil.1.6: Gerilimin polaritesinin farklı ifade tarzları

ÖRNEK PROBLEM 1.6:

Bir a noktasından bir b noktasına 4 Kulon’luk yükü transfer etmek için 20 jul enerji harcanmaktadır. Bu iki nokta arasındaki v_{ab} potansiyel farkını bulunuz.

Çözüm:

$$v_{ab} = \frac{\Delta w}{\Delta q} = \frac{20}{4} = 5 \text{ V.}$$

Şayet yük -4 Kulon olsaydı, $v_{ab} = -5$ V olacağına dikkat ediniz.

1.5.GÜÇ

Elektrik devre analizinde akım ve gerilim, iki temel devre değişkeni olarak tanımlanır. Ancak birçok durumda, bir devre elemanının gücü ya da ürettiği veya tükettiği enerji miktarının belirlenmesi gerekir. Hem güç hem de enerji, akım ve gerilim değişkenleri cinsinden ifade edilebilmekte ve bu nedenle ikincil değişkenler olarak adlandırılmaktadırlar. Güç, birim zamanda üretilen ya da tüketilen enerji miktarı olup birimi Vat'dır (W):

$$p(t) = \frac{dw}{dt} . \quad (1.5)$$

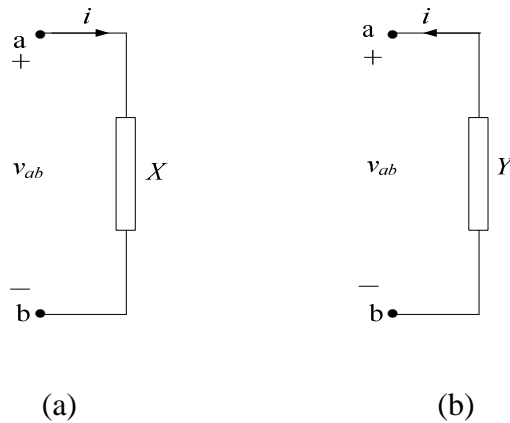
Türevin zincirleme kuralı kullanılarak (1.5) eşitliği aşağıdaki gibi yazılırsa,

$$p(t) = \frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dq} \frac{dq}{dt} \quad (1.6)$$

ve (1.2), (1.4) eşitlikleri de kullanılarak

$$p(t) = v(t)i(t) \quad (1.7)$$

elde edilir. O halde, bir devre elemanının gücü, o devre elemanı üzerinden geçen akımla yine o devre elemanı üzerindeki potansiyel farkın çarpımı ile ifade edilebilmektedir. Güç, akımın yönü ve gerilimin polaritesine bağlı olarak pozitif ya da negatif olabilir. Şayet akım bir devre elemanına, Şekil.1.7.a'da görüldüğü gibi, gerilimin pozitif olduğu terminalinden giriyorsa güç pozitifdir. Bu durumda o devre elemanı enerji tüketen (alıcı) bir elemandır. Şayet akım bir devre elemanına, Şekil.1.7.b'da görüldüğü gibi, gerilimin negatif olduğu terminalinden giriyorsa güç negatiftir ve söz konusu devre elemanı bu durumda enerji üreten (üreteç) bir elemandır.



Şekil.1.7. (a): $p = +vi$, X enerji tüketen bir devre elemanı, (b): $p = -vi$, Y enerji üreten bir devre elemanıdır

1.BÖLÜM: DEVRE DEĞİŞKENLERİ ve DEVRE ELEMANLARI

Bir elektrik devresinde üretilen toplam enerji ya da güç, o elektrik devresinde harcanan toplam enerjiye ya da güce her zaman eşittir. Bu prensip enerjinin korunumu kanunu olarak isimlendirilir ve,

$$\sum p(t) = 0 \quad (1.8)$$

ile ifade edilir.

1.6.ENERJİ

Enerji iş yapabilme yeteneği olarak tarif edilir ve birimi Jul'dur. (1.5) eşitliğinin her iki tarafı bir $t_1 - t_2$ zaman aralığında integrallenirse, gücü $p(t)$ olan bir devre elemanının bu zaman aralığında ürettiği ya da tükettiği enerji miktarı aşağıdaki eşitlikle belirlenir.

$$w(t_2) - w(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt \quad (1.9)$$

ÖRNEK PROBLEM.1.7:

Bir devre elemanının pozitif terminalinden giren akım

$$i(t) = 3e^{-2t} \text{ mA}, \quad 0 \geq t$$

ve terminalleri arasındaki gerilim

$$v(t) = 6e^{-2t} \text{ V} \quad 0 \geq t$$

ise bu elemanın gücünü ve ürettiği veya tükettiği enerji miktarını bulunuz.

Çözüm:

Pozitif bir akım, devre elemanına pozitif terminalinden girdiğine göre, bu devre elemanı bir alıcıdır ve güç tüketmektedir.

$$p(t) = i(t)v(t) = 1 \times 10^{-3} (3e^{-2t} \cdot 6e^{-2t}) = 18e^{-4t} \text{ mW},$$

ve tükettiği toplam enerji

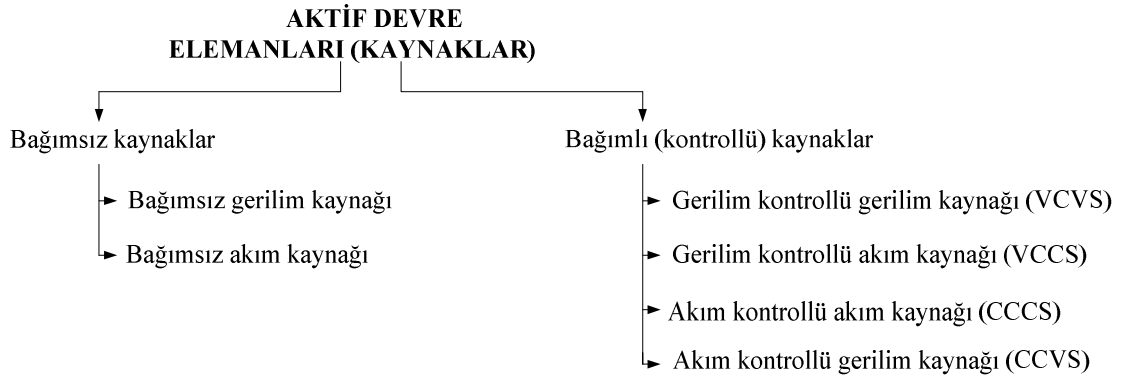
$$w = \int_0^{\infty} p(t) dt = 1 \times 10^{-3} \int_0^{\infty} 18e^{-4t} dt = -4.5 \times 10^{-3} e^{-4t} \Big|_0^{\infty} = 4.5 \text{ mJ. bulunur.}$$

Verilen akım ve gerilim ifadeleri zamanla üstel azalan fonksiyonlar olduğundan, enerji hesaplanırken üst sınır sonsuz seçilmiştir. Yani hesaplanan enerji, alıcının bu akım ve gerilim koşullarında, sonsuz sürede harcayacağı enerjidir. Ancak üst sınırın, örneğin 10 saniye seçilmesi durumunda da aynı sonucun elde edileceğine dikkat ediniz. Zira, güç ifadesi üstel olduğundan, hızla sıfıra yaklaşmaktadır.

1.7.DEVRE ELEMANLARI

Elektrik devre elemanları genel olarak aktif ve pasif olmak üzere iki temel gruba ayrılır. Pasif elemanlar enerji üretme yeteneği olmayan, ancak enerjiyi başka bir forma çeviren ya da depolayan devre elemanlarıdır. Bunlar; dirençler, kapasitörler ve bobinlerdir. Aktif devre elemanları ise enerji üretebilen devre elemanlarıdır ve kaynak ya da üreteç olarak adlandırılırlar. Bazı pratik aktif elemanlar için jeneratörler, akümülatörler ve işlemsel yükselteçler örnek olarak gösterilebilir. Aktif devre elemanları Şekil.1.8’de görüldüğü gibi gruplandırılabilir.

Bağımsız gerilim kaynağı, bağlı olduğu devreden bağımsız olarak, terminalleri arasında sabit bir gerilim üreten, ancak devreye sağladığı akım, devrenin yapısına bağlı olarak değişen kaynaktır. Bağımsız akım kaynağı ise, bağlı olduğu devreden bağımsız olarak sabit bir akım üreten, ancak bağlı olduğu devrenin yapısına bağlı olarak terminal gerilimi değişen kaynaktır.



Şekil.1.8: Aktif devre elemanlarının sınıflandırılması

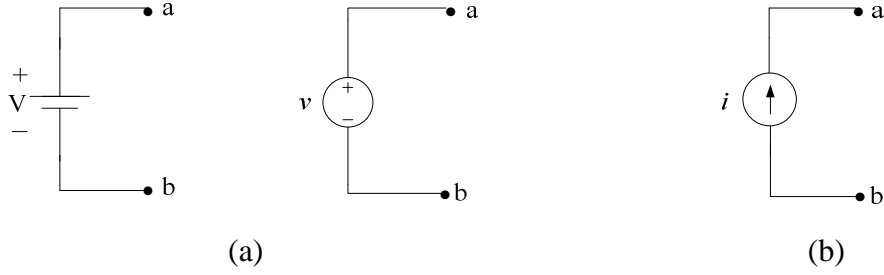
Bağımsız kaynaklar şu özelliklere sahiptirler:

1. Bağımsız gerilim kaynaklarının iç dirençleri çok küçüktür ve ideal olarak sıfır kabul edilir.
2. Bağımsız akım kaynaklarının iç dirençleri çok büyüktür ve ideal olarak sonsuz kabul edilir.
3. Pratik kaynakların hepsi bağımsız gerilim kaynaklarıdır.
4. Bağımsız akım kaynakları pratik kaynaklar değildir, ancak, tasarlanabilirler.

Gerçekte, bir bağımsız kaynağın iç direncinin seviyesi, o kaynağın terminal karakteristiğini ve dolayısıyla tipini belirler. Kaynakların iç dirençlerine bağlı olarak, terminal karakteristiklerinin nasıl değiştiği konusu, 2. bölümde bir örnek problemle tekrar ele alınacaktır.

Devre analizinde bağımsız akım ve gerilim kaynakları için kullanılan semboller Şekil.1.9’da gösterilmiştir. Şekil1.9.a’da görülen ilk kaynak sembolü, dc gerilim kaynağı için kullanılır. İkinci sembol hem dc hem de zaman değişimli gerilim kaynakları için kullanılır. Bu sembol, bir dc kaynak için kullanılıyorsa değeri dc kaynağın sabit değeri olacaktır. Biz, zorunlu bir durum olmadıkça ikinci sembolü kullanacağız. Zira, birinci sembol genellikle pil,

1.BÖLÜM: DEVRE DEĞİŞKENLERİ ve DEVRE ELEMANLARI

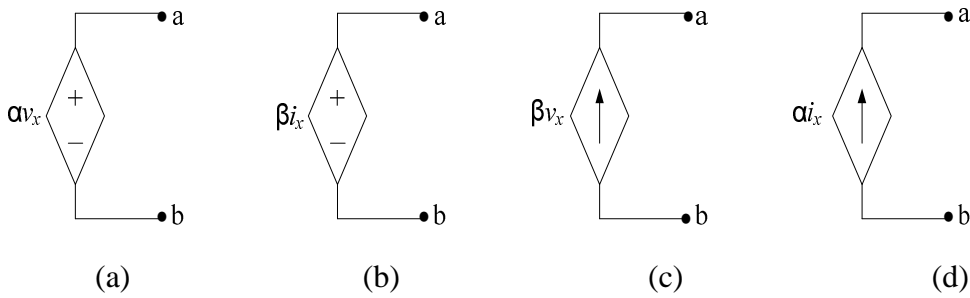


Şekil.1.9: (a) Bağımsız gerilim kaynağı devre sembolleri (b) bağımsız akım kaynağı devre sembolü

akümülatör gibi, düşük gerilim değerli kaynaklar için sıklıkla kullanılmaktadır. Bununla birlikte, bu devre elemanları da ikinci sembolle ifade edilebilir. Şekil.1.9.b'deki akım kaynağı sembolü hem dc hem de zaman değişimli durum için kullanılır. Açıkta ki, dc için kullanılıyorsa, akım kaynağının değeri (i) sabit bir değer, zaman değişimli bir kaynak için kullanılıyorsa, akımın zamana bağlı ifadesi olacaktır.

Bağımlı gerilim kaynağı, terminallerindeki gerilimin, devredeki herhangi bir eleman üzerindeki akım (akım bağımlı gerilim kaynağı) ya da gerilim (gerilim bağımlı gerilim kaynağı) ile kontrol edildiği kaynaktır. Bağımlı akım kaynağı ise, terminallerindeki akımın, devredeki herhangi bir eleman üzerindeki akım (akım bağımlı akım kaynağı) ya da gerilim (gerilim bağımlı akım kaynağı) ile kontrol edildiği kaynaktır. Bu kaynaklar genellikle ilgili terimlerin İngilizcedeki karşılıklarının baş harfleri ile kısaltıldıklarından, Şekil.1.8'de bu kısaltmalarla birlikte verilmişlerdir.

Bağımlı gerilim ve akım kaynakları için kullanılan devre sembolleri Şekil.1.10'da görülmektedir.

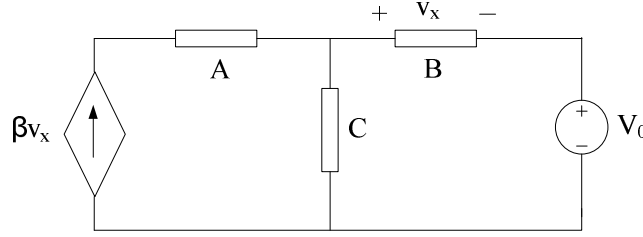


Şekil.1.10: (a) Gerilim bağımlı gerilim kaynağı, (b) akım bağımlı gerilim kaynağı, (c) gerilim bağımlı akım kaynağı, (d) akım bağımlı akım kaynağı

Şekil.1.10'da α ve β birer sabit, i_x ve v_x ise, a-b terminallerine bağlı devrelerdeki bir kol akımı ve gerilimidir. Bu semboller hem dc hem de zaman değişimli kaynaklar için kullanılır.

Şekil.1.11'de bir gerilim bağımlı akım kaynağı içeren elektrik devresi örnek olarak verilmiştir. Bu devrede B elemanı üzerindeki gerilim v_x Volt olup, bağımlı akım kaynağının devreye sağladığı akım, β bir sabit olmak üzere, βv_x Amper olacaktır. Ancak burada dikkat edilmelidir ki, bağımlı akım kaynağının bu akımı üretmesi için, öncelikle B elemanı üzerinde

1.BÖLÜM: DEVRE DEĞİŞKENLERİ ve DEVRE ELEMANLARI

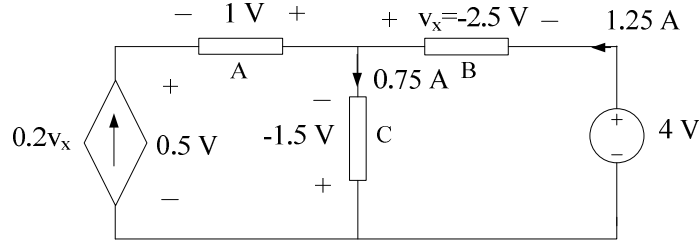


Şekil.1.11: Gerilim bağımlı akım kaynağı içeren örnek devre

bir gerilim oluşması gerekir: Bunun içinde, devrede bağımsız kaynakların olması zorunludur.

ÖRNEK PROBLEM.1.8:

Şekil.1.12’de verilen devrede devre elemanlarının güçlerini ve bu elemanların üreteç mi, alıcı mı olduklarını belirleyiniz.



Şekil.1.12: Problem 1.8 devresi

Çözüm:

Her eleman için $P = V \cdot I$ ifadesini kullanılarak:

$$P_{4V} = -4 \cdot (1.25) = -5 \text{ W (5 W'lık güç üretiyor)}$$

$$P_B = -(-2.5) \cdot 1.25 = +3.125 \text{ W (3.125 W'lık güç tüketiyor)}$$

$$P_C = -(-1.5) \cdot 0.75 = +1.125 \text{ W (1.125 W'lık güç tüketiyor)}$$

$$P_A = -(1) \cdot (0.2 v_x) = -(1) \cdot (0.2 \cdot (-2.5)) = +0.5 \text{ W (güç tüketiyor)}$$

$$P_{0.2v_x} = -(0.5) \cdot 0.2 v_x = -(0.5) \cdot 0.2 \cdot (-2.5) = +0.25 \text{ W (güç tüketiyor)}$$

Üretilen güç toplamının, tüketilen güç toplamına eşit olduğuna dikkat ediniz. Bağımlı akım kaynağı bir alıcı gibi davranıp güç tüketmektedir. Bunun nedeni üzerinde oluşan terminal geriliminin, akımın girdiği terminalde pozitif olmasıdır.

1.BÖLÜM: DEVRE DEĞİŞKENLERİ ve DEVRE ELEMANLARI

PROBLEMLER

1.1. -4.6 Kulon'luk bir elektron bulutu kaç adet elektron içerir, bulunuz.

1.2. Bir devre elemanı üzerindeki yük miktarı

a) $q(t) = t^2 \text{ C}$,

b) $q(t) = 1 - e^{-5t} \text{ mC}$

c) $q(t) = 0.1 \sin 100t$

ise bu eleman üzerinden geçen akımı bulunuz.

1.3. Bir devre elemanı üzerindeki akım

a) $i(t) = 10(1 + e^{-t}) \text{ A}$, $q(0) = 0$

b) $i(t) = 50 \cos 100t \text{ A}$, $q(0) = 0$

c) $i(t) = e^{-t} \sin t \text{ mA}$, $q(0) = 1 \text{ mC}$

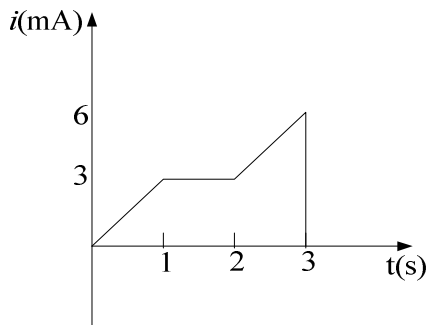
ise, devre elemanı üzerinden geçen yük miktarının ifadesini bulunuz.

1.4. Bir devre elemanı üzerindeki akım

$$i(t) = 4t^2 - 2t + 1 \text{ mA}$$

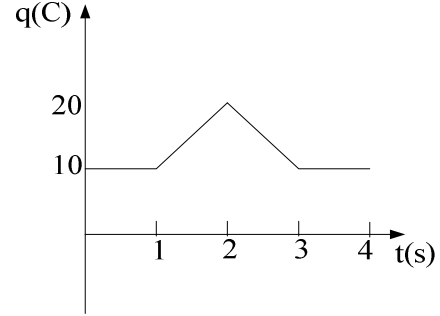
ise 1. ve 3. saniyeler arasındaki zaman aralığında bu eleman üzerinden geçen yük miktarını bulunuz.

1.5. Bir kaynağın devreye sağladığı akımın zamana bağlı değişimi Şekil.1.13' de verilmiştir. Bu kaynağın 3. saniye sonunda transfer ettiği yük miktarını bulunuz.



Şekil.1.13: Problem 1.5.

1.6. Bir devre elemanı üzerinden geçen yük miktarının zamana bağlı değişimi Şekil.1.14'de verilmiştir. Bu eleman üzerinden geçen akımın zamana göre değişim grafiğini çiziniz. Akımın zamana bağlı ifadesini bulunuz.



Şekil.1.14: Problem 1.6.

1.7. Bir devre elemanının pozitif terminalinden giren akımın ve terminal geriliminin ifadeleri $t \geq 0$ için

$$i(t) = 10 \cos 400t \text{ mA}, \quad v(t) = 2 \cos 400t \text{ V}$$

ve $t < 0$ için her ikisi de sıfır ise, bu devre elemanının gücünü ve 10 ms sonunda tükettiği enerjiyi bulunuz.

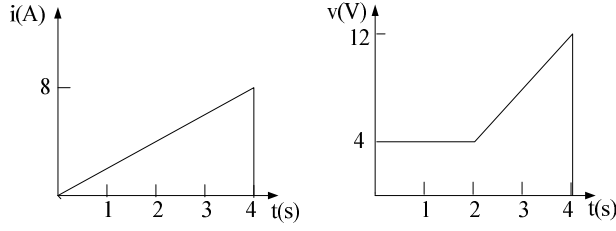
1.8. Bir devre elemanının pozitif terminalinden giren akımın ve terminal geriliminin ifadeleri

$$i(t) = \cos 4t \text{ A} \text{ ve } v(t) = 20e^{-t} \text{ V}$$

ise, bu devre elemanının üzerinden geçen toplam yük miktarını ve harcanan toplam enerjiyi bulunuz. ($t < 0$ için terminal akım ve gerilimi sıfırdır).

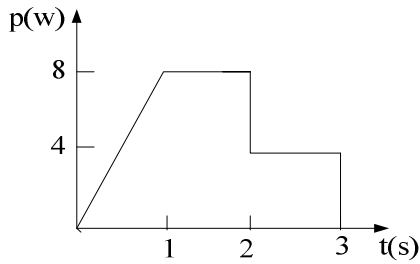
1.9. Şekil.1.15'de verilen akım ve gerilim formları bir devre elemanı üzerindeki terminal akımı ve terminal gerilimi ise, bu elemanın güç ifadesini ve harcadığı toplam enerjiyi bulunuz.

1.BÖLÜM: DEVRE DEĞİŞKENLERİ ve DEVRE ELEMANLARI



Şekil.1.15: Problem 1.9

1.10. Şekil.1.16' da bir kaynağın güç eğrisi verilmiştir. Kaynağın, $0 \leq t \leq 3$ s aralığında ürettiği enerji miktarını bulunuz.



Şekil.1.16: Problem 1.10 devresi

1.11. Bir devre elemanının terminal gerilimi, üzerinden geçen akımın integrali ile orantılı olup, orantı sabiti 3 dür. Bu elemanın üzerinden geçen akımın ifadesi,

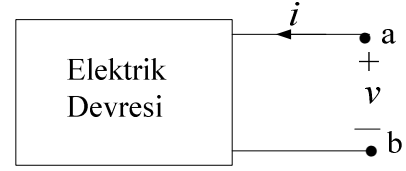
$$i(t) = 5 + e^{-0.2t} \text{ mA}, \quad t \geq 0$$

ise, $t=3$ s için gücünü bulunuz.

1.12. Şekil.1.17'de görülen elektrik devresinin terminallerindeki akım ve gerilim,

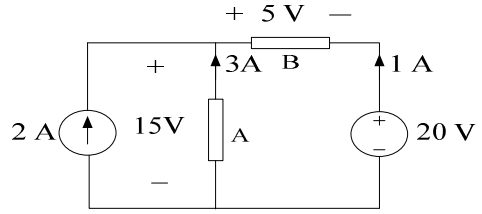
- a) $i = 15$ A, $v = 50$ V,
- b) $i = -4$ A, $v = 40$ V,
- c) $i = -6$ A, $v = -80$ V.

ise, devrenin gücünü bulunuz.



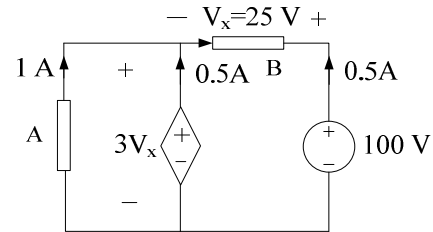
Şekil.1.17: Problem 1.12

1.13. Şekil.1.18'de verilen devrede devre elemanlarının güçlerini bulunuz.



Şekil.1.18: Problem 1.13

1.14. Şekil.1.19' de verilen devrede devre elemanlarının güçlerini bulunuz.



Şekil.1.19: Problem 1.14 devresi

1.15. Bir batarya ile 100 W'lık bir ampul 150 saat süre ile beslenebilmektedir. Bataryada depolanabilen enerji miktarını Jul cinsinden bulunuz.

2.BÖLÜM: TEMEL YASALAR

2.1. GİRİŞ

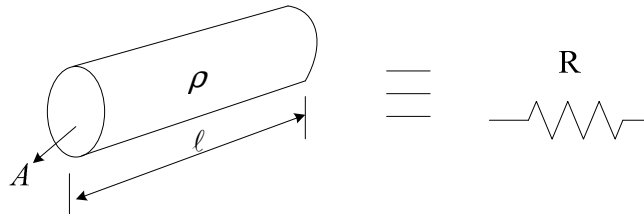
Bir elektrik devresinde temel değişkenler akım ve gerilimdir. Bu temel değişkenler arasındaki ilişkileri ve bir devre için aynı cins değişkenler arasındaki bağıntıları tanımlayan üç temel yasa, *Ohm yasası* ve *Kirchhoff'un akım ve gerilim yasalarıdır*. Herhangi bir elektrik devresinin analizi, bu temel yasalar uygulanarak yapılabilir. Ancak, analizi sistematikleştirmek amacıyla bu yasaları temel alan bazı analiz metotları geliştirilmiş olup, bu metotlar 3. bölümde ele alınacaktır.

2.2. DİRENÇ VE OHM YASASI

2.2.1. DİRENÇ

Her hangi bir materyal, üzerinden elektrik akımı geçirildiğinde, materyal tarafından bu akıma karşı bir zorluk gösterilir. Materyalin bu özelliği atomik yapısı ile ilgilidir. Atomik yapıya bağlı olarak, elektrik akımına karşı gösterilen zorluk az ya da çok olabilir.

Materyalin elektrik akımına karşı gösterdiği zorluk direnç olarak adlandırılır ve R ile gösterilir. Direnci çok düşük olan materyaller iyi iletken malzemeler, direnci çok yüksek olan malzemeler ise iyi yalıtkan malzemelerdir. Bir malzemenin direnci, uzunluğuna, kesit alanına ve öz direncine bağlıdır. Şekil.2.1'de uzunluğu ℓ , kesit alanı A ve öz direnci ρ olan bir materyal ve bu materyalin, devre sembolü olarak, direnç eşdeğeri görülmektedir.



Şekil.2.1: R direncine sahip materyal ve devre sembolü

R direncinin ifadesi,

$$R = \rho \frac{\ell}{A} \quad (2.1)$$

olup, birimi Ohm (Ω) dur. Özdirenç ise Ohm·metre ($\Omega \cdot m$) birimi ile ölçülür. Bakır gibi iyi iletken materyallerin özdirençleri çok düşükken ($1.72 \times 10^{-8} \Omega \cdot m$), teflon gibi iyi yalıtkan materyallerin özdirenci çok yüksektir ($3 \times 10^{12} \Omega \cdot m$).

Elektrik devrelerinde, devre elemanlarını birbirleriyle bağlamak amacı ile kullanılan iletkenler (bağlantı elemanları) çok küçük dirence sahip elemanlar olduklarından, devre analizinde dirençleri göz önüne alınmaz. Bir malzemenin direnci çevre koşullarına (sıcaklık) bağlı olarak da değişir. Ancak bu değişim miktarı küçük olduğundan, birçok analizde yok sayılır. Bu şekilde kabul edilen bir direnç ideal direnç olarak adlandırılır. Elektrik devrelerinde devre elemanı olarak kullanılan dirençler genellikle metal alaşımları ve karbon bileşiklerinden imal edilirler. Bunun yanı sıra, devrede kullanılan herhangi bir alıcının da, fiziksel yapısından kaynaklanan bir dirence sahip olacağı açıktır.

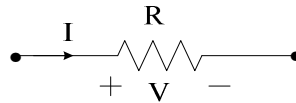
2.2.2. OHM YASASI

Bir direncin üzerinden geçen akım ile, terminalleri arasındaki gerilim arasındaki bağıntı, Georg Simon Ohm tarafından bulunmuş olmasından dolayı Ohm yasası olarak adlandırılır. Ohm yasasına göre, bir materyal üzerindeki gerilim, materyal üzerinden geçen akıma oranlıdır ve aralarındaki orantı sabiti materyalin direnci kadardır. Matematiksel olarak, Ohm yasasının ifadesi:

$$V = IR \quad (2.2)$$

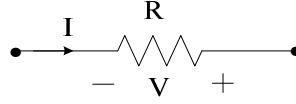
olup, bu ifade direnç terminal eşitliği olarak da bilinir.

Elektrik akımı, potansiyeli yüksek olan noktadan potansiyeli düşük olan noktaya doğru akar. Buna göre direnç üzerine akımın girdiği terminal, çıktığı terminale göre her zaman daha yüksek bir potansiyele sahip olmalıdır. Şekil.2.2'de bir dirence ilişkin terminal gerilim potansiyeli ve terminal akım yönü gösterilmiştir.

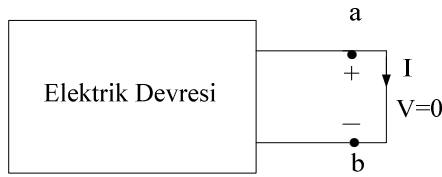


Şekil.2.2:Direnç terminal gerilimi ve akımı ($V = IR$)

Şayet akım dirence, gerilimin negatif olduğu terminalden giriyorsa, bu durumda (2.2) eşitliği $V = -IR$ olarak ifade edilmelidir. Açıktır ki bu durum Ohm yasasına aykırı olmayıp, gerçekte verilen gerilim potansiyelinin, Şekil.2.3'de görüldüğü gibi, ters olduğunu ifade etmektedir.

Şekil.2.3:Direnç terminal gerilimi ve akımı ($V = -IR$)

Direnç değeri, sıfır ile sonsuz arasında bir değer olabilir. Devre teorisinde, sıfır ve sonsuz direnç özellikle önemlidir. Şekil.2.4.a'da görüldüğü gibi, bir devrede, bir terminal çifti için $R=0$ durumu, o terminal çiftinin kısa devre olduğunu ifade eder ve bu durumda, Ohm yasasından da kolayca görülebileceği gibi terminal gerilimi sıfır olur.



(a)

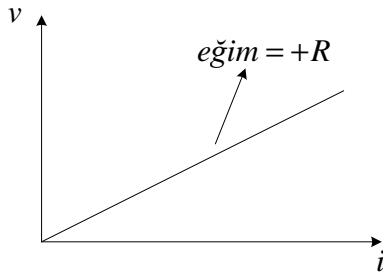


(b)

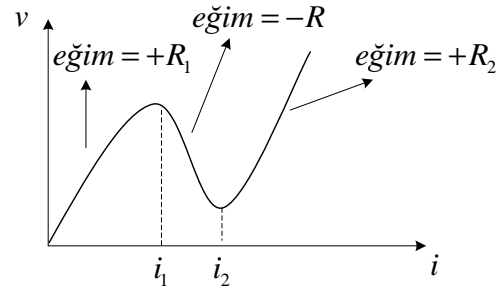
Şekil.2.4: (a) Kısa devre $R = 0$ (b) açık devre $R = \infty$

Şekil.2.4.b'de ise açık devre edilmiş bir terminal çifti verilmiştir. Bu terminalde akım sıfır olacağından, yine Ohm yasası ile, açık devreye ilişkin direnç kolayca sonsuz bulunur. Buna göre, kısa devre, direnci sıfır olan bir devre elemanı, açık devre ise, direnci sonsuz olan bir devre elemanı olarak kabul edilebilir.

Fiziksel materyallerin dirençleri pozitiftir. Şekil.2.5.a'da görüldüğü gibi, bunun anlamı, materyale ilişkin akım-gerilim eğrisinin eğiminin pozitif olmasıdır. Yani akım arttıkça gerilim de artmakta, akım azaldıkça gerilim de azalmaktadır.



(a)



(b)

Şekil.2.5: (a) Direnç akım-gerilim eğrisi (b) Tünel diyot akım-gerilim eğrisi

Şekil.2.5.b'de ise bir elektronik devre elemanı olan tünel diyota ilişkin akım-gerilim eğrisi görülmektedir. i_1 , i_2 akımları arasında eğri eğimi negatiftir. Yani akım artarken gerilim değeri azalmaktadır. Diğer iki bölgede eğimler pozitiftir.

İlerde değinileceği üzere, bazı devrelerin eşdeğerlerinde de negatif direnç kavramı ortaya çıkabilmektedir. Eşdeğer devrede negatif direncin anlamı, ilgili konularda ayrıca incelenecektir.

2.2.3. İLETKENLİK

Direncin tersi iletkenliktir. Direnç, elektrik akımına karşı materyalin gösterdiği zorluk olarak tarif edilmişti: buna göre iletkenlik de materyalin elektrik akımını iletebilme kabiliyeti olarak tarif edilebilir. İletkenlik G ile sembolize edilir ve siemens (S) birimi ile ölçülür. Direnç ile iletkenlik arasındaki ilişki:

$$G = \frac{1}{R} \quad (2.3)$$

şeklindedir. Ohm yasası iletkenlik cinsinden de aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$I = GV \quad (2.4)$$

Bir devre elemanının gücü, terminal gerilimi ile üzerinden geçen akımın çarpımı olarak tanımlanmıştı. Buna göre direncin gücü,

$$P = VI \quad (2.5)$$

ve (2.2) eşitliği (2.5) eşitliğinde kullanılarak,

$$P = I^2 R = \frac{V^2}{R} \quad (2.6)$$

veya iletkenlik cinsinden,

$$P = V^2 G = \frac{I^2}{G} \quad (2.7)$$

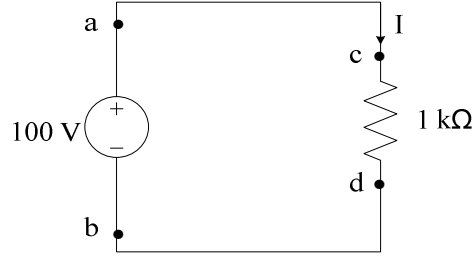
elde edilir. Dirence ilişkin güç ifadelerindeki, direnç akımı ve geriliminin kareleri nedeniyle direnç gücü her zaman pozitif olacaktır. Başka bir deyişle, direnç her zaman güç tüketen bir devre elemanıdır. Güç üretmez veya depolamaz ancak, elektrik enerjisini ısı enerjisine dönüştürür.

ÖRNEK PROBLEM 2.1:

Şekil.2.6'da verilen devrede I akımını bulunuz.

Cözüm:

Gerilim kaynağının a-b terminalleri arasındaki gerilim farkı 100 Volt'tur. a-c ve b-d noktaları iletken bağlantı elemanları ile birleştirilmiştir. Bu iletkenlerin dirençleri çok küçük olup ideal olarak sıfır kabul edilir. Bu nedenle, üzerlerinden geçen akım sonucunda bir gerilim



Şekil.2.6: Problem 2.1 devresi

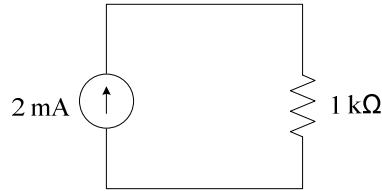
düşümü olmaz ($V = IR = 0$). Böylece a noktasının potansiyeli ile c noktasının potansiyeli, b noktasının potansiyeli ile de d noktasının potansiyeli aynıdır. Başka bir deyişle gerilim kaynağının potansiyeli, direnç terminal gerilimine eşittir. Böylece direnç terminal eşitliğinden:

$$I = \frac{V_R}{R} = \frac{100}{1000} = 0.1 \text{ A}$$

elde edilir.

ÖRNEK PROBLEM 2.2:

Şekil.2.7’da verilen devrede direncin gücünü ve kaynağın gücünü bulunuz.



Şekil.2.7: Problem 2.2 devresi

Çözüm:

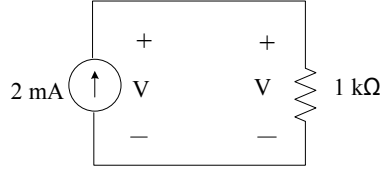
Akım kaynağı, direnç üzerinden 2 mA akım geçirmektedir. Direncin gücü (2.6) eşitliğinden,

$$P = I^2 R = (2 \times 10^{-3})^2 \times 1000 = 4 \text{ mW}$$

bulunur. Şekil.2.8’de görüldüğü gibi, bu akım direnç üzerinde, akımın girdiği terminal pozitif olacak şekilde

$$V = IR = 2 \times 10^{-3} \times 1000 = 2 \text{ V}$$

gerilim düşümü oluşturur. Bu gerilim, akım kaynağı terminallerinde görüleceğinden akım kaynağının gücü,



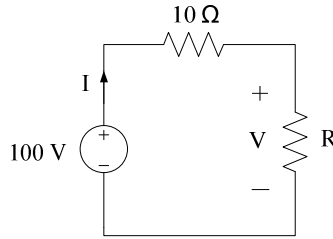
Şekil.2.8: Akım kaynağının terminal gerilimi

$$P = -VI = -2 \cdot 2 \times 10^{-3} = -4 \text{ mW}$$

bulunur. Güç ifadesindeki eksi işareti, akım kaynağının, akımın girdiği terminalinde gerilimin negatif olmasından ileri geldiğini ve negatif gücün, devre elemanının güç üretmesi anlamına geldiğini hatırlayınız. Kolayca anlaşılacağı gibi, akım kaynağının ürettiği güç dirençte harcanmaktadır.

ÖRNEK PROBLEM 2.3:

Şekil.2.8’de verilen devrede kaynağın gücü 400 W ise, R direncinin iletkenliğini bulunuz.



Şekil.2.8: Problem 2.3 devresi

Çözüm:

Kaynağın güç ifadesinden devre akımı bulunur:

$$I = \frac{P}{V} = \frac{400}{100} = 4 \text{ A.}$$

10 Ω’luk direncin harcadığı güç,

$$P_{10\Omega} = 10I^2 = 4^2(10) = 160 \text{ W}$$

ve R direncinin harcadığı güç ise

$$P_R = P - P_{10\Omega} = 400 - 160 = 240 \text{ W}$$

olacaktır. R direncinin üzerinden geçen akım ve harcadığı güç bilindiğinden, değeri

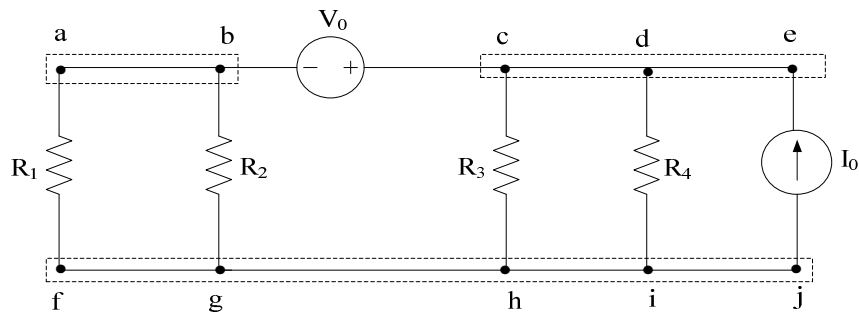
$$P_R = I^2 R = 240 \quad \Rightarrow \quad R = \frac{P_R}{I^2} = \frac{240}{16} = 15 \text{ } \Omega; \quad \text{ve} \quad G = \frac{1}{R} = \frac{1}{15} = 0.0666 \text{ S bulunur.}$$

2.3. KIRCHHOFF YASALARI

Ohm yasası, bir direnç için terminal akım-gerilim ilişkisini ifade eder, ancak karmaşık devrelerin analizinde, bu terminal eşitliği yeterli değildir. Elektrik devrelerinde aynı türden devre değişkenleri arasındaki bağıntıları ifade eden diğer iki temel yasa Gustav Robert Kirchhoff tarafından ortaya konulmuş, Kirchhoff akım yasası (KAY) ve Kirchhoff gerilim yasasıdır (KGY). Bu yasaları incelemeyi önce, yasaların anlaşılmasında önemli olan çevrim, kol ve düğüm kavramları üzerinde durulacaktır.

2.3.1. ÇEVİRİM, KOL ve DÜĞÜM KAVRAMLARI

Şekil.2.9'da verilen devreyi göz önüne alalım: Devredeki her devre elemanı, bir kol oluşturur. Verilen devrede a-f, b-g, c-h, d-i, e-j ve b-c birer kol iken, örneğin a-b bir kol değildir. Zira, bu iki nokta arasında, ideal olarak direnci sıfır olan bir bağlantı elemanı kullanılmıştır. Yani, bu iki nokta kısa devre edilmiştir. Buna göre, verilen devre altı kol içermektedir.



Şekil.2.9: Bir elektrik devresinde çevrim, kol ve düğümler

İki yada daha fazla kolun, bir noktada birlikte bağlanmasıyla düğüm elde edilir. Şekilde a, b, c , ..., i ve j ile gösterilen bağlantıların her biri bir düğüm oluşturmazlar. Zira, örneğin a-b arasında bir kısa devre olduğundan, bu iki bağlantı çakıştırılabilir ve tek bir düğüm noktası oluşturulabilirler. Benzer şekilde c, d ve f eklentileri de çakıştırılıp tek bir düğüm ve f, g, h, i, j bağlantıları da çakıştırılarak tek bir düğüm oluşturulabilir. Buna göre, verilen devrede üç düğüm söz konusudur. Dikkat edilirse, düğüm ile aslında, devrede diğerlerinden farklı potansiyele sahip bölgeler kastedilmektedir. Örneğin kesik çizgi içine alınmış a-b bölgesi tek bir potansiyel değerine sahiptir. Aynı şekilde kesik çizgi içindeki c-d-e bölgesi de tek ve bir öncekinden farklı bir potansiyel değerine ve f-g-h-i-j bölgesi de tek ve diğerlerinden farklı bir potansiyele sahiptir. O halde, verilen devre üç düğüme sahiptir.

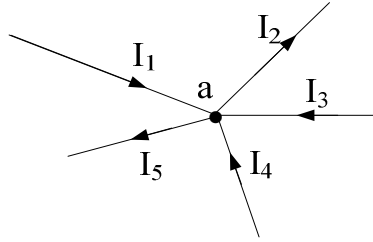
Devredeki her kapalı yol bir çevrim olarak adlandırılır. Örneğin, verilen devrede abgf kapalı yolu bir çevrimdir. Aynı şekilde bchg, cdih, deji de birer çevrimdir. Bunlar içlerinde başka çevrimler içermediklerinden bağımsız çevrim veya göz olarak adlandırılır. Bununla birlikte, verilen devrede bu bağımsız çevrimler dışında başka çevrimler de mevcuttur. abchgf, abcdihgf, abcdeji hgf, bc dihg, bcdeji hg ve cdeji h kapalı yolları bu tip çevrimlerdir. Buna göre, verilen örnek devre dördü bağımsız çevrim olmak üzere, on adet çevrim içermektedir. Bir devredeki bağımsız göz sayısı, o devreden elde edilebilecek bağımsız eşitlik sayısını belirler. Bir devrede kol (k), düğüm (d) ve bağımsız çevrim (ç) sayıları arasında, $K=d+\ç-1$ bağıntısı vardır.

2.3.1. KIRCHHOFF'UN AKIM YASASI (KAY)

Kirchhoff'un akım yasası, bir elektrik devresinde, herhangi bir düğüm noktasındaki kol akımlarının cebirsel toplamının her zaman sıfır olduğunu ifade eder. Matematiksel olarak bu yasa,

$$\sum_{k=1}^K I_k = 0 \quad (2.8)$$

ile ifade edilir. Burada K , düğüm noktasında bir arada bağlanmış kol, dolayısıyla kol akımı sayısıdır.



Şekil.2.10: Bir düğüm noktasındaki akımlar

Şekil.2.10'da, 'a' düğümündeki akımlar gösterilmiştir. Düğüm noktasına giren akımlar negatif ve çıkan akımlar da pozitif kabul edilirse, Kirchhoff'un akım yasası uygulanarak,

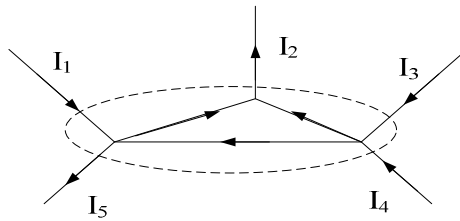
$$-I_1 + I_2 - I_3 - I_4 + I_5 = 0 \quad (2.9)$$

ya da,

$$I_2 + I_5 = I_1 + I_3 + I_4 \quad (2.10)$$

elde edilir ki, bu Kirchhoff'un akım yasasının bir başka ifadesidir: Bir düğüm noktasına giren akımların toplamı, o düğüm noktasından çıkan akımların toplamına eşittir.

Akım yasası, sadece bir düğüm noktasında değil, kapalı herhangi bir bölgede uygulanabilir. Şekil.2.11'de birden fazla düğüm noktasını içeren kesik çizgilerle belirlenmiş kapalı bölgeyi ele alalım:



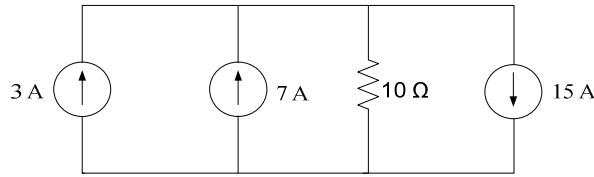
Şekil.2.11: Kapalı bir bölgede Kirchhoff akım yasasının uygulanışı

Kirchhoff'un akım yasası, *elektrik yüklerinin korunum yasası*' dayanır. Bu yasaya göre, herhangi bir sistemdeki yüklerin cebirsel toplamı sabit olup değiştirilemez. Bu nedenle, Şekil.2.11'de kesik çizgilerle belirlenmiş bölge içindeki toplam yük korunacağından, bölge sınırından toplam yük transferi sıfır olmalıdır:

$$-I_1 + I_2 - I_3 - I_4 + I_5 = 0. \quad (2.11)$$

ÖRNEK PROBLEM 2.4:

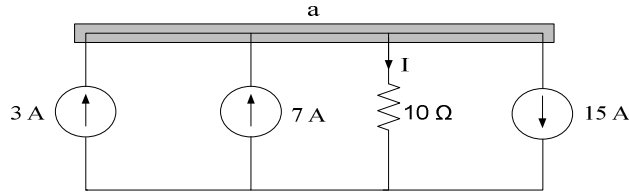
Şekil.2.12'de direnç üzerinden geçen akımı yönüyle birlikte bulunuz.



Şekil.2.12: Problem 2.4 devresi

Cözüm:

Direnç üzerindeki akımın Şekil.2.13'de verildiği yönde olduğunu kabul edelim (a-düğümünün oluşturulmasına dikkat ediniz).



Şekil.2.13: Düğüm noktasının oluşturulması ve yönü rastgele seçilmiş direnç akımı

a-düğüm noktasında Kirchhoff'un akım yasası uygulanırsa,

$$-3 - 7 + I + 15 = 0 \quad \Rightarrow \quad I = -5 \text{ A}$$

bulunur. Rastgele seçilmiş akımın negatif çıkması, gerçekte bu direnç üzerinde seçilen yönün tersinde 5 A'lık bir akım geçtiğini göstermektedir.

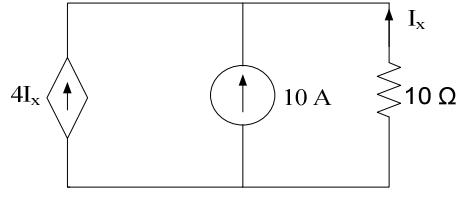
ÖRNEK PROBLEM 2.5:

Şekil.2.14'de verilen devrede I_x akımını bulunuz.

Cözüm:

Üst düğüm noktasında KAY uygulanırsa,

$$-4I_x - 10 - I_x = 0 \quad \Rightarrow \quad I_x = -2 \text{ A}$$



Şekil.2.14: Problem 2.4 devresi

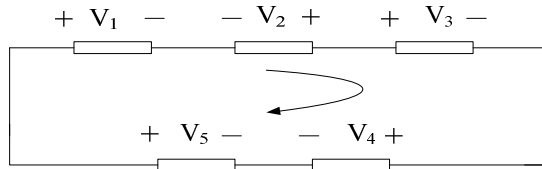
elde edilir. Bir önceki örnekte olduğu gibi direnç üzerindeki akım yönü verilmiş yönün tersi olacaktır. Buna bağlı olarak bağımlı akım kaynağının da aslında verilmiş yönünün tersine 8 A'lık bir akım sağladığına dikkat edilmelidir.

2.3.2. KIRCHHOFF'UN GERLİM YASASI (KGY)

Kirchhoff'un gerilim yasası, bir elektrik devresinin herhangi bir çevrimindeki gerilimlerin cebirsel toplamının her zaman sıfır olduğunu ifade eder. Matematiksel olarak bu yasa,

$$\sum_{k=1}^K V_k = 0 \quad (2.12)$$

ile ifade edilir. Burada K , çevrim üzerindeki gerilim (çoğu kez devre elemanı sayısı) sayısıdır. Şekil.2.15'de verilen çevrimi ele alalım:



Şekil.2.15: Bir çevrim üzerindeki gerilimler

Saat dönüş yönünde hareket edildiği düşünülerek, her elemanın üzerindeki gerilimi, dönüş yönüne göre girilen polarite de dikkate alınarak KGY uygulandığında,

$$V_1 - V_2 + V_3 + V_4 - V_5 = 0 \quad (2.13)$$

veya,

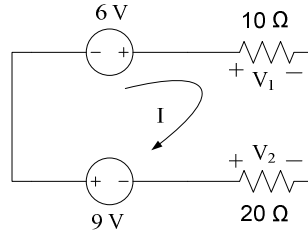
$$V_1 + V_3 + V_4 = V_2 + V_5 \quad (2.14)$$

elde edilir. (2.14) eşitliği, gerilim yasasının bir başka ifadesidir. Bir çevrim üzerindeki toplam gerilim düşümü, o çevrim üzerindeki toplam gerilim yükselmesine eşittir.

Bir devre elemanına akımın girdiği terminal pozitif ise, o devre elemanı üzerinde bir gerilim düşümü söz konusudur. Örneğin, dirence akım hangi terminalden giriyorsa o terminalin gerilimi diğer terminale göre yüksektir. Yani direnç üzerinde her zaman bir gerilim düşümü vardır. Devre elemanına akımın girdiği terminal negatif ise, bu durumda bir gerilim yükselmesi söz konusudur. Açıktır ki bu eleman bir kaynaktır. Buna göre, bir çevrim üzerinde kaynakların toplam gerilim yükseltmeleri, dirençlerin toplam gerilim düşümüne eşit olmalıdır.

ÖRNEK PROBLEM 2.6:

Şekil.2.16’de verilen devrede V_1 ve V_2 gerilimlerini bulunuz.



Şekil.2.16: Problem 2.6 devresi

Çözüm:

Saat dönüş yönünde hareket ederek KGY uygulandığında,

$$-6 + V_1 - V_2 - 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_1 - V_2 = 15,$$

eşitliği elde edilir. Dirençler için Ohm yasasını uygulandığında da,

$$V_1 = 10I \quad \text{ve} \quad V_2 = -20I,$$

bulunur. V_1 , V_2 ifadeleri ilk eşitlikte kullanıldığında,

$$10I - (-20I) = 15 \quad \Rightarrow \quad 30I = 15; \quad I = 0.5 \text{ A}$$

$$V_1 = 10(0.5) = 5 \text{ V}; \quad V_2 = -20(0.5) = -10 \text{ V}$$

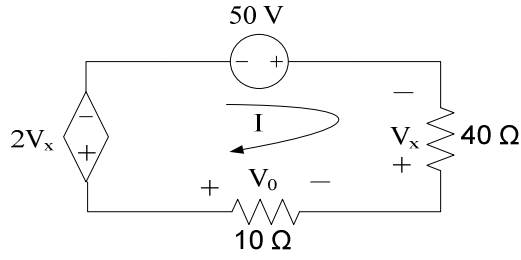
bulunur. Burada V_2 geriliminin, gerçekte şekilde verildiği polaritenin tersinde olduğuna dikkat ediniz.

ÖRNEK PROBLEM 2.7:

Şekil.2.17’de verilen devrede V_0 gerilimini bulunuz.

Çözüm:

KGY uygulanarak,



Şekil.2.17: Problem 2.7 devresi

$$2V_x - 50 - V_x - V_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_x - V_0 = 50$$

ve Ohm Yasası ile de,

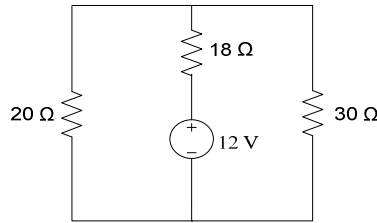
$$V_x = -40I, \quad V_0 = -10I \text{ eşitlikleri elde edilir. Böylece,}$$

$$-40I - (-10I) = 50 \quad \Rightarrow \quad -30I = 50; \quad I = -1.66 \text{ A. ve,}$$

$$V_0 = -10(-1.66) = 16.6 \text{ V. bulunur.}$$

ÖRNEK PROBLEM 2.8:

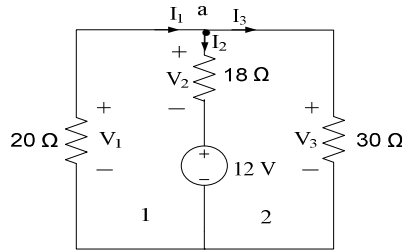
Şekil.2.18’de verilen devrede dirençler üzerindeki gerilimleri bulunuz.



Şekil. 2.18: Problem 2.8 devresi

Çözüm:

Dirençler üzerindeki gerilimler ve kol akımları Şekil.2.19’ da görüldüğü gibi rastgele seçilmiş olsun:



Şekil.2.19: Rastgele seçilmiş gerilim polariteleri ve kol akım yönleri

a-düğüm noktasında KAY'nı uygulanırsa,

$$-I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

eşitliği, 1. çevrim ve 2. çevrimde KGY uygulanarak da,

$$-V_1 + V_2 = -12; \quad -V_2 + V_3 = 12$$

eşitlikleri elde edilir. Ohm yasasını kullanılarak, dirençler üzerindeki gerilimler, kol akımları cinsinden ifade edilirse,

$$V_1 = -20I_1, \quad V_2 = 18I_2, \quad V_3 = 30I_3$$

olacaktır. Gerilim ifadeleri yerlerine yazıldığında, akımlar arasındaki aşağıdaki eşitlikler bulunur:

$$20I_1 + 18I_2 = -12 \Rightarrow I_1 = \frac{-12 - 18I_2}{20},$$

$$-18I_2 + 30I_3 = 12 \Rightarrow I_3 = \frac{12 + 18I_2}{30}.$$

I_1 ve I_2 ifadeleri ilk denklemde kullanılırsa,

$$\frac{12 + 18I_2}{20} + I_2 + \frac{12 + 18I_2}{30} = 0 \Rightarrow 25I_2 = -10; \quad I_2 = -0.4 \text{ A}$$

bulunur. I_2 akımının değeri kullanılarak da

$$I_1 = -0.24 \text{ A}, \quad I_3 = 0.16 \text{ A}, \quad V_1 = 4.8 \text{ V}, \quad V_2 = -7.2 \text{ V} \text{ ve } V_3 = 4.8 \text{ V} \text{ bulunur.}$$

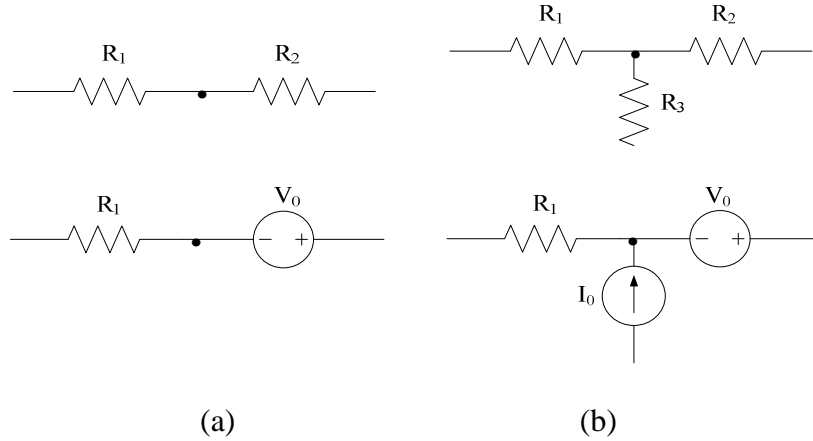
2.4. DEVRELERİN SERİ-PARALEL BASİTLEŞTİRİLMESİ

Elektrik devrelerinde istenen bir devre değişkenini bulmak amacıyla, verilen devrenin yapısına bağlı olarak, devreyi daha basit bir hale dönüştürmek mümkün olabilir. Bu dönüşüm aslında, devredeki kol ya da çevrim sayısını ve dolayısıyla, bilinmeyen sayısını azaltmakta ve böylece de daha basit bir analize imkan vermektedir. Devreyi, daha basit bir devre haline dönüştürmenin değişik metotları bulunmakla birlikte, bu bölümde sadece seri-paralel basitleştirme ele alınacaktır. Seri-paralel basitleştirme aynı tip devre elemanlarının seri ya da paralel bağlantılarının bulunması durumunda uygulanabilir.

2.4.1. SERİ BAĞLI DİRENÇLERİN EŞDEĞERİ ve GERİLİM BÖLÜCÜLER

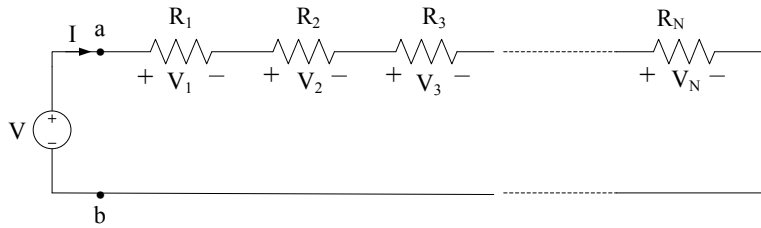
İki devre elemanının birer terminali, arada başka bir üçüncü kol bağlantısı olmaksızın birbirine bağlı ise, bu iki eleman birbirine seri bağlıdır denir. Şekil.2.20.a'da birbirine seri

bağlı devre elemanları, ve Şekil.2.20.b’de ise seri bağlantıyı bozan üçüncü kol bağlantıları görülmektedir. Böyle bir bağlantı devre elemanlarını karışık bağlı hale getirir.



Şekil.2.20: (a) Seri bağlı devre elemanları (b) Karışık bağlı devre elemanları

Seri bağlı devre elemanlarından aynı akım geçer. Şekil.2.21’de seri bağlı N adet direnç ve bir gerilim kaynağından oluşan devre görülmektedir.



Şekil.2.21: Seri devre

Seri devre için, KAY ve Ohm yasası kullanılarak

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_N ; \quad V = IR_1 + IR_2 + IR_3 + \dots + IR_N$$

$$V = I(R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_N)$$

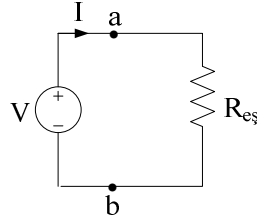
elde edilir. Parantez içindeki dirençler toplamı için $R_{eş}$ yazılırsa,

$$V = IR_{eş}$$

ve

$$R_{eş} = R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_N = \sum_{k=1}^N R_k \quad (2.15)$$

elde edilir. Burada $R_{eş}$, seri bağlı dirençlerin eşdeğeri olarak adlandırılır. Buna göre Şekil.2.21’de verilen seri devre Şekil.2.22’deki gibi basitleştirilebilir:



Şekil.2.22: Basitleştirilmiş devre

Şekil.2.21'deki seri devreye uygulanan gerilim, dirençlere, direnç değerleri oranında bölünmektedir. Örneğin n. direnç üzerindeki gerilim,

$$V_n = IR_n ; \quad V_n = \frac{V}{R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_N} R_n \quad (2.16)$$

olacaktır. Başka bir deyişle, uygun R_n direncini seçerek, bu direnç üzerinde istenen gerilim düşümü oluşturulabilir. Bu nedenle seri bağlı dirençlerden oluşmuş devreler, gerilim bölücüler olarak da adlandırılırlar. (2.16) eşitliği ise gerilim bölücü eşitliği olarak bilinir.

ÖRNEK PROBLEM 2.9:

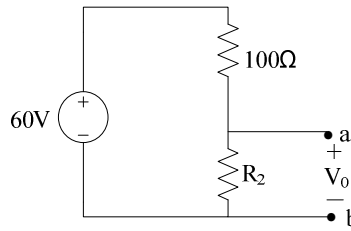
Şekil.2.23'de verilen devrede a-b çıkış terminallerinden 40 V'luk bir açık devre gerilimi oluşturmak için bağlanması gereken R_2 direnç değerlerini bulunuz.

Çözüm:

KGY uygulandığında,

$$-60 + V_{100\Omega} + V_0 = 0 ; \quad V_{100\Omega} = 60 - V_0 = 60 - 40 = 20$$

ve Ohm yasası ile,



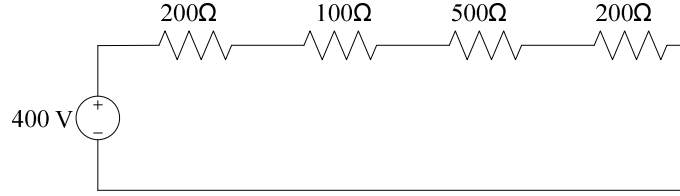
Şekil.2.23: Problem 2.9 devresi

$$V_{100\Omega} = 100I \Rightarrow I = \frac{V_{100\Omega}}{100} = \frac{20}{100} = 0.2 \text{ A},$$

$$IR_2 = 0.2R_2 = 40 \Rightarrow R_2 = \frac{40}{0.2} = 200 \Omega.$$

ÖRNEK PROBLEM 2.10:

Şekil.2.24’de verilen devrede 100 Ω ’luk direnç üzerindeki gerilimi bulunuz.



Şekil.2.24: Problem 2.10 devresi

Kaynağın bağlı olduğu terminalden görülen eşdeğer direnç,

$$R_{eş} = 200 + 100 + 500 + 200 = 1000 \Omega.$$

Devre akımı,

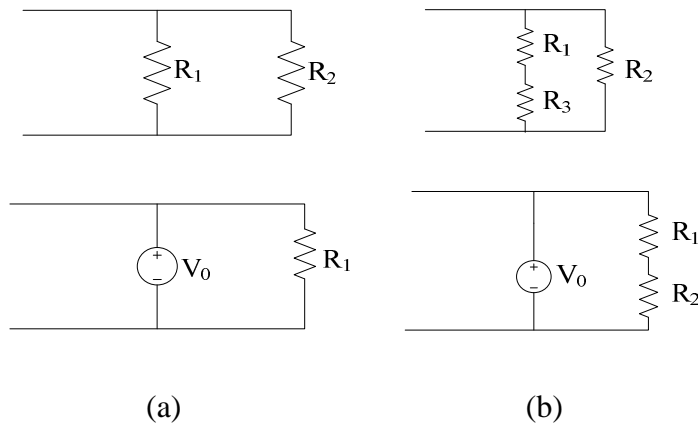
$$I = \frac{400}{R_{eş}} = \frac{400}{1000} = 0.4 \text{ A.}$$

100 Ω ’luk direnç üzerindeki gerilim ise,

$$V_{100\Omega} = 100I = 100(0.4) = 40 \text{ V bulunur.}$$

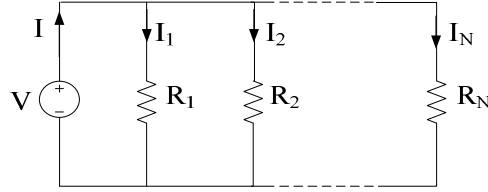
2.4.2. PARALEL BAĞLI DİRENÇLERİN EŞDEĞERİ VE AKIM BÖLÜCÜLER

İki devre elemanının karşılıklı iki terminali, arada başka bir üçüncü eleman olmaksızın birbirine bağlı ise, bu iki eleman birbirine paralel bağlıdır denir. Şekil.2.25.a’da birbirine paralel bağlı devre elemanları, ve Şekil.2.25.b’de ise paralel bağlantıyı bozan üçüncü eleman bağlantıları görülmektedir.



Şekil.2.25: (a) Paralel bağlı devre elemanları (b) karışık bağlı devre elemanları

Şekil.2.26'da seri bağlı N adet direnç ve bir gerilim kaynağından oluşan devre görülmektedir. Açıktır ki, paralel bağlı elemanlar üzerindeki gerilimler aynı olacaktır. Kirchhoff'un akım yasası uygulanarak:



Şekil.2.26: Paralel bağlı devre elemanları

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_N \quad (2.17)$$

elde edilir. Kol akımları Ohm yasası kullanılarak gerilimler cinsinden yazılır

$$I_1 = \frac{V}{R_1}, \quad I_2 = \frac{V}{R_2}, \quad I_N = \frac{V}{R_N} \quad (2.18)$$

ve bu ifadeler (2.17) de kullanılırsa,

$$I = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} + \dots + \frac{V}{R_N} = V \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_N} \right)$$

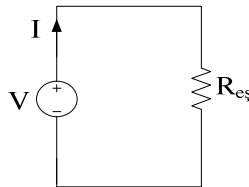
veya

$$I = \frac{V}{R_{eş}} \quad (2.19)$$

elde edilir. Burada,

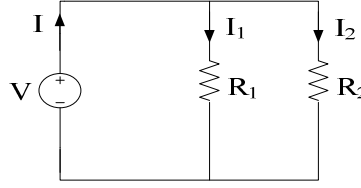
$$\frac{1}{R_{eş}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_N} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{R_k} \quad (2.20)$$

olacağından Şekil.2.26'da verilen devre, Şekil.2.27'da görüldüğü gibi basitleştirilebilir.



Şekil.2.27: Basitleştirilmiş devre

Şekil.2.28’de görülen paralel bağlı iki direncin eşdeğeri, (2.20) eşitliğinden kolayca, dirençlerin çarpımlarının, toplamlarına bölümü olarak elde edilir:



Şekil.2.28: Akım bölücü devre

$$R_{eş} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (2.21)$$

Şekil.2.28’de verilen devrede, ana kol akımı, direnç değerlerine göre iki kola ayrılmaktadır. Uygun direnç değerleri seçilerek istenen bir kol akımını elde etmek mümkündür. Bu nedenle paralel dirençlerden oluşan devrelere aynı zamanda akım bölücüler de denmektedir. Kol akımlarının ifadesini ana kol akımı cinsinden bulunabilir:

$$V = IR_{eş}; \quad V = I \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

ve (2.18) eşitliklerinden

$$I_1 = \frac{V}{R_1} \Rightarrow I_1 = I \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (2.22)$$

$$I_2 = \frac{V}{R_2} \Rightarrow I_2 = I \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad (2.23)$$

ifadeleri elde edilir. Kolayca görüleceği gibi, paralel kollardan biri üzerinden geçen akım, ana kol akımı ile karşı kol direncinin çarpımının paralel kol dirençlerinin toplamına oranı kadardır. (2.22) ve (2.23) eşitlikleri akım bölücü devre eşitlikleri olarak da adlandırılır.

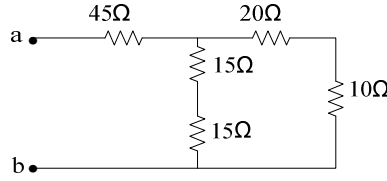
Paralel bağlı dirençlerin eşdeğer iletkenlikleri (2.20) eşitliğinden aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$G_{eş} = G_1 + G_2 + \dots + G_N = \sum_{k=1}^N G_k \quad (2.24)$$

(2.15) ve (2.20) eşitlikleri kullanılarak, seri-paralel bağlı dirençlerin eşdeğerleri bulunarak devre basitleştirilebilir. Böylece, aranan bir devre değişkeni basitleştirilmiş devreden kolayca bulunabilir. Ancak, dirençler her zaman seri ya da paralel bağlanmaz. Seri ve paralel basitleştirmeye olanak vermeyecek şekilde bağlanmış dirençlere karışık bağlı dirençler denir.

ÖRNEK PROBLEM 2.11:

Şekil.2.29’da verilen devrenin a-b terminallerinden görülen eşdeğer direncini bulunuz.



Şekil.2.29: Problem 2.11 devresi

Cözüm:

10 Ω ve 20 Ω’luk dirençler seri (10+20), 15 Ω’luk dirençler seri (15+15), bu iki kolun paralel eşdeğeri $(10+20)/(15+15)$ ve paralel eşdeğer de 45 Ω’luk dirence seri $45+((15+15)/(10+20))$ olacaktır.

$$R_{ab} = 45 + ((15+15)/(10+20)) = 45 + (30//30)$$

$$R_{ab} = 45 + \frac{30 \cdot 30}{30+30} = 45 + 15 = 60 \text{ } \Omega.$$

ÖRNEK PROBLEM 2.12:

Örnek Problem.2.8’i, devrede kaynağın bağlı olduğu terminallerinden görülen eşdeğer direnci bularak çözünüz.

Cözüm:

Kaynağın bağlı olduğu terminallerden görülen eşdeğer direnç:

$$R_{ab} = 18 + (30//20) = 18 + \frac{30 \cdot 20}{30+20} = 18 + 12 = 30 \text{ } \Omega.$$

Kaynağın devreye sağladığı akım:

$$-I_2 = \frac{12}{30} = 0.4 \text{ A.} \quad \Rightarrow \quad I_2 = -0.4 \text{ A.}$$

Bu akım ana kol akımını oluşturur ve düğüm noktasında iki kola ayrılır. Kol akımları akım bölücü devre eşitliğinden:

$$-I_1 = -I_2 \frac{30}{30+20} = 0.4(0.6) = 0.24 \text{ A} \quad \Rightarrow \quad I_1 = -0.24 \text{ A}$$

$$I_3 = -I_2 \frac{20}{30+20} = 0.4(0.4) = 0.16 \text{ A.}$$

ve gerilimler de,

$$V_1 = -20I_1 = 4.8 \text{ V},$$

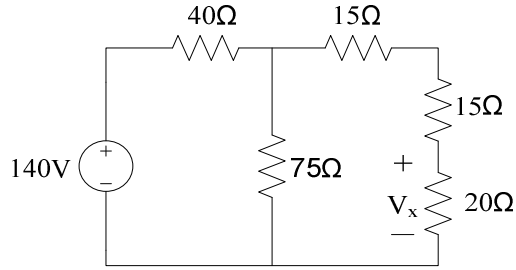
$$V_2 = -18I_2 = -7.2 \text{ V},$$

$$V_3 = 30I_3 = 4.8 \text{ V}$$

bulunur. Analizin, önceki çözüme göre daha kolay yapılabildiğine dikkat ediniz.

ÖRNEK PROBLEM 2.13:

Şekil.2.30’da verilen devrede V_x gerilimini bulunuz.



Şekil.2.30: Problem 2.13 devresi

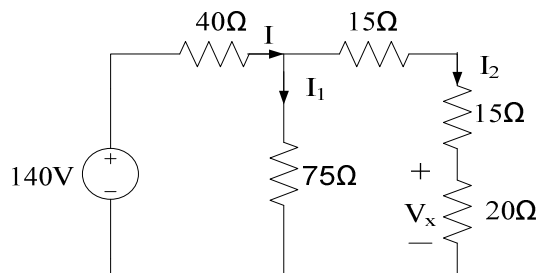
Cözüm:

Kaynağın bağlı olduğu terminallerden görülen eşdeğer direnç:

$$R_{eş} = 40 + ((20 + 15 + 15) // 75) = 40 + (50 // 75) = 40 + \frac{50 \cdot 75}{50 + 75} = 70 \text{ } \Omega.$$

Şekil.2.31’de görülen devreden, kaynağın devreye sağladığı akım (ana kol akımı)

$$I = \frac{140}{R_{eş}} = \frac{140}{70} = 2 \text{ A bulunur.}$$



Şekil.2.31: Anakol akımı ve kol akımları

Ana kol akımı, düğüm noktasında iki kola ayrılmaktadır. İkinci kol üzerindeki akım, akım bölücü devre eşitliğinden,

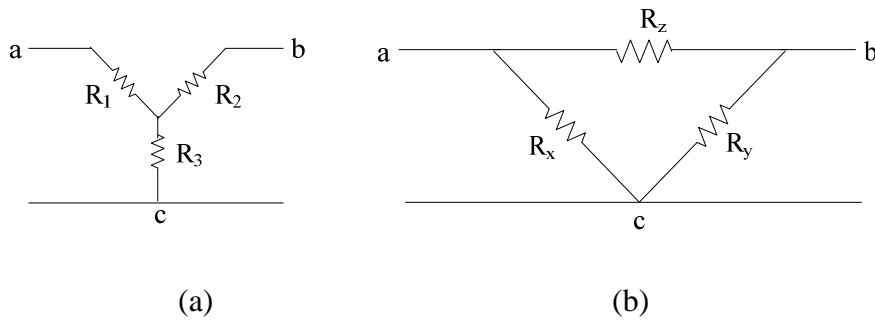
$$I_2 = I \frac{75}{75+15+15+20} = 2 \frac{75}{125} = 1.2 \text{ A},$$

ve Ohm yasası ile de,

$$V_x = 20I_2 = 20(1.2) = 24 \text{ V} \text{ sonucu elde edilir.}$$

2.4.3. ÜÇGEN-YILDIZ ve YILDIZ-ÜÇGEN DÖNÜŞÜMLERİ

Bir devrede, dirençler seri ya da paralel bağlı olmamalarına rağmen, bazı durumlarda devreyi ya da devrenin bir kısmını seri-paralel bağlı dirençler biçimine dönüştürmek mümkün olabilir. Şekil.2.32’de verilen direnç bağlantılarını göz önüne alalım:



Şekil.2.32: (a) Yıldız bağlantı (b) üçgen bağlantı

İlk bağlantı yıldız (ya da Y) ve ikinci bağlantı da üçgen (ya da delta) bağlantı olarak adlandırılır. Bir yıldız bağlantı üçgene, bir üçgen bağlantı da yıldıza dönüştürülebilir. Bu dönüşüm sonunda, dönüşmüş bağlantıda bulunan dirençler, devredeki diğer dirençlerle seri ya da paralel bağlı konuma gelebilir ve böylece seri-paralel basitleştirme mümkün olur. Bu şekilde bir dönüşüm için, dönüşmüş devredeki direnç değerlerinin, orijinal devredeki direnç değerleri cinsinden ifadeleri gerekecektir:

Açıktır ki, dönüşmüş devre ve orijinal devre, karşılıklı terminal çiftlerinden aynı özelliği göstermelidir. Başka bir deyişle aynı, terminallerden aynı eşdeğer dirençler görülmelidir. Buna göre, her karşılıklı terminal eşdeğer dirençleri birbirine eşitlenerek elde edilecek eşitliklerden dönüşmüş direnç değerleri bulunabilir:

$$R_{ac_{yıldız}} = R_{ac_{üçgen}} \Rightarrow R_1 + R_3 = R_x // (R_y + R_z)$$

$$R_1 + R_3 = \frac{R_x (R_y + R_z)}{R_x + R_y + R_z}. \quad (2.25)$$

$$R_{ab_{yıldız}} = R_{ab_{üçgen}} \Rightarrow R_1 + R_2 = R_z // (R_x + R_y)$$

$$R_1 + R_2 = \frac{R_z(R_x + R_y)}{R_x + R_y + R_z}. \quad (2.26)$$

$$R_{bc_{yıldız}} = R_{bc_{üçgen}} \Rightarrow R_2 + R_3 = R_y // (R_x + R_z)$$

$$R_2 + R_3 = \frac{R_y(R_x + R_z)}{R_x + R_y + R_z}. \quad (2.27)$$

Yıldız-üçgen dönüşümü için, bilinmeyen üçgen dirençleri, (2.25), (2.26) ve (2.27) eşitlikleri R_x , R_y ve R_z için çözülerek aşağıdaki gibi bulunur:

$$R_x = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_2}, \quad (2.28)$$

$$R_y = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_1}, \quad (2.29)$$

$$R_z = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_3}. \quad (2.30)$$

Dikkat edilirse, üçgen dirençleri bulunurken; yıldız dirençlerinin olası bütün ikili çarpımlarının toplamı, hesaplanan üçgen direncinin tam karşısındaki yıldız direncine oranı olarak bulunmaktadır.

Üçgen-yıldız dönüşümü için ise, bilinmeyen yıldız dirençleri, (2.25), (2.26) ve (2.27) eşitlikleri R_1 , R_2 ve R_3 için çözülerek bilinen üçgen dirençleri değerleri cinsinden aşağıdaki gibi bulunabilir:

$$R_1 = \frac{R_x R_z}{R_x + R_y + R_z}, \quad (2.31)$$

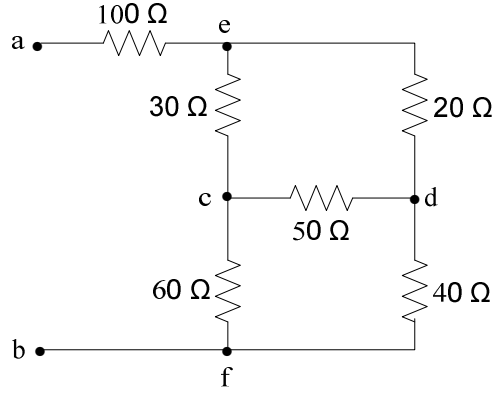
$$R_2 = \frac{R_y R_z}{R_x + R_y + R_z} \quad (2.32)$$

$$R_3 = \frac{R_x R_y}{R_x + R_y + R_z} \quad (2.33)$$

Bu dönüşümde de, hesaplanan yıldız direnci için, iki tarafındaki üçgen dirençlerinin çarpımının, üçgen dirençlerinin toplamına bölüldüğüne dikkat ediniz.

ÖRNEK PROBLEM 2.14:

Şekil.2.33’de verilen devrenin a-b terminallerinden görülen eşdeğer direncini bulunuz.

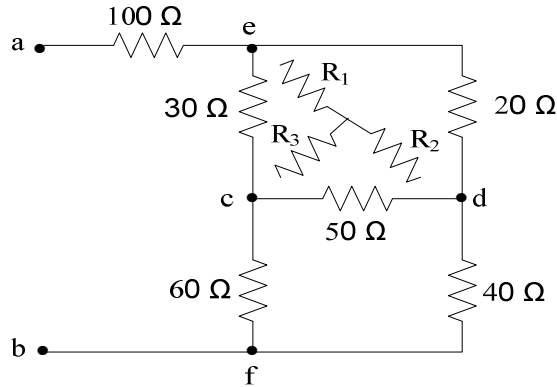


Şekil.2.33: Problem 2.14 devresi

Cözüm:

cde düğüm noktaları arasındaki ve cdf düğüm noktaları arasındaki bağlantılar birer üçgen bağlantılardır. Bunun yanı sıra 30, 50 ve 60 Ω' luk dirençler de bir yıldız bağlantı oluşturmaktadır.

Öncelikle cde düğüm noktaları arasındaki üçgen bağlantı bir yıldız bağlantıya dönüştürülsün. Bunun için bu üçgen içine Şekil 2.33'de görüldüğü gibi bir yıldız çizilir.



Şekil.2.34: Yıldız dirençlerinin bağlantısı

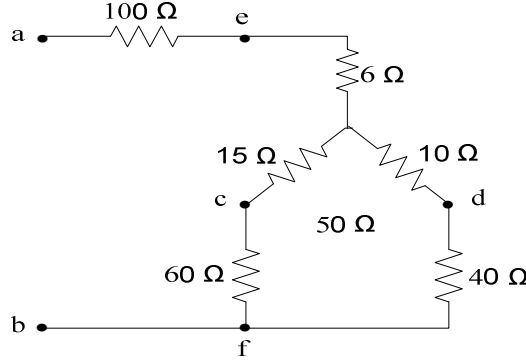
Bilinmeyen yıldız direnç değerleri (2.31), (2.32) ve (2.33) eşitliklerinden hesaplanırsa,

$$R_1 = \frac{30 \cdot 20}{30 + 20 + 50} = \frac{600}{100} = 6 \, \Omega,$$

$$R_2 = \frac{20 \cdot 50}{30 + 20 + 50} = \frac{1000}{100} = 10 \, \Omega,$$

$$R_3 = \frac{30 \cdot 50}{30 + 20 + 50} = \frac{1500}{100} = 15 \, \Omega$$

bulunur. Şekil.2.34’de verilen devrede dönüşüme giren üçgen dirençleri kaldırılırsa, Şekil.2.35’ deki dönüşmüş devre elde edilir. Bu devrede dirençlerin seri paralel bağlantıları nedeniyle, a-b terminallerinden görülen direnç kolayca,



Şekil.2.35. Dönüşmüş devre

$$R_{ab} = 100 + 6 + ((15 + 60) // (10 + 40)) = 106 + (75 // 50)$$

$$R_{ab} = 106 + \frac{75 \cdot 50}{75 + 50} = 136 \Omega$$

bulunur. dcf üçgen bağlantısı için bir üçgen yıldız dönüşümü ya da, 30, 50 ve 60 Ω’ luk dirençlerden oluşan yıldız bağlantısına bir yıldız üçgen dönüşümü uygulayarak da aynı sonucun elde edilebileceğini gösteriniz.

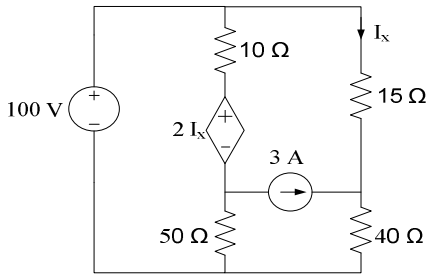
Yıldız-üçgen ya da üçgen yıldız dönüşümlerinde, aranan devre değişkenini üzerinde bulunduran direncin dönüşüme girmemesi tercih edilmelidir. Aksi taktirde, dönüşüme giren direnç, dönüşmüş devrede yer almayacağından, bu devreden aranan değişkenin direk olarak bulunması mümkün olmayabilir. Şayet bu şekilde bir dönüşüm yapıldı ise, bu durumda, dönüşmüş devrenin analizi ile bulunabilen değişkenler elde edildikten sonra, orijinal devreye geri dönüp, aranan devre değişkeni, hesaplanan devre değişkenleri cinsinden elde edilmeye çalışılır.

PROBLEMLER

2.1. 1000 metre uzunluğunda ve 2 mm^2 kesit alanlı bakır telin direncini bulunuz.

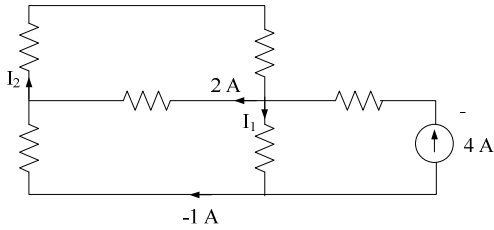
2.2. 10Ω 'luk bir direnç üzerindeki gerilim 100 Volt ise direnç üzerinden geçen akımı ve direncin gücünü bulunuz.

2.3. Şekil.2.36'da verilen devrede düğüm noktası, kol ve çevrim sayılarını bulunuz.



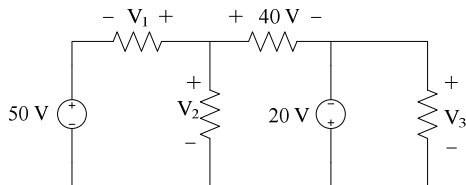
Şekil.2.36: Problem 2.3. devresi

2.4. Şekil.2.37' da verilen devrede I_1 ve I_2 akımlarını bulunuz.



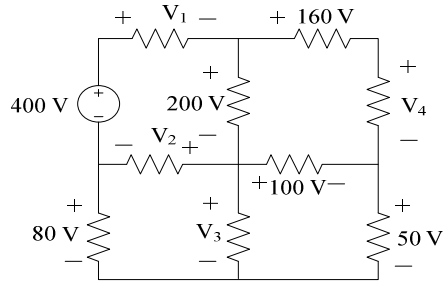
Şekil.2.37: Problem 2.4. devresi

2.5. Şekil.2.38'de verilen devrede V_1 , V_2 ve V_3 gerilimlerini bulunuz.



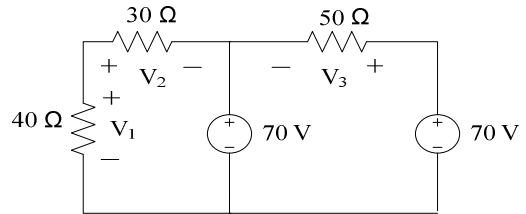
Şekil.2.38: Problem 2.5. devresi

2.6. Şekil.2.39'da verilen devrede V_1 , V_2 , V_3 ve V_4 gerilimlerini bulunuz.



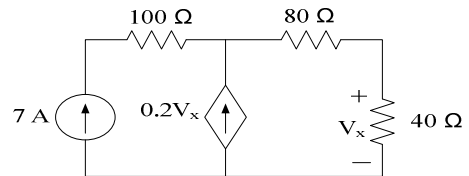
Şekil.2.39: Problem 2.6. devresi

2.7. Şekil.2.40'da verilen devrede V_1 , V_2 ve V_3 gerilimlerini bulunuz.



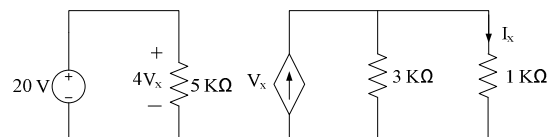
Şekil.2.40: Problem 2.7. devresi

2.8. Şekil.2.41' de verilen devrede V_x gerilimini bulunuz.



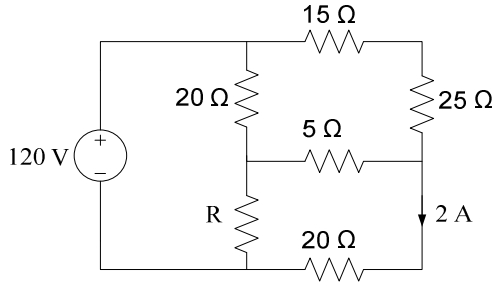
Şekil.2.41: Problem 2.8. devresi

2.9. Şekil.2.42' de verilen devrede I_x bulunuz.



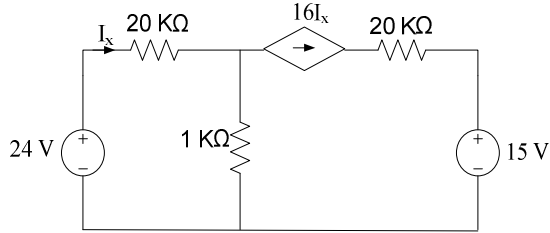
Şekil.2.42: Problem 2.9. devresi

2.10. Şekil.2.43' de verilen devrede R direncinin değerlerini bulunuz.



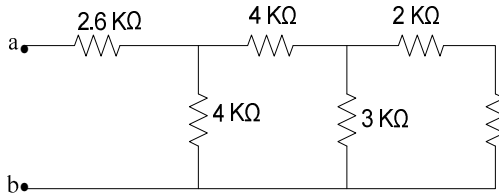
Şekil.2.43: Problem 2.10 devresi

2.11. Şekil.2.44'de verilen devrede bağımlı kaynağın gücünü bulunuz.



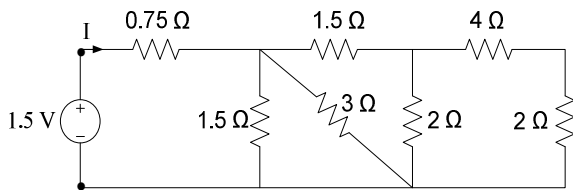
Şekil.2.44: Problem 2.11 devresi

2.12. Şekil.2.45'de verilen devrenin a-b terminallerinden görülen eşdeğer direncini bulunuz.



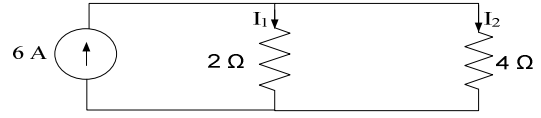
Şekil.2.45: Problem 2.12 devresi

2.13. Şekil.2.46'da verilen devrede kaynağın devreye sağladığı I akımını bulunuz



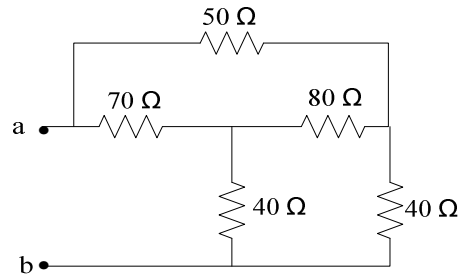
Şekil.2.46: Problem 2.13 devresi

2.14. Şekil.2.47' de verilen devrede I_1 ve I_2 kol akımlarını bulunuz.



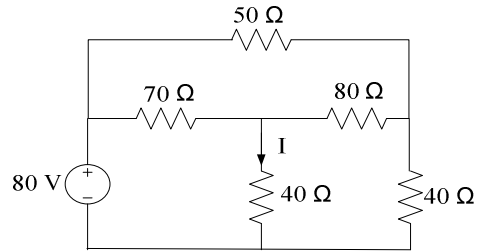
Şekil.2.47: Problem 2.14 devresi

2.15. Şekil.2.48'de verilen devrede a-b terminallerinden görülen eşdeğer direnci bulunuz.



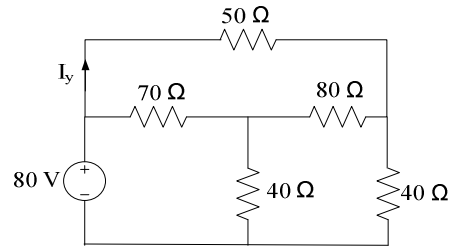
Şekil.2.48: Problem 2.15 devresi

2.16. Şekil.2.49'da verilen devrede I akımını bulunuz.



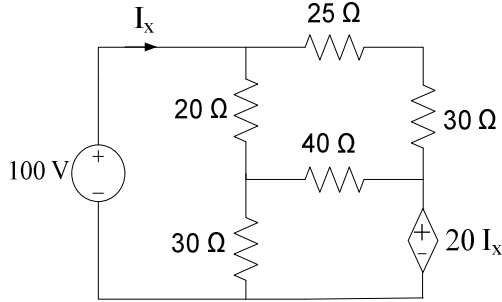
Şekil.2.49: Problem 2.16 devresi

2.17. Şekil.2.50'de verilen devrede, I_y akımını bulunuz.



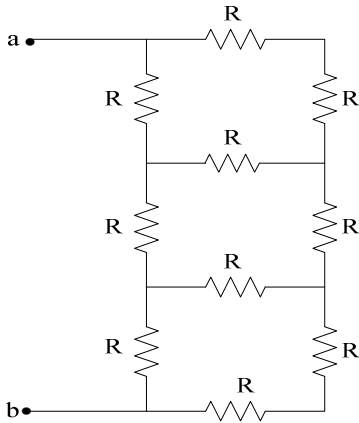
Şekil.2.50: Problem 2.17 devresi

2.18. Şekil.2.51’ de verilen devrede I_x akımını bulunuz



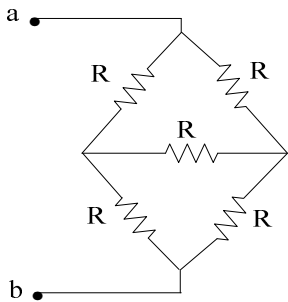
Şekil.2.51: Problem 2.18 devresi

2.19. Şekil.2.52’de verilen devrede giriş terminal direncini bulunuz.



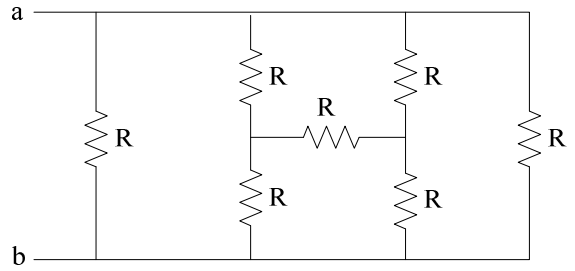
Şekil.2.52: Problem 2.19 devresi

2.20. Şekil.2.53’de verilen devrede giriş terminallerinden görülen eşdeğer direnci bulunuz.



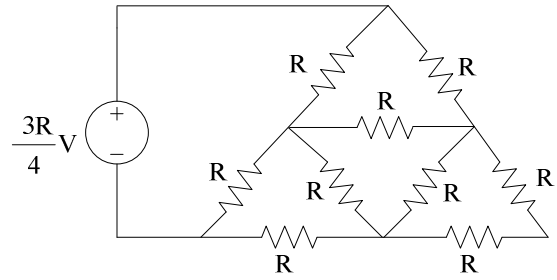
Şekil.2.53: Problem 2.20 devresi

2.21. Şekil.2.54’de verilen devrenin a-b terminallerinden görülen eşdeğer direncini bulunuz.



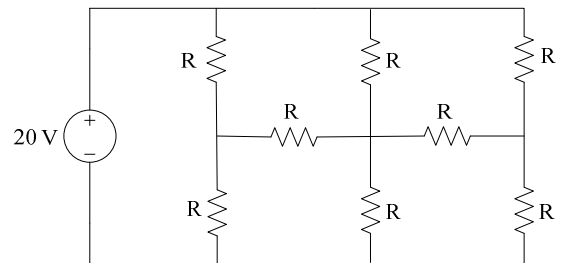
Şekil.2.54: Problem 2.21 devresi

2.22. Şekil.2.55’de verilen devrede a-b terminallerinden görülen eşdeğer direnci ve kaynağın devreye sağladığı akımı bulunuz.



Şekil.2.56: Problem 2.22 devresi

2.23. Şekil.2.57’de verilen devrede, kaynağın gücü 100 W ise, R direncinin değerini bulunuz.



Şekil.2.57: Problem 2.23 devresi

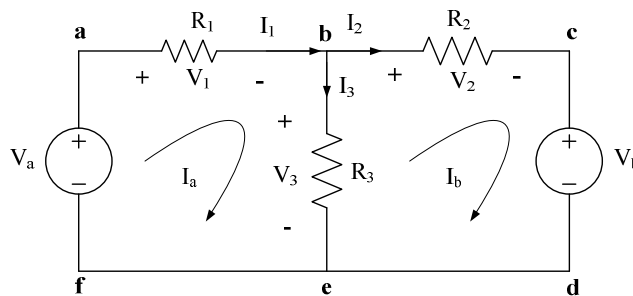
3.BÖLÜM: DEVRE ANALİZ METODLARI

3.1. GİRİŞ

Devre kuramının temelini oluşturan Ohm yasası ve Kirchhoff yasalarının sistematik uygulamalarını içeren iki temel analiz metodu mevcuttur. Bunlar; Ohm yasası ve Kirchhoff'un gerilim yasası temelli *Göz Akımları Metodu* ile yine Ohm yasası ve Kirchhoff'un akım yasası temelli *Düğüm Potansiyelleri Metodu*'dur. Her hangi bir devrenin analizinde her iki metot da kullanılabilirle birlikte, devrenin yapısına bağlı olarak seçilen analiz metodu işlem hacmini değiştirebilir. Uygun metodun seçimi için göz önüne alınması gereken kriterler üzerinde ayrıca durulacaktır. Ancak, genel olarak bu seçim, edinilen deneyime paralel olarak kolayca yapılabilirlebilir.

3.2. GÖZ AKIMLARI METODU

İçinde başka bir çevrim içermeyen çevrim, göz olarak tanımlanır. Göz akımları metodunda temel değişkenler, her bir gözde aktığı varsayılan göz akımlarıdır. Başka bir deyişle, göz akımları gerçek akımlar değildir. Ancak gerçek kol akımları, göz akımları cinsinden kolayca ifade edilebildiğinden, metodun esas, varsayılan göz akımlarının belirlenmesine dayanır. Şekil.3.1'de verilen devrede çevrim, göz, göz akımları ve kol akımları görülmektedir. Göz akımları ve kol akımlarını ayırt etmek amacıyla, kol akımları için sayısal indisler kullanılırken göz akımları için alfabetik indisler kullanılmıştır.



Şekil.3.1. Göz ve kol akımları

Burada, abef, bcde ve abcdef ‘nin her biri birer çevrimdir. abef ve bcde çevrimleri içlerinde başka çevrim içermediklerinden aynı zamanda birer gözdürler. abcdef çevrimi ise abef ve bcde çevrimlerini içerdiğinden bir göz değildir. I_1 , I_2 , I_3 devre elemanları üzerinden geçen gerçek kol akımlarıdır. I_a ve I_b ise sırasıyla birinci ve ikinci gözde aktığı varsayılan göz akımlarıdır. R_1 direnci üzerinden I_1 kol akımı geçmektedir. Seçilen I_a göz akımı da aynı dirençten aynı yönde geçtiği varsayılan akım olduğundan, bu akımlar eşit olmalıdır. Benzer şekilde, R_2 direnci üzerinden I_2 kol akımı ve ikinci gözde akmakta olduğu varsayılan I_b akımı aynı yönde akan akımlar olup, eşit olmalıdırlar. Diğer yandan, iki göz tarafından ortak kullanılan R_3 direnci üzerinde I_a ve I_b kol akımlarının ters yönde aktıkları varsayılmaktadır. Her hangi bir anda, bir devre elemanı üzerinde, bir yönde ve tek bir akım bulunabileceğinden bu akımlar varsayılan akımlar olarak adlandırılmaktadır. R_3 direnci üzerinden geçen gerçek akım I_3 kol akımı olduğundan, varsayılan göz akımlarının bu koşulu sağlaması gerekir. O halde bu direnç üzerinden geçen akım, ters yönde geçtiği varsayılan göz akımlarının farkı kadar ve gerçek kol akımı yönünde olmalıdır. Bu durumda kol akımları ve göz akımları arasındaki ilişkiler,

$$I_1 = I_a \quad (3.1)$$

$$I_2 = I_b \quad (3.2)$$

$$I_3 = I_a - I_b \quad (3.3)$$

olacaktır. (3.3.) eşitliği, b noktasında Kirchhoff’un akım yasası uygulanarak da kolayca elde edilebilir:

$$I_a - I_b - I_3 = 0 \quad \text{ve} \quad I_a - I_b = I_3.$$

Şayet I_a ve I_b göz akımları biliniyorsa, (3.1), (3.2) ve (3.3) eşitlikleri kullanılarak kol akımları ve bunlarla ilişkili olarak da diğer devre değişkenleri bulunabilir. Göz akımlarını belirlemek üzere I. ve II. gözlerde Kirchhoff’un gerilim yasasını uygulanırsa,

I. göz için

$$-V_a + V_1 + V_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_a = V_1 + V_3 \quad (3.4)$$

II. göz için

$$V_b - V_3 + V_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad -V_b = -V_3 + V_2. \quad (3.5)$$

eşitlikleri elde edilir. Dirençler üzerindeki gerilimler Ohm yasası’nı kullanarak göz akımları cinsinden ifade edildiğinde,

$$V_1 = I_a R_1 \quad (3.6)$$

$$V_2 = I_b R_2 \quad (3.7)$$

$$V_3 = (I_a - I_b) R_3 \quad (3.8)$$

bulunur. Bu eşitlikler (3.4) ve (3.5) eşitliklerinde kullanılırsa,

$$V_a = I_a R_1 + (I_a - I_b) R_3 \quad \Rightarrow \quad V_a = I_a (R_1 + R_3) - I_b R_3 \quad (3.9)$$

$$-V_b = -(I_a - I_b) R_3 + I_b R_2; \quad \Rightarrow \quad -V_b = -I_a R_3 + I_b (R_2 + R_3) \quad (3.10)$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler bir matriks eşitlik formunda aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_a \\ -V_b \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

Cramer kuralı kullanılarak I_a , I_b bilinmeyenleri için:

$$I_a = \frac{\begin{vmatrix} V_a & -R_3 \\ -V_b & R_2 + R_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_3 \end{vmatrix}}, \quad (3.12)$$

$$I_b = \frac{\begin{vmatrix} R_1 + R_3 & V_a \\ -R_3 & -V_b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_3 \end{vmatrix}}. \quad (3.13)$$

eşitlikleri bulunur. (3.9) ve (3.10) eşitliklerine dikkat edilirse, her bir eşitliğe, kendi göz akımının kendi dirençleri üzerinde oluşturduğu gerilimler pozitif, komşu göz akımının, ortak kullanılan dirençler üzerinde oluşturduğu gerilimler negatif katkı yapmaktadır. Bunun nedeni, göz akımlarının her ikisinin de saat dönüş yönünde verilmiş olmasıdır. Aslında göz akımlarının yönü rastgele seçilebilir. Fakat eşitlikleri sistematik bir şekilde yazabilmek için, zorunlu bir hal olmadıkça, göz akımlarını aynı yönde (saat dönüş yönünde) seçmek kolaylık sağlar. Göz akımlarının tamamı saat dönüş yönünde seçilmişse, eşitlikler için aşağıda verildiği gibi bir genel kural çıkarılabilir:

1. göz için

$$I_1 R_{11} - I_2 R_{12} - \dots - I_n R_{1n} \pm V_{11} = 0$$

2. göz için

$$-I_1 R_{21} + I_2 R_{22} - \dots - I_n R_{2n} \pm V_{22} = 0$$

n. göz için

$$-I_1 R_{n1} - I_2 R_{n2} - \dots + I_n R_{nn} \pm V_{22} = 0$$

Burada,

R_{kk} : k gözünün toplam direncini,

R_{km} : k ve m gözleri tarafından ortak kullanılan toplam direnci,

V_{kk} : k gözündeki gerilim kaynakları toplamını

göstermektedir. \pm işareti ile, kaynaklara hangi terminalden giriliyorsa o işaretle eşitliğe dahil edilmesi gerektiğini ifade etmektedir.

Şekil.3.1’de verilen devrede II. göz akımının yönü ters (saat dönüş yönünün tersi) seçilmişolsun. Bu durumda her iki göz akımı da R_3 direncine aynı terminalden gireceğinden, eşitlikler aşağıdaki gibi olacaktır:

$$I_b = -I_2, \quad I_3 = I_a + I_b, \quad V_3 = (I_a + I_b)R_3, \quad V_2 = -I_b R_2$$

Buna göre (3.4) ve (3.5) eşitlikleri de,

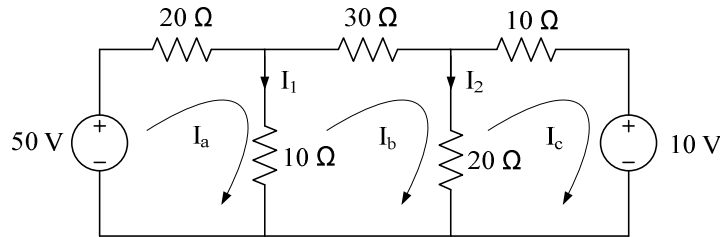
$$V_a = I_a (R_1 + R_3) + I_b R_3 \quad (3.14)$$

$$-V_b = -I_a R_3 - I_b (R_2 + R_3) \quad (3.15)$$

olacaktır. Açıkça ki (3.9), (3.10) eşitlikleri ile (3.14), (3.15) eşitlikleri arasındaki tek fark I_b yönünün ters oluşudur. Başka bir deyişle (3.9), (3.10) eşitliklerinde I_b , $-I_b$ ile değiştirilecek olursa (3.14) ve (3.15) eşitlikleri elde edilir. O halde bu eşitlik sistemlerinden hangisi kullanılırsa kullanılsın I_b akımının büyüklüğü aynı bulunacak ancak işareti birinde pozitif bulunurken diğesinde negatif olacaktır. Bu durum; negatif bulunduğu durum için, seçilen akım yönünün gerçek yöne zıt olduğunu ifade eder.

ÖRNEK PROBLEM 3.1:

Şekil.3.2’de verilen devrede I_1 ve I_2 kol akımlarını bulunuz.



Şekil.3.2: Örnek Problem 3.1 devresi

Cözüm:

I_a , I_b ve I_c saat dönüş yönünde göz akımları olduklarından,

$$I_a(20+10) - I_b(10) - 50 = 0 \Rightarrow 30I_a - 10I_b = 50,$$

$$I_b(10+30+20) - I_a(10) - I_c(20) = 0 \Rightarrow -10I_a + 60I_b - 20I_c = 0,$$

$$I_c(20+10) - I_b(20) - 10 = 0 \Rightarrow -20I_b + 30I_c = -100$$

eşitlikleri göz akımları metodu ile elde edilir ve bu eşitlikler bir matris eşitlik biçiminde yazılırsa;

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix},$$

Cramer kuralı ile göz akımları aşağıdaki gibi bulunabilir.

$$I_a = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & -2 \\ -10 & -2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{90}{39} = 1.2821 \text{ A}, \quad I_b = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & -10 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-45}{39} = -1.1538 \text{ A},$$

$$I_c = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -1 & 6 & 0 \\ 0 & -2 & -10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-45}{39} = -4.1026 \text{ A}.$$

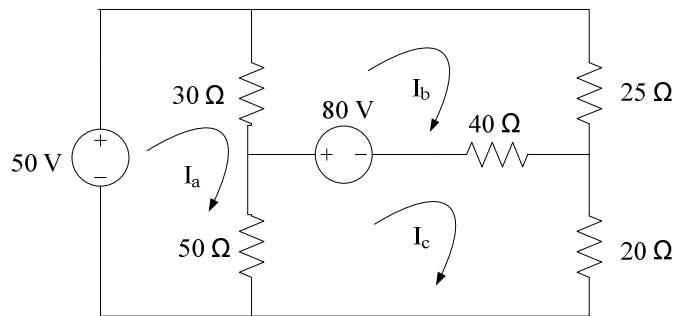
Kol akımları ise;

$$I_1 = I_a - I_b = 1.2821 - (-1.1538) = 2.4359 \text{ A},$$

$$I_2 = I_b - I_c = -1.1538 - (-4.1026) = 2.9488 \text{ A} \text{ olacaktır.}$$

ÖRNEK PROBLEM 3.2:

Şekil.3.3’de verilen devrede 40 Ω’luk direncin harcadığı gücü bulunuz. I_c



Şekil.3.3: Örnek Problem 3.2 devresi

Cözüm:

I_a , I_b ve I_c saat dönüş yönünde seçilmiş göz akımları ise,

$$\begin{aligned} I_a(30+50) - I_b(30) - I_c(50) - 50 &= 0 & \Rightarrow & 80I_a - 30I_b - 50I_c = 50. \\ -I_a(30) + I_b(30+40+25) - I_c(40) - 80 &= 0 & \Rightarrow & -30I_a + 95I_b - 40I_c = 80. \\ -I_a(50) - I_b(40) + I_c(50+40+20) + 80 &= 0 & \Rightarrow & -50I_a - 40I_b + 110I_c = -80 \end{aligned}$$

ve $P_{40\Omega} = 40(I_b - I_c)^2$.

$I_b - I_c$, 40Ω 'luk direnç üzerindeki kol akımıdır. Yukarıda elde edilen eşitlik sistemi I_b ve I_c için çözülürse,

$$I_b = \frac{\begin{vmatrix} 80 & 50 & -50 \\ -30 & 80 & -40 \\ -50 & -80 & 110 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 80 & -30 & -50 \\ -30 & 95 & -40 \\ -50 & -40 & 110 \end{vmatrix}} = \frac{393000}{251500} = 1.5626 \text{ A}, \quad I_c = \frac{\begin{vmatrix} 80 & -30 & 50 \\ -30 & 95 & 80 \\ -50 & -40 & -80 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 80 & -30 & -50 \\ -30 & 95 & -40 \\ -50 & -40 & 110 \end{vmatrix}} = \frac{137500}{251500} = 0.5467 \text{ A}$$

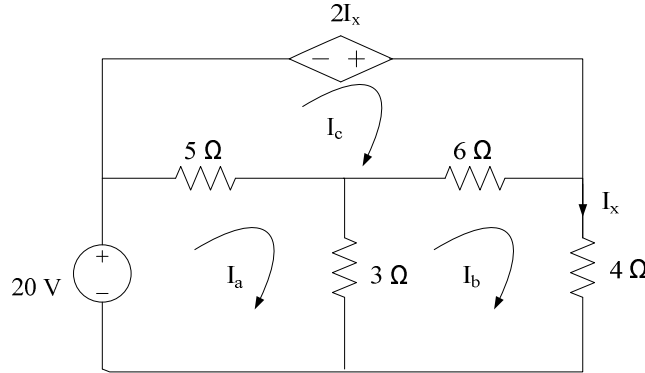
ve

$$P_{50\Omega} = 40(1.5626 - 0.5467)^2 = 41.282 \text{ W}$$

bulunur.

ÖRNEK PROBLEM 3.3:

Şekil.3.4'de verilen devrede bağımlı kaynağın gücünü bulunuz.



Şekil.3.4: Örnek Problem 3.3 devresi

Cözüm:

Saat dönüş yönünde seçilmiş I_a , I_b ve I_c göz akımları için denklemler,

$$\begin{aligned} I_a(3+5) - I_b(3) - I_c(5) - 20 &= 0 & \Rightarrow & 8I_a - 3I_b - 5I_c = 20 \\ -I_a(3) + I_b(3+6+4) - I_c(6) &= 0 & \Rightarrow & -3I_a + 13I_b - 6I_c = 0 \\ -I_a(5) - I_b(6) + I_c(6+5) - 2I_x &= 0, \end{aligned}$$

$$I_x = I_b$$

$$-5I_a - 6I_b + 116I_c - 2I_b = 0 \Rightarrow -5I_a - 8I_b + 116I_c = 0$$

olacaktır. Bu eşitlikler bir matriks eşitliği şeklinde yazıldığında,

$$\begin{bmatrix} 8 & -3 & -5 \\ -3 & 13 & -6 \\ -5 & -8 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Cramer kuralı ile de, bağımlı kaynağın gücünü belirlemek için gerekli I_b , I_c göz akımları aşağıdaki gibi bulunur:

$$I_b = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 20 & -5 \\ -3 & 0 & -6 \\ -5 & 0 & 11 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & -3 & -5 \\ -3 & 13 & -6 \\ -5 & -8 & 11 \end{vmatrix}} = \frac{1260}{126} = 10 \text{ A}, \quad I_c = \frac{\begin{vmatrix} 8 & -3 & 20 \\ -3 & 13 & 0 \\ -5 & -8 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & -3 & -5 \\ -3 & 13 & -6 \\ -5 & -8 & 11 \end{vmatrix}} = \frac{1780}{126} = 14.127 \text{ A}.$$

Böylece güç,

$$P_{2I_x} = -(2I_x)I_c = -(2I_b)I_c = -2(10)(14.127) = 282.54 \text{ W}.$$

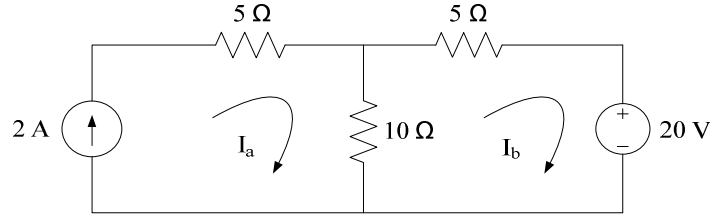
bulunur.

3.2.1. SÜPER-GÖZ KAVRAMI

Göz akımları metodu, akım kaynakları içeren devrelere de uygulanabilir. Ancak, akım kaynağının terminalleri arasındaki gerilim sabit olmayıp, bağlı olduğu devreye göre değişeceğinden, akım kaynağını içeren gözde yazılan eşitlikte, bu gerilim bir bilinmeyen olarak belirtilmelidir. Akım kaynağı, bir devrede sadece bir gözün kullandığı kolda bağlı olabileceği gibi, iki gözün ortak kullandığı bir kolda da bulunabilir:

1. Akım kaynağının yalnız bir göz tarafından kullanılan kolda bağlı olması hali

Şekil.3.5’de Sadece birinci gözün kullandığı kolda bir akım kaynağı içeren örnek devre görülmektedir.



Şekil.3.5: Akım kaynağının ortak olmayan bir kolda bulunması

Birinci göz için seçilen göz akımı, akım kaynağının değerine eşittir.

$$I_a = 4 \text{ A.} \quad (3.16)$$

İkinci göz için,

$$-10I_a + 15I_b = -20; \quad (3.17)$$

eşitliği yazılıp birinci göz akımı bu eşitlikte kullanılırsa,

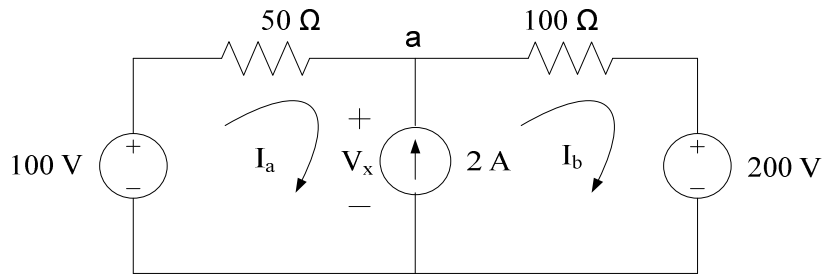
$$15I_b = -20 + 10(4) \quad \text{ve} \quad I_b = \frac{4}{3} \text{ A.}$$

bulunur.

Yukarıdaki örnekten de açıkça anlaşılacağı gibi, akım kaynağının ortak olmayan bir kolda bulunması durumunda, göz akımlarından biri halihazırda biliniyor demektir.

2. Akım kaynağının iki göz tarafından ortak kullanılan bir kolda bağlı olması hali

Şekil.3.6'da, bu şekilde bağlı bir akım kaynağı içeren devre görülmektedir.



Şekil.3.6: Akım kaynağının ortak kullanılan bir kolda bulunması

Akım kaynağı üzerindeki gerilimi V_x ile gösterelim. Bu durumda, gözler için eşitlikler aşağıdaki gibi olacaktır.

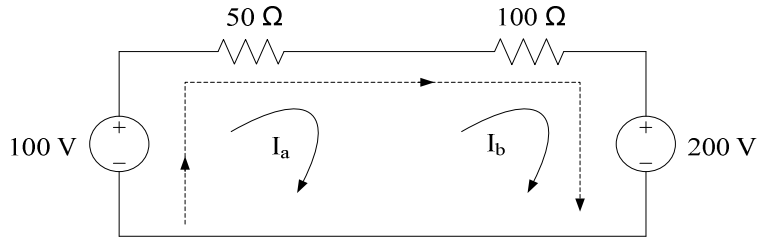
$$50I_a + V_x = 100 \quad (3.18)$$

$$100I_b - V_x = -200. \quad (3.19)$$

Bu iki eşitlik taraf tarafa toplanacak olursa,

$$50I_a + 100I_b = -100 . \quad (3.20)$$

eşitliği elde edilir. Yeni eşitlikte bilinmeyen V_x değişkeni yok edilmiştir. (3.20) eşitliğini, (3.18) ve (3.19) eşitliklerini ayrı ayrı yazıp toplayarak elde etmek yerine, aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi bir göz tarif ederek direk yazmak mümkün olabilir.



Şekil.3.7: Süper-göz'ün oluşturulması

Kesik çizgilerle belirtilmiş, akım kaynağını içeren kolun elenmesi ile tarif edilen bu göze süper-göz denir. Süper gözde, her direnç üzerindeki göz akımını dikkate alarak,

$$-100 + 50I_a + 100I_b + 200 = 0 \quad (3.21)$$

$$50I_a + 100I_b = -100 . \quad (3.22)$$

eşitliği yazılabilir ki, bu ifade (3.20) eşitliği ile aynıdır.

Süper-göz içeren bir devrede, gerekli olan diğer eşitlik, akım kaynağının bağlı olduğu kol için Kirchhoff'un akım yasası uygulayarak elde edilir. Şekil.3.6'da verilen devrenin a-noktasında Kirchhoff'un akım yasası uygulanırsa,

$$I_a + 2 - I_b = 0 \quad (3.23)$$

elde edilir ve (3.22), (3.23) eşitlikleri çözülerek göz akımları $I_a = -5/3$ A, $I_b = -1/6$ A bulunur.

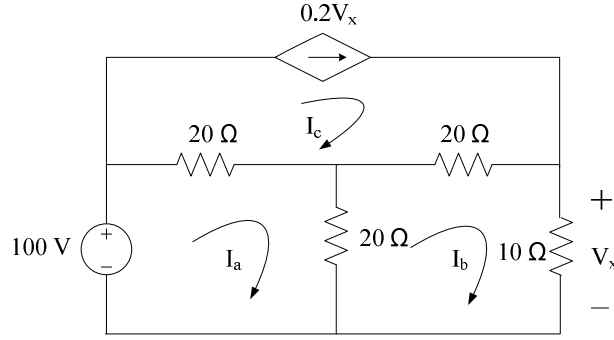
Akım kaynağına seri bağlı bir direnç olması durumunda, göz akımlarının değeri değişmeyecekti. Bu durumu yorumlayınız.

ÖRNEK PROBLEM 3.4:

Şekil.3.8'de verilen devrede V_x gerilimini bulunuz.

Çözüm:

$$I_c = 0.2V_x, \quad V_x = 10I_b, \quad I_c = 0.2(10I_b) = 2I_b$$



Şekil.3.8: Örnek Problem 3.4 devresi

1.göz için:

$$40I_a - 20I_b - 20I_c = 100 \Rightarrow 40I_a - 20I_b - 20(2I_b) = 100, \\ 40I_a - 60I_b = 100.$$

2. göz için:

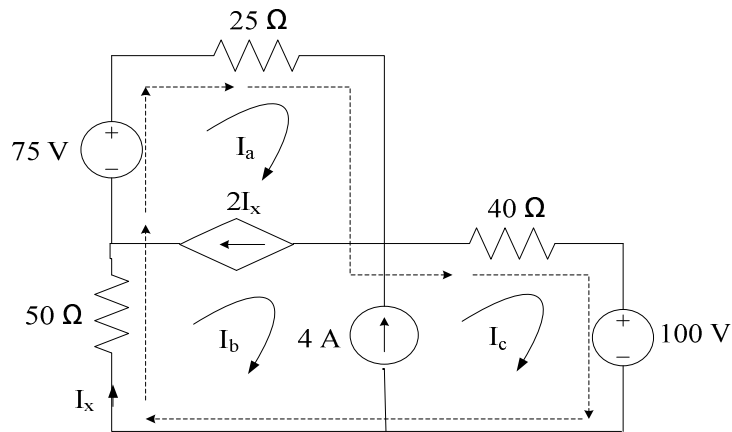
$$-20I_a + 50I_b - 20I_c = 0 \Rightarrow -20I_a + 50I_b - 20(2I_b) = 0, \\ -20I_a + 10I_b = 0 \Rightarrow I_a = \frac{1}{2}I_b.$$

$$100 = 40\left(\frac{1}{2}I_b\right) - 60I_b \Rightarrow 100 = -40I_b; \quad I_b = -2.5 \text{ A.}$$

$$V_x = 10I_b = -25 \text{ V.}$$

ÖRNEK PROBLEM 3.5:

Şekil.3.9’de verilen devrede I_x akımını bulunuz.



Şekil.3.9: Örnek Problem 3.5 devresi

Kesik çizgiyle gösterilen süper-göz için:

$$-75 + 25I_a + 40I_c + 50I_b + 100 = 0 \Rightarrow 25I_a + 40I_c + 50I_b = -25$$

Bağımlı kaynağı içeren kolda akım yasası uygulanırsa,

$$I_a - I_b = 2I_x \quad \text{ve} \quad I_x = I_b, \\ I_a - I_b = 2I_b \Rightarrow I_a = 3I_b.$$

Bağımsız akım kaynağını içeren kolda akım yasasını uygulanırsa,

$$I_c - I_b = 4 \Rightarrow I_c = 4 + I_b.$$

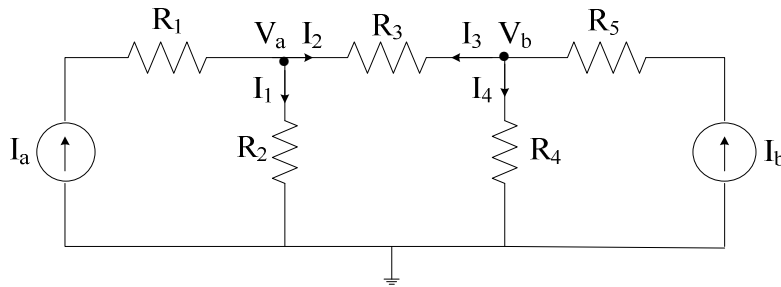
I_a ve I_c süper-göz eşitliğinde yerine yazıldığında,

$$25(3I_b) + 40(4 + I_b) + 50I_b = -25 \Rightarrow 165I_b = -185; \quad I_b = -1.1212 \text{ A.} \\ I_x = -1.1212 \text{ A}$$

elde edilir.

3.2. DÜĞÜM POTANSİYELLERİ METODU

Düğüm potansiyelleri metodunda temel değişkenler, seçilen bir referans noktasına göre diğer düğüm noktalarının potansiyelleridir. Düğüm potansiyelleri belirlendikten sonra her kol akımı ve diğer devre değişkenleri düğüm potansiyelleri cinsinden bulunur. Şekil.3.10'da verilen devrede, seçilmiş bir referans noktasına göre diğer düğüm noktalarının potansiyelleri ve kol akımları gösterilmiştir.



Şekil.3.10: Düğüm potansiyelleri ve referans noktası

İki ya da daha çok devre elemanının bir arada bağlandığı eklenti noktası düğüm olarak tanımlanır. Düğüm potansiyelleri metodunda ilk adım, bir referans noktası belirlemek ve bu noktaya bir gerilim değeri atamaktır. Referans noktası devredeki her hangi bir nokta olabilir. Ancak, en çok kolun bir arada bağlandığı noktayı referans noktası olarak seçmek, analizi kolaylaştırır. Şekil.3.9'da verilen devrede bu kriter gözetilerek referans noktası seçilmiştir. Referans noktasına atanan değer genellikle sıfırdır. Bu nedenle referans noktası genellikle

toprak olarak adlandırılır ve şekilde görülen \perp işareti ile belirtilir. İkinci adımda, devredeki potansiyeli bilinmeyen diğer noktalar için değişkenler atanır. Verilen devrede bu değişkenler V_a , V_b ve V_c olarak atanmışlardır. Daha sonra, bu noktaların her birinde Kirchhoff'un akım yasasını uygulanır:

1.nokta için:

$$-I_a + I_1 + I_2 = 0. \quad (3.24)$$

2. nokta için:

$$-I_b + I_3 + I_4 = 0. \quad (3.25)$$

Burada I_1 , I_2 , I_3 ve I_4 bilinmeyen kol akımları olup yönleri rastgeledir. Ancak, bir zorunluluk yoksa, bir noktadan bütün akımların çıktığını kabul etmek metodun uygulanmasında kolaylık sağlar. Verilen devrede akım yönleri bu kriter gereğince seçilmiştir. Bu seçimle R_3 direnci üzerinde, ters yönde I_2 ve I_3 akımları kabul edilmiştir. Kolayca anlaşılacağı gibi, burada $I_3 = -I_2$ dir. Kol akımları, Ohm yasasını kullanılarak nokta potansiyelleri cinsinden ifade edilir:

$$I_1 = \frac{V_a - 0}{R_2}, \quad (3.26)$$

$$I_2 = \frac{V_a - V_b}{R_3}, \quad (3.27)$$

$$I_3 = \frac{V_b - V_a}{R_3}, \quad (3.28)$$

$$I_4 = \frac{V_b - 0}{R_4} \quad (3.29)$$

Dikkat edilirse; her kol akımı ifadesinde, akımın çıktığı noktanın potansiyelinden diğer noktanın potansiyeli çıkarılmaktadır. Akım potansiyeli düşük noktadan potansiyeli yüksek noktaya doğru aktığından, yukarıdaki eşitlik formlarını elde etmek amacıyla, her nokta için akımlar o noktadan dışarı doğru seçilmiştir.

Akım ifadeleri (3.24) ve (3.25) eşitliklerinde yerlerine yazılırsa,

$$\frac{V_a}{R_2} + \frac{V_a - V_b}{R_3} = I_a \quad \Rightarrow \quad V_a \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) - V_b \frac{1}{R_3} = I_a \quad (3.30)$$

ve

$$\frac{V_b - V_a}{R_3} + \frac{V_b}{R_4} = I_b \quad \Rightarrow \quad -V_a \frac{1}{R_3} + V_b \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) = I_b \quad (3.40)$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler bir matriks eşitlik formunda yazılacak olursa,

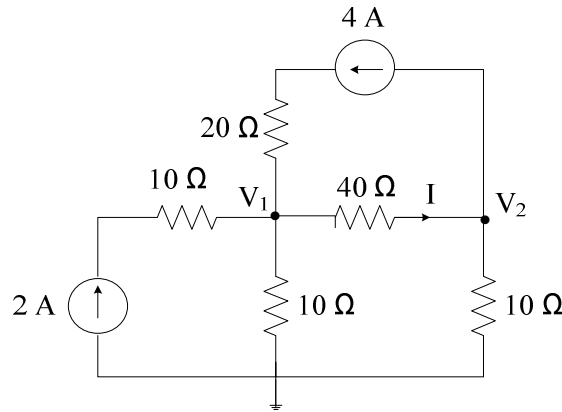
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_3} \\ -\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

ve bu matriks eşitliğin çözümünden de nokta potansiyelleri aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$V_a = \frac{\begin{vmatrix} I_a & -\frac{1}{R_3} \\ I_b & \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_3} \\ -\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \end{vmatrix}}, \quad V_b = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} & I_a \\ -\frac{1}{R_3} & I_b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_3} \\ -\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \end{vmatrix}}. \quad (3.42)$$

ÖRNEK PROBLEM 3.6:

Şekil.3.11’da verilen devrede I akımını bulunuz.



Şekil.3.11: Örnek Problem 3.6 devresi

V_1 potansiyeline sahip nokta için:

$$\frac{V_1}{10} + \frac{V_1 - V_2}{40} - 2 - 4 = 0 \Rightarrow 5V_1 - V_2 = 240.$$

V_2 potansiyeline sahip nokta için:

$$\frac{V_2}{10} + \frac{V_2 - V_1}{40} + 4 = 0 \Rightarrow 5V_2 - V_1 = -160$$

ve

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 240 \\ -160 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Matriks eşitlik V_1 , V_2 potansiyelleri için Cramer kuralı ile çözülürse,

$$V_1 = \frac{\begin{vmatrix} 240 & -1 \\ -160 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}} = 43.33 \text{ V} \quad \text{ve} \quad V_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 240 \\ -1 & -160 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}} = -23.33 \text{ V}$$

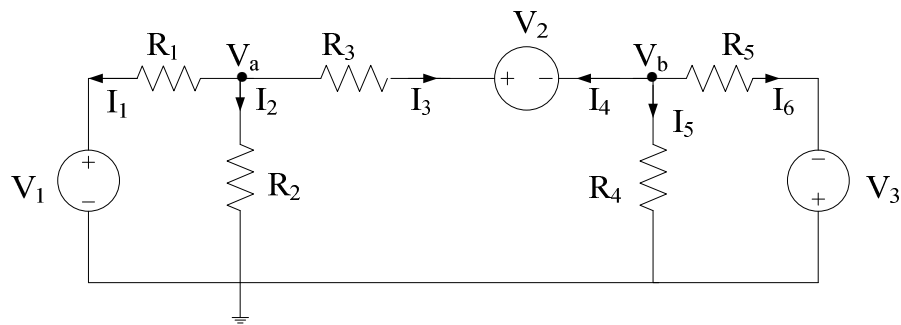
bulunur. Ohm yasası kullanılarak da aranan kol akımı aşağıdaki gibi elde edilir:

$$I = \frac{V_1 - V_2}{40} = \frac{43.33 - (-23.33)}{40} = 1.66 \text{ A.}$$

Düğüm potansiyeli metodu kullanarak, gerilim kaynakları içeren devrelerin analizleri de mümkündür. Gerilim kaynaklarının bir devrede olası üç farklı bağlantı şekli için metodun uygulanması aşağıda ayrı ayrı incelenecektir.

1. Devrede gerilim kaynağı ile bir direncin seri bağlı olduğu kol bulunması hali

Şekil.3.12’de, bu şekilde bağlanmış üç gerilim kaynağı mevcuttur.



Şekil.3.12. 1.durum için örnek devre

Bu şekilde bir bağlantıda gerilim kaynağının bağlı olduğu kol akımı potansiyeller cinsinden ifade edilebilir. Örnek devredeki kol akımları,

$$I_1 = \frac{V_a - V_1}{R_1}, \quad (3.43)$$

$$I_2 = \frac{V_a}{R_2}, \quad (3.44)$$

$$I_3 = \frac{V_a - (V_2 + V_b)}{R_3}, \quad (3.45)$$

$$I_4 = \frac{V_b - (V_a - V_2)}{R_3}, \quad (3.46)$$

$$I_5 = \frac{V_b}{R_4}, \quad (3.47)$$

$$I_6 = \frac{V_b - (-V_3)}{R_5} \quad (3.48)$$

olacaktır. Şekil.3.12'deki devrede V_a ve V_b potansiyelli düğüm noktalarında Kirchhoff'un akım yasası uygulanırsa, yukarıdaki akım ifadeleri ile birlikte

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{V_a - V_1}{R_1} + \frac{V_a}{R_2} + \frac{V_a - (V_2 + V_b)}{R_3} = 0$$

$$V_a \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} \right) - V_b \left(\frac{1}{R_3} \right) = \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_3} \quad (3.49)$$

$$I_4 + I_5 + I_6 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{V_b - (V_a - V_2)}{R_3} + \frac{V_b}{R_4} + \frac{V_b - (-V_3)}{R_5} = 0$$

$$-V_a \left(\frac{1}{R_3} \right) + V_b \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \right) = -\frac{V_2}{R_3} - \frac{V_3}{R_5} \quad (3.50)$$

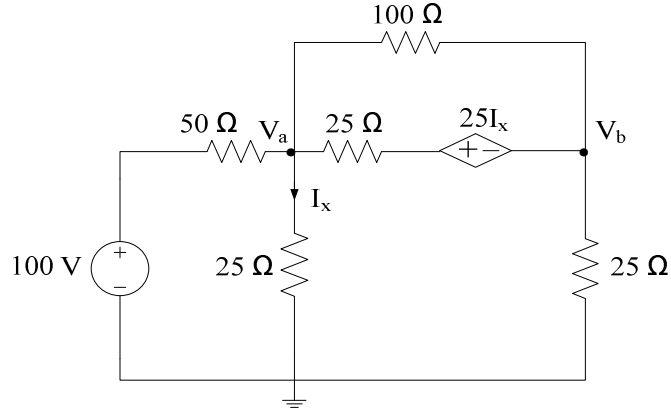
eşitlikleri elde edilir. (3.49) ve (3.50) eşitlikleri çözülerek de, aranan nokta potansiyelleri bulunur.

ÖRNEK PROBLEM 3.7:

Şekil.3.13'de verilen devrede bağımlı kaynağın gücünü bulunuz.

Cözüm:

Bağımlı kaynağın değerinin kontrol edildiği kol akımının ifadesi,



Şekil.3.13: Örnek Problem 3.7 devresi

$$I_x = \frac{V_a}{25}$$

dir. a-noktası için:

$$\frac{V_a - 100}{50} + \frac{V_a}{25} + \frac{V_a - V_b}{100} + \frac{V_a - V_b - 25I_x}{25} = 0 \Rightarrow 11V_a - 5V_b - 100I_x = 200,$$

$$11V_a - 5V_b - 100\left(\frac{V_a}{25}\right) = 200 \Rightarrow 7V_a - 5V_b = 200.$$

b-noktası için:

$$\frac{V_b - V_a}{100} + \frac{V_b - V_a + 25I_x}{25} + \frac{V_b}{25} = 0 \Rightarrow -5V_a + 9V_b + 100I_x = 0,$$

$$-5V_a + 9V_b + 100\left(\frac{V_a}{25}\right) = 0 \Rightarrow -V_a + 9V_b = 0; \quad V_a = 9V_b$$

$$7(9V_b) - 5V_b = 200 \Rightarrow V_b = \frac{200}{58} = 3.448 \text{ V},$$

$$V_a = 31.03 \text{ V}.$$

$$I_x = 1.241 \text{ A}.$$

Bağımlı kaynak üzerinden geçen akım:

$$I_{25I_x} = \frac{V_b - V_a + 25I_x}{25} = 0.138 \text{ A}.$$

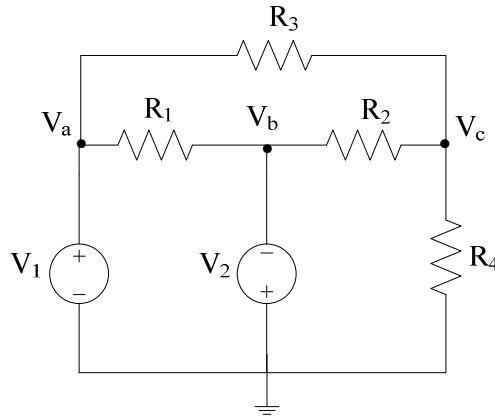
Bağımlı kaynağın gücü ise,

$$P_{25I_x} = -(25I_x)(I_{25I_x}) = -(25)(1.241)(0.1393) = -4.28 \text{ W}$$

bulunur.

2. Devrede referans noktası ile bir başka nokta arasında yalnız gerilim kaynağının bulunması hali

Şekil.3.14’de verilen devrede, referans noktası ile a-noktası ve referans noktası ile b-noktası arasında bağlı, V_1 ve V_2 kaynakları görülmektedir. a-noktası ve referans noktası



Şekil.3.14: 2.durum için örnek devre

arasında, V_1 kaynağı dışında başka bir devre elemanı bulunmadığından, bu iki nokta arasında gerilim farkı V_1 olacaktır. Dikkat edilirse, gerilim kaynağı ile seri bir direncin bağlı olması durumunda, direnç üzerinde bir gerilim düşümü meydana geleceğinden bu durumun sağlanmayacağı kolayca görülebilir. Aynı nedenle b-noktası ve referans noktası arasındaki potansiyel fark da V_2 olacaktır:

$$V_a = V_1, \quad (3.51)$$

$$V_b = -V_2. \quad (3.52)$$

Bu durumda, verilen devrede potansiyeli bilinmeyen tek nokta c-noktası olup, bu noktada akım yasasını uygulamak yeterli olacaktır:

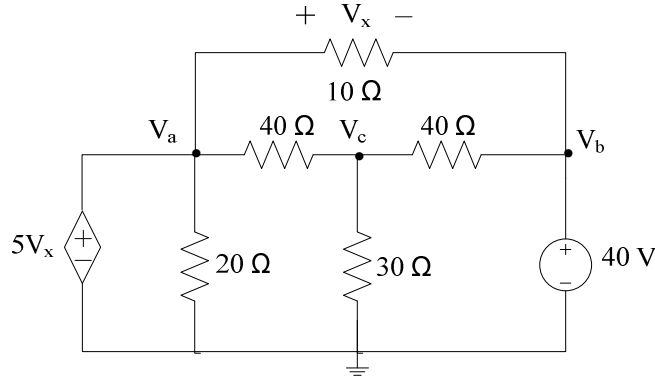
$$\frac{V_c - V_b}{R_2} + \frac{V_c - V_a}{R_3} + \frac{V_c}{R_4} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{V_c - (-V_2)}{R_2} + \frac{V_c - V_1}{R_3} + \frac{V_c}{R_4} = 0$$

ve,

$$V_c = \left(\frac{V_1}{R_3} - \frac{V_2}{R_2} \right) / \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right). \quad (3.53)$$

ÖRNEK PROBLEM 3.8:

Şekil.3.15’de verilen devrede V_a , V_b ve V_c potansiyellerini bulunuz.



Şekil.3.15: Örnek Problem 3.8 devresi

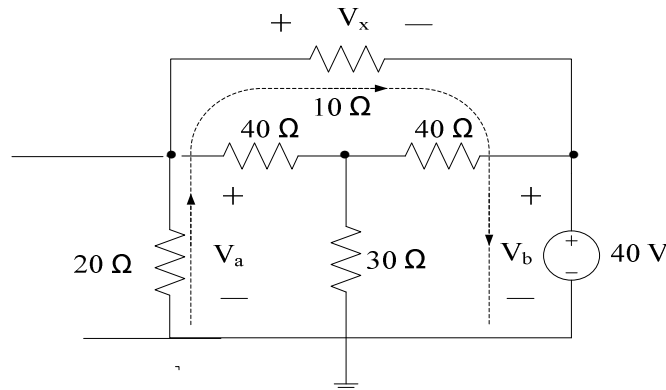
Referans noktası ile a-noktası arasında $5V_x$ volt’luk kaynak bağlı olduğundan,

$$V_a = 5V_x \text{ V.}$$

Aynı şekilde, referans noktası ile b-noktası arasında 40 volt’luk kaynak bağlı olduğundan,

$$V_b = 40 \text{ V.}$$

olacaktır. Aşağıda tanımlanan çevrim kullanılarak V_x ve dolayısıyla da V_a potansiyeli bulunabilir:



Şekil.3.16: Örnek Problem 3.8’de gerilim yasasının uygulanışı

$$-V_a + V_x + V_b = 0 \Rightarrow -5V_x + V_x + 40 = 0; \quad 4V_x = 40 \Rightarrow V_x = 10 \text{ V,}$$

$$V_a = 50 \text{ V.}$$

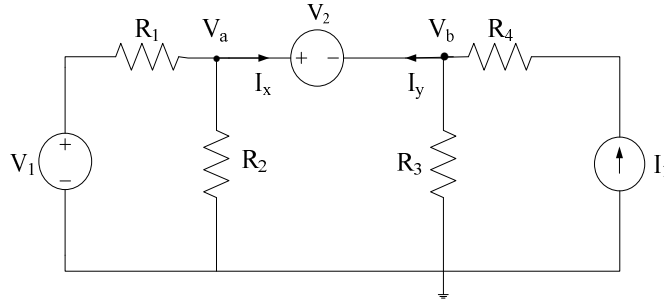
c-noktası için:

$$\frac{V_c - V_a}{40} + \frac{V_c - V_b}{40} + \frac{V_c}{30} = 0 \Rightarrow 10V_c = 270, \quad V_c = 27 \text{ V}$$

sonucu elde edilir.

3. Devrede, referans noktası dışında iki düğüm noktası arasında tek bir gerilim kaynağının bulunması hali.

Şekil.3.17’de görülen bağlantıda, gerilim kaynağı üzerinden geçen akım nokta potansiyelleri cinsinden ifade edilemeyeceğinden, bu akım eşitlikte bir bilinmeyen olarak ifade edilmelidir.



Şekil.3.17: 3. durum için örnek devre

V_a ve V_b potansiyelli düğüm noktaları için akım yasasını uygulanırsa,

$$\frac{V_a - V_1}{R_1} + \frac{V_a}{R_2} + I_x = 0. \quad (3.54)$$

$$-I_1 + \frac{V_b}{R_3} + I_y = 0. \quad (3.55)$$

$I_x = -I_y$ olduğu göz önüne alınır ve (3.54) (3.55) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa

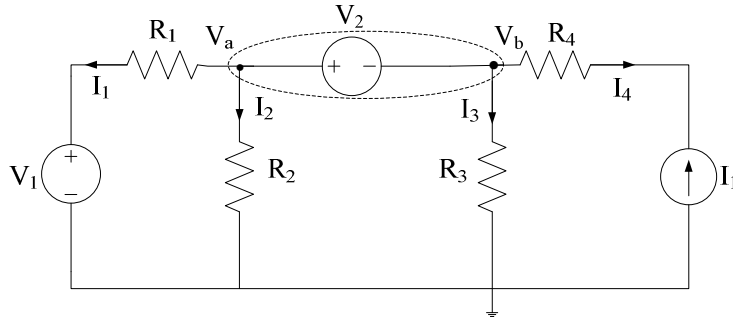
$$-I_1 + \frac{V_b}{R_3} + \frac{V_a - V_1}{R_1} + \frac{V_a}{R_2} = 0 \quad (3.56)$$

eşitliği elde edilir. (3.56) eşitliği aranan nokta potansiyellerini içermektedir. Başka bir deyişle çözüm için kullanılabilecek iki eşitlikten biridir. Bu eşitliği, Şekil.3.18’de verilen nokta seçimi ile direk olarak elde etmek de mümkündür.

3.2.1. SÜPER NOKTA KAVRAMI

Şekil.3.18’de kesik çizgilerle sınırlanmış düzlem süper-nokta olarak adlandırılır. Kirchhoff’un akım yasası genel olarak herhangi bir kapalı bölgeye uygulanabileceğinden, süper-noktada eşitlik,

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0 \quad (3.57)$$

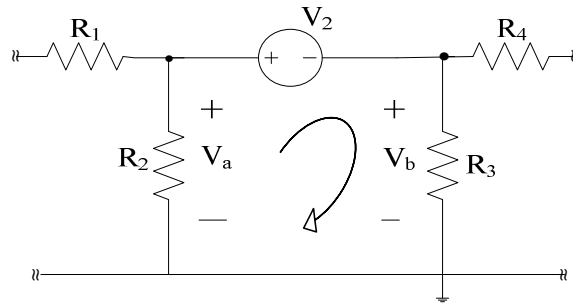


Şekil.3.18: Süper-nokta

ve,

$$\frac{V_a - V_1}{R_1} + \frac{V_a}{R_2} + \frac{V_b}{R_3} - I_1 = 0 \quad (3.58)$$

olacaktır. Bu eşitlik (3.56) eşitliği ile aynıdır. O halde, süper-nokta kavramı, iki noktada ayrı ayrı akım yasasını uygulayıp, bunları toplayarak bir eşitlik elde etmek yerine sonuç eşitliğini direk olarak yazmaya imkan vermektedir. Analiz için gerekli olan ikinci denklem, süper-noktayı oluşturan gerilim kaynağını içeren gözde, Kirchhoff'un gerilim yasasını uygulayarak elde edilir. Genel olarak, verilen devre kaç adet süper-nokta içeriyorsa, gerilim yasası da aynı sayıda uygulanmak zorundadır. Örnek devre için gerilim yasasının uygulanışı Şekil.3.19'da görülmektedir.



Şekil.3.19: Süper-noktayı içeren gözde gerilim yasasının uygulanışı

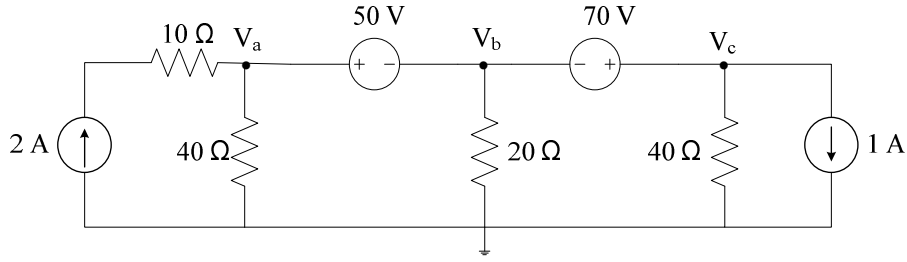
Şekil.3.19'de seçilen dönüş yönüne göre

$$-V_a + V_2 + V_b = 0 \Rightarrow V_a - V_b = V_2 \quad (3.59)$$

olacağından, (3.58) ve (3.59) eşitlikleri kullanılarak V_a ve V_b bilinmeyen nokta potansiyelleri belirlenebilir.

ÖRNEK PROBLEM 3.9:

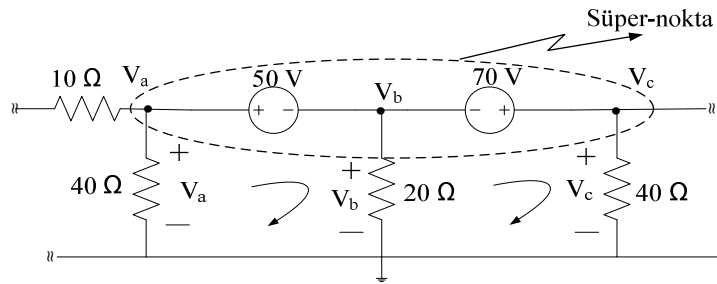
Şekil.3.20'de verilen devrede V_a , V_b ve V_c potansiyellerini bulunuz.



Şekil.3.20: Örnek Problem 3.9 devresi

Çözüm:

Şekil 3.21’de görüldüğü gibi tanımlanan süper-noktada akım yasasını ve süper-noktayı içeren her iki gözde gerilim yasasını uygulayarak aşağıdaki eşitlikler elde edilir:



Şekil.3.20: Örnek Problem .3.9 için süper-nokta tanımı

Süper-noktada akım yasası:

$$-2 + \frac{V_a}{40} + \frac{V_b}{20} + \frac{V_c}{40} + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_a + 2V_b + V_c = 40.$$

İkinci gözde gerilim yasası:

$$-V_a + 50 + V_b = 0; \quad V_a = 50 + V_b.$$

Üçüncü gözde gerilim yasası:

$$-V_b - 70 + V_c = 0; \quad V_c = V_b + 70.$$

V_a ve V_c ifadelerini ilk eşitlikte kullanarak

$$(50 + V_b) + 2V_b + (V_b + 70) = 40 \quad \Rightarrow \quad 4V_b = -80; \quad V_b = -20 \text{ V}$$

ve V_b değeri yukarıdaki ifadelerde kullanılarak,

$$V_a = 30 \text{ V}, \quad V_c = 50 \text{ V} \quad \text{sonuçları elde edilir.}$$

3.3. ANALİZ METODUNUN SEÇİMİ

Verilen devrenin analizinde genel olarak her iki metot da kullanılabilir. Ancak, seçilen metoda bağlı olarak, analizde kullanılacak değişken sayısı ve dolayısıyla eşitlik sayısı değişebileceğinden, analizin matematiksel işlem hacmi artabilir veya azalabilir. Uygun metodun seçimi için şu kriter göz önünde bulundurulur.

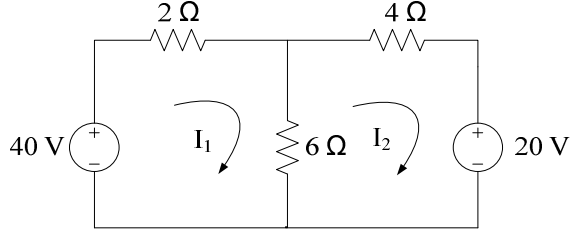
Devrenin yapısına bağlı olarak, içerdiği göz sayısı ve nokta sayısı devrenin analizinde ihtiyaç duyulan değişken sayısını belirler. Ancak devrede bulunan kaynak tipleri de bu kriteri etkiler. Bu nedenle, genel olarak çok sayıda seri bağlı eleman, gerilim kaynakları ve süper-göz içeren devrelerin analizi için göz akımları metodu, çok sayıda paralel kol, akım kaynakları ve süper-nokta içeren devrelerin analizinde ise düğüm potansiyelleri metodu uygundur.

Aranan devre değişkenine bağlı olarak analiz metodunun belirlenmesi de bir kriter olarak seçilebilir. Örneğin, bir noktanın potansiyelinin belirlenmesi isteniyorsa, düğüm potansiyelleri metodu ile bu potansiyel direk olarak elde edilecektir. Göz akımları metodunun uygulanması ile ise, öncelikle göz akımları ve daha sonra da göz akımları cinsinden aranan düğüm potansiyelinin ifade edilmesi gerekecektir. Bu durumda işlem yükünün bir miktar artacağı açıktır. Ancak asıl önemli olan kullanılan analizde gereken bilinmeyen sayısıdır. Bu nedenle, aranan devre değişkeni ikincil bir kriter olarak göz önüne alınmalıdır.

Bu kriterlerin dışında bir metodun uygulanmasını zorunlu kılan durumlar da mevcuttur. Örneğin, üç boyutlu devrelerin analizinde göz akımları metodu kullanılamazken, transistör içeren devrelerin analizinde de düğüm potansiyelleri metodu kullanılamaz.

PROBLEMLER

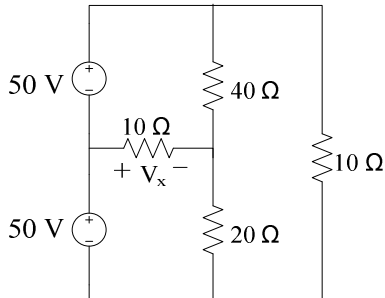
3.1. Şekil.3.21’de verilen devrede göz akımlarını bulunuz.



Şekil.3.21: Problem 3.1. devresi

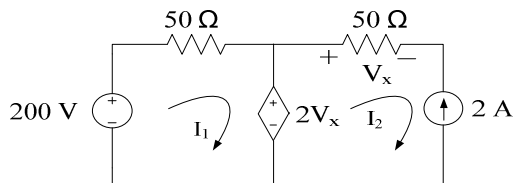
3.2. Şekil.3.21’de verilen devrede 6 Ω’luk direncin gücünü ve 20 Volt’luk kaynağın gücünü bulunuz.

3.3. Göz akımları metodunu kullanarak Şekil.3.22’de verilen devrede V_x gerilimini bulunuz.



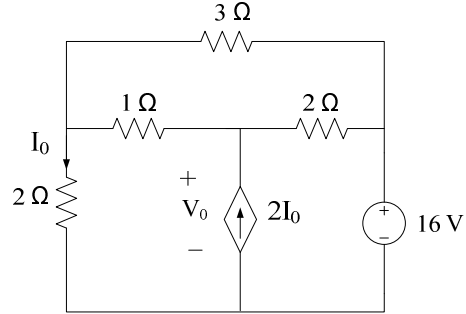
Şekil.3.22: Problem 3.3 devresi

3.4. Göz akımları metodunu kullanarak Şekil.3.23’de verilen devrede bağımlı kaynağın gücünü akımı bulunuz.



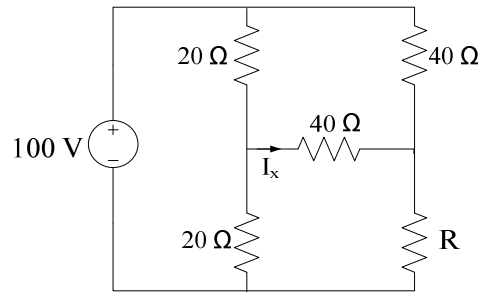
Şekil.3.23: Problem 3.4 devresi

3.5. Göz akımları metodunu kullanarak Şekil.3.24’de verilen devrede V_0 gerilimi ve I_0 akımını bulunuz.



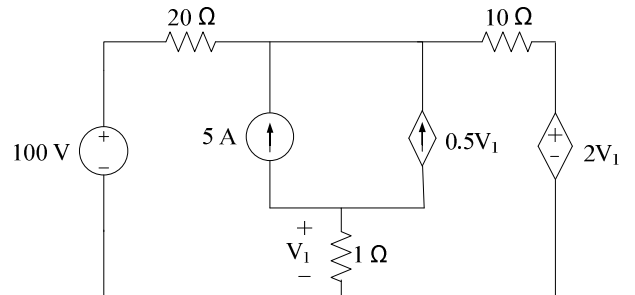
Şekil.3.24: Problem 3.5. devresi

3.6. Göz akımları metodunu kullanarak Şekil.3.25’de verilen devrede I_x akımının sıfır olması için gerekli R direncini bulunuz.



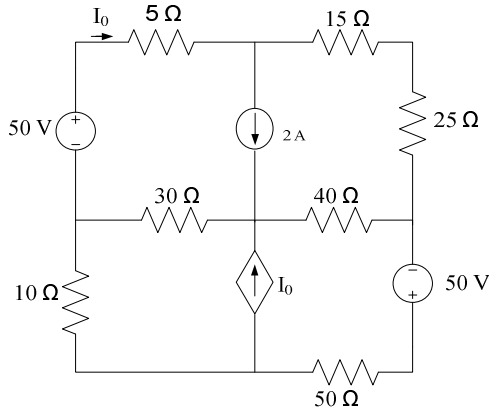
Şekil.3.25: Problem 3.6 devresi

3.7. Göz akımları metodunu kullanarak Şekil.3.26’da verilen devrede V_1 gerilimini bulunuz.



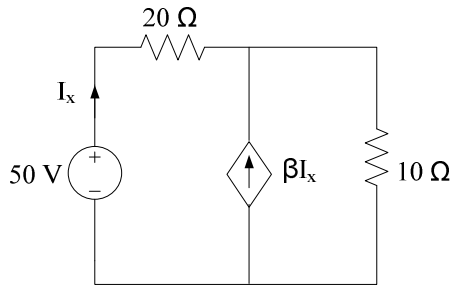
Şekil.3.26: Problem 3.7 devresi

3.8. Göz akımları metodunu kullanarak Şekil.3.27’de verilen devrede, devre elemanlarının güçlerini bulunuz.



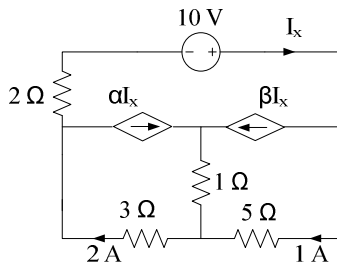
Şekil.3.27: Problem 3.8 devresi

3.9. Göz akımları metodunu kullanarak Şekil.3.28’de verilen devrede $10\ \Omega$ ’luk direnç üzerindeki akımın 1 A olması için gerekli β değerini bulunuz.



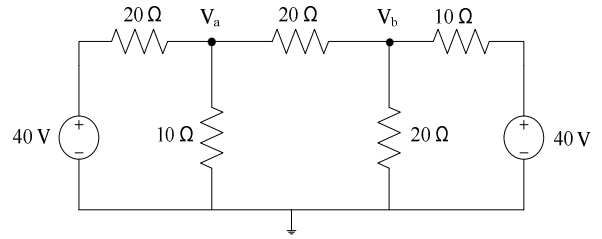
Şekil.3.28: Problem 3.9 devresi

3.10. Göz akımları metodunu kullanarak Şekil.3.29’da verilen devrede β ve α değerlerini bulunuz.



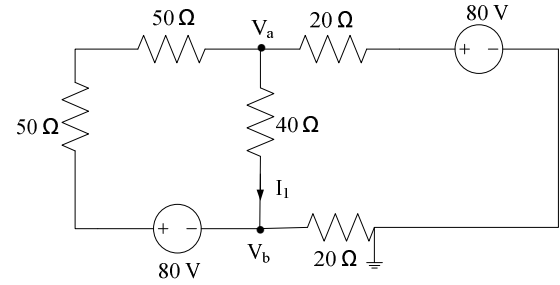
Şekil.3.29: Problem 3.10 devresi

3.11. Nokta potansiyelleri metodunu kullanarak Şekil.3.30’da verilen devrede V_a , V_b potansiyellerini bulunuz.



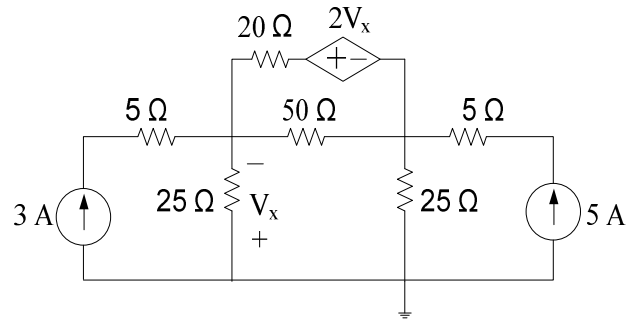
Şekil.3.30: Problem 3.11 devresi

3.12. Nokta potansiyelleri metodunu kullanarak Şekil.3.31’de verilen devrede I_1 akımını bulunuz.



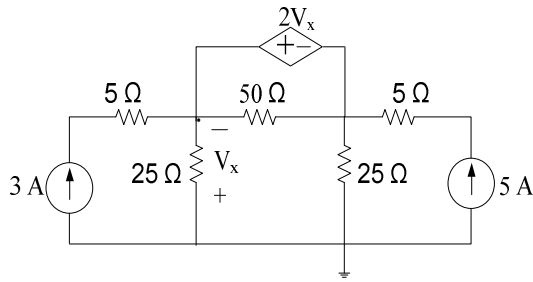
Şekil.3.31: Problem 3.12 devresi

3.13. Nokta potansiyelleri metodunu kullanarak Şekil.3.32’de verilen devrede bağımlı kaynağın gücünü bulunuz.



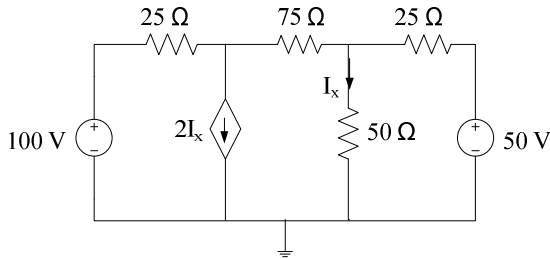
Şekil.3.32: Problem 3.13 devresi

3.14. Nokta potansiyelleri metodu ile, Şekil.3.33’de verilen devrede bağımlı kaynağın gücünü bulunuz.



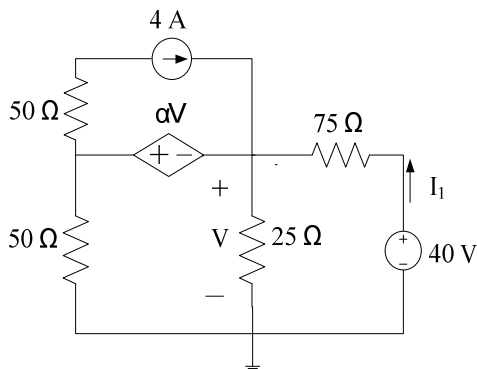
Şekil.3.33: Problem 3.14 devresi

3.15. Nokta potansiyelleri metodunu kullanarak Şekil.3.34’ de verilen devrede 50 V’luk kaynağın bağlı olduğu terminalden görülen eşdeğer direnci bulunuz.



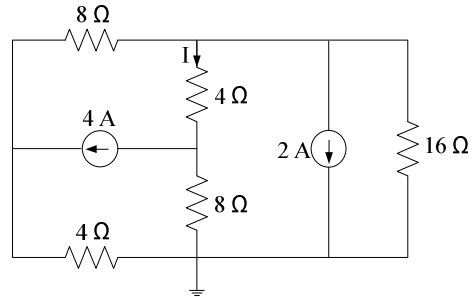
Şekil.3.34: Problem 3.15 devresi

3.16. Nokta potansiyelleri metodunu kullanarak Şekil.3.35’ de verilen devrede I_1 akımının 2 A. olması için gerekli α değerini bulunuz.



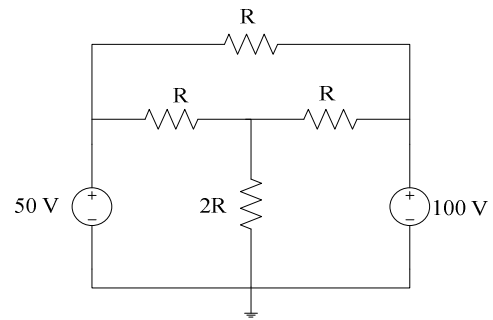
Şekil.3.35: Problem 3.16 devresi

3.17. Nokta potansiyelleri metodunu kullanarak Şekil.3.36’da verilen devrede, I akımını bulunuz.



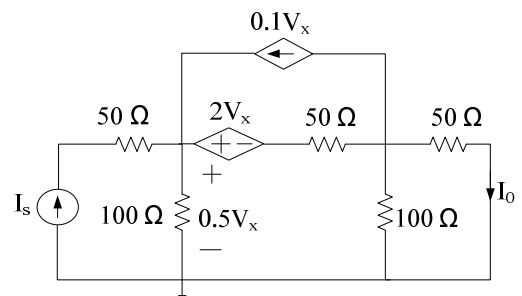
Şekil.3.36: Problem 3.17 devresi

3.18. Nokta potansiyelleri metodunu kullanarak Şekil.3.37’de verilen devrede 100 Volt’luk kaynağın 900 W güç üretmesi için gerekli R değerini bulunuz.



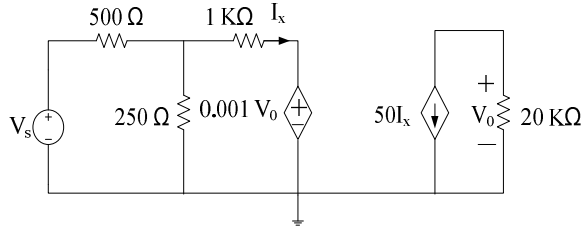
Şekil.3.37: Problem 3.18 devresi

3.19. Nokta potansiyelleri metodunu kullanarak Şekil.3.37’ da verilen devrede I_0 / I_s oranını bulunuz.



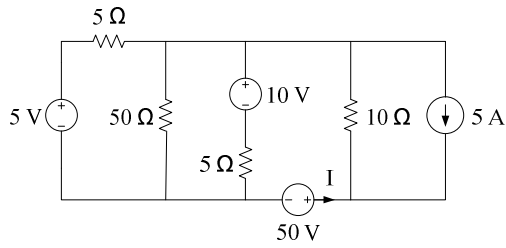
Şekil.3.37: Problem 3.19 devresi

3.20. Şekil.3.38’de verilen devrede V_0/V_s oranını bulunuz.



Şekil.3.38: Problem 3.20 devresi

3.21. Şekil.3.39’da verilen devrede 50 V’luk kaynağın üzerinden geçen I akımını bulunuz.



Şekil.3.39: Problem 3.21 devresi

4.BÖLÜM: DEVRE TEOREMLERİ

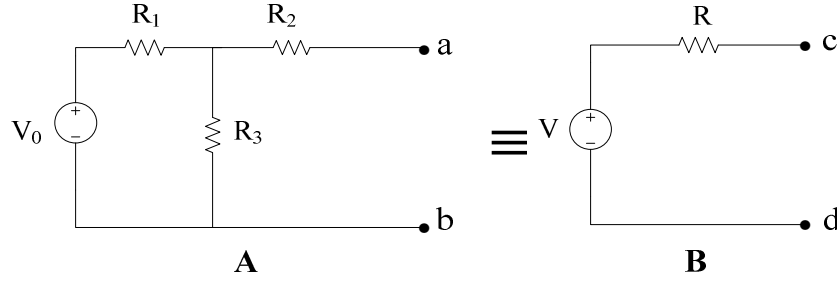
4.1 GİRİŞ

İki temel devre analiz metodu kullanılarak, her elektrik devresinin analizi yapılabilir. Ancak; analizi yapılacak devrenin yapısı karmaşıktıkça, analiz için gerekli eşitlik sayısı ve dolayısıyla işlem yükü ve karmaşıklığı artacaktır. Bu bölümde ele alınacak devre teoremleri, bazı durumlarda, bahsedilen işlem yükünün azalmasını sağlayabilmekte, bazı durumlarda uygulanması zorunlu olabilmekte ve bazı durumlarda da aranan cevabı genel bir yaklaşımla, doğrudan elde etmemize olanak vermektedir. Bu durumların her biri ilgili teorem ele alınırken detaylı olarak incelenecektir.

Teoremleri tek tek incelemeden önce, bu bölümde sıklıkla kullanılacak *eşdeğerlik* ve *doğrusallık* kavramları üzerinde durulacaktır.

4.2 EŞDEĞERLİK

Devre teoremlerinin uygulanmasındaki genel amaç, analize başlamadan önce devreyi daha basit bir yapıya indirgemek ve dolayısıyla işlem yükünü azaltmak denilebilir. Dikkat edilirse, teoremin uygulanması aşamasında devrenin yapısının değiştirilmesi söz konusudur. Açıkça ki, değiştirilmiş devrenin orijinal devre ile aynı koşulları sağlaması gerekecektir. Başka bir deyişle iki devre birbirine eşdeğer olmalıdır. Eşdeğerlik; farklı iki devrenin, karşılıklı birer terminalleri arasındaki aynı davranış durumunu ifade eder. Örneğin, Şekil.4.1'de verilmiş birbirinden tamamen farklı A ve B devrelerinin birer terminalleri sırasıyla a-b ve c-d olsun:

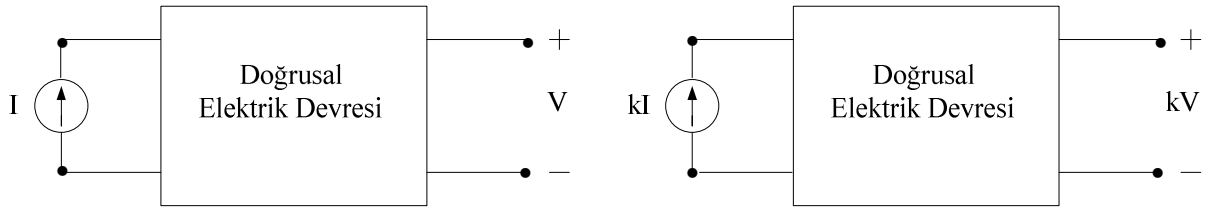


Şekil 4.1 Eşdeğer A ve B devreleri.

Her iki devrenin terminallerine, aynı devre elemanı bağlandığında, üzerlerinden aynı akım geçiyorsa, bu iki devre terminal davranışları bakımından birbirleriyle aynı olacaktır. Açıkta ki, bağlanan devre elemanlarından geçen akımlar aynı ise, bu eleman üzerindeki gerilimler de aynı ve dolayısıyla, her iki devrenin terminallerinden görülen eşdeğer dirençler de aynı olacaktır. Yani benzeşim, devrelerin terminal karakteristiklerinin aynı olmasından ibarettir. O halde iki devrenin eşdeğerliği, karşılıklı terminal karakteristiklerinin aynı olduğunu ifade etmektedir.

4.2 DOĞRUSALLIK

Bir devre elemanının terminal eşitliği doğrusal bir ifade ise, o devre elemanı doğrusaldır. Örneğin, dirence ilişkin terminal eşitlik, Ohm yasası ile verilen $V = IR$ doğrusal ifadesi olduğundan, direnç bir doğrusal devre elemanıdır. Buna zıt olarak, örneğin bir diyot için, diyot terminal gerilimi diyot akımının karesinin bir fonksiyonu olduğundan diyot doğrusal olmayan bir devre elemanıdır. Direnç örneğinde, direnç akımı bir uyarım ve direnç gerilimi de bu uyarıma karşı bir cevap olarak düşünülürse, dirençte, uyarıma orantılı bir cevap elde edildiği görülecektir. Bundan hareket ederek, bir devrenin her hangi bir cevabının, devreye uygulanan uyarımla orantılı olması halinde, devrenin doğrusal bir devre olduğunu söylenebilir. Şekil.4.2’de verilen devreyi ele alalım:



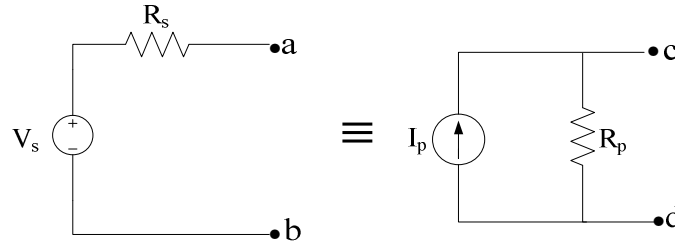
Şekil 4.2 Doğrusal bir elektrik devresi.

Devreye uygulanan I uyarımı değiştirildiğinde, devrenin bir cevabı olan V gerilimi aynı oranda ve aynı yönde değişiyorsa, devre doğrusal bir devredir. Açıkta ki, doğrusal devreler sadece doğrusal devre elemanları ile oluşturulabilir.

4.3 KAYNAK DÖNÜŞÜMÜ

Kaynak dönüşümü, seri bağlı bir dirençle bir gerilim kaynağından oluşan bir devrenin, paralel bağlı bir dirençle bir akım kaynağından oluşan bir eşdeğer devresinin elde edilmesi

işlemidir. Aynı işlem tam tersi bir dönüşüm içinde geçerlidir. Dönüşüm için gerekli ifadeler Şekil.4.3’de verilen eşdeğer devreler kullanarak elde edilebilir:



Şekil 4.3 Kaynak dönüşümü.

İki devre eşdeğer olduğundan, açık devre gerilimleri eşit olmalıdır. Seri ve paralel devreler için açık devre gerilimleri, sırasıyla

$$V_{oc} = V_s \quad (4.1)$$

$$V_{oc} = I_p R_p \quad (4.2)$$

olduğundan,

$$I_p R_p = V_s \quad (4.3)$$

eşitliği elde edilir. Benzer şekilde seri ve paralel devrenin kısa devre akımları, sırasıyla

$$I_{sc} = \frac{V_s}{R_s} \quad (4.4)$$

$$I_{sc} = I_p \quad (4.5)$$

olup, kısa devre akımlarının eşitliğinden,

$$I_p = \frac{V_s}{R_s} \quad (4.6)$$

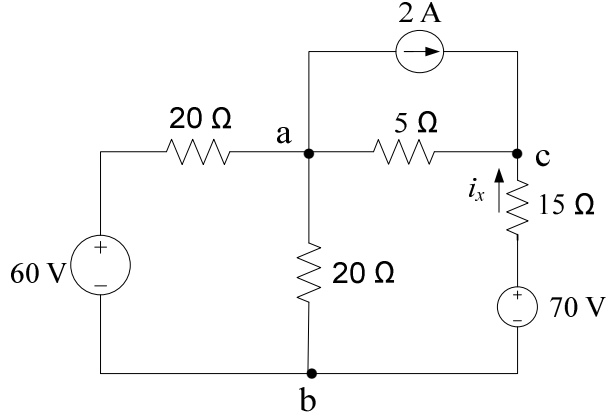
elde edilir. Son olarak, iki devrenin terminallerinden görülen eşdeğer dirençler eşit olmalıdır:

$$R_s = R_p \quad (4.7)$$

(4.3) eşitliği, paralel devre seri devreye dönüştürülürken, seri devreye bağlanacak gerilim kaynağının değerini, (4.6) eşitliği ise, seri devre paralel devreye dönüştürülürken paralel devreye bağlanacak akım kaynağının değerini verirken, (4.7) eşitliği, her iki dönüşümde de direnç değerlerinin değişmeyeceğini ifade etmektedir. Kaynak dönüşümü, bağımlı kaynaklar için aynı dönüşüm ifadeleri kullanılarak yapılır.

ÖRNEK PROBLEM 4.1

Kaynak dönüşümünü kullanarak Şekil.4.4’de verilen devrede i_x akımını bulunuz.



Şekil 4.4 Örnek Problem 4.1 için devre.

Çözüm:

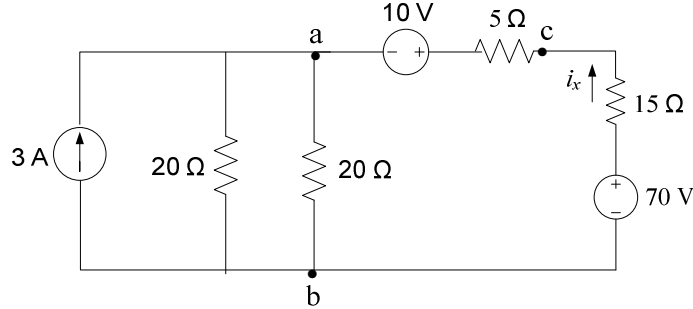
a-b noktaları arasında seri bağlı 60 V'luk gerilim kaynağı ile 20 Ω 'luk direnci, akım kaynağı ile paralel bağlı dirence dönüştürelim:

$$I_p = \frac{V_s}{R_s} = \frac{60}{20} = 3 \text{ A}, \quad R_s = R_p = 20 \text{ } \Omega.$$

a-c noktaları arasında paralel bağlı 2 A'lık akım kaynağı ile 5 Ω 'luk direnci de, gerilim kaynağı ile seri bağlı dirence dönüştürelim:

$$V_{s1} = I_p R_p = 2 \cdot 5 = 10 \text{ V}, \quad R_s = R_p = 5 \text{ } \Omega.$$

Dönüştürmüş eşdeğer devre Şekil.4.5'de görülmektedir.

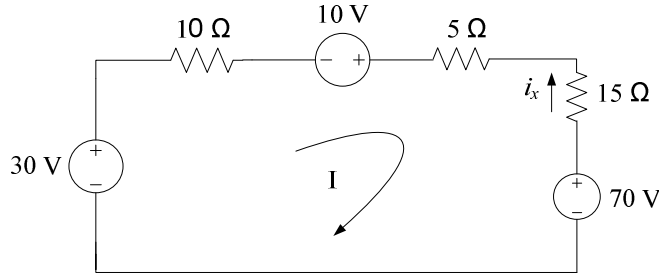


Şekil 4.5 Dönüştürmüş eşdeğer devre.

Paralel bağlı 20 Ω 'luk dirençlerin eşdeğeri 10 Ω olacağından, Şekil.4.5'de görülen ve bu eşdeğer dirençle birlikte iki göz içeren devre, orijinal devrenin bir eşdeğeri olarak elde edilir. Dikkat edilirse, göz sayısı orijinal devredeki göz sayısından bir eksilmiştir. Elde edilen eşdeğer devre, bu haliyle de, aranan devre değişkeni için kullanılabilir. Ancak, akım kaynağı ile 10 Ω 'luk direncin paralel bağlantısı için bir kez daha kaynak dönüşümü uygulanırsa göz sayısı bir azalacağından daha basit bir devre için analiz yapılmış olacaktır:

$$V_{s2} = 3 \cdot 10 = 30 \text{ V}, \quad R_s = R_p = 10 \text{ } \Omega.$$

Kaynak dönüşümleri ile elde edilebilecek en basit devre Şekil.4.6'da görülmektedir.



Şekil 4.6 Kaynak dönüşümü ile elde edilen en basit eşdeğer devre.

Bu devrede KGY uygulanarak aranan akım ifadesi aşağıdaki gibi bulunabilir:

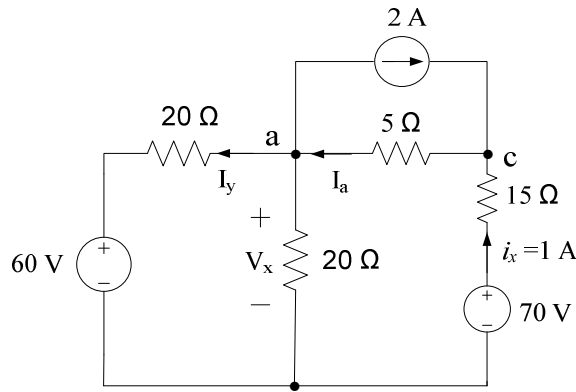
$$-30 - 10 + 70 + I(10 + 5 + 15) = 0$$

$$30 = -30I ; \quad I = -1 \text{ A} \quad \text{ve} \quad i_x = -I = 1 \text{ A.}$$

Kaynak dönüşümü uygulanırken, aranan devre değişkenini içeren devre elemanını dönüşüme dahil etmemek yararlı olacaktır. Zira; bu eleman dönüşüme girdiğinde, üzerindeki akım ve gerilim değerleri orijinal devredekinden farklı olacaktır. Bu durumda dönüşüm yapılıyorsa, dönüşmemiş elemanlar üzerindeki değişkenler bulunur ve daha sonra orijinal devreye dönülerek, bulunan değişkenler yardımıyla aranan değişken orijinal devre üzerinde bulunur. Ancak bu tür bir uygulama çoğu kez, orijinal devrenin başka bir metotla çözümünden daha karmaşık olacaktır.

ÖRNEK PROBLEM 4.2

Şekil.4.7'de verilen devrede 60 Volt'luk kaynağın akımını bulunuz.



Şekil 4.7 Problem 4.2 devresi.

Cözüm:

Bir önceki problemde, aynı devre için i_x akımının değeri bulunmuştu. Bu problemde, istenen akımı üzerinde taşıyan devre elemanı kaynak dönüşümünde kullanıldığından

dönüştürmüş devre kullanılarak bu akım değeri bulunamaz. Ancak orijinal devrede, bir önceki problemde belirlenmiş i_x akım değeri kullanılarak aranan kaynak akımı bulunabilir. Şekil.4.7’de orijinal devre, değeri bilinen i_x akımı ve diğer devre elemanları üzerindeki değişkenlerle birlikte tekrar verilmiştir. Bu devrede, c-noktasında akım yasası uygulanırsa,

$$I_a = i_x + 2 = 1 + 2 = 3 \text{ A}$$

bulunur. 2. gözde KGY uygulanarak,

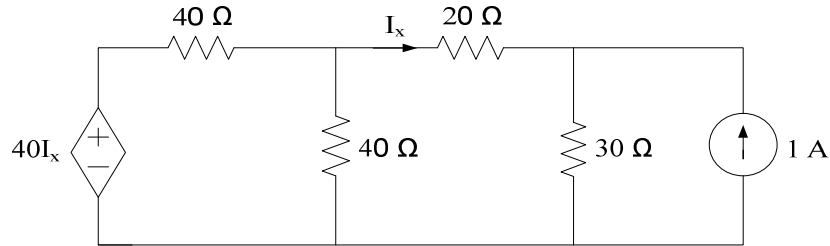
$$-70 + 15i_x + 5I_a + V_x = 0; \quad V_x = 70 - 5 \cdot 3 - 1 \cdot 15 = 40 \text{ V}$$

ve 1. gözde yine gerilim yasası kullanılarak,

$$-V_x + 20I_y + 60 = 0; \quad 20I_y = 40 - 60; \quad I_y = -1 \text{ A} \text{ elde edilir.}$$

ÖRNEK PROBLEM 4.3

Şekil.4.8’de verilen devrede kaynak dönüştürümünü kullanarak I_x akımını bulunuz.



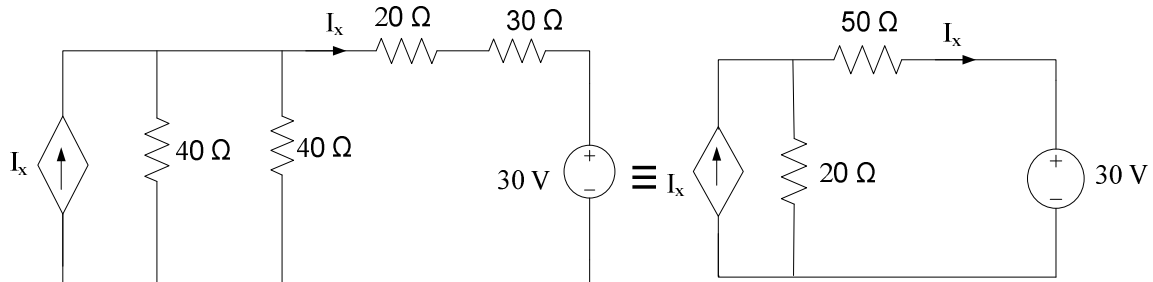
Şekil 4.8 Problem 4.3 devresi.

Cözüm:

Bağımlı gerilim kaynağını akım kaynağına, bağımsız akım kaynağını ise gerilim kaynağına dönüştürelim:

$$I_p = \frac{40I_x}{40} = I_x \text{ A}, \quad R_p = R_s = 40 \Omega; \quad V_{s1} = 1 \cdot 30 = 30 \text{ V}, \quad R_s = R_p = 30 \Omega.$$

Dönüştürmüş devre Şekil.4.9’da görüldüğü gibi olacaktır.



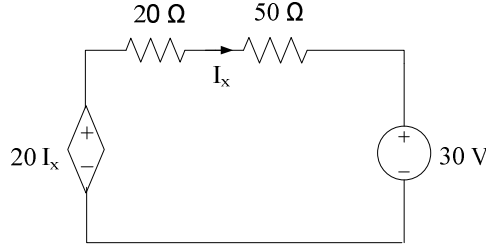
Şekil 4.9 Birinci dönüştürüm aşamasında elde edilen eşdeğer devreler.

Bağımlı kaynak ve paralel bağlı direnç için bir kez daha kaynak dönüşümü uygulanırsa

$$V_{s2} = 20I_x \text{ V}$$

olacaktır. Bu dönüşümle birlikte Şekil.4.10'da görülen tek gözlü dönüşmüş devre elde edilir. Son olarak, elde edilen eşdeğer devrede KGY uygulanarak,

$$-20I_x + I_x(20 + 50) - 30 = 0; \quad 50I_x = 30 \text{ ve } I_x = 0.6 \text{ A bulunur.}$$



Şekil 4.10 İkinci dönüşüm sonunda elde edilen eşdeğer devre.

Örnek problemlerden de anlaşılacağı gibi, kaynak dönüşümü orijinal devrenin daha basit bir eşdeğerini elde etmek amacıyla kullanılan, bir işlemdir. Başka bir deyişle, uygulama zorunluluğu olmayıp, analizi yapanın tercihinə bağlıdır.

4.3 SÜPER-POZİSYON TEOREMİ

Doğrusal bir elektrik devresi birden fazla bağımsız kaynak içeriyorsa, aranan bir devre değişkeni (bir eleman üzerindeki akım ya da gerilim), her bir bağımsız kaynağın, bu değişkene katkısı ayrı ayrı belirlenip, bu katkıların cebirsel toplamı alınarak bulunabilir. Bir kaynağın aranan devre değişkenine katkısı bulunurken, diğer tüm bağımsız kaynaklar izole edilmelidir. Bu, bağımsız gerilim kaynaklarının kısa devre edilmesi, bağımsız akım kaynaklarının ise açık devre edilmesi ile yapılır. Bir başka deyişle, bağımsız kaynaklar eşdeğer iç dirençleriyle değiştirilirler. Devrede bağımlı kaynaklar da varsa, bunlar hiçbir durumda izole edilmez; her bir bağımsız kaynakla birlikte devrede korunup katkıları bulunur.

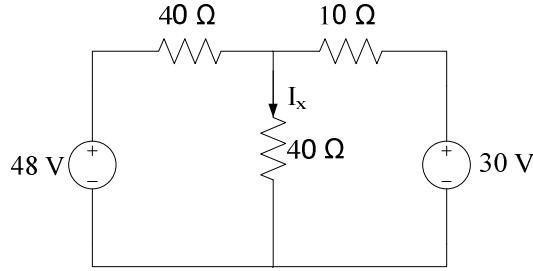
Analiz edilecek devre, örneğin üç bağımsız kaynak içeriyorsa, bu kaynaklardan her biri tek başına devrede aktif ve diğer ikisi izole edilerek katkıları bulunacaktır. Yani aynı devre üç kez analiz edilecektir. Ancak bu üç analizin her birinde orijinal devreden daha basit bir devre analizi mümkün oluyorsa süper-pozisyon teoremini kullanmak yararlı olacaktır. Şayet kaynaklardan ikisi izole edildiğinde elde edilen devrenin analizi için orijinal devrenin analizindeki kadar bilinmeyen söz konusu ise, ya da elde edilen devre, seri-paralel, yıldız-üçgen, kaynak dönüşümü gibi devre basitleştirmesine olanak vermiyorsa, süper-pozisyon teoremini söz konusu devrede uygulamak, analizi kolaylaştırmaz.

Bunun yanı sıra, süper-pozisyon teoremini kullanmanın zorunlu olduğu bir durum, farklı frekanslardaki kaynaklarla beslenmiş elektrik devreleridir. Alternatif akım konusu içinde bu durum üzerinde detaylı durulacaktır.

Unutulmamalıdır ki, teorem doğrusal devrelerde, doğrusal değişkenler için kullanılabilir. Örneğin bir direncin gücü aranan devre değişkeni ise, güç ifadesi akım ya da gerilimin karesi ile ilgili olduğundan (doğrusal olmadığından), teorem direk olarak güç için kullanılamaz.

ÖRNEK PROBLEM 4.4

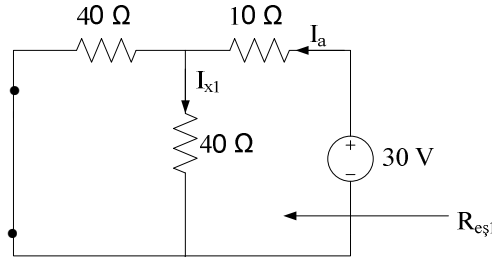
Şekil.4.11’de verilen devrede süper-pozisyon teoremini kullanarak I_x akımını bulunuz



Şekil 4.11 Problem 4.4 devresi.

Çözüm

48 V’luk gerilim kaynağını izole edilerek 30 V’luk kaynağın I_x akımına katkısını bulalım:



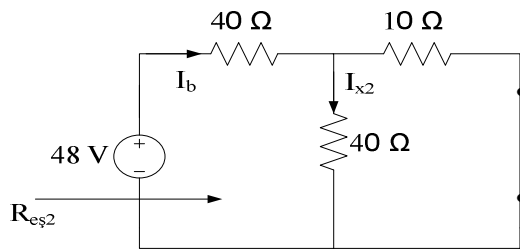
Şekil 4.12 30 V’luk kaynağın I_x akımına katkısı, I_{x1} .

$$R_{es1} = 40 // 40 + 10 = 30 \, \Omega, \quad I_a = \frac{30}{R_{es1}} = \frac{30}{30} = 1 \, \text{A}.$$

Akım bölücü devre eşitliğinden de,

$$I_{x1} = I_a \frac{40}{40 + 40} = 0.5 \, \text{A} \text{ bulunur.}$$

30 V’luk gerilim kaynağını izole edilerek 48 Volt’luk kaynağın I_x akımına katkısını bulalım:



Şekil 4.13 48 V’luk kaynağın I_x akımına katkısı, I_{x2} .

$$R_{eş2} = 40 // 10 + 40 = 48 \, \Omega, \quad I_b = \frac{48}{R_{eş2}} = \frac{48}{48} = 1 \, A.$$

Yine akım bölücü devre eşitliğinden kullanılarak,

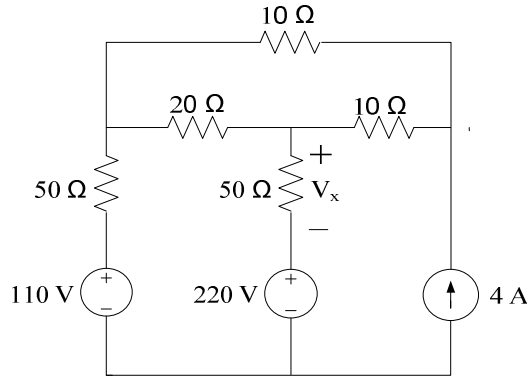
$$I_{x2} = I_b \frac{10}{10 + 40} = 0.2 \, A.$$

Kaynakların katkılarının cebirsel toplamı toplam akımı vereceğinden

$$I_x = I_{x1} + I_{x2} = 0.5 + 0.2 = 0.7 \, A \text{ sonucu elde edilir}$$

ÖRNEK PROBLEM 4.5

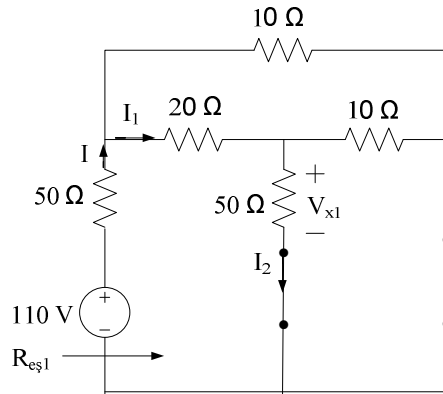
Şekil.4.14’de verilen devrede süper-pozisyon teoremini kullanarak V_x gerilimini bulunuz.



Şekil 4.14 Problem 4.5 devresi.

Cözüm:

220 Voltluk gerilim kaynağını ve 4 Amper’lik akım kaynağını izole edilerek 110 Volt’luk kaynağın V_x gerilimine katkısını bulalım:

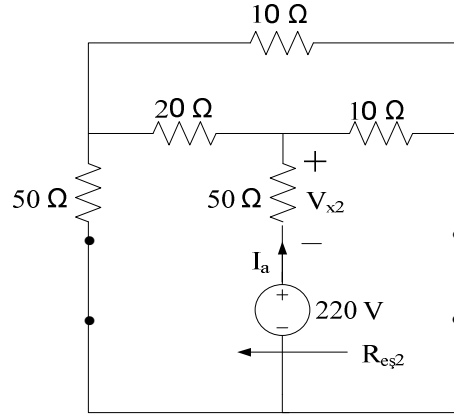


Şekil 4.15 110 Volt’luk kaynağın V_x gerilimine katkısı V_{x1} .

$$R_{eş1} = ((10 + 10) // 20) + 50 + 50 = 110 \, \Omega.$$

$$I = \frac{110}{R_{eş1}} = \frac{110}{110} = 1 \text{ A} \Rightarrow I_2 = I = 1 \text{ A} \Rightarrow V_{x1} = 50I_2 = 50 \text{ V}.$$

110 Voltluk gerilim kaynağını ve 4 Amper'lik akım kaynağını izole edilerek 220 Volt'luk kaynağın V_x gerilimine katkısını bulalım:

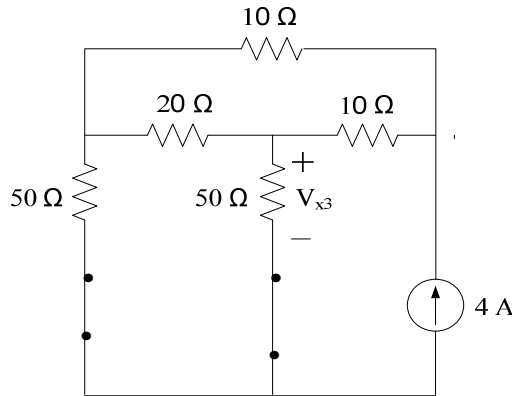


Şekil 4.16 220 Volt'luk kaynağın V_x gerilimine katkısı V_{x2} .

$$R_{eş2} = ((10+10) // 20) + 50 + 50 = 110 \Omega.$$

$$I_a = \frac{220}{R_{eş2}} = \frac{220}{110} = 2 \text{ A} \Rightarrow V_{x2} = -50I_a = -100 \text{ V}.$$

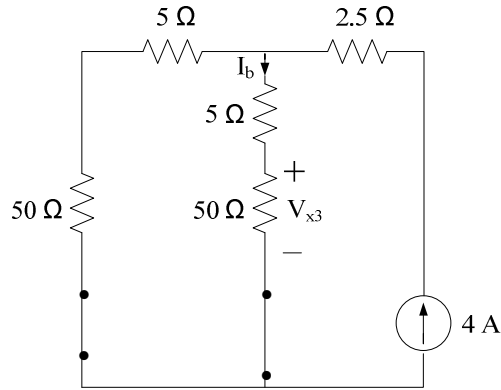
Her iki gerilim kaynağını izole edilerek 4 Amper'lik akım kaynağın V_x gerilimine katkısını bulalım:



Şekil 4.17 4 Amper'lik kaynağın V_x gerilimine katkısı V_{x3} .

Bu devrenin, üst üçgen bağlantısında yıldız üçgen dönüşümü yapılırsa Şekil.4.18'de görülen devre elde edilir. Bu devrede, akım bölücü devre eşitliğinden,

$$I_b = 4 \cdot \frac{55}{55+55} = 2 \text{ A} \text{ ve } V_{x3} = 50I_b = 100 \text{ V}$$



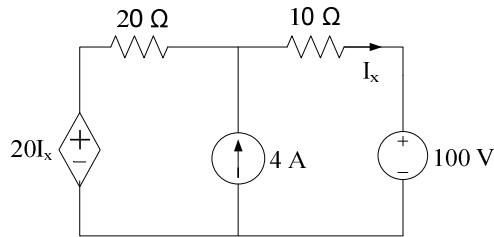
Şekil 4.18 Üçgen-yıldız dönüşümü ile basitleştirilmiş devre

bulunur. Aranan gerilimin değeri ise

$$V_x = V_{x1} + V_{x2} + V_{x3} \Rightarrow V_x = 50 + (-100) + 100; \quad V_x = 50 \text{ V dur.}$$

ÖRNEK PROBLEM 4.6

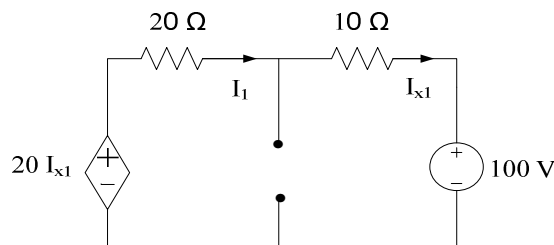
Şekil.4.19’da verilen devrede süper-pozisyon teoremini kullanarak 20 Ω’luk direncin gücünü bulunuz.



Şekil 4.19 Problem 4.6 devresi.

Çözüm:

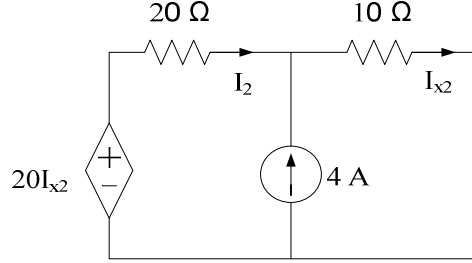
Akım kaynağını izole ederek gerilim kaynağının 20 Ω’luk direnç üzerinden geçireceği akımı bulalım.



Şekil 4.20 100 V’luk kaynağın 20 Ω’luk direnç akımına katkısı I_1 .

$$-20I_{x1} + (20+10)I_{x1} + 100 = 0 \Rightarrow 10I_{x1} = -100; \quad I_{x1} = -10 \text{ A}, \quad I_1 = I_{x1} = -10 \text{ A}.$$

Gerilim kaynağını izole ederek akım kaynağının 20Ω 'luk direnç üzerinden geçireceği akımı bulalım:



Şekil 4.21 4 A'lik kaynağın 20Ω 'luk direnç akımına katkısı I_2 .

KAY ile,

$$I_{x2} - I_2 = 4 \Rightarrow I_{x2} = 4 + I_2.$$

Süper-gözde KGY ile de,

$$-20I_{x2} + 20I_2 + 10I_{x2} = 0 \Rightarrow 10I_{x2} = 20I_2; \quad I_{x2} = 2I_2$$

ve

$$2I_2 = 4 + I_2 \Rightarrow I_2 = 4 \text{ A}$$

elde edilir. 20Ω 'luk direnç akımı, I ise:

$$I = I_1 + I_2 = (-10) + 4 = -6 \text{ A},$$

ve güç:

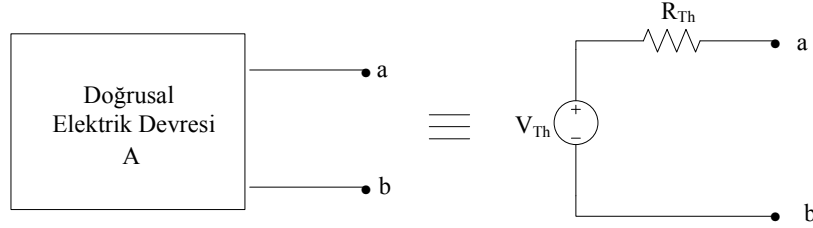
$$P_{20\Omega} = 20I^2 = 720 \text{ W olarak bulunur.}$$

Dikkat edilirse, her bir kaynağın direnç gücüne katkıları ayrı ayrı bulunup bunların toplamı alınmamış, ancak direnç akımına katkıları bulunup bunların toplamı, toplam direnç akımı olarak hesaplanmış ve daha sonra güç, toplam direnç akımı ile ifade edilmiştir. Güç ifadesinin doğrusal olmadığını hatırlayınız. Ayrıca, her iki kaynağın katkısı bulunurken, bağımlı kaynağın devrede korunduğuna da dikkat ediniz.

4.4 THEVENİN TEOREMİ

Doğrusal bir elektrik devresinin her hangi bir terminalinden görülen eşdeğeri, bir gerilim kaynağı (V_{Th}) ile bir direncin (R_{Th}) seri bağlantısı ile gösterilebilir. Bu şekilde bir eşdeğer devreye orijinal devrenin Thevenin eşdeğeri denir. Eşdeğer devredeki kaynak gerilimi

Thevenin gerilimi ve direnç de Thevenin direnci olarak adlandırılır. Şekil.4.22’de, A doğrusal elektrik devresinin Thevenin eşdeğeri görülmektedir.



Şekil 4.22 A doğrusal elektrik devresi ve Thevenin eşdeğeri

Thevenin teoremi, uygulamada çok önemli bir yere sahiptir. Burada bazı önemli uygulamalarından bahsedilecek olmakla birlikte, ilerleyen konularda, yeri geldikçe değişik uygulamalara da yer verilecektir.

Verilmiş devrenin yapısına bağlı olarak, Thevenin eşdeğerinin bulunmasında farklı metotlar uygulanabilir. Bu metotların her biri, uygulanabilirlik halleri için ayrı ayrı ele alınacaktır.

4.4.1 THEVENİN EŞDEĞER DEVRESİ

- Durum:** Devrede bağımlı ve bağımsız kaynakların birlikte bulunması veya sadece bağımsız kaynakların bulunması hali:

Devrede hem bağımlı kaynak/kaynaklar hem de bağımsız kaynak/kaynaklar veya sadece bağımsız kaynaklar mevcut ise:

*Orijinal devrenin, Thevenin eşdeğeri istenen terminali açık devre yapılır ve bu terminalde açık devre gerilimi (V_{oc}) bulunur. Thevenin eşdeğer devresindeki gerilim kaynağının değeri, bulunan açık devre gerilimine eşittir.

$$V_{Th} = V_{oc} \quad (4.8)$$

*Orijinal devrede, aynı terminal kısa devre yapılır ve bu kısa devre üzerindeki akım (I_{sc}) bulunur. Thevenin eşdeğer devresindeki direncin değeri açık devre geriliminin kısa devre akımına oranı kadardır.

$$R_{Th} = \frac{V_{oc}}{I_{sc}} \quad (4.9)$$

- Durum:** Devrede sadece bağımsız kaynakların bulunması hali:

Devrede sadece bağımsız kaynaklar mevcut ise, Thevenin gerilimi yine 1.durum’daki gibi bulunur. Ancak, Thevenin eşdeğer direncini bulmak için bu durumda kısa devre akımının bulunması şart değildir.

*Orijinal devredeki bağımsız kaynaklar izole edilir (gerilim kaynakları kısa devre, akım kaynakları açık devre) ve Thevenin eşdeğer devresinin istendiği terminelden görülen eşdeğer direnç (R_{es}) bulunur. Thevenin eşdeğer direnci bu dirence eşittir.

$$R_{Th} = R_{es} . \quad (4.10)$$

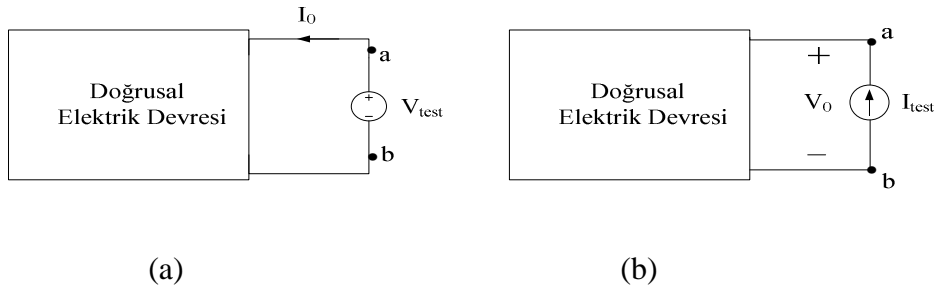
3. Durum: Devrede bağımlı ve bağımsız kaynakların birlikte bulunması veya sadece bağımlı kaynakların bulunması hali:

Devrede hem bağımlı kaynak/kaynaklar hem de bağımsız kaynak/kaynaklar mevcut ise veya sadece bağımlı kaynaklar mevcut ise:

*Hem bağımsız hem de bağımlı kaynaklar mevcut ise Thevenin gerilimi yine önceki durumlarda olduğu gibi bulunur ($V_{Th} = V_{oc}$).

*Sadece bağımlı kaynaklar mevcut ise Thevenin eşdeğer gerilimi sıfırdır.

*Thevenin eşdeğer direncini bulmak için, verilen devrede varsa bağımsız kaynaklar izole edilir. Thevenin eşdeğer devresinin bulunacağı terminale bir test kaynağı bağlanır. Test kaynağı bağımsız akım kaynağı veya bağımsız gerilim kaynağı olabilir. Şayet akım kaynağı bağlanmış ise, akım kaynağının terminallerindeki gerilim bulunur. Bulunan bu gerilimin, uygulanan akıma oranı Thevenin eşdeğer direncine eşittir. Şayet test kaynağı olarak bir bağımsız gerilim kaynağı bağlanmışsa, bu kaynağın devreye sağladığı akım bulunur. Uygulanan gerilimin devreye sağlanan akıma oranı yine Thevenin eşdeğer direncine eşittir. Test kaynaklarının bağlanması Şekil.4.23'de görülmektedir.



Şekil 4.23 Test kaynaklarının bağlanması.

(a) devresi için

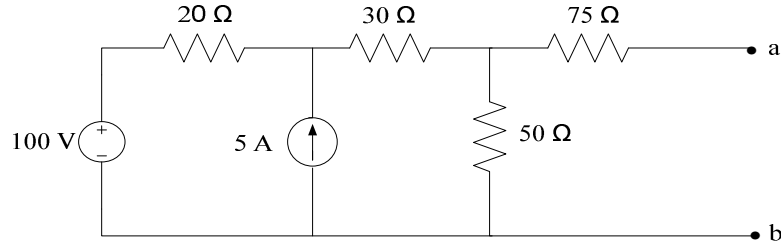
(b) devresi için

$$R_{Th} = \frac{V_{test}}{I_0}$$

$$R_{Th} = \frac{V_0}{I_{test}} .$$

ÖRNEK PROBLEM 4.7

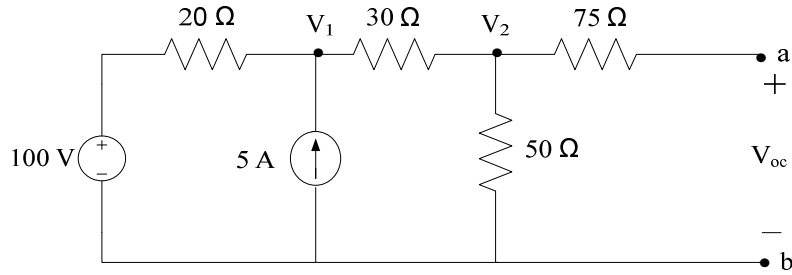
Şekil.4.24'de verilen devrenin a-b terminallerinden görülen Thevenin eşdeğer devresini bulunuz.



Şekil.4.24 Problem 4.7 devresi.

Cözüm:

Şekil.4.25’de görülen, a-b terminallerindeki açık devre gerilimini bulalım:



Şekil 4.25 Açık devre geriliminin bulunması.

Düğüm potansiyelleri metodu ile,

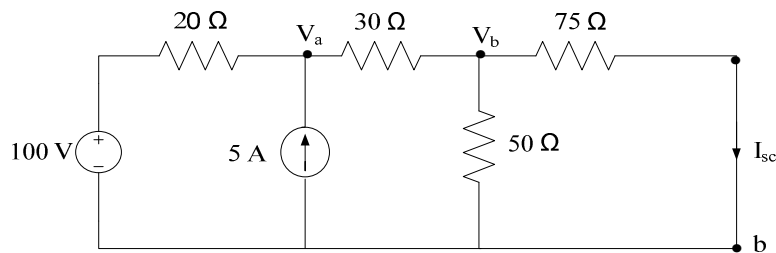
$$\frac{V_1 - 100}{20} + \frac{V_1 - V_2}{30} = 5 \quad \Rightarrow \quad 5V_1 - 2V_2 = 600,$$

$$\frac{V_2 - V_1}{30} + \frac{V_2}{50} = 0 \quad \Rightarrow \quad -5V_1 + 8V_2 = 0,$$

eşitlikleri elde edilir ve bu eşitliklerin çözümünden $V_2 = 100 \text{ V}$ bulunur. V_2 gerilimi açık devre gerilimine eşittir:

$$V_{Th} = V_2 = 100 \text{ V.}$$

Şekil.4.26’da görülen, a-b terminallerindeki kısa devre akımını bulalım:



Şekil 4.26 Kısa devre akımının bulunması.

Kısa devre akımının ifadesi

$$I_{sc} = \frac{V_b}{75}$$

dir. Bu devre için de, düğüm potansiyelleri metodu kullanılarak

$$\frac{V_a - 100}{20} + \frac{V_a - V_b}{30} = 5 \quad \Rightarrow \quad 5V_a - 2V_b = 600,$$

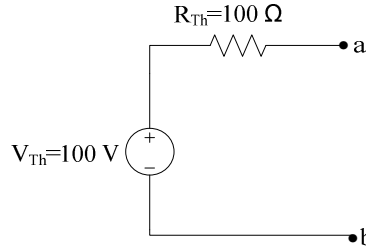
$$\frac{V_b - V_a}{30} + \frac{V_b}{50} + \frac{V_b}{75} = 0 \quad \Rightarrow \quad 10V_b - 5V_a = 0,$$

ve

$V_b = 75$ V; $I_{sc} = \frac{75}{75} = 1$ A bulunur. Böylece Thevenin eşdeğer direnci için bulunur. Böylece Thevenin eşdeğer direnci için

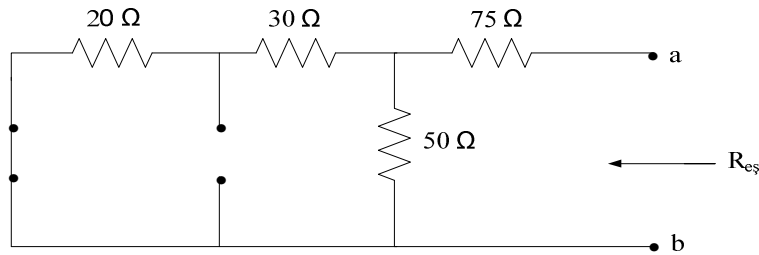
$$R_{Th} = \frac{V_{oc}}{I_{sc}} = \frac{100}{1} = 100 \Omega$$

değeri elde edilir. Thevenin eşdeğer devresi Şekil.4.27'de görüldüğü gibidir.



Şekil 4.27 Thevenin eşdeğer devresi.

Verilen devre bağımlı kaynak içermemekte ve 2. duruma da uymaktadır. Bu nedenle kısa devre akımını bulmadan Thevenin eşdeğer direncini hesaplamak mümkündür. Bu amaçla bağımsız kaynaklar izole edilirse aşağıdaki devre elde edilir.

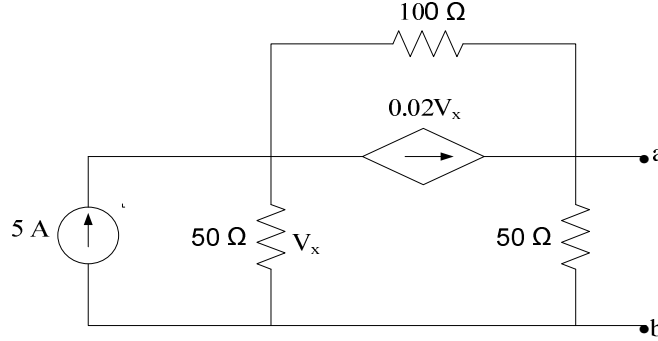


Şekil 4.28 Thevenin eşdeğer direncinin kaynaklar izole edilerek bulunması.

$$R_{Th} = R_{eq} = ((30 + 20) // 50) + 75 = 50 // 50 + 75 = 25 + 75 = 100 \Omega.$$

ÖRNEK PROBLEM 4.8

Şekil.4.29’da verilen devredenin a-b terminallerine sırasıyla 10 Ω , 20 Ω ve 50 Ω ’luk dirençler bağlandığında bu dirençlerin üzerinden geçen akımları bulunuz.



Şekil 4.29 Problem 4.8 devresi.

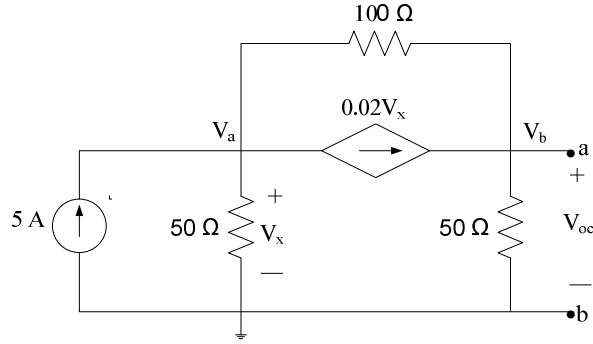
Çözüm:

Şekil.4.25’de verilen devre bağımlı ve bağımsız kaynakları içermektedir. Dolayısıyla, a-b terminallerinden görülen Thevenin eşdeğer devresi 1. durumda bahsedildiği şekilde, açık devre gerilimi ve kısa devre akımı hesaplanarak bulunabilir. Ayrıca verilen devre 3. duruma da uymaktadır. Bu nedenle, devredeki bağımsız kaynağı izole ettikten sonra a-b terminallerine bir test kaynağı bağlayarak da eşdeğer direncin hesaplanması mümkündür. Ancak dikkat edilmelidir ki, devrede bağımlı kaynak bulunduğu için, bu devrede eşdeğer direnç hesabı 2. durumda bahsedilen şekilde yapılamaz. Bu problemin çözümünde, metotların özümsebilmesi açısından devrenin eşdeğer direnci farklı metotlar kullanılarak yapılacaktır. Ancak bundan önce, burada Thevenin teoreminin bir uygulamasına değinmek gerekmektedir. Dikkat edilirse a-b terminallerine 3 farklı direnç bağlanması ve her birinin üzerinden geçen akımın hesaplanması istenmektedir. Bu verilen devrenin her bir direnç değeri için ayrı ayrı analizini gerektirir. Dirençlerden herhangi biri bağlandığında dört gözlü bir devre oluşacağından, bu dört gözlü devre 3 farklı direnç değeri için 3 kez analiz edilmelidir. Bununla beraber şayet devrenin a-b terminallerinden görülen Thevenin eşdeğeri bulunur ve bu eşdeğer devreye istenen dirençler bağlanırsa, bir gözlü eşdeğer devrede bu akımlar kolayca bulunabilecektir. Yani bir elektrik devresinde herhangi bir terminale bağlanacak yük değişkeni ise, bu durumda devrenin o terminalden görülen Thevenin eşdeğerini bulmak ve yükün değişik değerleri için istenen devre değişkenlerini bu eşdeğer devrede hesaplamak analizi oldukça kolaylaştıracaktır.

1.metot:

Düğüm potansiyelleri metodunu kullanarak Şekil.4.30’da görülen devrede, V_{oc} açık devre gerilimini bulalım:

$$\frac{V_a}{50} + \frac{V_a - V_b}{100} + 0.02V_x = 5; \quad V_x = V_a \Rightarrow \frac{V_a}{50} + \frac{V_a - V_b}{100} + \frac{V_a}{50} = 5; \quad 5V_a - V_b = 500.$$

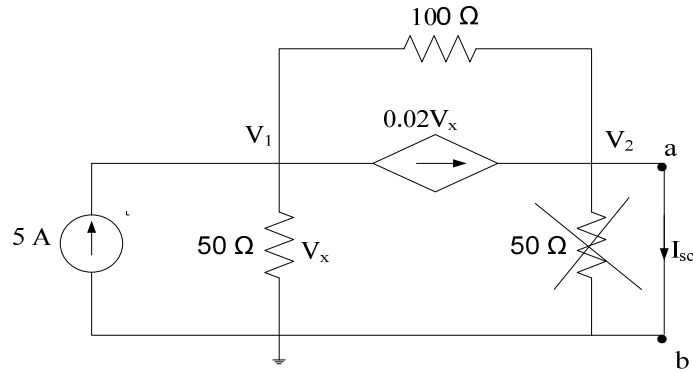


Şekil 4.30 Açık devre gerilimi.

$$\frac{V_b}{50} + \frac{V_b - V_a}{100} - 0.02V_x = 0; \quad \frac{V_b}{50} + \frac{V_b - V_a}{100} - \frac{V_a}{50} = 0 \Rightarrow -3V_a + 3V_b = 0; \quad V_a = V_b.$$

$$5(V_b) - V_b = 500 \Rightarrow 4V_b = 500; \quad V_{oc} = V_{Th} = V_b = 125 \text{ V.}$$

Kısa devre akımını yine nokta potansiyelleri metodu ile Şekil.4.31'den bulalım:



Şekil 4.31 Kısa devre akımı.

50 Ω'luk direncin kısa devre olduğundan

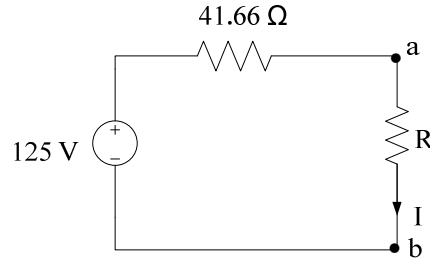
$$V_2 = 0; \quad I_{sc} = 0.02V_x + \frac{V_1}{100}.$$

$$\frac{V_1}{50} + \frac{V_1}{100} + 0.02V_x = 5; \quad V_x = V_1 \Rightarrow 5V_1 = 500; \quad V_1 = 100 \text{ V.}$$

$$I_{sc} = 0.02(100) + \frac{100}{100} \Rightarrow I_{sc} = 3 \text{ A.}$$

$$R_{Th} = \frac{V_{oc}}{I_{sc}} = \frac{125}{3} = 41.66 \text{ } \Omega \text{ bulunur.}$$

Şekil.4.32’de elde edilen Thevenin eşdeğer devresine bir R direnci bağlanmıştır.



Şekil 4.32 Thevenin eşdeğer devresi ve a-b terminaline bağlanmış R direnci

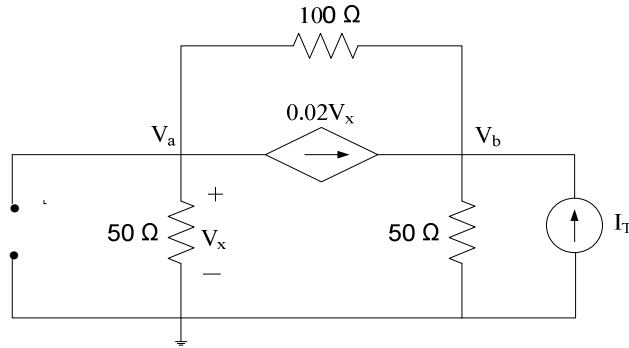
$$I = \frac{125}{41.66 + R}$$

eşitliğinden, her bir direnç için akım değerleri,

$$\begin{aligned} R = 10 \, \Omega & \Rightarrow I = 2.42 \, \text{A.} \\ R = 20 \, \Omega & \Rightarrow I = 2.027 \, \text{A.} \\ R = 50 \, \Omega & \Rightarrow I = 1.363 \, \text{A. bulunur.} \end{aligned}$$

2.metot:

Thevenin eşdeğer direncini bir test akım kaynağı bağlayarak bulalım:



Şekil 4.33 Thevenin eşdeğer direncinin test akım kaynağı bağlanarak belirlenmesi

Bağımsız akım kaynağı izole edilerek, Thevenin eşdeğer direncinin bulunacağı terminallere I_T test akımı uygulandığında, bu akım kaynağının terminallerindeki gerilimin V_b olacaktır. Bu terminallerden görülen eşdeğer direnç de,

$$R_{Th} = \frac{V_b}{I_T}$$

olacaktır. Yine nokta potansiyelleri metodunu uygulayarak bu oranı bulalım:

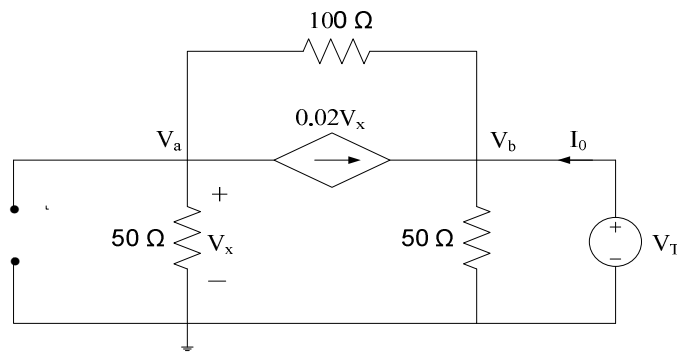
$$\frac{V_a}{50} + \frac{V_a - V_b}{100} + 0.02V_x = 0; \quad V_x = V_a \quad \Rightarrow \quad V_a = \frac{V_b}{5}.$$

$$\frac{V_b}{50} + \frac{V_b - V_a}{100} - 0.02V_x = I_T; \quad -3V_a + 3V_b = 100I_T.$$

$$-3\left(\frac{V_b}{5}\right) + 3V_b = 100I_T; \quad \frac{12V_b}{5} = 100I_T \Rightarrow \quad R_{Th} = \frac{V_b}{I_T} = \frac{500}{12} = 41.66 \, \Omega.$$

3.metot:

Thevenin eşdeğer direncini, bir test gerilim kaynağı bağlayarak bulalım:



Şekil 4.34 Thevenin eşdeğer direncinin test gerilim kaynağı bağlanarak belirlenmesi.

Bağımsız akım kaynağı izole edilerek, Thevenin eşdeğer direncinin bulunacağı terminallere V_T test gerilimi uygulandığında, bu gerilim kaynağının terminal akımı I_0 olacaktır. Bu terminallerden görülen eşdeğer direnç de;

$$R_{Th} = \frac{V_T}{I_0}$$

olacaktır. Yine nokta potansiyelleri metodunu uygulayarak bu oranı bulalım.

$$V_b = V_T, \quad V_a = V_x.$$

$$\frac{V_a}{50} + \frac{V_a - V_b}{100} + 0.02V_x = 0 \quad \Rightarrow \quad 5V_a - V_b = 0; \quad V_a = \frac{V_T}{5}.$$

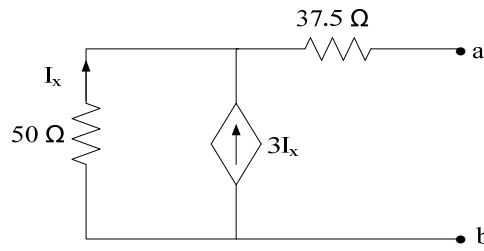
$$\frac{V_b}{50} + \frac{V_b - V_a}{100} - 0.02V_x = I_0; \quad \Rightarrow \quad -3V_a + 3V_b = 100I_0.$$

$$-3\left(\frac{V_T}{5}\right) + 3V_T = 100I_0; \quad 12V_T = 500I_0 \Rightarrow \quad R_{Th} = \frac{V_T}{I_0} = \frac{500}{12} = 41.66 \, \Omega.$$

Açıkça görüldüğü gibi Thevenin eşdeğer direncinin bulunmasında, hem akım hem de gerilim kaynağı test kaynağı olarak bağlanabilmektedir. Ancak, çoğu kez tercih edilen kaynak tipi, analizde kullanılacak metoda da bağlı olarak işlem hacmini değiştirebilir. Örneğin, verilmiş devreye bir akım kaynağı bağlandığında, devre düğüm potansiyelleri metoduna uygun bir devre olabilecekken, analiz için çevre akımları metodu kullanılacak olursa, biraz daha karmaşık bir analiz yapmak durumunda kalınacaktır. Bu durumda, bağlanacak kaynak tipi seçilirken bir adım sonrasında kullanılacak analiz metodu göz önünde bulundurularak seçilmelidir.

ÖRNEK PROBLEM 4.9

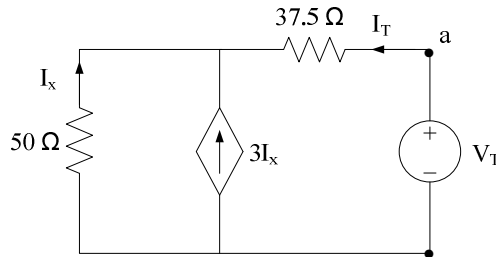
Şekil.4.35’deki devrede a-b terminallerinden görülen Thevenin eşdeğer devresini bulunuz.



Şekil 4.35 Problem 4.9 devresi.

Cözüm:

Devrede bağımsız kaynak olmadığından, açık devre gerilimi sıfırdır. Bunun anlamı, sadece bağımlı kaynakların bulunduğu bir devrenin aktif durumda olmamasıdır. Bununla beraber verilen terminallerden görülen bir eşdeğer direnç söz konusudur. Eşdeğer direnci bulabilmek için devreyi aktif etmek gerekecektir. İşte bu nedenle, sadece bağımlı kaynakların bulunduğu devrelerin Thevenin eşdeğerini bulmak için, eşdeğer devrenin istendiği terminallere test kaynağı bağlamak zorunludur. Test kaynağı olarak gerilim kaynağı bağlayalım:



Şekil 4.36 Test gerilim kaynağı bağlantısı.

Akım yasasından,

$$I_x + 3I_x + I_T = 0; \quad 4I_x = -I_T \quad \Rightarrow \quad I_x = -\frac{I_T}{4}.$$

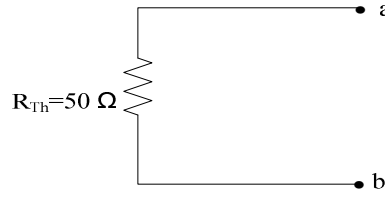
Süper-göz için,

$$50I_x - 37.5I_T + V_T = 0; \quad V_T = 37.5I_T - 50\left(-\frac{I_T}{4}\right) \Rightarrow V_T = 50I_T,$$

$$R_{Th} = \frac{V_T}{I_T} = 50 \, \Omega.$$

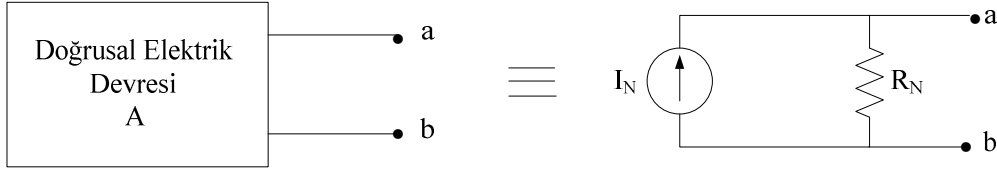
Thevenin eşdeğer devresi, Şekil.4.37’de görüldüğü gibi a-b terminallerinden görülen tek bir direnç olacaktır.

Thevenin eşdeğer devresinde direnç negatif değerli bulunabilir. Bu negatif değerli gerçek bir direnç olarak algılanmamalıdır. Orijinal devrenin güç üretme kabiliyetinde olduğu anlamındadır. Ayrıca negatif değerli bir direncin, bağımlı kaynaklar kullanılarak modellenebileceğine de dikkat edilmelidir.



Şekil 4.37 Problem 4.9 devresinin Thenenin eşdeğeri.

4.5 NORTON TEOREMİ

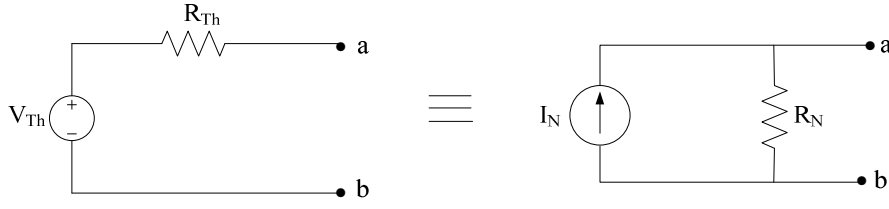


Şekil 4.38 A doğrusal elektrik devresi ve Norton eşdeğeri.

Doğrusal bir elektrik devresinin her hangi bir terminalinden görülen eşdeğeri, bir akım kaynağı (I_N) ile bir direncin (R_N) paralel bağlantısı ile gösterilebilir. Bu şekilde bir eşdeğer devreye orijinal devrenin Norton eşdeğeri denir. Eşdeğer devredeki kaynak akımı, Norton akımı ve direnç de Norton direnci olarak adlandırılır. Şekil.4.38’de, A doğrusal elektrik devresinin Norton eşdeğeri görülmektedir.

4.5.1 NORTON EŞDEĞER DEVRESİ

Norton eşdeğer devresine ilişkin parametreleri kaynak dönüşümü ile kolayca belirlemek mümkündür. Şekil.4.38’de verilmiş olan A devresinin bir eşdeğerinin de Thevenin eşdeğer devresi olduğunu biliyoruz (Şekil.4.22). O halde bu iki devre eşdeğer olmalıdır. Kaynak dönüşümü prensibine göre,



Şekil 4.39 A devresinin Thevenin ve Norton eşdeğerleri.

$$I_N = \frac{V_{Th}}{R_{Th}}, \quad R_N = R_{Th} \quad (4.11)$$

olmalıdır. Ayrıca,

$$R_{Th} = \frac{V_{oc}}{I_{sc}} = \frac{V_{Th}}{I_{sc}} = R_N \quad (4.12)$$

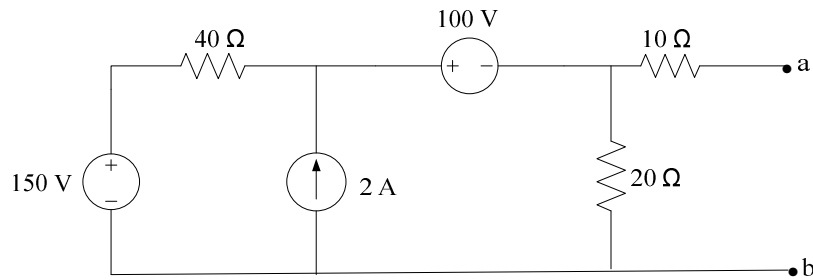
olduğundan,

$$I_{sc} = \frac{V_{Th}}{R_{Th}} = I_N \quad (4.13)$$

bulunur. Başka bir deyişle Norton eşdeğer devresindeki akım kaynağının değeri, A devresinin a-b terminallerindeki kısa devre akımına eşittir. Norton eşdeğer direnci Thevenin eşdeğer direncine eşit olduğundan, değerinin belirlenmesinde takip edilebilecek metotlar, bir önceki konuda bahsedilen metotlar olacaktır. O halde, Norton eşdeğer devresini bulmak için kısa devre akımı ve istenen terminalden görülen eşdeğer direnci bulmak yeterlidir.

ÖRNEK PROBLEM 4.10

Şekil.4.40’da verilen devrede a-b terminallerinden görülen Norton eşdeğer devresini bulunuz.

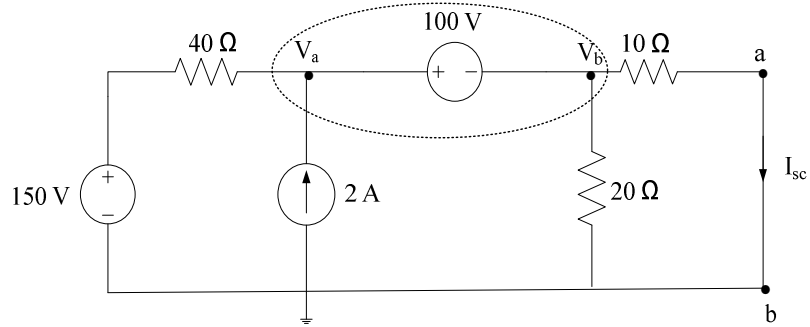


Şekil 4.40 Problem 4.10 devresi.

Cözüm:

a-b terminalleri kısa devre edilir (Şekil.4.41) ve düğüm potansiyelleri metodu kullanılırsa,

$$\frac{V_a - 150}{40} + \frac{V_b}{20} + \frac{V_b}{10} = 2; \quad V_a + 6V_b = 230.$$



Şekil 4.41 Kısa devre akımı.

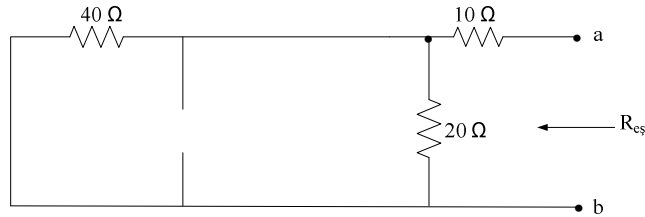
Süper-noktayı içeren gözde KGY uygulayarak,

$$-V_a + 100 + V_b = 0 \Rightarrow V_a = 100 + V_b.$$

$$100 + V_b + 6V_b = 230; \quad 7V_b = 130 \Rightarrow V_b = \frac{130}{7} \text{ V ve,}$$

$$I_{sc} = \frac{V_b}{10} = \frac{13}{7} \text{ A; } I_N = I_{sc} = \frac{13}{7} \text{ A}$$

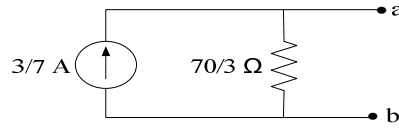
bulunur. Devrede bağımlı kaynak bulunmadığından, eşdeğer direnç kaynakları izole ederek kolayca hesaplanabilir:



Şekil 4.42 Norton eşdeğer direncinin bulunması.

$$R_N = R_{\epsilon\varsigma} = (40 // 20) + 10 = \frac{70}{3} \Omega.$$

Şekil.4.40’da verilen devrenin a-b terminallerinden görülen Norton eşdeğeri aşağıdaki gibi olacaktır.



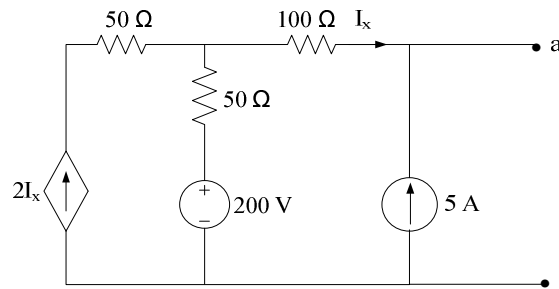
Şekil 4.43 Norton eşdeğer devresi.

ÖRNEK PROBLEM 4.11

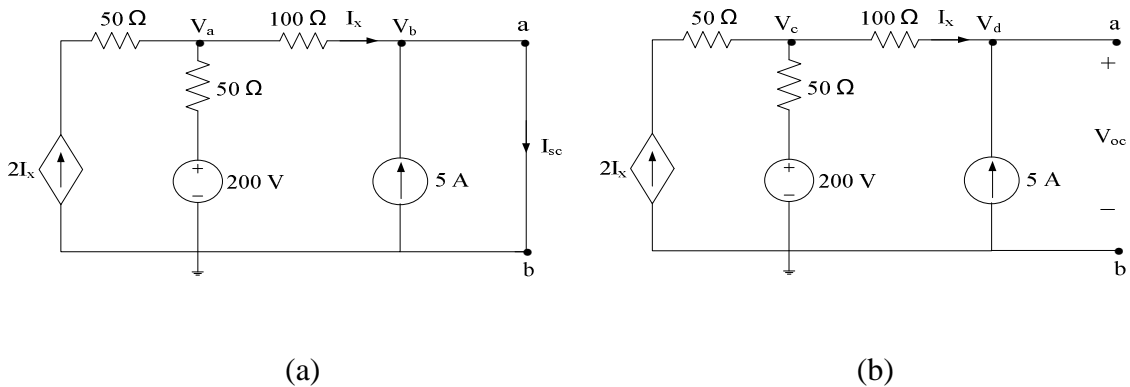
Şekil.4.44’de verilen devrede a-b terminallerinden görülen Norton ve Thevenin eşdeğer devrelerini bulunuz.

Çözüm:

Şayet kısa devre akımı ve açık devre gerilimi bulunursa, her iki eşdeğer devre de elde edilebilecektir. Ayrıca Eşdeğer devrelerden birini bulduktan sonra, kaynak dönüşümü ile diğer eşdeğer devre de elde edilebilir. Kısa devre akımı ve açık devre gerilimlerini bulalım:



Şekil 4.44 Problem 4.11 devresi.



Şekil 4.45 Kısa devre akımı ve açık devre gerilimi.

Şekil.4.45.a’da görülen devrede düğüm potansiyelleri uygulanırsa:

$$\frac{V_a - 200}{50} - 2I_x + I_x = 0; \quad I_x = \frac{V_a}{100} \quad \Rightarrow \quad 2V_a - 400 = V_a; \quad V_a = 400 \text{ V}.$$

$$I_{sc} = \frac{V_a}{100} + 5 \Rightarrow I_{sc} = 9 \text{ A bulunur.}$$

b devresinde düğüm potansiyelleri metodu uygulanarak da:

$$\frac{V_c - 200}{50} - 2I_x + I_x = 0: \quad I_x = -5 \Rightarrow V_c = -50 \text{ V.}$$

KGY ile,

$$-V_c + 100I_x + V_{oc} = 0 \Rightarrow V_{oc} = 450 \text{ V.}$$

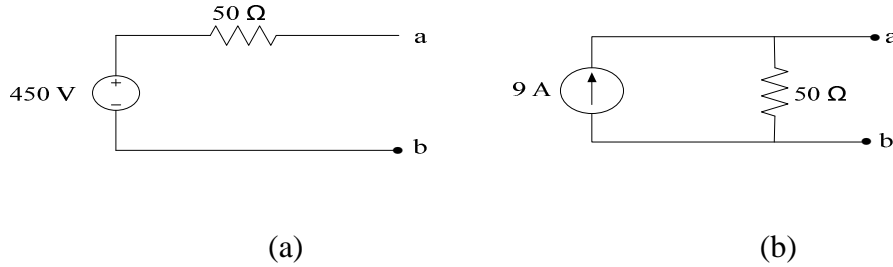
bulunur. Açık devre gerilimi Thevenin gerilimine ve kısa devre akımı da Norton akımına eşittir:

$$V_{Th} = V_{oc} = 450 \text{ V}, \quad I_N = I_{sc} = 9.$$

ve eşdeğer dirençler, açık devre geriliminin kısa devre akımına oranı ile,

$$R_{Th} = R_N = \frac{V_{oc}}{I_{sc}} = \frac{450}{9} = 50 \Omega$$

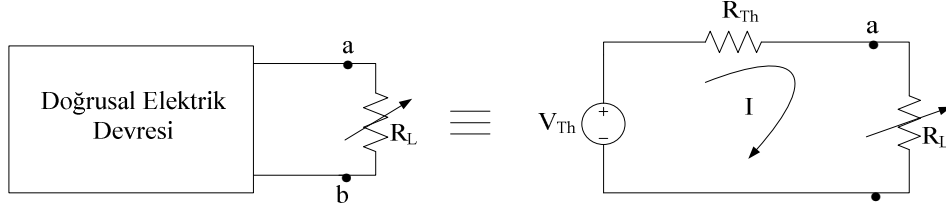
bulunur. Thevenin ve Norton eşdeğerleri Şekil.4.46'da görüldüğü gibi olacaktır.



Şekil 4.46 (a) Thevenin eşdeğeri, (b) Norton eşdeğeri.

4.6 MAKSİMUM GÜÇ TRANSFER TEOREMİ

Doğrusal bir elektrik devresinin herhangi bir terminaline bağlanacak yük direnci değerine bağlı olarak yük üzerine aktarılan güç değişir. Maksimum güç transfer teoremi, aktarılabilecek gücün maksimum olması için devreye bağlanması gereken yük direnci değerini ve aktarılabilecek maksimum güç değerini belirlemek amacıyla kullanılır. Şekil.4.47.a'da doğrusal bir elektrik devresinin a-b terminallerine bağlanmış değişken R_L yük direnci ve b'de de bu devrenin Thevenin eşdeğeri görülmektedir.



Şekil 4.47 Doğrusal elektrik devresi ve yük direnci ile eşdeğeri.

Açıktır ki, aktarılan gücün maksimum olması için gerekli şart, problemin bir değişkeni olan yük direncine göre gücün değişiminin sıfır olmasıdır. O halde, eşdeğer devrede güç ifadesi, yük direncinin bir fonksiyonu olarak elde edilmeli ve bu ifadenin dirence göre değişimi sıfıra eşitlenmelidir: Devrenin Thevenin eşdeğerinden devre akımı,

$$I = \frac{V_{Th}}{R_{Th} + R_L}, \quad (4.14)$$

ve yük direncinin gücü,

$$P_L = I^2 R_L = \left(\frac{V_{Th}}{R_{Th} + R_L} \right)^2 R_L \quad (4.15)$$

bulunur. Yük üzerine aktarılan gücün maksimum olması için,

$$\frac{dP_L}{dR_L} = 0, \quad (4.16)$$

$$V_{Th}^2 \frac{(R_{Th} + R_L)^2 - 2R_L(R_{Th} + R_L)}{(R_{Th} + R_L)^4} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{Th}^2 - R_L^2 = 0;$$

$$R_{Th} = R_L \quad (4.17)$$

olacaktır. Buna göre, doğrusal bir elektrik devresinin herhangi bir terminaline bağlanacak yük direnci üzerine aktarılan gücün maksimum olması için, o terminale bağlanması gereken yük direnci, devrenin ilgili terminallerinden görülen Thevenin eşdeğer direncine eşit olmalıdır. Bu teorem maksimum güç transferi teoremi olarak adlandırılır.

Aktarılan maksimum güç; (4.18) ifadesini, (4.16)'da kullanarak bulunabilir:

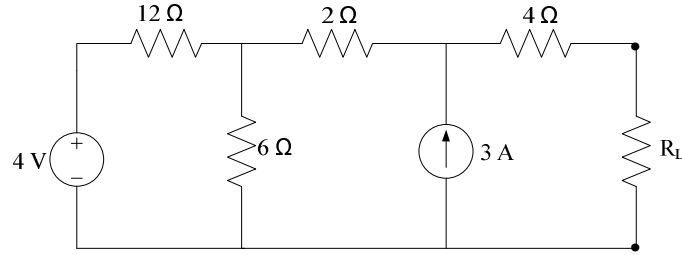
$$P_{L_{mak}} = P_L \Big|_{R_L=R_{Th}} = \frac{V_{Th}^2}{4R_{Th}}. \quad (4.18)$$

Kolayca anlaşılacağı gibi, maksimum güç transferi teoremi aslında Thevenin teoreminin direk bir uygulamasıdır. Yük üzerine aktarılan gücün maksimum olması, özellikle sinyal seviyesinin düşük olduğu sistemlerde çok önemlidir. Burada, yük direncinin seçilebilir olması durumu söz konusudur. Ancak, yükü her zaman seçmek mümkün olmayabilir. Yani sabit bir terminalden, sabit bir yükün, yine maksimum güç aktarımı koşullarında beslenmesi gerekebilir ki, bu durumda, yük ile terminal arasında ayrıca bir devre elemanı ya da bir devre kullanmak gerekecektir. Bu devrenin amacı yük ile yükü besleyen devre arasında, genel

olarak empedans uygunluğunu sağlamak amacıyla kullanılır. Bu durum, transformatörler konusunda ele alınacaktır.

ÖRNEK PROBLEM 4.13

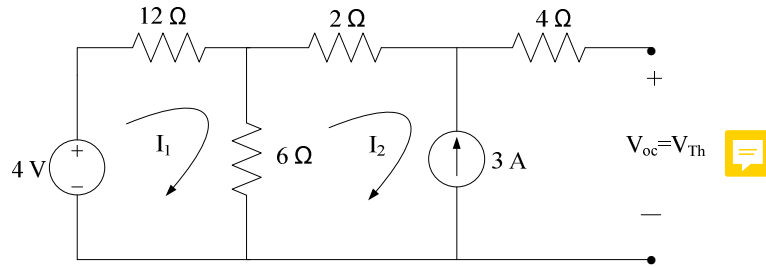
Şekil.4.48’de verilen devrede, yük direnci, yüke aktarılan gücün maksimum olduğu değere ayarlanmıştır. Yük direncinin değerini ve aktarılan maksimum gücü bulunuz.



Şekil 4.48 Problem 4.13 devresi.

Cözüm:

R_L yük direncinin bağlı olduğu terminallerden görülen Thevenin eşdeğer devresinin belirlenmesi gerekmektedir. Burada, R_L yük direncinin devreden kaldırılması gerektiğine dikkat edilmelidir:



Şekil 4.49 Thevenin eşdeğer gerilimi.

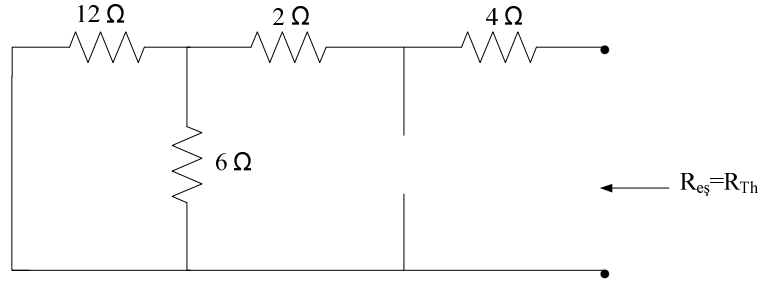
Göz akımları metodunu kullanarak

$$18I_1 - 6I_2 = 4; \quad I_2 = -3 \text{ A.} \quad \Rightarrow \quad 18I_1 = -14; \quad I_1 = -\frac{7}{9} \text{ A}$$

bulunur. En dış çevrimde gerilim yasasını uygulayarak da

$$-4 + 12I_1 + 2I_2 + V_{Th} = 0; \quad V_{Th} = 4 - 12\left(-\frac{7}{9}\right) - 2(-3) \quad \Rightarrow \quad V_{Th} = 19.33 \text{ V.}$$

bulunur. Devrede bağımlı kaynak bulunmadığından eşdeğer direnç, Şekil.4.50’de olduğu gibi, devredeki bağımsız kaynaklar izole edilerek, elde edilen devreden kolayca eşdeğer direnç hesaplanarak bulunabilir:



Şekil 4.50 Thevenin eşdeğer direnci.

$$R_{Th} = (12 // 6) + 2 + 4 = 10 \Omega.$$

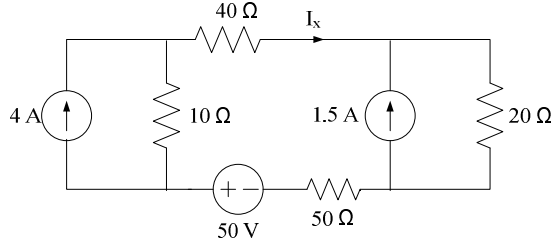
Maksimum yük aktarımı için:

$$R_L = R_{Th} = 10 \Omega \quad \text{ve} \quad P_{L_{mak}} = \frac{V_{Th}^2}{4R_{Th}} = 9.341 \text{ W}$$

bulunur.

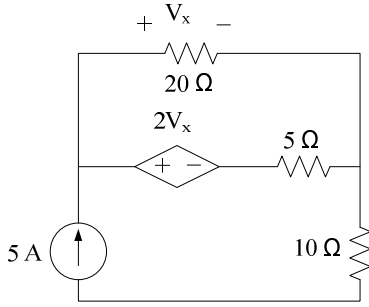
PROBLEMLER

4.1 Kaynak dönüşümü prensibini kullanarak Şekil.4.51’de verilen devrede I_x akımını bulunuz.



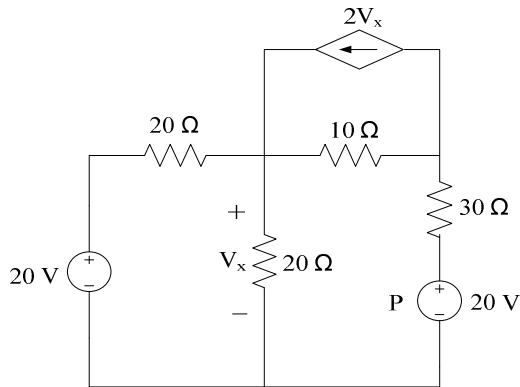
Şekil 4.51 Problem 4.1 devresi.

4.2 Kaynak dönüşümü prensibini kullanarak Şekil.4.52’de verilen devrede V_x gerilimini bulunuz.



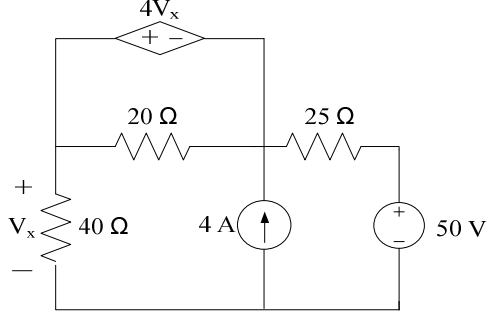
Şekil 4.52 Problem 4.2 devresi.

4.3 Kaynak dönüşümü prensibini uygulayarak Şekil.4.53’de verilen devrede P kaynağının gücünü bulunuz.



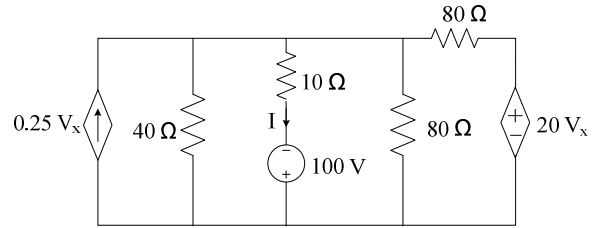
Şekil 4.53 Problem 4.3 devresi.

4.4 Kaynak dönüşümü prensibini kullanarak Şekil.4.54’de verilen devrede bağımlı kaynağın gücünü bulunuz.



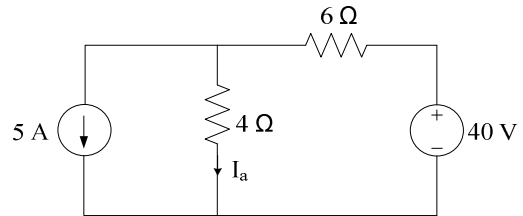
Şekil 4.54 Problem 4.4 devresi.

4.5 Kaynak dönüşümü prensibini kullanarak Şekil.4.55’de verilen devrede I akımını bulunuz.



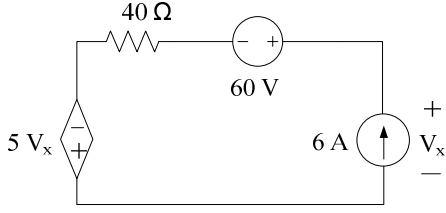
Şekil.4.55 Problem 4.5 devresi.

4.6 Süper-pozisyon teoremini kullanarak Şekil.4.56’da verilen devrede I_a akımını bulunuz.



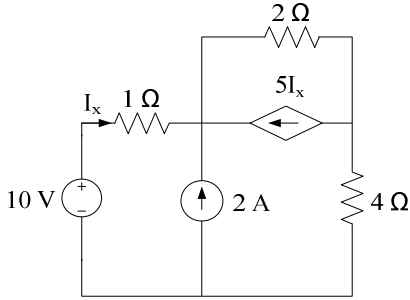
Şekil 4.56 Problem 4.6 devresi.

4.7 Süper-pozisyon teoremini kullanarak Şekil.4.57’de verilen devrede V_x gerilimini bulunuz.



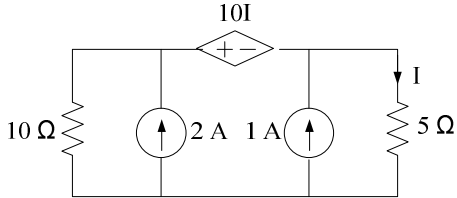
Şekil 4.57 Problem 4.7 devresi.

4.8 Süper-pozisyon teoremini kullanarak Şekil.4.58’de verilen devrede $1\ \Omega$ ’luk direncin gücünü bulunuz.



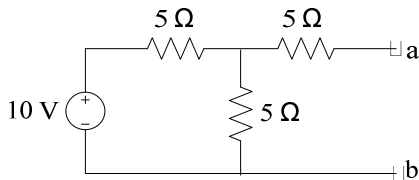
Şekil 4.58 Problem 4.8 devresi.

4.9 Süper-pozisyon teoremini kullanarak Şekil.4.59’da verilen devrede bağımlı kaynağın gücünü bulunuz.



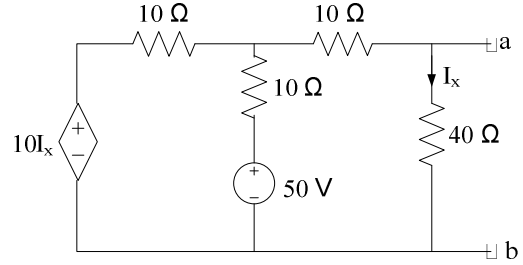
Şekil 4.59 Problem 4.9 devresi.

4.10 Şekil 4.60’da verilen devrenin a-b terminallerinden görülen Thevenin eşdeğer devresini bulunuz.



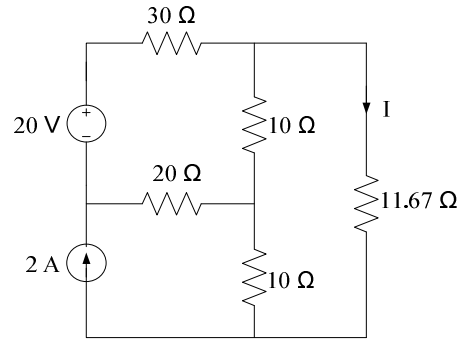
Şekil 4.60 Problem 4.10 devresi.

4.11 Şekil.4.61’de verilen devrenin a-b terminallerine $18\ \Omega$, $28\ \Omega$ ve $88\ \Omega$ ’luk dirençler sırasıyla bağlanıyor. Her bir durumda dirençlerin harcadığı gücü bulunuz.



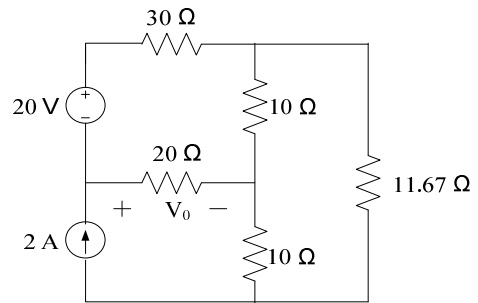
Şekil 4.61 Problem 4.11 devresi.

4.12 Şekil.4.62’de verilen devrede Thevenin teoremini kullanarak I akımını bulunuz.



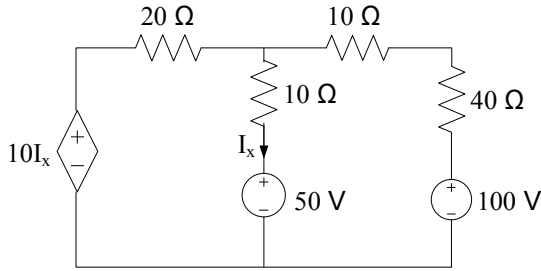
Şekil 4.62 Problem 4.12 devresi.

4.13 Şekil.4.63’de verilen devrede Thevenin teoremini kullanarak V_0 değerini bulunuz.



Şekil.4.63 Problem 4.13 devresi

4.14 Şekil.4.64’de verilen devrede Thevenin teoremini kullanarak 50 V’luk kaynağın gücünü bulunuz.



Şekil 4.64 Problem 4.14 devresi.

4.15 Şekil.4.65’de verilen devrenin a-b terminallerinden görülen Norton eşdeğer devresini bulunuz.

Şekil 4.65 Problem 4.15 devresi.

4.16 Şekil.4.66’da verilen devrede Norton teoremini kullanarak I_0 akımını bulunuz.

Şekil 4.66 Problem 4.16 devresi.

4.17 Şekil.4.66’de verilen devrede R_L yük direncine maksimum güç aktarılmaktadır. R_L değerini ve aktarılan maksimum gücü bulunuz.

Şekil 4.66 Problem 4.17 devresi.

4.18 Şekil.4.67’de verilen devrede R_L yük direncine maksimum 100 W’lık güç aktarıldığına göre gerilim kaynağının değerini bulunuz.

Şekil 4.67 Problem 4.18 devresi.

4.19 Şekil.4.68’de 50 Ω’luk dirence maksimum güç aktarıldığına göre, R direncinin değerini ve aktarılan maksimum gücü bulunuz.

Şekil 4.68 Problem 4.19 devresi.

4.20 Şekil.4.69’da 10 Ω’luk dirence maksimum güç aktarıldığına göre, β değerini ve aktarılan maksimum gücü bulunuz.

Şekil 4.69 Problem 4.20 devresi.

5.BÖLÜM: İŞLEMSEL YÜKSELTİCİLER

5.1. GİRİŞ

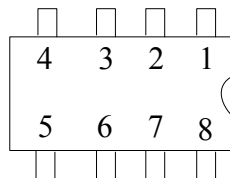
İşlemsel yükselticiler çok terminalli, entegre devre elemanları olup, sinyal seviyesini yükseltmek, sinyalleri toplamak, çıkarmak, çarpmak, bölmek, bir sinyalin integrali veya türevini almak gibi matematiksel işlemleri yapma yeteneğine sahiptirler. Bu nedenle de işlemsel yükseltici (OPerational AMPLifiers – OP AMP) olarak adlandırılırlar. Bir yonga şeklinde imal edilen bu elektronik devre elemanı birçok uygulamaya sahiptir.

İşlemsel yükselticiler, aktif devre elemanlarıdır. Çıkış akım veya gerilim sinyalleri, devrenin tasarlanmasına bağlı olarak, devredeki bir gerilim ya da akım sinyali ile kontrol edilebildiğinden bağımlı kaynak sınıfına girerler. Gerçekte, çıkış gerilimi, giriş terminallerine uygulanan gerilimlerin bir fonksiyonu olduğundan, gerilim bağımlı gerilim kaynaklarıdır. Ancak, uygun tasarımıyla diğer bağımlı kaynakların karakteristiklerini de gösterebilirler.

5.2. İŞLEMSEL YÜKSELTİCİ TERMİNAL EŞİTLİĞİ

Bir işlemsel yükseltici, çok sayıda transistör, diyot, kapasitör ve direnç kullanılarak oluşturulmuş **entegre bir devre elemanıdır** (yonga). Bir elektronik devre elemanı olarak, tasarımı veya analizi elektroniğin konusu olmakla birlikte, burada bir eşdeğeri kullanılarak terminal eşitliği üzerinde durulacaktır. Amaç, yukarıda bahsettiğimiz yeteneklerini kullanmak üzere devreler tasarlamak değil, verilen devre içinde, işlemsel yükselticiler bulunması durumunda, devre analiz metotları ve yongaya ilişkin terminal eşitliğini kullanarak bu devrenin de analizini yapabilmektir.

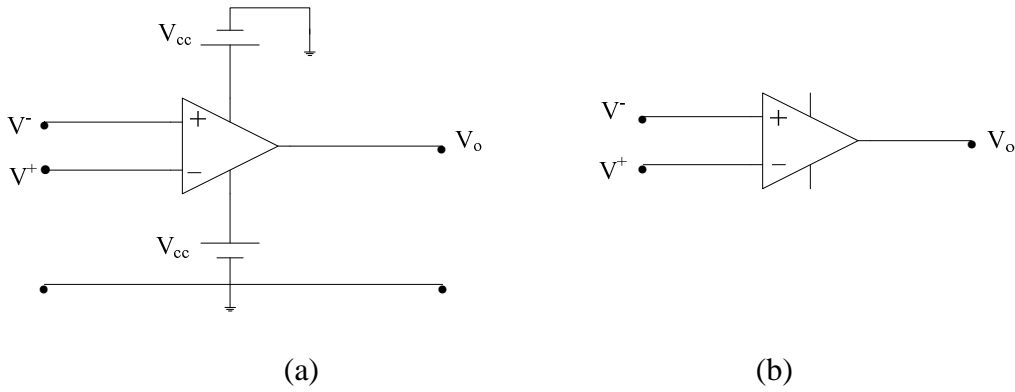
Şekil.5.'de standart bir işlemsel yükseltici yongası görülmektedir. Yonga üzerindeki çentik terminal numaraları ve dolayısıyla terminal işlevlerinin belirtilmesi amacıyla konulur.



Şekil 5.1 Standart işlemsel yükseltici yongası

Çentiğin solundaki ilk terminal 1 numaralı terminaldir. 1 ve 5 numaralı terminaller, işlemsel yükselticinin performansı ile ilgili terminaller olup burada kullanımlarına değinilmeyecektir. 8 numaralı terminal herhangi bir bağlantı için kullanılmaz. 4 numaralı terminal negatif dc besleme ve 7 numaralı terminalde pozitif dc besleme için kullanılır. 6 numaralı terminal çıkış terminali, 2 ve 3 nolu terminaller ise giriş terminalleridir. 2 numaralı terminal giriş sinyalinin negatif değerini giriş sinyali olarak kullanır ve bu nedenle *tersleyen giriş* olarak adlandırılır. 3 numaralı terminal ise *terslemeyen giriş* terminalidir.

İşlemsel yükselticiler için kullanılan devre sembolü ve dc beslemeler Şekil.5.2.a'da görülmektedir. Dc beslemeler yonganın fonksiyonel olarak çalışması için gerekli, standart bağlantılar olduğundan, devre sembolünde çoğu kez gösterilmez ve Şekil.5.2.a'daki gibi daha basit bir devre sembolü kullanılır.

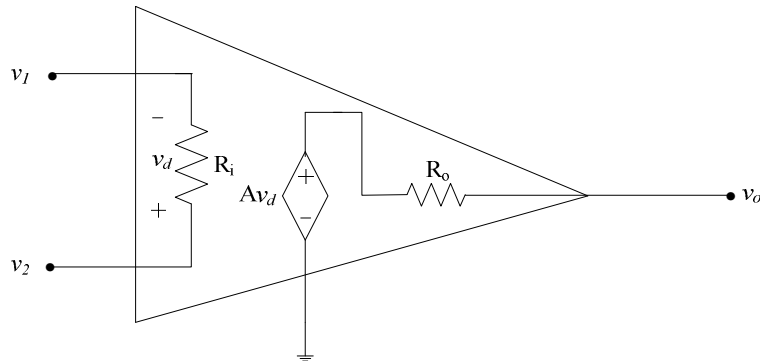


Şekil.5.2. (a) İşlemsel Yükseltici dc beslemesi (b) Devre sembolü

Bir işlemsel yükselticinin şu iki temel karakteristiği kolayca gözlemlenebilir.

- Belirli bir aralıkta, çıkış gerilimi, giriş terminallerine uygulanan gerilimlerin farkıyla orandır.
- Giriş terminal akımları çok küçük değerlidir (μA seviyelerinde)

Bu iki karakteristik göz önüne alınarak işlemsel yükselticinin bir eşdeğer devresi Şekil.5.3'de görüldüğü gibi çizilebilir.



Şekil.5.3. İşlemsel yükseltici eşdeğer devresi

Eşdeğer devrede, R_i ve R_o sırasıyla giriş terminallerinden görülen eşdeğer direnç ve çıkış terminalinden görülen eşdeğer dirençlerdir. R_i çok yüksek bir değere ($M\Omega$ ve daha yüksek) sahipken R_o küçük değerli (100Ω dan küçük) bir dirençtir. Eşdeğer devre çıkış terminali için,

$$v_o = Av_d \quad (5.1)$$

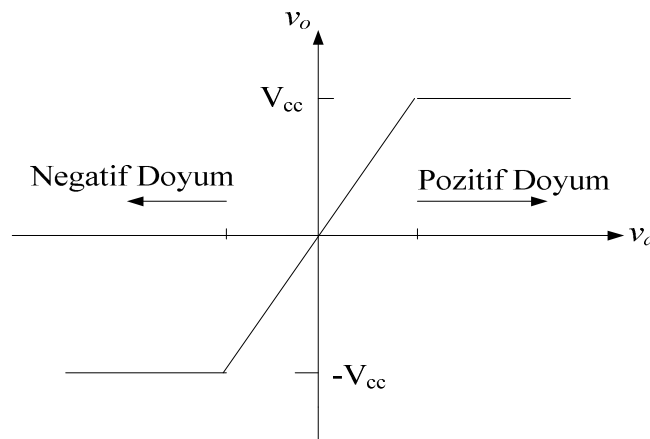
ve giriş terminali için de

$$v_d = v_2 - v_1 \quad (5.2)$$

olduğundan, giriş ve çıkış sinyalleri arasındaki ifade,

$$v_o = A(v_2 - v_1) \quad (5.3)$$

elde edilir. Burada A , açık çevrim kazancı olarak adlandırılır ve çok yüksek bir değerdir ($10^5 \leq A \leq 10^8$). Açık çevrim kazancı olarak adlandırılmasının nedeni, devrede bir geri besleme bulunmamasıdır. Geri besleme, bir sistem çıkış sinyalinin, ya da çıkış sinyaline bağlı bir sinyalin, bir amacı gerçekleştirmek üzere girişe tekrar gönderilmesi ile oluşan çevrimdir. Bu sinyal, tersleyen girişe gönderiliyorsa geri besleme, negatif geri besleme, terslemeyen girişe gönderiliyorsa pozitif geri besleme olarak isimlendirilir. İşlemsel yükselticilerin temel karakteristiklerinden bahsederken: belirli bir aralıkta, çıkış gerilimi, giriş terminallerine uygulanan gerilimlerin farkıyla orandır ifadesi kullanılmıştı. Bu, (5.2) ifadesinin sadece bir aralık için geçerli olduğunu göstermektedir. (5.2) eşitliğinde A bir sabit ve iki giriş sinyalinin farkı bağımsız değişkendir. O halde bu doğrusal ifadenin sınırı, bağımsız değişken olan fark sinyali tarafından belirlenecektir. Açık ki, $v_d = v_2 - v_1$ fark sinyalinin büyüklüğü arttıkça, v_o çıkış sinyalinin değeri artacaktır. Ancak bu artış, yonganın dc besleme değeri ile sınırlıdır. Şayet fark sinyalinin değeri ile açık çevrim kazancı çarpımı $-V_{cc}$ den küçük veya V_{cc} den büyük ise, çıkış sinyali $-V_{cc}$ veya $+V_{cc}$ olacaktır. Bu durum doyum olarak bilinir. Şekil.5.4’de bir işlemsel yükselticinin doğrusal çalışma aralığı ve doyum bölgeleri görülmektedir.

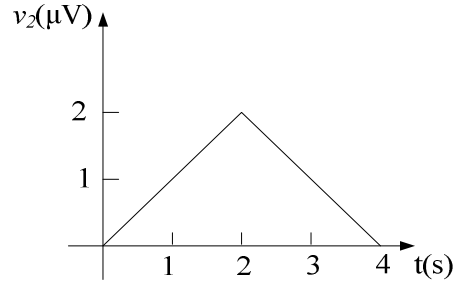


Şekil.5.4. İşlemsel yükseltici doğrusal çalışma ve doyum bölgeleri

O halde çıkış sinyali, $-V_{cc} \leq v_o \leq V_{cc}$ ise işlemsel yükseltici doğrusal çalışma bölgesinde, bunun dışında ise doyumda olacaktır.

ÖRNEK PROBLEM 5.1:

Açık çevrim kazancı 10^7 ve dc beslemesi 10 volt olan bir işlemsel yükselticinin, tersleyen girişi topraklanarak, terslemeyen girişinden aşağıda görülen sinyal uygulanmaktadır. İşlemsel yükselticinin çıkış sinyalini çiziniz.



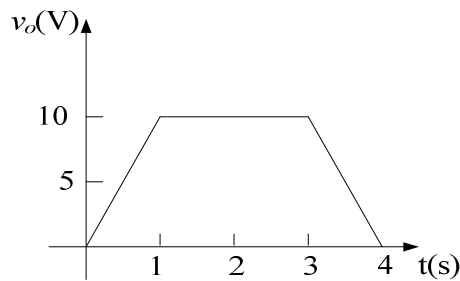
Şekil.5.6. Problem 5.1 için giriş sinyali

İşlemsel yükselticinin dc beslemesi 10 V olduğundan, çıkış sinyalinin maksimum seviyesi 10 V olacaktır. Tersleyen giriş topraklı ise $v_1 = 0$ ve $v_d = v_2 - v_1 = v_2$ dir. Buna göre, $Av_d = Av_2 = 10$ doğrusal çalışma bölgesi ile doyum bölgesinin sınırı

$$v_2 = \frac{10}{A} = \frac{10}{10^7} = 10^{-6} \text{ V}$$

bulunur. v_2 sinyalinin $1 \mu V$ 'dan büyük değerleri için işlemsel yükseltici doyum bölgesinde çalışacağından çıkış sinyali 10 V olacaktır. $1 \mu V$ 'dan küçük değerleri için ise, işlemsel yükseltici doğrusal çalışma bölgesinde bulunduğundan çıkış sinyali $v_o = Av_2 = 10^7 v_2$ olacaktır.

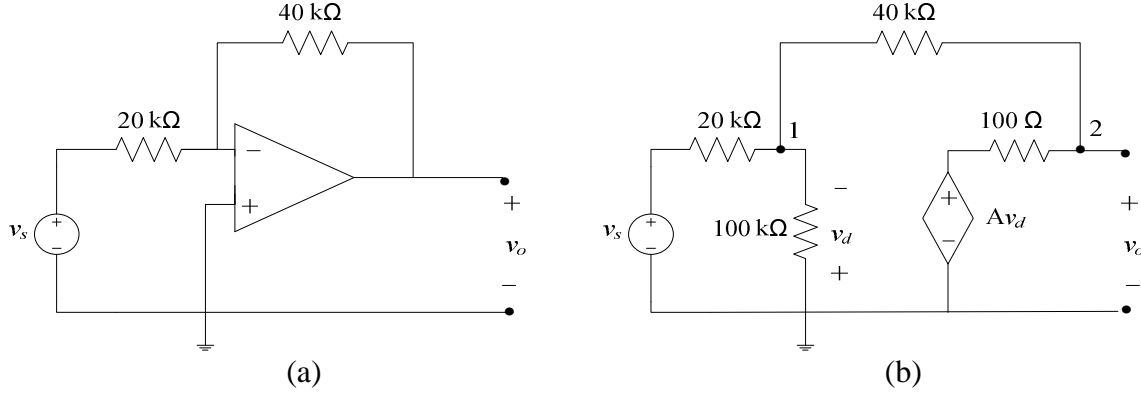
Şekil.5.6'dan v_2 sinyalinin 1 ve 3. saniyeler arasında $1 \mu V$ 'dan büyük değerlere sahip olduğu görülmektedir. O halde bu zaman aralığında çıkış sinyali 10 V olacaktır. Bunun dışındaki zamanlarda aşağıda görüldüğü gibi, sinyal yükseltilerek çıkışa iletilmektedir.



Şekil.5.7. Problem 5.1 için çıkış sinyali

ÖRNEK PROBLEM 5.2:

Şekil.5.8.a'da verilen devrede işlemsel yükselticinin açık çevrim kazancı 1×10^6 , giriş direnci $100 \text{ k}\Omega$, çıkış direnci 100Ω ise v_o / v_s oranını bulunuz.



Şekil.5.8. (a) Problem 5.8 devresi ve (b) eşdeğeri

Şekil.5.8.b'de işlemsel yükselticinin eşdeğeri ile birlikte çizilen devre verilmiştir. Bu devrede 1 ve 2 nolu düğüm noktalarında nokta potansiyelleri metodu uygulanırsa,

$$v_1 = -v_d ; \quad v_2 = v_o .$$

$$\frac{v_1 - v_s}{20 \times 10^3} + \frac{v_1 - v_2}{40 \times 10^3} + \frac{v_1}{100 \times 10^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad 17v_d + 10v_s + 5v_o = 0 .$$

$$\frac{v_2 - Av_d}{100} + \frac{v_2 - v_1}{40 \times 10^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad 401v_o - 4 \times 10^8 v_d \approx 0 ;$$

$$v_d \approx 1.0025v_o \mu\text{V} .$$

$$17 \cdot (1.0025 \times 10^{-6} v_o) + 10v_s + 5v_o = 0 \quad \Rightarrow \quad 5.000017v_o = -10v_s ;$$

$$\frac{v_o}{v_s} = -1.999993 .$$

Bulunan oran çıkış sinyalinin giriş sinyaline oranı, yani kazançtır. Şekil.5.8.a'da görüldüğü gibi, devrede $40 \text{ k}\Omega$ 'luk direnç üzerinden bir geri besleme mevcuttur. Bu nedenle yukarıda elde edilen kazanç, açık çevrim kazancından farklıdır. Çözüme dikkat edilirse yüksek açık çevrim kazancı nedeniyle çok büyük bir değerle küçük bir değer toplamı söz konusu olmuş ve küçük değer ihmal edilebilmiştir.

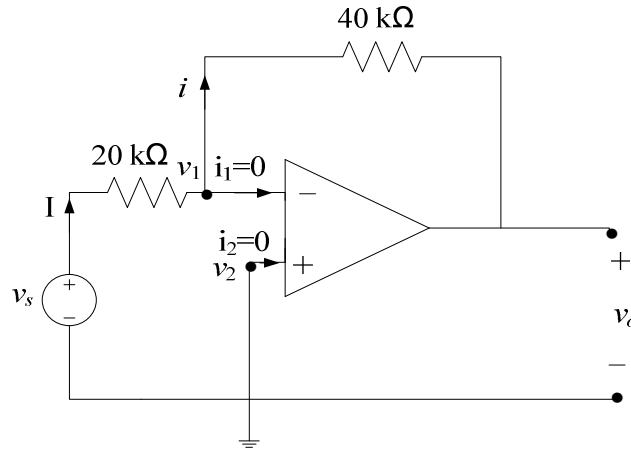
Tekrar işlemsel yükselticilerin parametrelerine dönerek şu yaklaşımları yapalım:

- Pratik değeri çok yüksek olan açık çevrim kazancı sonsuz olsun ($A = \infty$)
- Pratik değeri çok yüksek olan giriş terminal eşdeğer direnci sonsuz olsun ($R_i = \infty$)
- Pratik değeri çok küçük olan çıkış terminal eşdeğer direnci sıfır olsun ($R_o = 0$)

Bu yaklaşımla elde edilen işlemsel yükseltici ideal işlemsel yükseltici olarak adlandırılır. Bu durumda, giriş terminal akımları sıfır olacağından fark gerilimi sıfır olacak ve giriş sinyalleri birbirine eşit olacaktır:

$$i_1 = i_2 = 0; \quad v_d = v_2 - v_1 = 0; \quad v_1 = v_2 \quad (5.4)$$

(5.4) eşitlikleri ideal işlemsel yükseltici eşitlikleri olup, bu yaklaşım işlemsel yükseltici içeren devrelerin, bu elemanın eşdeğerini kullanmaksızın analizini sağlar. İdeal işlemsel yükseltici bir yaklaşım olduğundan, analiz sonucunda bulunan değer bir miktar hata içerecektir. Bu hatanın oranını görmek açısından bir önceki problemi ideal işlemsel yükseltici yaklaşımı ile çözelim:



Şekil.5.9

$i_1 = 0$ olduğundan 20 ve 40 kΩ'luk dirençler üzerinden aynı I akımını geçecektir. $v_d = 0$ olduğu göz önüne alınarak giriş devresinde KGY uygulanırsa,

$$-v_s + 20 \times 10^3 i = 0 \quad \Rightarrow \quad i = \frac{v_s}{20 \times 10^3}.$$

En dış çevride KGY bir kez daha uygulanırsa,

$$-v_s + 20 \times 10^3 i + 40 \times 10^3 i + v_o = 0; \quad -v_s + 60 \times 10^3 \left(\frac{v_s}{20 \times 10^3} \right) + v_o = 0 \quad \Rightarrow \quad 2v_s = -v_o;$$

$$\frac{v_o}{v_s} = -2.$$

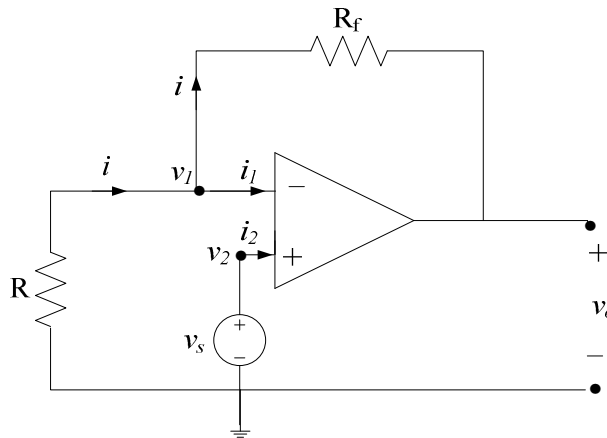
İdeal işlemsel yükseltici yaklaşımı ile eşdeğer devre kullanarak elde edilen cevapların birbirine çok yakın olduğuna dikkat ediniz.

5.3. İŞLEMSEL YÜKSELTİCİ UYGULAMALARI

İşlemsel yükselticilerin bir sinyalin seviyesini yükseltmenin yanı sıra, integral, türev ve temel matematiksel işlemleri ve yapma kabiliyetine sahip oldukları daha önce vurgulanmıştı. Bir sinyalin integral veya türevini çıkış sinyali olarak elde edebilmek için, işlemsel yükselticilerle birlikte, dirençlerin yanı sıra kapasitör ve bobinlerin kullanılması gerekir. Bu elemanlar incelendikten sonra, işlemsel yükselticilerin bu özellikleri üzerinde durulacaktır. Bu bölümde, pratikte sık kullanılan: bir sinyalin yükseltilmesi, terslenerek yükseltilmesi, sinyallerin toplanarak yükseltilmesi ve iki sinyalin farkının alınması işlemlerinin işlemsel yükselticilerle gerçekleştirilmesi üzerinde durulacaktır.

5.3.1. TERSLEMİYEN YÜKSELTİCİ ve GERİLİM TUTUCU

Terslemeyen yükseltici giriş sinyalinin işareti değiştirilmeden seviyesinin yükseltilmesi amacıyla kullanılır. Şekil.5.10'da görüldüğü gibi seviyesi yükseltilecek sinyali, işlemsel yükselticinin terslemeyen girişine uygulayalım.



Şekil.5.10.Terslemeyen yükseltici

$i_1=0$ olduğundan,

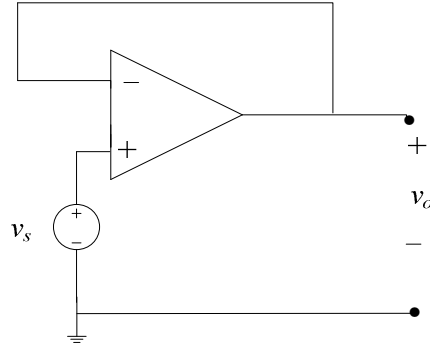
$$\frac{v_1 - 0}{R} + \frac{v_1 - v_o}{R_f} = 0; \quad v_1 = v_2 = v_s \Rightarrow \frac{v_s}{R} + \frac{v_s - v_o}{R_f} = 0,$$

ve

$$\frac{v_o}{v_s} = 1 + \frac{R_f}{R} \quad (5.6)$$

(5.6) ifadesinde kazancın, direnç değerleri ile kontrol edilebildiği görülmektedir. Ayrıca geri besleme direncinin sıfır ve sonsuz olduğu durumlarda (kısa devre ve açık devre) kazancın 1 olacağına dikkat ediniz. **Kazancın 1 olması durumunda devre, gerilim izleyici olarak adlandırılır ve yaygın kullanılan bir yapıdır. Açık ki, bu durumda çıkış gerilimi giriş**

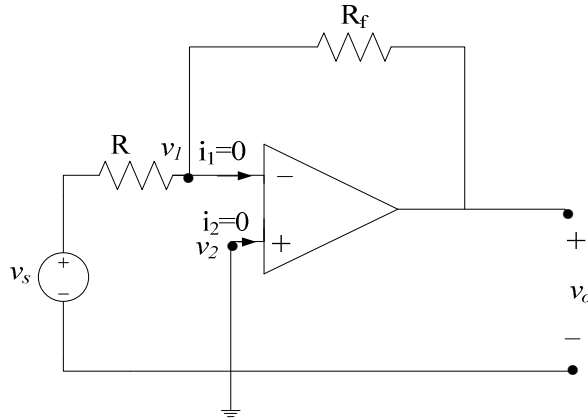
gerilimine eşit olmakta yani, giriş gerilimini izlemektedir. Şekil 5.11’de gerilim izleyici devresi görülmektedir.



Şekil.5.11.Gerilim izleyici devresi

5.3.2. TERSLEYEN YÜKSELTİCİ

Giriş sinyalinin işaretini değiştirerek seviyesini yükseltmek amacıyla kullanılan devre Şekil 5.12’ de verilmiştir. Devrede görüldüğü gibi terslenecek sinyal tersleyen girişe uygulanırken, terslemeyen giriş topraklanmakta ve sinyal seviyesini yükseltmek içinde negatif geri besleme kullanılmaktadır.



Şekil.5.12. Tersleyen yükseltici

Giriş-çıkış sinyalleri arasındaki ilişkiyi bulmak için düğüm potansiyelleri metodunu kullanalım:

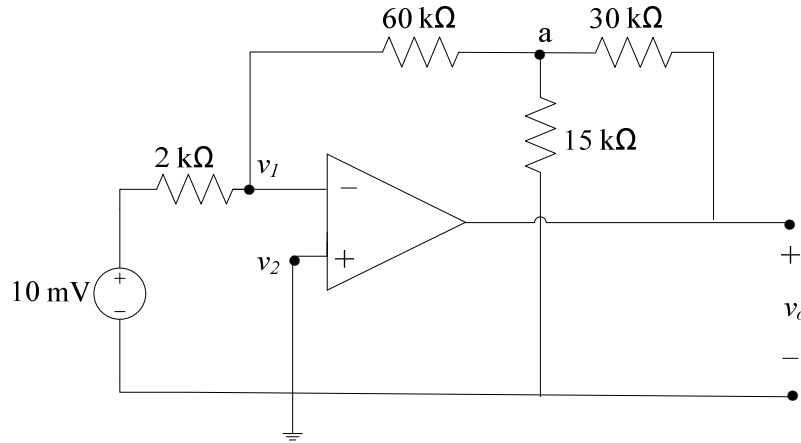
$$\frac{v_1 - v_s}{R} + \frac{v_1 - v_o}{R_f} = 0; \quad v_2 = 0 = v_1 \Rightarrow \frac{-v_s}{R} + \frac{-v_o}{R_f} = 0$$

$$\frac{v_o}{v_s} = -\frac{R_f}{R}. \quad (5.7)$$

(5.7) eşitliğinden anlaşılaçağı gibi giriş sinyali terslenmekte ve R_f/R oranında yükseltilmektedir.

ÖRNEK PROBLEM 5.3:

Şekil.5.13 de verilen devrede işlemsel yükseltici **dc beslemesi 10 V ise** çıkış gerilimini bulunuz.



Şekil.5.13. Problem 5.3 devresi

KAY'nı uygulayalım:

$$\frac{v_1 - 10 \times 10^{-3}}{2 \times 10^3} + \frac{v_1 - v_a}{60 \times 10^3} = 0; \quad v_2 = 0 = v_1 \Rightarrow v_1 = -0.3 \text{ V.}$$

$$\frac{v_a - v_1}{60 \times 10^3} + \frac{v_a}{15 \times 10^3} + \frac{v_a}{30 \times 10^3} = 0 \Rightarrow 7v_a = 2v_0; \quad v_o = \frac{7}{2} \cdot (-0.3) = -1.05 \text{ V.}$$

5.3.3. TOPLAM YÜKSELTİCİ

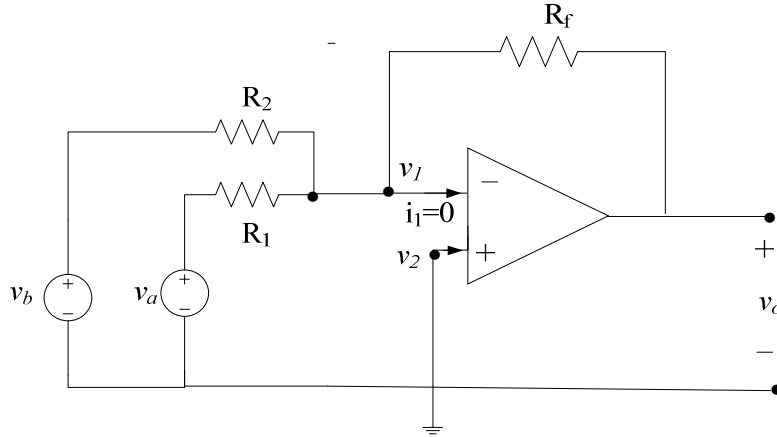
İki ya da daha fazla sinyalin istenen katsayılarla çarpımlarının bir toplamı, toplam yükseltici ile elde edilebilir. Toplanacak sinyaller tersleyen girişe uygulanır. Başka bir deyişle toplam yükseltici aslında bir tersleyen yükselticidir. Şekil.5.14'de iki giriş sinyali için bir toplam yükseltici devresi verilmekle birlikte, giriş sinyali sayısı artırılabilir.

KAY'nı uygulayalım:

$$\frac{v_1 - v_a}{R_1} + \frac{v_1 - v_b}{R_2} + \frac{v_1 - v_0}{R_f} = 0 \quad \text{ve} \quad v_1 = 0,$$

olduğundan,

$$v_0 = -\frac{R_f}{R_1} v_a - \frac{R_f}{R_2} v_b = -\left(\frac{R_f}{R_1} v_a + \frac{R_f}{R_2} v_b\right) \quad (5.8)$$



Şekil.5.14: Toplam yükseltici

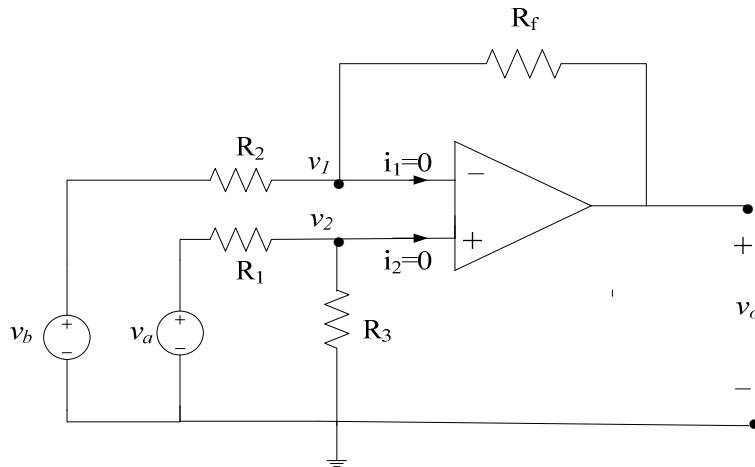
(5.8) eşitliğinden anlaşılabileceği gibi uygun R_1 , R_2 ve R_f değerleri ile iki sinyalin istenen bir ağırlıklı toplamı çıkış sinyali olarak elde edilebilir. Şayet $R_1 = R_2 = R_f$ seçilirse, çıkış sinyali

$$v_0 = -(v_a + v_b) \quad (5.9)$$

olacaktır.

5.3.4. FARK YÜKSELTİCİ

İki sinyalin farkını alarak bu farkı istenen oranda yükseltme işlemi özellikle kontrol ve enstrümantasyon alanlarında yaygın kullanılan bir uygulamadır. Şekil5.15’de bu amaç için kullanılabilecek bir devre görülmektedir.



Şekil.5.15: Fark yükseltici

Giriş sinyalleri ve çıkış sinyali arasındaki ilişkiyi bulmak için KGY'nı uygulayalım:

$$\frac{v_1 - v_b}{R_2} + \frac{v_1 - v_o}{R_f} = 0; \Rightarrow v_1 = \frac{R_2 R_f}{R_2 + R_f} \left(\frac{v_b}{R_2} + \frac{v_o}{R_f} \right) \quad (5.10)$$

$$\frac{v_2 - v_a}{R_1} + \frac{v_2}{R_3} = 0; \Rightarrow v_2 = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} \frac{v_a}{R_1} \quad (5.11)$$

$$v_1 = v_2 \Rightarrow \frac{R_2 R_f}{R_2 + R_f} \left(\frac{v_b}{R_2} + \frac{v_o}{R_f} \right) = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} \frac{v_a}{R_1} \quad (5.12)$$

ve

$$v_o = \frac{R_3}{R_2} \left(\frac{R_2 + R_f}{R_1 + R_3} \right) v_a - \frac{R_f}{R_2} v_b = \frac{R_f}{R_2} \left(\frac{1 + R_2 / R_f}{1 + R_3 / R_1} \right) v_a - \frac{R_f}{R_2} v_b \quad (5.13)$$

elde edilir. Bu eşitlikten kolayca görülebileceği gibi $R_2 / R_f = R_3 / R_1$ için çıkış sinyali,

$$v_o = \frac{R_f}{R_2} (v_a - v_b) \quad (5.14)$$

olacaktır ki, buda girişe uygulanan iki sinyalin farkının, uygun R_f ve R_2 değerleri ile istenen oranda yükseltilebileceğini ifade etmektedir.

ÖRNEK PROBLEM 5.4:

v_a , v_b ve v_c sinyalleri için $v_o = 6v_a - 10v_b - 2v_c$ işlemini gerçekleyen yükseltici devresini gerçekleyiniz.

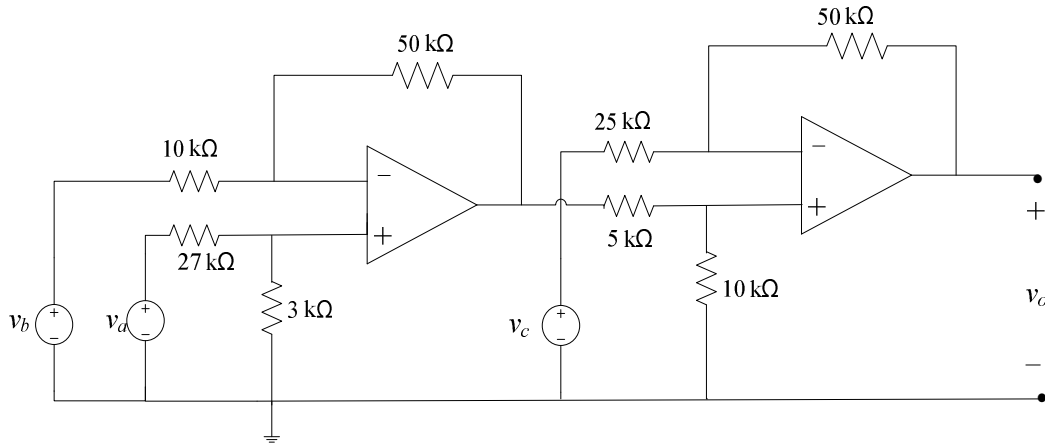
Öncelikle $3v_a - 5v_b$ işlemi için fark yükseltici devresini tasarlayalım: (5.13) eşitliğinden

$$\frac{R_f}{R_2} = 5 \quad \text{ve} \quad \frac{R_f}{R_2} \left(\frac{1 + R_2 / R_f}{1 + R_1 / R_3} \right) = 3$$

olması gerektiği bulunur. Buradan, $R_1 / R_3 = 9$ olacağından bu oranları sağlayacak direnç değerleri, $R_f = 50 \text{ k}\Omega$ için $R_2 = 10 \text{ k}\Omega$ ve $R_3 = 3 \text{ k}\Omega$ için $R_1 = 27 \text{ k}\Omega$ bulunur. Bu yükselticinin çıkış sinyali, kazancı 2 olan ikinci bir fark yükselticisine v_c sinyali ile birlikte uygulanırsa istenilen çıkış sinyali elde edilir. (5.14) eşitliğinden kazancı 2 olan yükseltici için

$$\frac{R_f}{R_2} = \frac{R_3}{R_1} = 2$$

olması gerektiği görülür. O halde ikinci fark yükselticisi için yine $R_f = 50 \text{ k}\Omega$ seçilirse $R_2 = 25 \text{ k}\Omega$ ve $R_3 = 10 \text{ k}\Omega$ seçilirse $R_1 = 5 \text{ k}\Omega$ bulunur. Şekil.5.16'da bu direnç değerleri ile tasarlanan devre verilmiştir.



Şekil.5.16: Problem 5.4 devresi

6.BÖLÜM: KAPASİTÖRLER VE BOBİNLER

6.1. GİRİŞ

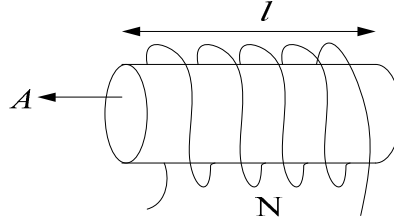
Bundan önceki bölümlerde, sadece dc akım ve gerilim kaynakları ile dirençlerden oluşan devrelerin çözümlenmesini inceledik. Dirençler, elektrik enerjisini ısı enerjisine çeviren devre elemanlarıdır. Sadece dirençler kullanılarak oluşturulan devreler de resistif devreler olarak adlandırılırlar. Dirençlerin dışında sıklıkla kullanılan diğer pasif devre elemanları kapasitörler ve bobinlerdir. **Dirençlerin aksine kapasitör ve bobinler, elektrik enerjisini ısı enerjisine dönüştürmezler fakat depolarlar.** Bu özelliklerinden dolayı bu iki devre elemanı enerji depolama elemanları olarak da adlandırılırlar. Bu bölümde, kapasitör ve bobine ilişkin terminal akım-gerilim eşitlikleri, seri ve paralel bağlı kapasitör ve bobinlerin eşdeğerleri üzerinde durulacak, 7. ve 8. bölümlerde ise kapasitör ve bobin içeren devrelerin dc analizi ele alınacaktır.

6.2. BOBİNLER

Bobin, dışı yalıtılmış iletken bir telin Şekil.6.1’de görüldüğü gibi, genellikle manyetik bir malzeme üzerine sarılmasıyla oluşturulmuş bir elektrik devre elemanıdır. **Bobinin sarıldığı malzeme nüve olarak isimlendirilir ve bu malzeme, hava, tahta, plastik gibi manyetik olmayan bir malzeme ise, bu malzemelerin manyetik geçirgenlikleri havanın manyetik geçirgenliğine çok yakın olduğundan, hava nüveli bobin olarak adlandırılır.** Şekilde görülen bobin için N sarım sayısını, A bobin (nüve) kesit alanını ve l de bobin uzunluğunu göstermektedir. Ayrıca, nüve olarak kullanılan **malzemenin manyetik geçirgenliğini gösteren parametre**

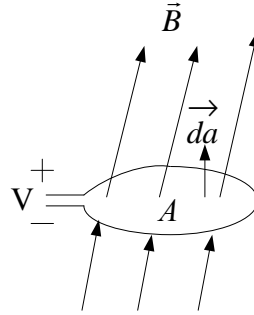
$$\mu = \mu_r \mu_0 \quad (6.1)$$

olup burada μ_0 havanın manyetik geçirgenliği ve μ_r da malzemenin bağıl manyetik geçirgenliğini ifade etmektedir. Teorik olarak, bobin sarımlarının arada bir boşluk olmayacak şekilde sık olduğu ve her sarım yarıçapının nüve yarıçapına eşit olduğu kabul edilir.



Şekil.6.1: Bobin fiziksel yapısı

Faraday yasasına göre, iletken bir halkanın sınırladığı fiziksel alanda, bir manyetik alan oluşturulursa, halka terminallerinde Şekil.6.2’de görüldüğü gibi bir gerilim indüklenir.



Şekil.6.2: Faraday yasasının gösterimi

İndüklenen gerilim,

$$v(t) = -\frac{d\phi(t)}{dt} \quad (6.2)$$

ile ifade edilir. Burada ϕ , halka kesit alanındaki toplam manyetik akı olup, manyetik akı yoğunluğu vektörü \vec{B} cinsinden ifadesi aşağıda verilmiştir.

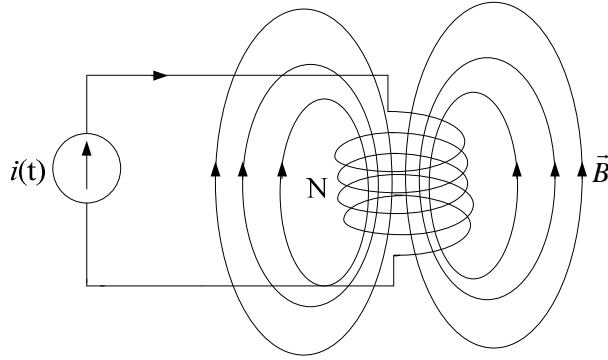
$$\phi(t) = \oint_A \vec{B}(t) \cdot \vec{da} \quad (6.3)$$

(6.2) eşitliğindeki eksi işareti Lenz yasası ile ilgili olup burada üzerinde durulmayacaktır. Sonuç olarak indüklenen gerilimin polaritesini tayin etmektedir. Şekil.6.2’ görülen halka N sarımdan oluşmuş ise bu durumda terminal geriliminin büyüklüğü,

$$v(t) = N \frac{d\phi(t)}{dt} \quad (6.4)$$

olur. Açıkta ki bu yapı, N sarımlı bir bobin oluşturur. Şekil.6.3’de görüldüğü gibi, bobin üzerinden bir akım geçirildiğinde, bu akım bobin halkalarını saran manyetik alanı oluşturur ve bobin terminallerinde (6.4) eşitliği ile ifade edilen gerilim indüklenir. Manyetik alanın

kaynağı bobin akımıdır, yani manyetik alan bobin akımının bir fonksiyonudur. Buna göre, (6.4) eşitliği türevin zincirleme kuralı kullanılarak,



Şekil.6.3: Bobin akımı ve manyetik alanı

$$v(t) = N \frac{d\phi(t)}{di(t)} \frac{di(t)}{dt} \quad (6.5)$$

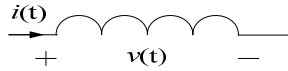
biçiminde ifade edilebilir. Manyetik alan ve dolayısıyla manyetik akının, akıma göre değişimi doğrusaldır ve bu nedenle (6.5) eşitliğindeki ilk türev bir sabite eşittir. Bu sabitle N'nin çarpımı yeni bir L sabiti ile gösterilirse,

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad (6.6)$$

elde edilir. Bu eşitlikte L, bobin indüktansı olarak adlandırılır ve tamamen bobinin geometrisi ve bobin nüvesinin manyetik geçirgenliğinin bir fonksiyonudur. İndüktans Henry (H) birimi ile ölçülür. Örneğin, Şekil.6.1'de görülen bir bobin için indüktans değeri

$$L = \frac{\mu N^2 A}{l} \quad (6.7)$$

olarak tanımlıdır. Bobin için kullanılan devre sembolü Şekil.6.4'de görülmektedir.



Şekil.6.4: Bobin devre sembolü

Bobin akımının bilinmesi durumunda bobin terminal geriliminin ifadesi (6.6) eşitliği ile bulunur. Bu eşitliğin her iki tarafı dt/L ile çarpılır ve sonuç ifadesi $-\infty$ ile bir t aralığında integrallenirse

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v(t) dt \quad (6.8)$$

veya,

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{t_0} v(t) dt + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v(t) dt \quad (6.9)$$

elde edilir. Akımın $t = -\infty$ daki değeri sıfırdır. Sınırları sabit olduğundan ilk integral sabit bir değer olacaktır. Bu durumda (6.9) ifadesi

$$i(t) = i(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v(t) dt \quad (6.10)$$

olur. Burada $i(t_0)$, başlangıç bobin akımı olarak adlandırılır. t_0 , genellikle devrede bir değişikliğin olduğu anı veya bobinin devreye bağlandığı anı gösterir.

(6.6) ve (6.10) eşitlikleri bobin akımı ve bobin geriliminin birbirleri cinsinden ifadeleri olup, bobin terminal eşitlikleri olarak bilinirler. Bobinin, elektrik enerjisini depolama yeteneğine sahip bir devre elemanı olduğunu söylemiştik. Bu enerji, bobin manyetik alanında depolanır. Depolanan enerji miktarı,

$$w(t) = \int_{-\infty}^t p(t) dt$$

ifadesinde

$$p(t) = v(t)i(t) = L \frac{di(t)}{dt} i(t) \quad (6.11)$$

kullanılarak,

$$w(t) = \int_{-\infty}^t L \frac{di(t)}{dt} i(t) dt = L \int_{-\infty}^t i(t) di(t) = \frac{1}{2} L i^2(t) \Big|_{-\infty}^t = \frac{1}{2} L (i^2(t) - i^2(-\infty))$$

$$w(t) = \frac{1}{2} L i^2(t) \quad (6.12)$$

bulunur. (6.6) eşitliğinden, bobin için şu iki önemli çıkarımları yapalım:

- Bobin akımı sabitse bobin gerilimi sıfırdır.
- Bobin akımı zamanın sürekli bir fonksiyonu olup, anlık bir değişim gösteremez.

İlk çıkarımdan, bobinin dc kaynaklarla uyarılması durumunda kısa devre gibi davranacağı sonucuna ulaşılır. İkinci çıkarım ise, bobin akımının anlık değişiminin, bobin terminal geriliminde sonsuz bir artış gerektirmesine dayanır ki, bu fiziksel olarak mümkün değildir. Bu çıkarım, bobin akımının sürekliliği gibi önemli bir sonuca ulaşmamıza imkan verir. t_0 , bir devrede herhangi bir fiziksel değişikliğin yapıldığı anı, t_0^- ve t_0^+ ile de bu değişikliğin hemen öncesi ve hemen sonrasını gösterelim. Bu durumda,

$$i(t_0^-) = i(t_0) = i(t_0^+) \quad (6.13)$$

olacaktır. Bu eşitlik bobin akımının sürekliliğini ifade eder ve herhangi bir değişikliğe karşı bobinin akımını korumaya çalıştığı anlamındadır.

ÖRNEK PROBLEM 6.1:

İndüktansı 1 mH olan bir bobin üzerindeki akım

$$i(t) = 5e^{-2t} \text{ A.}$$

ise bobin terminal gerilimini bulunuz. $t = 1$ saniye için bobinde depolanan enerjiyi bulunuz.

Çözüm:

$$v(t) = L \frac{di}{dt} = 1 \times 10^{-3} \cdot \frac{d}{dt} (5e^{-2t}) = -10 \times 10^{-3} e^{-2t} \text{ V.}$$

$$w(2) = \frac{1}{2} Li^2(2) = \frac{1}{2} \cdot 1 \times 10^{-3} \cdot (5e^{-2 \cdot 2})^2 = 4.19 \text{ } \mu\text{J.}$$

ÖRNEK PROBLEM 6.2:

İndüktansı 2 H olan bobinin terminal gerilimi

$$v(t) = 10(1 - e^{-t}) \text{ V, } t > 0$$

ve bobin başlangıç akımı 0.1 A. ise bobin akımının zamana bağlı ifadesini bulunuz. $t = 1$ s için bobin akımının değerini ve $0 < t < 1$ arasında bobinde depolanan enerji miktarını bulunuz.

Çözüm: $t_0 = 0$ ve $i(0) = 0.1$ A. olduğundan,

$$i(t) = i(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v(t) dt = 0.1 + \frac{1}{2} \int_0^t 10(1 - e^{-t}) dt = 0.1 + 5(t + e^{-t}) \Big|_0^t = i(t) = 0.1 + 5(t + e^{-t} - 1) \text{ A.}$$

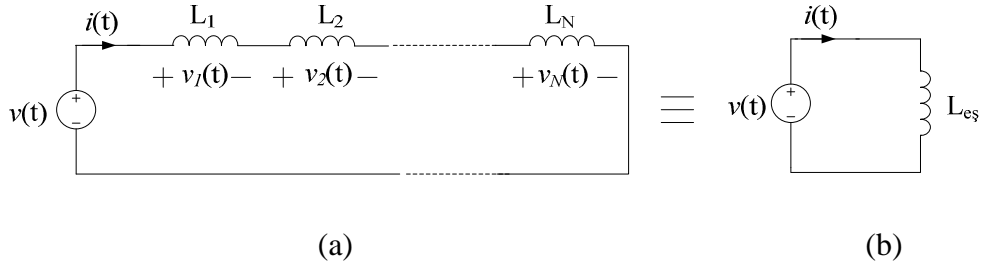
ve $t = 1$ s için,

$$i(1) = 0.1 + 5(1 + e^{-1} - 1) = 1.94 \text{ A.}$$

$$w(1) - w(0) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot i^2(1) - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot i^2(0) = (1.94)^2 - (0.1)^2 = 3.751 \text{ J.}$$

6.2.1. SERİ BAĞLI BOBİNLERİN EŞDEĞER İNDÜKTANSLARI

Şekil.6.5.a’da görülen, seri bağlı bobinlerden oluşmuş devreye KGY’nı uygulayalım:



Şekil.6.5 (a) seri bağlı bobinler ve (b) eşdeğeri

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) + \dots + v_N(t) \quad (6.14)$$

$n = 1, 2, 3, \dots, N$ için,

$$v_n(t) = L_n \frac{di(t)}{dt} \quad (6.15)$$

ifadesi (6.14) eşitliğinde kullanılırsa,

$$v(t) = L_1 \frac{di(t)}{dt} + L_2 \frac{di(t)}{dt} + \dots + L_N \frac{di(t)}{dt} = v(t) = (L_1 + L_2 + \dots + L_N) \frac{di(t)}{dt} \quad (6.16)$$

ve Şekil.6.5.b’de görülen eşdeğer devre için ise,

$$v(t) = L_{eş} \frac{di(t)}{dt} \quad (6.17)$$

olduğundan, (6.16) ve (6.17) eşitliklerinin katsayılarının eşit olmalıdır:

$$L_{eş} = L_1 + L_2 + \dots + L_N = \sum_{n=1}^N L_n. \quad (6.17)$$

(6.17) eşitliğine göre, seri bağlı bobinlerin eşdeğer indüktansı, bobinlerin indüktansları toplamına eşittir.

6.2.2. PARALEL BAĞLI BOBİNLERİN EŞDEĞER İNDÜKTANSLARI

Şekil.6.6.a’da görülen, paralel bağlı bobinlerden oluşmuş devreye KAY’nı uygulayalım:

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) + \dots + i_N(t) \quad (6.18)$$

$n = 1, 2, 3, \dots, N$ için,

$$i_n(t) = i_n(t_0) + \frac{1}{L_n} \int_{t_0}^t v(t) dt \quad (6.19)$$

ifadesi (6.14) eşitliğinde kullanılırsa,

$$i(t) = i_1(t_0) + \frac{1}{L_1} \int_{t_0}^t v(t) dt + i_2(t_0) + \frac{1}{L_2} \int_{t_0}^t v(t) dt + \dots + i_N(t_0) + \frac{1}{L_N} \int_{t_0}^t v(t) dt$$

ve

$$i(t) = i_1(t_0) + i_2(t_0) + \dots + i_N(t_0) + \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_N} \right) \int_{t_0}^t v(t) dt \quad (6.20)$$

elde edilir. Burada

$$i(t_0) = i_1(t_0) + i_2(t_0) + \dots + i_N(t_0) \quad (6.21)$$

ve

$$\frac{1}{L_{eş}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_N}$$

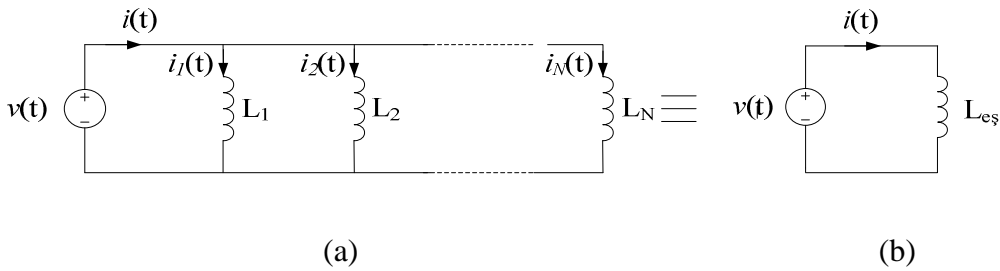
ifadeleri ile,

$$i(t) = i(t_0) + \frac{1}{L_{eş}} \int_{t_0}^t v(t) dt \quad (6.22)$$

bulunur ki, bu Şekil.6.6.b’de görülen eşdeğer devrenin terminal eşitliğidir. O halde paralel bağlı bobinlerin eşdeğer indüktansının tersi, bobin indüktanslarının terslerinin toplamına eşittir.

$$\frac{1}{L_{eş}} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{L_n} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_N} \quad (6.23)$$

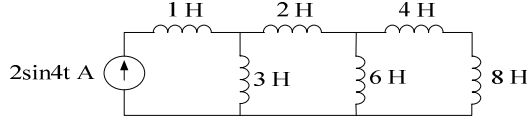
(6.21) eşitliği ile verilen akım ise, $L_{eş}$ indüktansına sahip bobin üzerindeki başlangıç akımıdır.



Şekil.6.6 (a) paralel bağlı bobinler ve (b) eşdeğeri

ÖRNEK PROBLEM 6.3:

Şekil.6.7’de verilen devrede akım kaynağının terminal gerilimini bulunuz.



Şekil.6.7: Problem 6.3

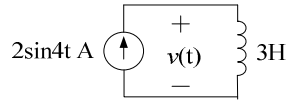
Çözüm:

Kaynağın bağlı olduğu terminalden görülen eşdeğer indüktans

$$L_{eş} = \left(\left(\left((8+4) // 6 \right) + 2 \right) // 3 \right) + 1 = \left(\left((12 // 6) + 2 \right) // 3 \right) + 1$$

$$L_{eş} = \left(\left(\frac{12 \cdot 6}{12+6} + 2 \right) // 3 \right) + 1 = (6 // 3) + 1 = \frac{6 \cdot 3}{6+3} + 1 = 3 \text{ H.}$$

Şekil.6.7’de verilen devrenin eşdeğeri aşağıda görüldüğü gibi olacaktır.

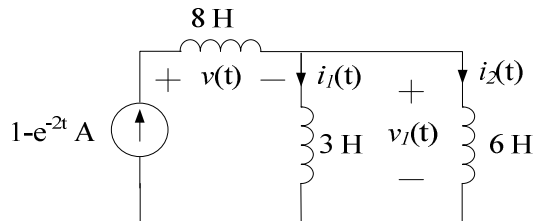


Bobin terminal gerilimi, akım kaynağının terminallerinde de görüleceğinden,

$$v(t) = L_{eş} \frac{di(t)}{dt} = 3 \frac{d}{dt} (2 \sin 4t) = 24 \cos 4t \text{ V.}$$

ÖRNEK PROBLEM 6.4:

Şekil.6.8’de verilen devrede bobinler üzerinde $t=0$ anında depolanan enerji sıfırdır. Bobinlerin üzerinden geçen akım ve bobin terminal gerilimlerini bulunuz.



Şekil.6.8: Problem 6.4 devresi

Cözüm:

$$v(t) = 8 \frac{d}{dt} (1 - e^{-2t}) = 16e^{-2t} \text{ V.}$$

Paralel bağlı bobinlerin eşdeğer indüktansı



$$L_{eş} = 3 // 6 = \frac{3 \cdot 6}{3 + 6} = 2 \text{ H.}$$

ve bu bobinler üzerindeki gerilim,

$$v_1(t) = L_{eş} \frac{d}{dt} (1 - e^{-2t}) = 2 \frac{d}{dt} (1 - e^{-2t}) = 4e^{-2t} \text{ V}$$

bulunur. Paralel bağlı bobinler üzerindeki gerilim bilindiğinden, her biri üzerinden geçen akım bobin terminal eşitliğinden,

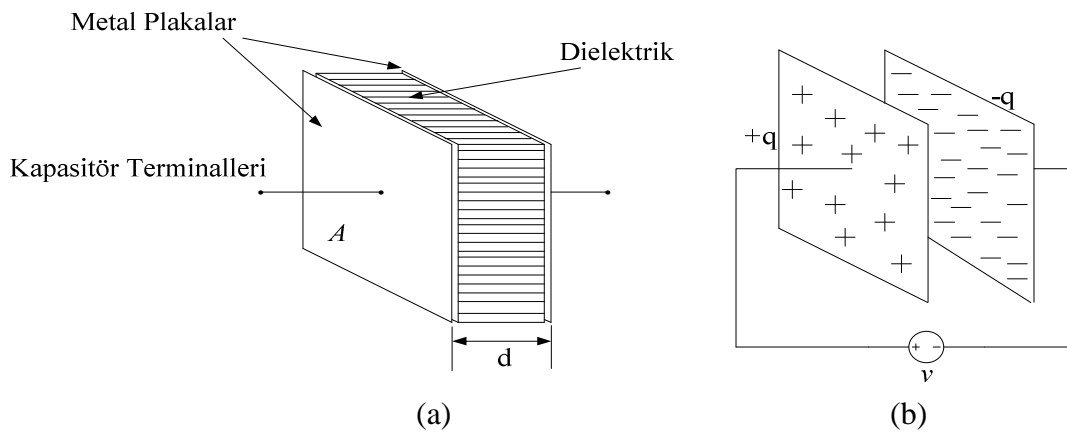
$$i_1(t) = i_1(t_0) + \frac{1}{3} \int_0^t v_1(t) dt = 0 + \frac{4}{3} \int_0^t e^{-2t} dt = -\frac{4}{6} e^{-2t} \Big|_0^t = 0.66(1 - e^{-2t}) \text{ A.}$$

$$i_2(t) = i_2(t_0) + \frac{1}{6} \int_0^t v_1(t) dt = 0 + \frac{4}{6} \int_0^t e^{-2t} dt = -\frac{4}{12} e^{-2t} \Big|_0^t = 0.33(1 - e^{-2t}) \text{ A.}$$

elde edilir.

6.3. KAPASİÖRLER

Kapasitör, iki iletken materyalin aralarına koyulan bir dielektrik (yalıtkan) malzeme ile oluşturulmuş pasif devre elemanlarıdır. İletkenlerin geometrik yapısı çok değişik şekillerde olabilir. Burada, iletken olarak iki metal plaka kullanılarak imal edilmiş, paralel plakalı kapasitörler üzerinde durulacaktır. Şekil.6.9'da' bu kapasitöre ilişkin yapı görülmektedir.



Şekil.6.9: (a) Kapasitörün fiziksel yapısı (b) plakalarda yük birikimi

Şekil.6.9.b’de görüldüğü şekilde kapasitör plakaları arasına bir v gerilimi uygulandığında, kaynağın pozitif terminalinin bağlı olduğu plakadaki serbest elektronlar diğer plakaya transfer edilmeye başlanır. Bu transfer, plakalar arasındaki potansiyel fark kaynağın gerilimine eşit olana dek sürer. Transfer sona erdiğinde plakalardan birinde $+q$ ve diğerinde de $-q$ kadar yük birikmiş olur. Bu anda sonra, kaynak bağlantısı sökülse dahi, ayrılmış yüklerden dolayı plakalar arasındaki v potansiyel farkı korunur. Bu, plakalar arasında bir elektrik alanının varlığını gösterir ki, kapasitörde depolanan enerji bu alanda depolanan enerjidir. Plakalarda biriken yük miktarı, uygulanan potansiyel farkı ile orantılıdır.

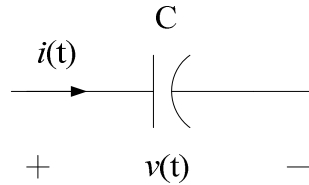
$$q = Cv \quad (6.24)$$

(6.24) eşitliğinde, C orantı sabiti, kapasitörün kapasitansı olarak adlandırılır ve tamamen kapasitörün geometrik yapısı ve kullanılan dielektrik malzemenin elektriksel geçirgenliğine bağlıdır ve Farad (F) birimi ile ölçülür. Örneğin, Şekil.6.9.a’da görülen paralel plakalı kapasitör için kapasitans

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r A}{d} \quad (6.25)$$

olup burada A iletken plaka alanını, d plakalar arasındaki uzaklığı, ϵ_0 havanın elektriksel geçirgenliğini ve ϵ_r da plakalar arasındaki dielektrik malzemenin bağlı elektriksel geçirgenliğini ifade eder.

Kapasitans birimi için kullanılan Farad büyük bir birim olup, pratik kapasitörler bu birimin az katları ile ifade edilirler. Kapasitör için kullanılan devre sembolü Şekil.6.10’da görülmektedir.



Şekil.6.10: Kapasitör devre sembolü

Kapasitör terminal eşitliği için (6.24) eşitliğinin her iki tarafının zamana göre türevini alalım:

$$\frac{dq(t)}{dt} = C \frac{dv}{dt}.$$

Bu eşitliğin sol tarafındaki ifade akım ifadesi olduğundan,

$$i(t) = C \frac{dv}{dt} \quad (6.26)$$

elde edilir. (6.26) eşitliği kapasitör terminal eşitliklerinden biri olup, kapasitör terminal geriliminin bilinmesi durumunda kapasitör akımının ifadesi için kullanılır. (6.26) eşitliğinin her iki yanı dt/C terimi ile çarpılarak, sonuç eşitliğinin her iki tarafı integralenirse,

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(t) dt = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t_0} i(t) dt + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(t) dt$$

bulunur. Bu eşitlikte, sağ taraftaki birinci integral sınırları sabit olduğundan, integral değeri sabit olacaktır. Bu göre eşitlik,

$$v(t) = v(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(t) dt \quad (6.27)$$

şeklinde yazılır ki, burada $v(t_0)$ kapasitör başlangıç gerilimi olarak adlandırılır. t_0 , genellikle devrede bir değişikliğin olduğu anı veya kapasitörün devreye bağlandığı anı gösterir. (6.27) eşitliği de kapasitör için bir terminal eşitliği olup, kapasitör geriliminin bilinmesi durumunda kapasitör akımının belirlenmesine olanak verir.

Kapasitör başlangıç gerilimi ve bobin başlangıç akımı, bu elemanlar üzerinde önceden depolanmış enerjiyi ifade eder. Böyle bir kapasitör veya bobin bir devrede kullanıldığında, üzerlerinde depolanmış enerji devrenin davranışını etkileyeceğinden, her iki elemanın terminal eşitliklerinde de başlangıç akım ve gerilim değerleri ifade edilmelidirler.

Her hangi bir t anında kapasitörde depolanan enerji miktarı için,

$$p(t) = v(t)i(t) = v(t) \cdot C \frac{dv}{dt} \quad (6.28)$$

ile ifade edilen kapasitör gücünü, $-\infty$ ve t aralığında integralleyelim.

$$w(t) = \int_{-\infty}^t p(t) dt = C \int_{-\infty}^t v(t) \frac{dv}{dt} dt = C \int_{-\infty}^t v(t) dv(t) = \frac{1}{2} C v^2(t) \Big|_{-\infty}^t.$$

Başlangıçta her kapasitör yüksüz olacağından, $v(-\infty) = 0$ ve

$$w(t) = \frac{1}{2} C v^2(t) \quad (6.29)$$

bulunur. bulunur. (6.66) eşitliğinden, kapasitör için de şu iki önemli çıkarım yapılabilir:

- Kapasitör gerilimi sabitse kapasitör gerilimi sıfırdır.
- Kapasitör gerilimi zamanın sürekli bir fonksiyonu olup, anlık bir değişim gösteremez.

İlk çıkarımdan, kapasitörün dc kaynaklarla uyarılması durumunda açık devre gibi davranacağı sonucuna ulaşılır. İkinci çıkarım ise, kapasitör geriliminin anlık değişiminin, kapasitör akımında sonsuz bir artış gerektirmesine dayanır ki, bu fiziksel olarak mümkün

değildir. Bu çıkarım, kapasitör geriliminin sürekliliği gibi önemli bir sonuca ulaşmamıza imkan verir. t_0 , bir devrede herhangi bir fiziksel değişikliğin yapıldığı anı, t_0^- ve t_0^+ ile de bu değişikliğin hemen öncesi ve hemen sonrasını gösterelim. Bu durumda,

$$v(t_0^-) = v(t_0) = v(t_0^+) \quad (6.30)$$

olacaktır. Bu eşitlik kapasitör geriliminin sürekliliğini ifade eder ve herhangi bir değişikliğe karşı kapasitörün gerilimini korumaya çalıştığı anlamındadır.

Pratik kapasitör plakaları arasında kullanılan dielektrik malzemenin küçükte olsa bir iletkenliği vardır. Bu nedenle, kapasitör plakaları arasında küçük bir elektrik akımı mevcut olup, bu akım dielektrik malzemenin ısınmasına, başka bir deyişle elektrik enerjisini ısı enerjisine çevirmesine neden olur. Yani kapasitörlerde bir miktar kayıp söz konusudur. Bununla birlikte, kapasitör plakaları arasındaki yalıtkan malzemenin mükemmel yalıtkan bir malzeme olduğu yaklaşımı ile ideal kapasitör tanımlanır. Bu yaklaşımla, kapasitör kayıpsız kabul edilmiş olur ve uygulanan enerjinin tamamını depolar. İyi yalıtkan malzemelerin iletkenlikleri çok küçük olduğundan, bu yaklaşım analizde ihmal edilebilecek bir hataya neden olmakla birlikte analizi çok kolaylaştırır. Aynı düşünceyle, bobinlerin imal edildiği malzemeyi mükemmel iletken kabul ederek ideal bobin yaklaşımı yapılır ki, pratik bobinler gerçekte küçük bir dirence sahip iyi iletken malzemelerden imal edildiklerinden, bir miktar kayıba neden olurlar.

ÖRNEK PROBLEM 6.5:

1 mF'lık bir kapasitörün terminallerine uygulanan gerilim

$$v(t) = 2te^{-2t} \text{ V}$$

ise, kapasitörün terminal akımını ve $t = 2$ saniyede kapasitörde depolanan enerji miktarını bulunuz.

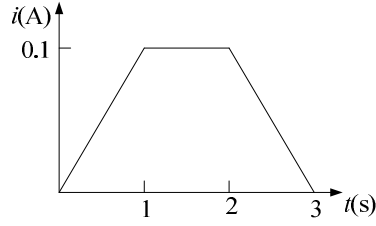
Çözüm:

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} = 2 \times 10^{-3} \frac{d}{dt}(te^{-2t}) = 2e^{-2t}(1-2t) \text{ mA}$$

$$w(3) = \frac{1}{2} C v^2(1) = 0.5 \times 10^{-3} \cdot (2e^{-2}) = 36.63 \text{ } \mu\text{J}.$$

ÖRNEK PROBLEM 6.6:

Başlangıçta yüksüz 2 F'lık kapasitörün terminal akımı Şekil.6.11'de verilmiştir. Kapasitörün terminal geriliminin zamana bağlı ifadesini bulunuz.



Şekil.6.11: Problem 6.6

Verilen akım grafiğinden akımın zamana bağlı ifadesi:

$$i(t) = \begin{cases} 0.1t, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0.1, & 1 \leq t \leq 2 \\ -0.1t + 0.3, & 2 \leq t \leq 3 \end{cases}$$

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(t) dt + v(t_0)$$

$$0 \leq t \leq 1 \text{ için, } v(t) = \frac{1}{2} \int_0^t 0.1t dt + v(0); \quad v(0) = 0 \text{ (kapasitör başlangıçta yüksüz)}$$

$$v(t) = 0.025t^2 \Big|_0^t = 0.025t^2 \text{ V.}$$

$$1 \leq t \leq 2 \text{ için, } v(t) = \frac{1}{2} \int_1^t 0.1 dt + v(1); \quad v(1) = 0.025 \text{ V. (bir önceki ifadeden)}$$

$$v(t) = 0.05t \Big|_1^t + 0.025 = 0.05t - 0.05 + 0.025 = 0.05t - 0.025 \text{ V.}$$

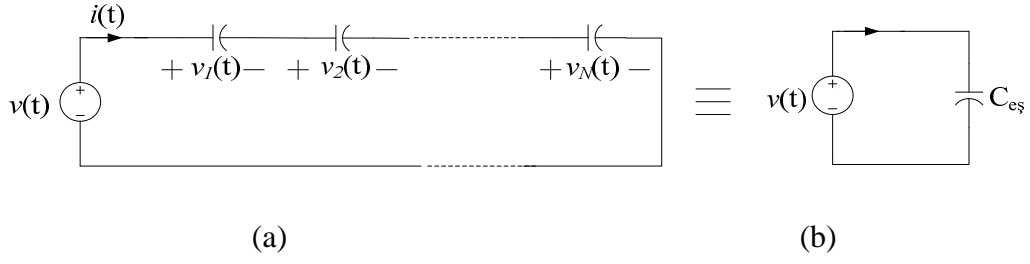
$$2 \leq t \leq 3 \text{ için, } v(t) = \frac{1}{2} \int_2^t (-0.1t + 0.3) dt + v(2); \quad v(2) = 0.075 \text{ V (bir önceki ifadeden)}$$

$$v(t) = (0.15t - 0.025t^2) \Big|_2^t + 0.075 = 0.15t - 0.025t^2 - 0.3 + 0.1 + 0.075$$

$$v(t) = -0.025t^2 + 0.15t - 0.125 \text{ V.}$$

6.3.1. SERİ BAĞLI KAPASİTÖRLERİN EŞDEĞER KAPASİTANSI

Şekil.6.12.a'da görülen, seri bağlı kapasitörlerden oluşmuş devreye KGY'nı uygulayalım:



Şekil.6.12 (a) seri bağlı kapasitörler ve (b) eşdeğeri

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) + \dots + v_N(t) \quad (6.31)$$

$n = 1, 2, 3, \dots, N$ için,

$$v_n(t) = \frac{1}{C_n} \int_{t_0}^t i(t) dt + v_n(t_0) \quad (6.32)$$

ifadesi (6.32) eşitliğinde kullanılırsa,

$$v(t) = \frac{1}{C_1} \int_{t_0}^t i(t) dt + \frac{1}{C_2} \int_{t_0}^t i(t) dt + \dots + \frac{1}{C_N} \int_{t_0}^t i(t) dt + v_1(t_0) + v_2(t_0) + \dots + v_N(t_0)$$

veya

$$v(t) = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_N} \right) \int_{t_0}^t i(t) dt + v(t_0) \quad (6.33)$$

ve Şekil.6.12.b’de görülen eşdeğer devre için ise,

$$v(t) = \frac{1}{C_{eş}} \int_{t_0}^t i(t) dt + v(t_0) \quad (6.34)$$

olduğundan, (6.33) ve (6.34) eşitliklerinin katsayılarının eşit olmalıdır:

$$\frac{1}{C_{eş}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_N} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{C_n}. \quad (6.35)$$

(6.35) eşitliğine göre, seri bağlı kapasitörlerin eşdeğer kapasitansının tersi, kapasitör kapasitanslarının terslerinin toplamına eşittir. (6.34) eşitliğindeki $v(t_0)$, eşdeğer kapasitör için başlangıç gerilimi değeridir.

6.3.2. PARALEL BAĞLI KAPASİTÖRLERİN EŞDEĞER KAPASİTANSI

Şekil.6.13.a’da görülen, paralel bağlı kapasitörlerden oluşmuş devreye KAY’nı uygulayalım:

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) + \dots + i_N(t) \quad (6.36)$$

$n = 1, 2, 3, \dots, N$ için,

$$i_n(t) = C_n \frac{dv(t)}{dt} \quad (6.37)$$

ifadesi (6.36) eşitliğinde kullanılırsa,

$$i(t) = C_1 \frac{dv(t)}{dt} + C_2 \frac{dv(t)}{dt} + \dots + C_N \frac{dv(t)}{dt}$$

ve

$$i(t) = (C_1 + C_2 + \dots + C_N) \frac{dv(t)}{dt} \quad (6.38)$$

elde edilir. Burada

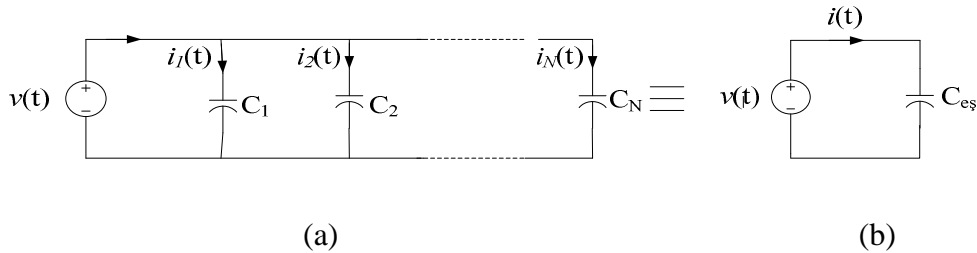
$$C_{eş} = C_1 + C_2 + \dots + C_N$$

kullanılarak

$$i(t) = C_{eş} \frac{dv(t)}{dt} \quad (6.39)$$

bulunur ki, bu Şekil.6.13.b’de görülen eşdeğer devrenin terminal eşitliğidir. O halde paralel bağlı kapasitörlerin eşdeğer kapasitansı, kapasitör kapasitelerinin toplamına eşittir.

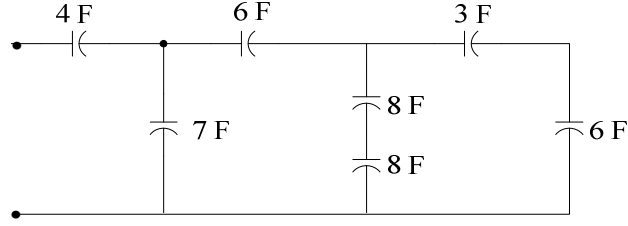
$$C_{eş} = \sum_{n=1}^N C_n = C_1 + C_2 + \dots + C_N. \quad (6.40)$$



Şekil.6.13 (a) paralel bağlı kapasitörler ve (b) eşdeğeri

ÖRNEK PROBLEM 6.7:

Şekil.6.14’de verilen devrenin giriş terminalinden görülen eşdeğer kapasitansı bulunuz.



Şekil.6.14: Problem 6.3

Çözüm:

Kaynağın bağlı olduğu terminalden görülen eşdeğer indüktans

$$3 \text{ F ve } 6 \text{ F'lık kapasitörler seri bağlı} \Rightarrow C_{eş1} = \left(\frac{6 \cdot 3}{6 + 3} \right) = 2 \text{ F,}$$

$$8 \text{ F'lık kapasitörler seri bağlı} \quad C_{eş2} = \left(\frac{8 \cdot 8}{8 + 8} \right) = 4 \text{ F,}$$

$$\text{bu iki kolun paralel eşdeğeri,} \quad C_{eş3} = C_{eş1} + C_{eş2} = 2 + 4 = 6 \text{ F.}$$

$$C_{eş3} \text{ kapasitanslı kapasitör } 6 \text{ F'lık kapasitörle seri bağlı: } C_{eş4} = \frac{C_{eş3} \cdot 6}{C_{eş3} + 6} = \frac{6 \cdot 6}{6 + 6} = 3 \text{ F.}$$

$$C_{eş4} \text{ kapasitanslı kapasitör ve } 7 \text{ F'lık kapasitörler paralel bağlı: } C_{eş5} = C_{eş4} + 7 = 3 + 7 = 10 \text{ F.}$$

$C_{eş5}$ kapasitanslı kapasitör ile 4 F'lık kapasitörler seri bağlı;

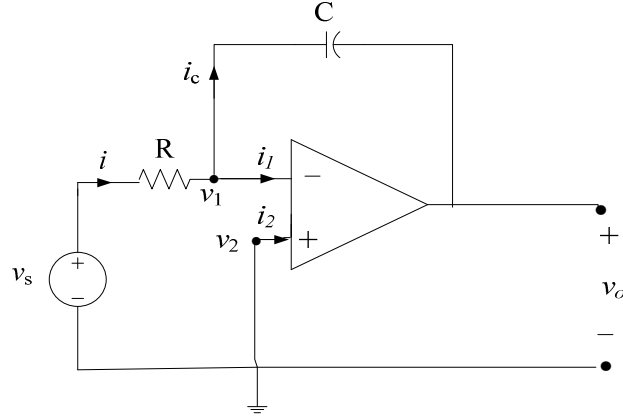
$$C_{eş} = \frac{C_{eş5} \cdot 4}{C_{eş5} + 4} = \frac{10 \cdot 4}{10 + 4} = 2.857 \text{ F.}$$

6.4. İNTEGRALLEYİCİLER VE TÜREVLEYİCİLER

5. bölümde işlemsel yükselticilerin bir giriş sinyalinin integralini ve türevini çıkış sinyali olarak üretme yeteneğine sahip olduğunu belirtmiştik. Bunun için işlemsel yükselticilerin harici devrelerinde dirençlerle birlikte kapasitör ve bobinler kullanılır. Pratik uygulamalarda sıklıkla kullanılan eleman kapasitör olmakla birlikte, burada bobinin de aynı amaçla kullanılabileceğini vurgulamak açısından, kapasitörle birlikte ele alınacaktır. Kapasitörün sık kullanılma nedeni, entegre olarak üretiminin kolay olmasıdır.

6.3.2. İNTEGRALLEYİCİLER

Şekil.6.15'de verilen devrede, bir tersleyen yükseltici devresinin geri besleme direnci kapasitörle değiştirilmiştir. İdeal yükseltici yaklaşımı kullanarak çıkış sinyalini elde edelim:



Şekil.6.15: İntegralleyici

$$i_1 = i_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad i = i_c .$$

Direnç ve kapasitör için terminal eşitlikleri kullanılarak, üzerlerindeki akım terminal gerilimleri cinsinden ifade edilirse,

$$i = \frac{v_s - v_1}{R} \quad (6.41)$$

$$i_c = C \frac{d(v_1 - v_o)}{dt} \quad (6.42)$$

ve

$$\frac{v_s - v_1}{R} = C \frac{d(v_1 - v_o)}{dt} \quad (6.42)$$

elde edilir. Burada kapasitör akımının ifadesinde, kapasitör terminal gerilimi, giriş terminal gerilimi ile çıkış terminal geriliminin farkı olarak $(v_1 - v_o)$ ifade edildiğine dikkat ediniz.

Terslemeyen giriş topraklandığından $v_2 = 0$ ve ideal yükseltici yaklaşımından da

$$v_1 = v_2 = 0$$

olduğundan (6.42) eşitliği

$$\frac{v_s}{R} = -C \frac{dv_o}{dt} \quad (6.43)$$

biçimine indirgenir. (6.43) eşitliğinin her iki tarafı $-dt/C$ ile çarpılıp, $0-t$ aralığında integrallenirse.

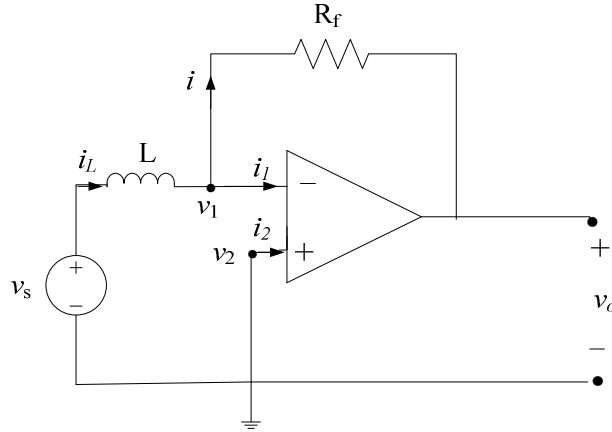
$$\int_0^t dv_o(t) = -\frac{1}{RC} \int_0^t v_s(t) dt \quad (6.44)$$

ve

$$v_o(t) = -\frac{1}{RC} \int_0^t v_s(t) dt \quad (6.45)$$

çıkış sinyalinin ifadesi olarak bulunur. Burada kapasitör başlangıç gerilimi sıfır olmalıdır. Aksi takdirde, çıkış sinyali giriş sinyalinin integrali ile başlangıç geriliminin cebirsel toplamı olacaktır.

Şekil.6.16'da verilen devreyi ele alalım. Yine ideal yükseltici yaklaşımı ile, direnç ve bobin akımlarının eşit olduğu kolayca görülmektedir.



Şekil.6.16: İntegralleyici

Bobin akımı ve direnç akımının ifadeleri terminal gerilimleri cinsinden yazılırsa,

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_0^t (v_s(t) - v_1(t)) dt \quad (6.46)$$

$$i(t) = \frac{v_1 - v_o}{R_f} \quad (6.47)$$

ve $v_1 = v_2 = 0$ olduğundan, $i_L(t) = i(t)$ ile,

$$\frac{-v_o(t)}{R_f} = \frac{1}{L} \int_0^t v_s(t) dt$$

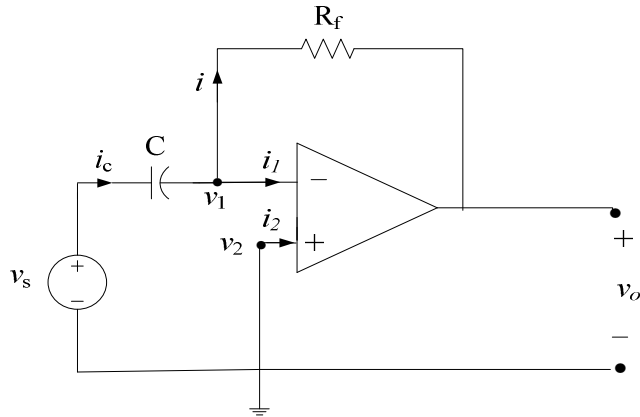
veya

$$v_o(t) = -\frac{R_f}{L} \int_0^t v_s(t) dt \quad (6.48)$$

elde edilir. Görüldüğü gibi, bir katsayı farkı ile, (6.45) eşitliği gibi, yine giriş sinyalinin integrali çıkış sinyali olarak elde edilmektedir.

6.3.2. TÜREVLEYİCİLER

Şekil.6.17’de görülen devreyi yine ideal yükseltici yaklaşımı ile analiz edelim:



Şekil.6.17: Türevleyici

$$v_1 = v_2 = 0, \quad i = i_c;$$

ve

$$i_c = C \frac{dv_s(t)}{dt} \quad (6.49)$$

$$i = -\frac{v_o(t)}{R_f} \quad (6.50)$$

olduğundan,

$$-\frac{v_o(t)}{R_f} = C \frac{dv_s(t)}{dt} \quad (6.51)$$

ve çıkış sinyalinin ifadesi de,

$$v_o(t) = -CR_f \frac{dv_s(t)}{dt} \quad (6.52)$$

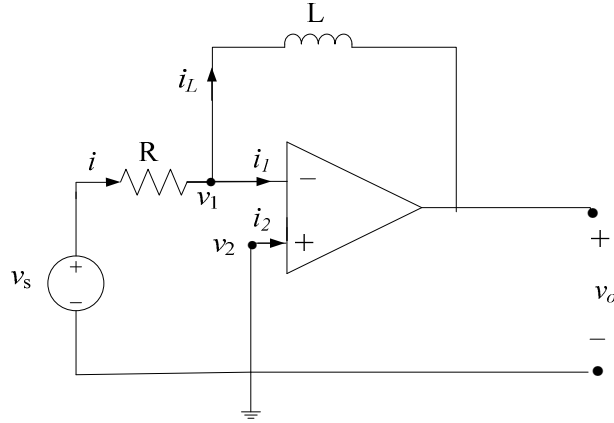
bulunur. (6.52) eşitliğinden anlaşılacağı gibi, çıkış sinyali, giriş sinyalinin türevi ile orantılıdır. Aynı işlev, bobin kullanılarak da sağlanabilir. Şekil.6.18’de verilen devre bobin kullanılarak asarlanmış bir türevleyici devredir. Bu devre içinde ideal yükseltici yaklaşımı ile çıkış sinyalinin ifadesini bulalım:

$$i_L(t) = i(t) \quad \text{ve} \quad v_1 = v_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{v_s(t)}{R} = -\frac{1}{L} \int_0^t v_s(t) dt \quad (6.53)$$

ifadesinin her iki tarafının türevi alınıp her iki taraf $-L$ ile çarpılırsa,

$$v_s(t) = -\frac{L}{R} \frac{dv_s(t)}{dt} \quad (6.54)$$

elde edilir.



Şekil.6.18: Türevleyici

ÖRNEK PROBLEM 6.8:

Şekil.6.15’de verilen devrenin girişine uygulanan sinyal aşağıda verilmiştir. Devrede kullanılan direnç $40 \text{ M}\Omega$ ve kapasitör $1 \text{ }\mu\text{F}$ ise çıkış sinyalini bulunuz.

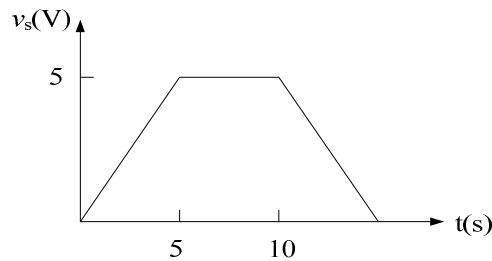
$$v_s(t) = \begin{cases} 10\text{V}, & 0 \leq t \\ 0, & 0 < t \end{cases}$$

Cözüm:

$$v_o(t) = -\frac{1}{RC} \int_0^t v_s(t) dt \quad \Rightarrow \quad v_o(t) = -\frac{1}{(40 \times 10^6)(1 \times 10^{-6})} \int_0^t 10 dt = -0.25t \text{ V.}$$

ÖRNEK PROBLEM 6.9:

Şekil.6.17’de verilen devrenin girişine uygulanan sinyalin zamana göre değişimi Şekil.6.19’da verilmiştir. Devrede kullanılan direnç $1 \text{ M}\Omega$ ve kapasitör $1 \text{ }\mu\text{F}$ ise çıkış sinyalini bulunuz.



Şekil.6.19

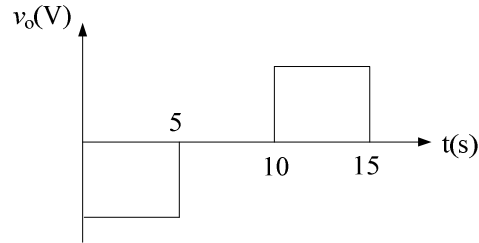
Cözüm:

$$v_o(t) = -CR_f \frac{dv_s(t)}{dt}$$

$$CR_f = (1 \times 10^6)(1 \times 10^{-6}) = 1.$$

Şekil.6.19’da verilen gerilim fonksiyonunun türevi, fonksiyonun eğimine eşit olduğundan,

$$\frac{dv_s(t)}{dt} = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 5 \\ 0, & 5 \leq t \leq 10 \\ -1, & 10 < t \leq 15 \end{cases} \quad \text{ve} \quad v_o(t) = -CR_f \frac{dv_s(t)}{dt} = \begin{cases} -1, & 0 \leq t < 5 \\ 0, & 5 \leq t \leq 10 \\ 1, & 10 < t \leq 15 \end{cases}$$



Şekil.6.20

Çıkış sinyalinin, girişe uygulanan sinyalin türevinin negatifi olduğuna dikkat ediniz.

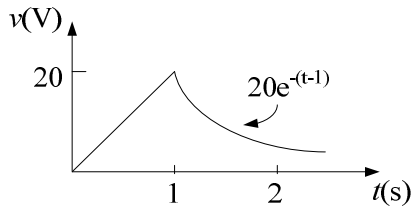
PROBLEMLER

6.1. Kapasitansı $0.2 \mu\text{F}$ olan bir kapasitörün plakalarında biriken yükün zamana bağlı ifadesi

$$q(t) = 10^{-3} \frac{t^3}{3} \text{ C}$$

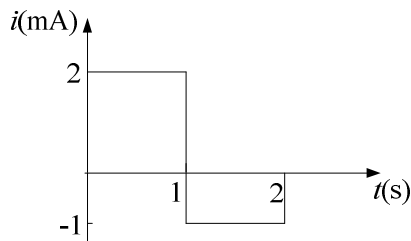
ise kapasitör terminal akımını ve terminal gerilimini bulunuz.

6.2. $5 \mu\text{F}$ ' lık bir kapasitörün terminal geriliminin zamana bağlı değişimi Şekil.6.21'de verilmiştir. Bu kapasitörün terminal akımının zamana göre değişimini bulunuz. Akımı ve kapasitörde depolanan enerjiyi zamanın bir fonksiyonu olarak çiziniz.



Şekil.6.21: Problem 6.2

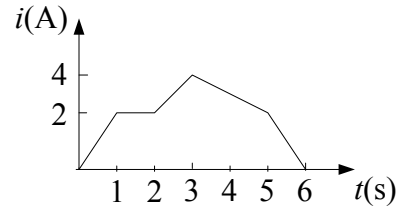
6.3. Başlangıçta yüksüz olan 1 mF ' bir kapasitör üzerindeki akımın zamana göre değişim grafiği Şekil.6.22'de verilmiştir. Kapasitörün terminal gerilimini bulunuz ve zamana göre değişim grafiğini çiziniz.



Şekil.6.22: Problem 6.3

6.4. İndüktansı 2 H olan bir bobinin terminal akımının zamanla değişimi

Şekil.6.23'de verilmiştir. Bobin eminal geriliminin zamana göre değişimini çiziniz.



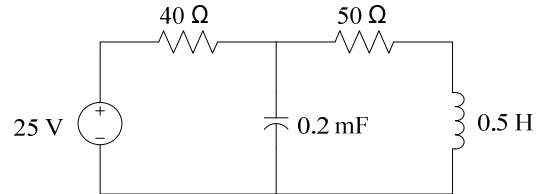
Şekil.6.23: Problem 6.4

6.5. İndüktansı 2 mH olan bir bobinin terminal gerilimi

$$v(t) = \begin{cases} 5 \text{ mV}, & 0 \leq t < 1 \\ e^{-2t} \text{ mV}, & 1 \leq t \end{cases}$$

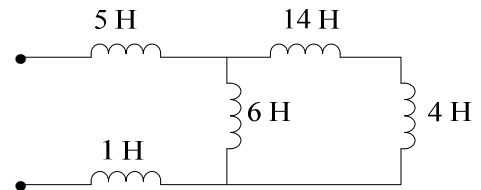
ve başlangıçta bobin üzerinde depolanan enerji sıfır ise, bobin terminal akımını zamanın bir fonksiyonu olarak çiziniz.

6.6. Şekil.6.23'de verilen devre uzun süredir çalışmaktadır. Kapasitör ve bobin üzerinde depolanan enerji miktarlarını bulunuz.



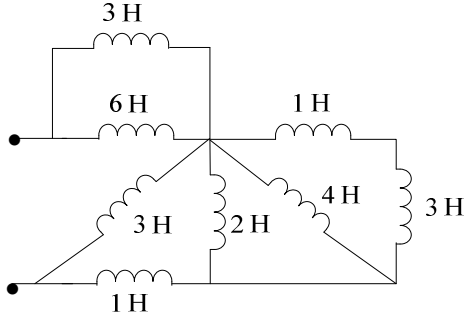
Şekil.6.23: Problem 6.6

6.7. Şekil.6.23'de görülen devrenin giriş terminalinden görülen eşdeğer indüktansı bulunuz.



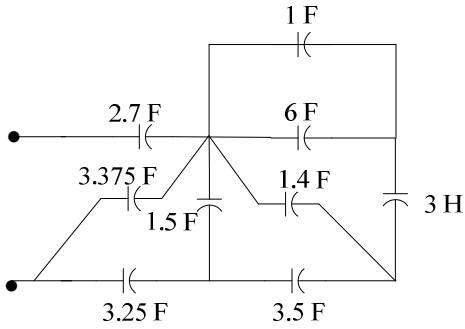
Şekil.6.24: Problem 6.7 devresi

6.8. Şekil.6.25’de verilen devrenin giriş terminalinden görülen eşdeğer indüktansı bulunuz.



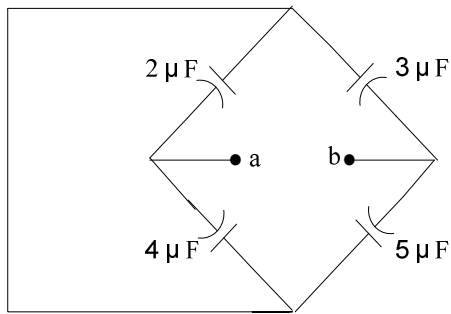
Şekil.6.25: Problem 6.8 devresi

6.9. Şekil.6.26’da görülen devrenin giriş terminallerinden görülen eşdeğer kapasitansı bulunuz



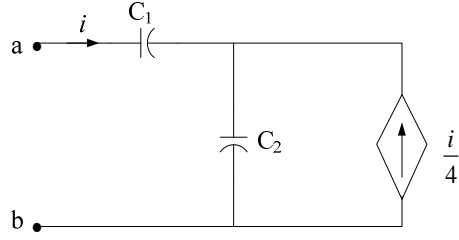
Şekil.6.26: Problem 6.9 devresi

6.10. Şekil.6.27’ de görülen devrenin a-b terminallerinden görülen eşdeğer kapasitansı bulunuz.



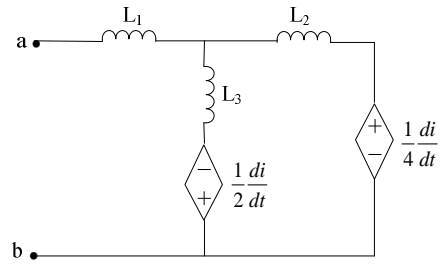
Şekil.6.27: Problem 6.10 devresi

6.11. Şekil.6.28’de verilen devrenin eşdeğer kapasitansı bulunuz.



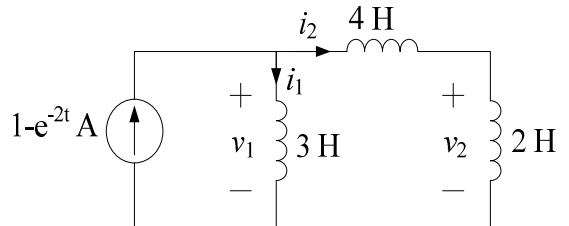
Şekil.6.28: Problem 6.11

6.12. Şekil.6.29’da verilen devrenin eşdeğer indüktansı bulunuz.



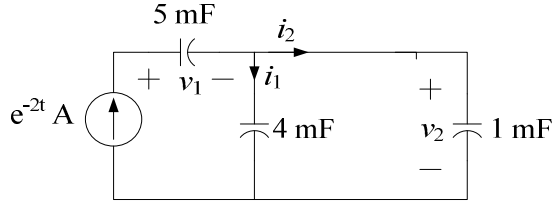
Şekil.6.29: Problem 6.12

6.13. Şekil.6.30’da verilen devrede $i_1(0)=0.5$ A ise, $i_1(t)$, $i_2(t)$, $v_1(t)$ ve $v_2(t)$ akım ve gerilimlerini bulunuz.



Şekil.6.30: Problem 6.13

6.14. Şekil.6.31’deki devrede başlangıç kapasitör gerilimleri sıfırdır. Kapasitör gerilimleri $v_1(t)$ ve $v_2(t)$ ve kapasitör akımları $i_1(t)$, $i_2(t)$ ’ yi bulunuz. Ayrıca Kapasitörlerde depolanan toplam enerji miktarlarını ve kaynağın sağladığı toplam enerjiyi bulunuz.

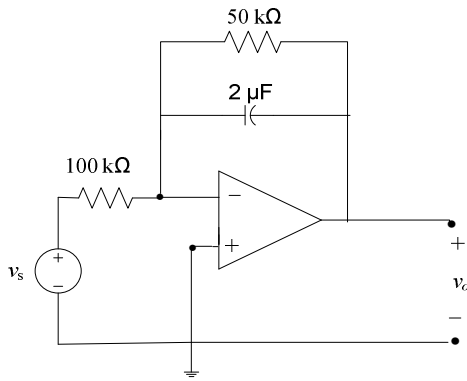


Şekil.6.31: Problem 6.14 devresi

6.15. Şekil.6.32 de verilen devrenin giriş sinyali

$$v_s(t) = \begin{cases} 0.1V & 0 \leq t \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

ise çıkış sinyalini bulunuz. (Kapasitör başlangıçta yüksüzdür.)

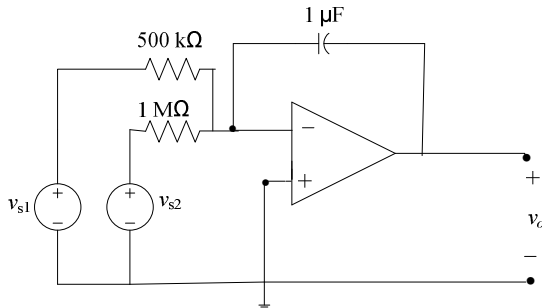


Şekil.6.32: Problem 6.15 devresi

6.16. Şekil.6.33' de verilen devrede

$$v_{s1}(t) = 0.5e^{-0.5t} \text{ V ve } v_{s2}(t) = 0.5t \text{ V}$$

olduğuna göre, çıkış sinyalini bulunuz.

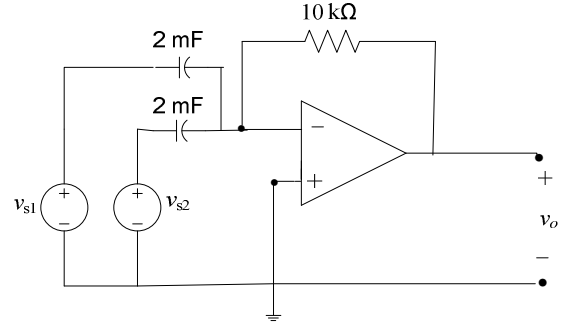


Şekil.6.33: Problem 6.16 devresi

6.17. Şekil.6.34'de verilen devrede

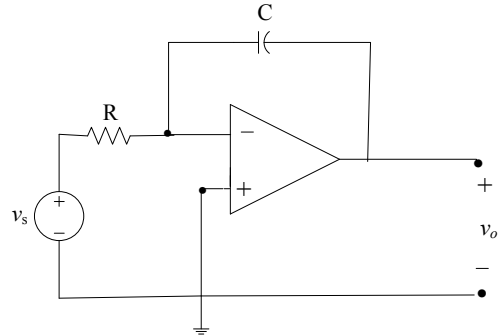
$$v_{s1}(t) = 0.5e^{-0.5t} \text{ V ve } v_{s2}(t) = 0.5t \text{ V}$$

ise, çıkış sinyalini bulunuz.

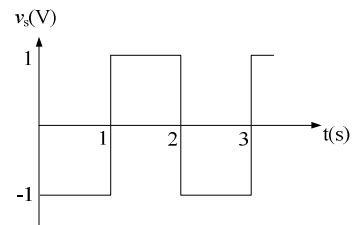


Şekil.6.34: Problem 6.17 devresi

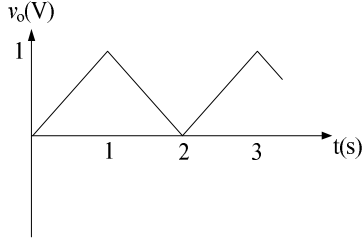
6.18. Şekil.6.35' de verilen yükseltici devresi girişine Şekil.6.36.a'de görülen gerilim uygulanmış ve çıkışında Şekil.6.37.b'de görülen sinyal elde edilmiştir. R ve C değerlerini bulunuz.



Şekil.6.35. Problem 6.18 devresi

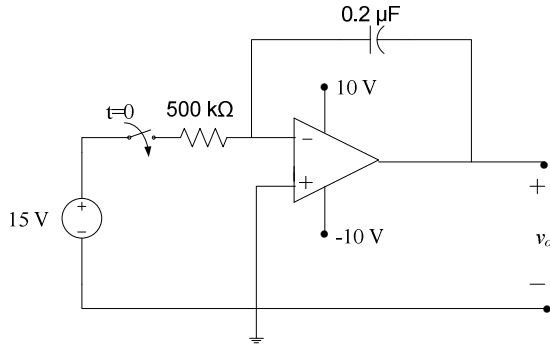


Şekil.6.36.a: Giriş gerilimi



Şekil.6.36.b: Çıkış gerilimi

6.19. Şekil.6.37’de görülen yükseltici devresinde kapasitör başlangıç gerilimi 4 Volt’tur. Anahtar kapatıldıktan sonra işlemsel yükselticinin doyuma ulaşması için geçecek süreyi bulunuz.



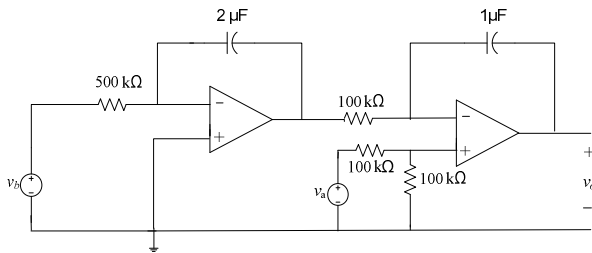
Şekil.6.37: Problem 6.19

6.20. Şekil.6.38’ de verilen devrede

$$v_a(t) = 5 \text{ V}$$

$$v_a(t) = 5 \text{ V}$$

olduğuna göre çıkış terminali gerilimini bulunuz (Kapasitör başlangıç enerjileri sıfırdır).



7.BÖLÜM: BİRİNCİ MERTEBE DEVRELER

7.1. GİRİŞ

Kapasitör ve bobine ilişkin terminal eşitlikleri 6. bölümde ele alınmıştı. Bu eşitlikler kullanılarak, dirençlerin yanı sıra kapasitör veya bobin içeren devrelerin analizlerini de temel analiz metotlarını kullanarak yapmak mümkündür. Ancak bu durumda, devreyi karakterize eden denklem, cebirsel bir denklem değil ama bir diferansiyel denklem olacaktır.

Bir bobin ve direnç ya da dirençler içeren bir devre birinci mertebeden bir diferansiyel denklemle karakterize edilir ve bu nedenle de birinci mertebeden devre olarak adlandırılır. Devre elemanları bir bobin ve direnç veya dirençlerden ibaret olduğundan dolayı da RL devre olarak anılır. Yine bir kapasitör ve direnç içeren devreler de birinci mertebeden diferansiyel denklemlerle ifade edilir ve bu tip devreler de birinci mertebeden devre sınıfındadır. Ancak bu defa bileşenleri kapasitör ve direnç veya dirençler olduğundan, devre RC devre olarak adlandırılır.

Kapasitör ve bobin enerji depolama özelliğine sahip elemanlar olduklarından, bir devreyi uyarmak için kullanılabilirler. Örneğin, üzerinde 5 Volt başlangıç gerilimi bulunan bir kapasitör bir dirence bağlanarak bir devre oluşturulduğunda, kapasitör üzerindeki gerilim nedeniyle direnç üzerinden bir akım geçer ve direnç ısınır. Direncin ısınması, kapasitörün başlangıçta sahip olduğu elektrik enerjisinin ısı enerjisine dönüştüğünü gösterir. Direnç üzerinden akım geçtiği sürece bu enerji dönüşümü devam eder. Bu demektir ki, kapasitörün başlangıçta sahip olduğu enerjinin tamamı ısı enerjisine dönüştüğünde artık direnç üzerinden bir akım geçmez. Zira kapasitör plakalarında artık ayrılmış yükler mevcut değildir. Bu olay deşarj olarak adlandırılır. Açıkça görülmektedir ki, sadece dirençlerden oluşmuş devreleri uyarmak için bir bağımsız kaynağa ihtiyaç duyulurken, devrede üzerinde enerji depolanmış bir kapasitör veya bobin kullanılması durumunda, kaynak kullanılmadan da devre uyarılabilmektedir.

Bir devre, bağımsız kaynak kullanılmadan, sadece enerji depolayan elemanların başlangıç enerjileri ile uyarılıyorsa, devre analizi sonucunda elde edilen devre değişkeni

ifadesine, devrenin doğal cevabı adı verilir. Yukarıda bahsedilen örnekte, devre akımı, devrenin doğal cevabıdır ve açıktır ki doğal cevap zamanla sıfır olacaktır.

Devrede bir dc kaynağın kullanılması durumunda ise, devre değişkenleri bu kaynak tarafından bir değer almaya zorlanacaktır. Enerji depolama elemanları üzerinde başlangıç enerjileri olsun ya da olmasın, devredeki dc kaynak veya kaynaklar tarafından başka bir enerji seviyesine yükleneceklerdir. Bu nedenle, kaynaklarla uyarma ile elde edilen devre değişkeni değerine, zorlama cevap denir.

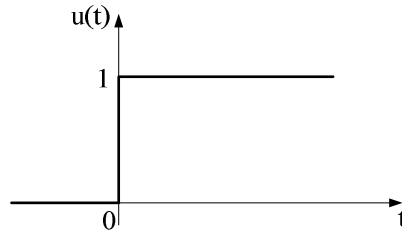
Bir devrede, herhangi bir devre değişkeninin zamana bağlı ifadesini elde edebilmek için, devrenin hangi koşullarda ve ne zaman çalışmaya başladığının bilinmesi gerekmektedir. Bu nedenle, devrelerde bir başlangıç anını ya da bir konum değişimi anını ifade etmek için anahtarlar kullanılır. Bunun yanı sıra, bir dc kaynağın devrede aktif olduğu anı ifade etmek için sıklıkla, *basamak* olarak adlandırılan bir fonksiyon kullanılır. Bu nedenle de, dc kaynaklarla uyarılmış bir devre, başlangıçta bir enerjiye sahip olsun ya da olmasın, cevabı, basamak cevabı olarak adlandırılır. O halde basamak cevabı, hem doğal cevabı hem de zorlama cevabı içerecektir.

7.2. BİRİM BASAMAK FONKSİYONU

Basamak fonksiyonu $u(t)$ ile gösterilir ve matematiksel ifadesi

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (7.1)$$

biçimindedir. Fonksiyon $t = 0$ için tanımsızdır, zira bu noktada Şekil.7.1’de görüldüğü gibi bir süreksizlik içermektedir:



Şekil.7.1: Birim basamak fonksiyonu

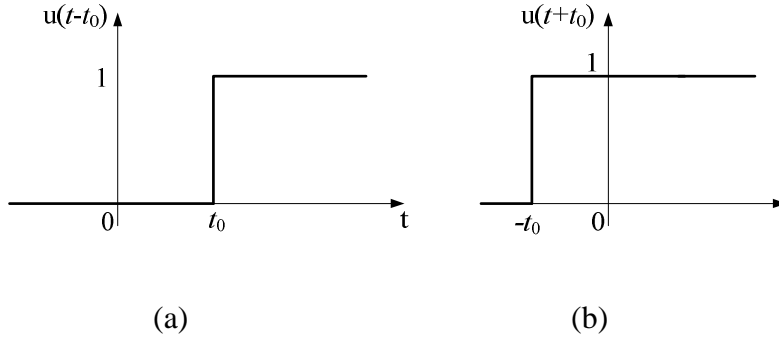
Şayet fonksiyon sıfırdan farklı bir $+t_0$ anında başlıyorsa,

$$u(t - t_0) = \begin{cases} 1, & t > t_0 \\ 0, & t < t_0 \end{cases} \quad (7.2)$$

veya bir $-t_0$ anında başlıyorsa

$$u(t + t_0) = \begin{cases} 1, & t > -t_0 \\ 0, & t < -t_0 \end{cases} \quad (7.3)$$

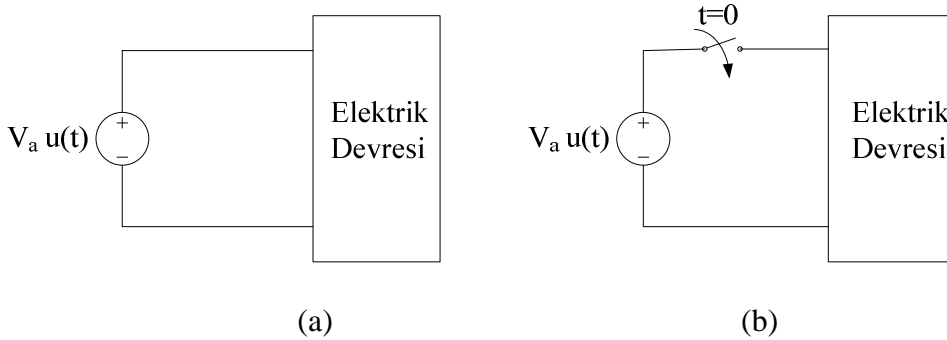
ile ifade edilir. Bu fonksiyonlar Şekil.7.2’de görülmektedir.



Şekil.7.2: Zaman ekseninde kaydırılmış birim basamak fonksiyonları

Yukarıda da açıkça görüleceği gibi, birim basamak fonksiyonu, **argümanını sıfır yapan t değerinde başlamaktadır.** Örneğin, $u(t+t_0)$ fonksiyonunun argümanının sıfır olduğu t değeri için, $t+t_0=0$ ve $t=-t_0$ olur ki, fonksiyon bu andan itibaren birim değere sahiptir.

Birim basamak fonksiyonu kullanılarak, bir akım ya da gerilim kaynağının aktif olduğu bir t anı ifade edilebilir. Şekil.7.3’de görülen iki devreyi ele alalım:



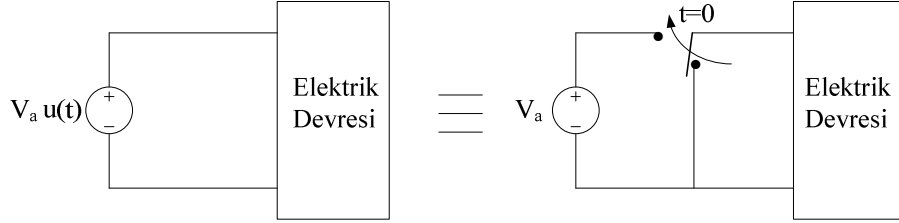
Şekil.7.3: Basamak fonksiyonu ile dc kaynağın ifadesi

Şekil.7.3.b’de görülen devrede, anahtar $t=0$ da kapandığında gerilim kaynağı devreye girecektir. Şekil.7.3.a’da görülen devrede ise basamak fonksiyonu ile ifade edilen tanımlanmış kaynağın gerilimi,

$$V_a u(t) = \begin{cases} V_a, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (7.4)$$

olup, $t=0$ anına kadar devrede bağlı olmasına rağmen bu süre içinde aktif olmadığından devreye enerji sağlamayacaktır. Ancak, $t=0$ anında aktif olacak ve (b) de görülen devredeki gibi aynı gerilimi devreye uygulayacaktır. Yani her iki durumda da $t>0$ için kaynaklar devreye enerji sağlamaktadır. Bununla birlikte, $t<0$ için iki devre farklıdır. (b) devresinde $t<0$ için anahtar açık konumda olduğundan, devreye bağlı değildir. Yani kaynağın devreye

bağlanacağı terminal açık devredir. (a) devresinde ise $t < 0$ içinde kaynak devreye bağlıdır. İdeal akım kaynağının iç direncinin sıfır olmasından dolayı, devreye bağlı olduğu terminal bu süre içinde kısa devre gibi davranacaktır. Şekil.7.4’de basamak fonksiyonu ile ifade edilen gerilim kaynağının, bir anahtar kullanılarak oluşturulan eşdeğeri görülmektedir.

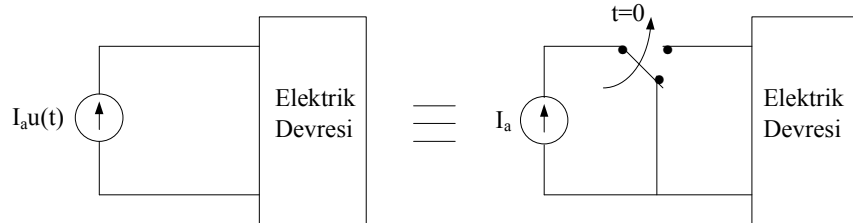


Şekil.7.4: Gerilim kaynağının basamak fonksiyonu ile ifadesi ve eşdeğeri

Basamak fonksiyonu kullanılarak akım kaynağının ifadesi de mümkündür. $t = 0$ anında aktif olan bir dc akım kaynağı $I_a u(t)$ ile gösterilir. Bu davranış, (7.4) eşitliğinde olduğu şekilde,

$$I_a u(t) = \begin{cases} I_a, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (7.5)$$

ile ifade edilir. Gerilim kaynağından farklı olarak ideal akım kaynağının iç direnci sonsuz olduğundan, akım kaynağı aktif olmadığı süre boyunca, bağlı olduğu terminal açık devre gibi davranacaktır. Şekil.7.5’de basamak fonksiyonu ile ifade edilen akım kaynağının, bir anahtar kullanılarak oluşturulan eşdeğeri görülmektedir.



Şekil.7.5: Akım kaynağının basamak fonksiyonu ile ifadesi ve eşdeğeri

Şekil.7.1’de görülen basamak fonksiyonu, Kapasitör ve/veya bobinlerin kullanıldığı bir devrede kaynak fonksiyonu olarak kullanıldığında, devre cevabı bu fonksiyonun türevi veya integrali ile ilintili olabilmektedir. Dc kaynak sabit değerde bir akım veya gerilim değerine sahip olmakla birlikte, birim basamak fonksiyonu ile ifade edildiğinde, herhangi bir t anında, değeri ani bir değişim gösterdiğinden, türevi ve integrali sabit bir değer türevi ve integralinden farklı olacaktır. Birim basamak fonksiyonunun türevi ve integrali özel fonksiyonlar olup, tanımları aşağıda ayrı ayrı verilecektir.

7.2.1. BİRİM BASAMAK FONKSİYONUNUN TÜREVİ: BİRİM DARBE FONKSİYONU

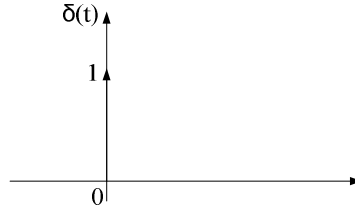
Birim basamak fonksiyonunun türevi,

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt} = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \text{tanımsız}, & t = 0 \\ 0, & t > 0 \end{cases} \quad (7.6)$$

ile tarifli olup, birim darbe fonksiyonu olarak adlandırılır. $t = 0$ civarında çok kısa süreli bir darbe olarak düşünüldüğünde, birim darbe fonksiyonu matematiksel olarak

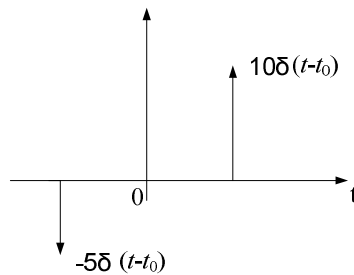
$$\int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt = 1 \quad (7.7)$$

biçiminde ifade edilmektedir. Bu nedenle, sadece $t = 0$ da birim değerde olan ve bunun dışındaki bütün zamanlarda değeri sıfır olan bir fonksiyon olarak tanımlanabilir. Şekil.7.6'da $t = 0$ da vuran bir darbe fonksiyonu görülmektedir.



Şekil.7.6: Birim darbe fonksiyonu

Herhangi bir $t \neq 0$ anında vuran ve değeri birim değerden farklı olan darbe fonksiyonları için Şekil.7.7'de örnekler görülmektedir.



Şekil.7.7: Darbe fonksiyonları

Burada,

$$10\delta(t-t_0) = \begin{cases} 10, & t = t_0 \\ 0, & t \neq t_0 \end{cases}, \quad \text{ve} \quad -5\delta(t+t_0) = \begin{cases} -5, & t = -t_0 \\ 0, & t \neq -t_0 \end{cases} \quad (7.8)$$

ile tanımlıdır.

7.2.2. BİRİM BASAMAK FONKSİYONUNUN İNTEGRALİ: BİRİM RAMPA FONKSİYONU

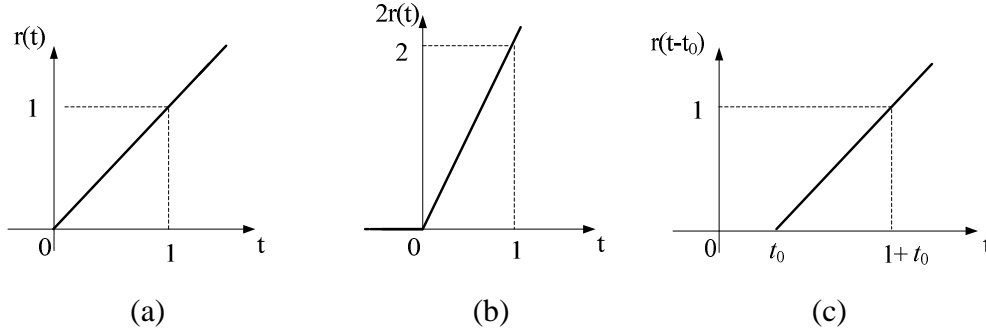
Birim basamak fonksiyonunun integrali,

$$r(t) = \int_{-\infty}^t u(t)dt = tu(t) \quad (7.9)$$

rampa fonksiyonu olarak adlandırılır. Aşağıda görüldüğü gibi $r(t)$ rampa fonksiyonu negatif t değerleri için sıfır iken pozitif t değerleri için eğimi bir olan bir doğruyu ifade etmektedir.

$$r(t) = \begin{cases} t, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (7.10)$$

Şekil.7.8’de $r(t)$ birim rampa fonksiyonu, $2r(t)$ rampa fonksiyonu, $r(t-t_0)$ zaman ekseninde kaydırılmış birim basamak fonksiyonu görülmektedir.



Şekil.7.8: (a) birim rampa fonksiyonu (b) eğimi 2 olan rampa fonksiyonu ve (c) zaman ekseninde pozitif yönde t_0 kadar kaydırılmış birim rampa fonksiyonu.

Burada,

$$2r(t) = \begin{cases} 2t, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}, \quad \text{ve} \quad r(t-t_0) = \begin{cases} t, & t > t_0 \\ 0, & t < t_0 \end{cases}, \quad (7.11)$$

şeklinde matematiksel ifadelerle sahiptirler.

Birim basamak, birim darbe ve birim rampa fonksiyonları arasındaki matematiksel ilişkiler aşağıdaki tabloda özetlenmiştir.

$$u(t) = \frac{dr(t)}{dt}, \quad \delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

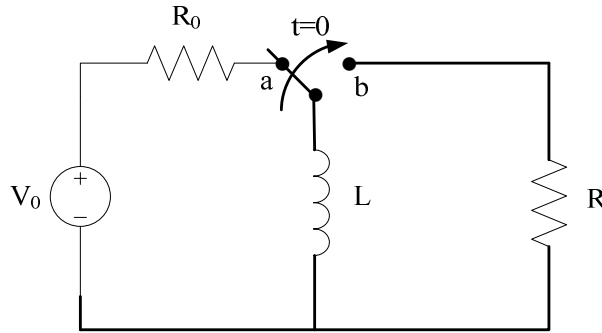
$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(t)dt, \quad r(t) = \int_{-\infty}^t u(t)dt$$

7.3. RL ve RC DEVRELERİN DOĞAL VE BASAMAK CEVAPLARI

Devrede harici bir kaynağın bulunmadığı, ancak enerji depolama elemanları üzerinde bir başlangıç enerjisinin bulunması halinde, devredeki bir akım ya da gerilimin davranışı devrenin doğal cevabı olarak adlandırılır. Bir dc kaynağın, belirli bir anda aktif olması hali basamak fonksiyonları ile ifade edildiğinden, bu durumda yine devredeki bir akım ya da gerilimin davranışı devrenin basamak cevabı olarak adlandırılır. RL ve RC devreler için bu iki cevabı ayrı ayrı inceleyelim.

7.3.1. RL DEVRENİN DOĞAL CEVABI

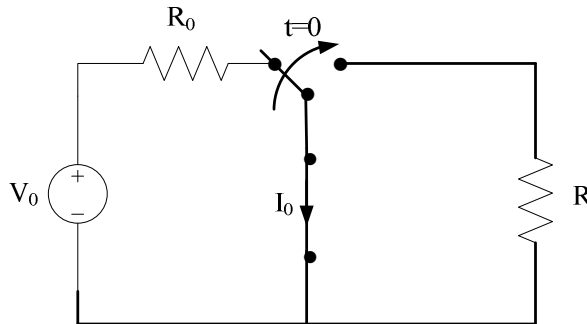
Şekil.7.9'da verilen RL devresinde anahtarın uzun bir süre 'a' konumunda olduğunu düşünelim. Bu durumda bobin uzun bir süre dc kaynağa maruz kaldığından, anahtar konum değiştirmeden hemen önce, $t = 0^-$ anında, kısa devre gibi davranır.



Şekil.7.9: RL devresinde bobine enerjinin depolanması

Daha önce bobinin dc kaynakla uyarıldığında kısa devre gibi davrandığını vurgulamıştık. Gerçekte bobin, üzerindeki akımı sabit tutma yönünde bir karakteristiğe sahiptir. Yani kısa devre davranışını göstermesi için belirli bir sürenin geçmesi gerekir. Bu nedenle, yukarıdaki örnek devrede, bobinin kısa devre davranışını garantilemek için, uzun bir süre dc kaynağa maruz kaldığını düşünmek gerekmektedir.

Buna göre, $t = 0^-$ anında yukarıdaki devrenin eşdeğeri Şekil.7.10'da görülen devre olacaktır.



Şekil.7.10: $t = 0^-$ anında kısa devre olmuş bobin

Bobin akımının $t = 0^-$ anındaki değeri,

$$i_L(0^-) = I_0 = \frac{V_0}{R_0} \quad (7.12)$$

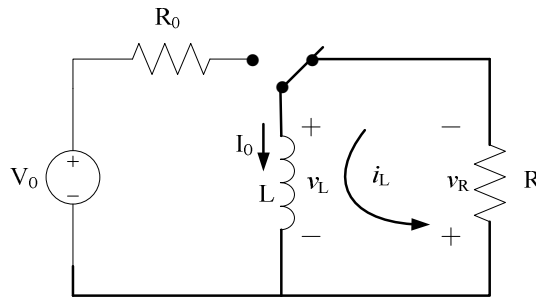
olacaktır. $t = 0$ 'da anahtar 'b' konumuna geldiğinde, kaynak devre dışı kalacak ve bobin, üzerindeki akımı sabit tutma yönünde bir davranış gösterecektir. Başka bir deyişle, bobin akımı ani olarak değişmeyecek, ancak zamanın sürekli bir fonksiyonu olarak değişecektir. Bu durum bobin akımının süreklilik koşulu olarak adlandırılır ve

$$i_L(0^-) = i_L(0) = i_L(0^+) \quad (7.13)$$

olarak ifade edilir. $t = 0$ anında bobin üzerinde depolanan enerji,

$$w_L(0) = \frac{1}{2} L i_L^2(0) = \frac{1}{2} L I_0^2 \text{ J.} \quad (7.14)$$

dur. Devrenin $t \geq 0$ 'deki eşdeğeri Şekil.7.11'de görülmektedir.



Şekil.7.11: $t \geq 0$ için eşdeğer devre

$t \geq 0$ için bobin üzerinde depolanan enerjiden dolayı, devrede bir i_L akımı akacaktır. Şekil.7.11'deki eşdeğer devreye dikkat edilirse, bobin artık kısa devre gibi davranmamaktadır. Devrede meydana gelen bir değişim sonucu, bobin akımı yeni kararlı değerine ulaşana kadar bobin kısa devre davranmaz, ancak akım kararlı bir değere ulaşırsa, o anda tekrar kısa devre gibi davranacaktır.

KGY uygulanırsa,

$$v_L(t) + v_R(t) = 0 \quad (7.15)$$

ve devre akımı i_L cinsinden

$$L \frac{di_L(t)}{dt} + R i_L(t) = 0 \quad (7.16)$$

eşitliği elde edilir. (7.16) eşitliği düzenlenirse,

$$\frac{di_L(t)}{i_L(t)} = -\frac{R}{L} dt \quad (7.17)$$

ve her her iki tarafın integrali alınarak

$$\int_0^t \frac{di_L(t)}{i_L(t)} = -\frac{R}{L} \int_0^t dt \Rightarrow \ln i_L(t) \Big|_0^t = -\frac{R}{L} t ; \quad \ln i_L(t) - \ln i_L(0) = -\frac{R}{L} t$$

bulunur ki, burada $i_L(0) = I_0$ ifadesi ve logaritma fonksiyonunun özellikleri kullanılarak,

$$\ln \left(\frac{i_L(t)}{I_0} \right) = -\frac{R}{L} t \quad (7.18)$$

veya

$$i_L(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L} t} \quad (7.19)$$

elde edilir. Bu ifadeden açıkça görülebileceği gibi, bobin üzerindeki başlangıç akımı, direnç değeri ve bobin indüktansına bağlı olarak eksponensiyel olarak azalmakta ve $t \rightarrow \infty$ için sıfır olmaktadır. (7.19) eşitliği

$$i_L(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (7.20)$$

şeklinde yazıldığında RL devrelerin önemli bir parametresinin ifadesi elde edilir:

$$\tau = \frac{L}{R} \text{ (s).} \quad (7.21)$$

τ devrenin *zaman sabiti* olarak adlandırılır. (7.20) eşitliğinde $t = \tau$ yazılırsa,

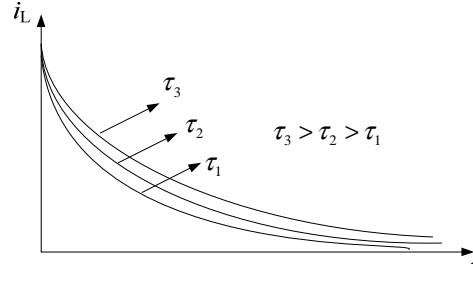
$$i_L(t) = I_0 e^{-1} = \frac{I_0}{e} = 0.368 I_0 \quad (7.22)$$

elde edilir. Buna göre τ , bobin akımının başlangıç değerinin 1/e veya 0.368 katı değerine düşmesi için gerekli zaman olarak tanımlanır. Bobin akımının azalma hızını tayin eden faktör zaman sabitidir. Yine (7.20) eşitliğinden, bobin akımının $t = \infty$ da sıfır olacağı anlaşılmaktadır. $t = 5\tau$ da bobin akımı, başlangıç değerinin yüzde birinden daha küçük bir değere düşer ve pratik olarak bu andaki değeri sıfır kabul edilir. Şekil.7.12’de değişik τ değerleri için bobin akımının zamana bağlı değişimi görülmektedir.

Bobin üzerinde başlangıçta depolanmış enerjinin, direnç üzerinden geçen devre akımı sonucunda dirençte harcandığını gösterilebilir. Direncin gücü,

$$p_R(t) = i_L^2(t) \cdot R \quad (7.23)$$

ve harcanan enerji,

Şekil.7.12: Bobin akımının değişik τ değerleri için değişim eğrileri

$$w_R(t) = \int_0^t p_R(t) dt = R \int_0^t I_0^2 e^{-\frac{2t}{\tau}} dt = -RI_0^2 \frac{\tau}{2} e^{-\frac{2t}{\tau}} \Big|_0^t = RI_0^2 \frac{\tau}{2} \quad (7.24)$$

ve $\tau = L/R$ olduğundan

$$w_R(t) = \frac{1}{2} LI_0^2 \left(1 - e^{-\frac{2t}{\tau}} \right) \quad (7.25)$$

bulunur. Bu eşitlik direnç üzerinde harcanan enerjinin zamana bağlı ifadesi olup, $t = \infty$ için, devre akımı sıfır oluncaya kadar harcanan enerji değerini verecektir:

$$w_R(\infty) = \frac{1}{2} LI_0^2 \left(1 - e^{-\frac{2t}{\tau}} \right) \Big|_{t=\infty} = \frac{1}{2} LI_0^2 \text{ J.} \quad (7.26)$$

(7.26) ile (7.14) eşitlikleri karşılaştırılırsa, bobin üzerinde başlangıçta depolanan enerjinin tamamının direnç üzerinde harcandığı görülür:

$$w_L(0) = w_R(\infty) \quad (7.27)$$

RL devrelerin analizinde, bobin akımının süreklilik özelliğinden dolayı, öncelikle bobin akımının ifadesi bulunmalıdır. Şayet isteniyorsa, diğer devre değişkenleri bilinen bobin akımı ifadesini ve Kirchhoff yasalarını kullanarak bulunabilir.

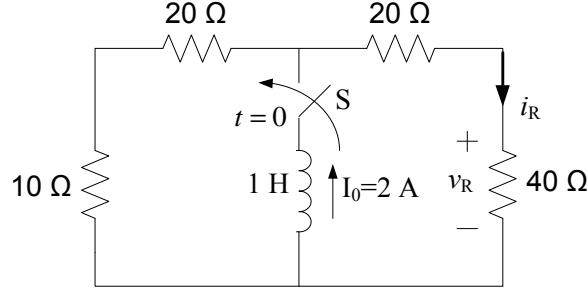
(7.20) eşitliğinden bobin akımının zamana bağlı ifadesi için bobin başlangıç akım değerini ve devrenin zaman sabitini bulmanın yeterli olduğu görülmektedir. Şayet devrede birden fazla direnç veya dirençler ve bağımlı kaynaklar varsa, bu durumda

$$\tau = \frac{L}{R_{eş}} \quad (7.28)$$

ile ifade edilir ki, burada $R_{eş}$, bobinin bağlı olduğu terminallerden görülen eşdeğer dirençtir. Verilen devreye ilişkin zaman sabiti ve eşdeğer direnç bulunduktan sonra, bobin akımının zamana bağlı ifadesi (7.20) eşitliği ile elde edilir.

ÖRNEK PROBLEM 7.1:

Başlangıç akımı 2 A. olan 1 H'lik bobin S anahtarı kullanılarak $t = 0$ 'da Şekil.7.13'de görülen devreye bağlanmaktadır. Bobin terminallerindeki gerilimin zamana bağlı ifadesini bulunuz. 40Ω 'luk direnç üzerindeki akım ve gerilimin ifadesini bulunuz.



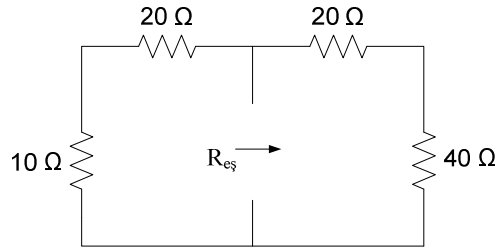
.Şekil.7.13: Problem 7.1 devresi

Cözüm: Bobin akımının süreklilik koşulundan,

$$i_L(0^-) = i_L(0) = i_L(0^+) = 2 \text{ A.}$$

$$t \geq 0 \text{ için devrenin zaman sabiti } \tau = \frac{L}{R_{eş}}$$

burada $R_{eş}$, bobinin bağlı olduğu terminallerden görülen eşdeğer direnç olup aşağıdaki devreden bulunur.



$$R_{eş} = (10 + 20) // (20 + 40) = 30 // 60 = 20 \Omega. \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{L}{R_{eş}} = \frac{1}{20} \text{ s.}$$

$$i_L(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} = 2e^{-20t} \text{ A., } t \geq 0.$$

Bobin terminal gerilimi, bobin terminal eşitliğinden

$$v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} = -40e^{-20t} \text{ V., } t > 0.$$

Bobin üzerindeki gerilim $t > 0$ için paralel bağlı kollar üzerindeki gerilimlere eşit olduğundan

$$i_R = \frac{v_L(t)}{40 + 20} = -\frac{2}{3} e^{-20t} \text{ A.}, t > 0$$

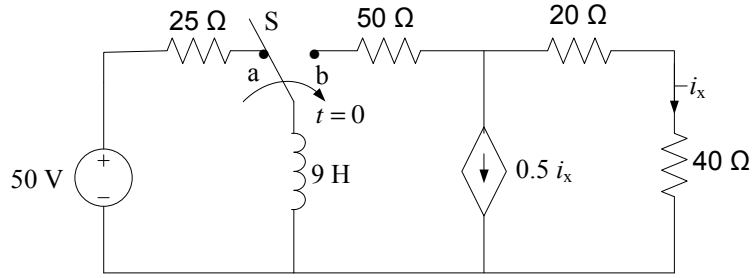
ve

$$v_R = 40 \cdot i_{40\Omega} = -\frac{80}{3} e^{-20t} \text{ V.}, t > 0.$$

bulunur.

ÖRNEK PROBLEM 7.2:

Şekil.7.14’de verilen devrede S anahtarı uzun süredir ‘a’ konumundadır. $t = 0$ anında anahtar ‘b’ konumuna geçtiğine göre, $t \geq 0$ için bobin akımının zamana bağlı ifadesini ve $t > 0$ için bobin terminal gerilimini bulunuz.



Şekil.7.14: Problem 7.2 devresi

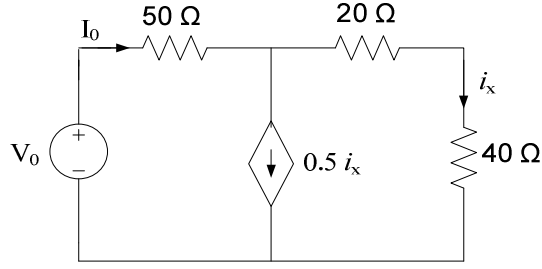
Cözüm: S anahtarının uzun süre ‘a’ konumunda olması, bobinin dc kaynağa $t_0 = 0^-$ anına kadar, yani anahtar konum değiştirmeden hemen öncesine kadar maruz kalması ve $t_0 = 0^-$ ’da kısa devre gibi davrandığını ifade etmektedir. Bu anda bobin akımı,

$$i(0^-) = \frac{50}{25} = 2 \text{ A.}$$

dir. Bobin akımının süreklilik koşulu, anahtar konum değiştirdikten hemen sonrasında, yani $t = 0^+$ anında bobin akımının değerinin korunduğunu gösterir:

$$i_L(0^-) = i_L(0) = i_L(0^+) = 2 \text{ A.}$$

Anahtar konum değiştirdikten sonra bobin artık kısa devre gibi davranmayacaktır. $t \geq 0$ için, bobinin bağlı olduğu terminalden görülen eşdeğer direnç, devrede bağımlı kaynak bulunmasından dolayı, bu terminale Şekil.7.15’de görüldüğü gibi bir test kaynağı bağlayarak bulunmalıdır.



Şekil.7.15: Eşdeğer direncin hesaplanması için test kaynağı bağlanması

KAY uygulanarak;

$$I_0 = 0.5i_x + i_x = 1.5i_x \Rightarrow i_x = \frac{2}{3}I_0.$$

En dış çevrimde KGY uygulanarak da;

$$V_0 = 50I_0 + 60i_x \quad \text{ve} \quad V_0 = 50I_0 + 60\left(\frac{2}{3}I_0\right) \Rightarrow R_{eş} = \frac{V_0}{I_0} = 90 \, \Omega$$

bulunur. Devreye ilişkin zaman sabiti,

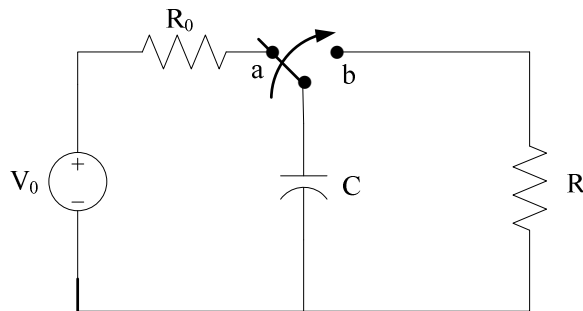
$$\tau = \frac{L}{R_{eş}} = \frac{9}{90} = \frac{1}{10} \, \text{s},$$

Bobin akımının ifadesi de

$$i_L(t) = i_L(0)e^{-\frac{t}{\tau}} = 2e^{-10t} \, \text{A. elde edilir.}$$

7.3.2. RC DEVRENİN DOĞAL CEVABI

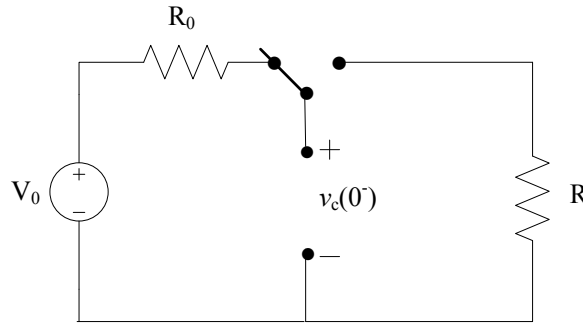
Şekil.7.16'da verilen RC devresinde anahtarın uzun bir süre 'a' konumunda olduğunu düşünelim. Bu durumda kapasitör uzun bir süre dc kaynağa maruz kaldığından, anahtar konum değiştirmeden hemen önce, $t = 0^-$ anında, açık devre gibi davranır.



Şekil.7.16: RC devresinde kapasitöre enerjinin depolanması

Kapasitör dc kaynakla uyarıldığında açık devre gibi davrandığını vurgulamıştık. Gerçekte kapasitörün açık devre davranması için kapasitör plakalarında toplanan yüklerin plakalar arasında oluşturduğu potansiyel fark, kapasitörün bağlı olduğu paralel koldaki potansiyele eşit olmalıdır. Plakalarda bu potansiyel farkın oluşması için, devrede kullanılan elaman değerlerine bağlı olarak belirli bir sürenin geçmesi gerekir. Yani açık devre davranışını göstermesi için belirli bir sürenin geçmesi gerekir. Bu nedenle, yukarıdaki örnek devrede, kapasitörün açık devre davranışını garantilemek için, uzun bir süre dc kaynağa maruz kaldığını düşünmek gerekmektedir.

Buna göre, $t = 0^-$ anında yukarıdaki devrenin eşdeğeri Şekil.7.10'da görülen devre olacaktır.



Şekil.7.17: $t = 0^-$ anında açık devre olmuş kapasitör

Kapasitör geriliminin $t = 0^-$ anındaki değeri,

$$v_c(0^-) = V_0 \quad (7.29)$$

olacaktır. $t = 0$ 'da anahtar 'b' konumuna geldiğinde, kaynak devre dışı kalacak ve kapasitör, üzerindeki gerilimi sabit tutma yönünde bir davranış gösterecektir. Başka bir deyişle, Kapasitör gerilimi ani olarak değişmeyecek, ancak zamanın sürekli bir fonksiyonu olarak değişecektir. Bu durum kapasitör geriliminin süreklilik koşulu olarak adlandırılır ve

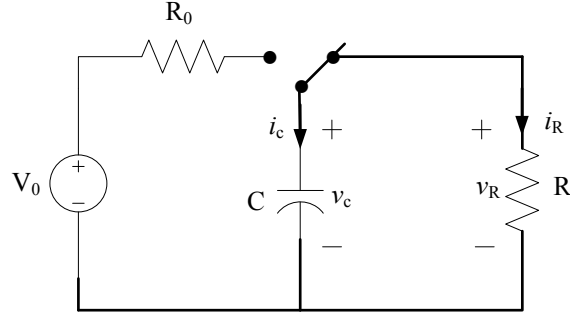
$$v_c(0^-) = v_c(0) = v_c(0^+) \quad (7.30)$$

olarak ifade edilir. $t = 0$ anında kapasitörde depolanan enerji,

$$w_c(0) = \frac{1}{2} C v_c^2(0) = \frac{1}{2} C V_0^2 \text{ J.} \quad (7.31)$$

dur. Devrenin $t \geq 0$ 'deki eşdeğeri Şekil.7.18'de görülmektedir.

$t \geq 0$ için kapasitör üzerinde depolanan enerjiden dolayı, devrede bir akım akacaktır. Şekil.7.18'deki eşdeğer devrede de görüldüğü gibi, kapasitör artık açık devre gibi davranmamaktadır. Devrede meydana gelen bir değişim sonucu, kapasitör gerilimi yeni kararlı değerine ulaşana kadar kapasitör açık devre davranmaz, ancak gerilim kararlı bir değere ulaşırsa, o anda tekrar açık devre gibi davranacaktır.

Şekil.7.18: $t \geq 0$ için eşdeğer devre

Şekil.7.18'deki devrede KAY uygulanırsa,

$$i_c(t) + i_R(t) = 0 \quad (7.32)$$

KGY ile

$$v_c(t) = v_R(t) \quad (7.33)$$

ve elemanlar üzerindeki gerilimler cinsinden,

$$C \frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{v_R(t)}{R} = 0; \quad \Rightarrow \quad C \frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{v_c(t)}{R} = 0 \quad (7.34)$$

eşitliği elde edilir. (7.34) eşitliği düzenlenirse,

$$\frac{dv_c(t)}{v_c(t)} = -\frac{1}{RC} dt \quad (7.35)$$

ve her her iki tarafın integrali alınarak

$$\int_0^t \frac{dv_c(t)}{v_c(t)} = -\frac{1}{RC} \int_0^t dt \quad \Rightarrow \quad \ln v_c(t) \Big|_0^t = -\frac{1}{RC} t; \quad \ln v_c(t) - \ln v_c(0) = -\frac{1}{RC} t$$

bulunur ki, burada $v_c(0) = V_0$ ifadesi ve logaritma fonksiyonunun özellikleri kullanılarak,

$$\ln \left(\frac{v_c(t)}{V_0} \right) = -\frac{1}{RC} t \quad (7.36)$$

veya

$$v_c(t) = V_0 e^{-\frac{1}{RC} t} \quad (7.37)$$

elde edilir. (7.37) eşitliğinden görülebileceği gibi, kapasitör üzerindeki başlangıç gerilimi, direnç değeri ve kapasitansa bağlı olarak eksponensiyel olarak azalmakta ve $t \rightarrow \infty$ için sıfır olmaktadır. (7.37) eşitliği

$$v_c(t) = V_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (7.38)$$

şeklinde yazıldığında RC devrelerin önemli bir parametresinin ifadesi elde edilir:

$$\tau = RC \text{ (s).} \quad (7.39)$$

RL devrelerine olduğu gibi, τ devrenin *zaman sabiti* olarak adlandırılır. Ancak RC devreler için τ , kapasitör geriliminin, başlangıç değerinin 1/e veya 0.368 katı değerine düşmesi için gerekli zaman olarak tanımlanır. Kapasitör geriliminin azalma hızını tayin eden faktör zaman sabitidir. (7.38) eşitliğine dikkat edilirse, kapasitör geriliminin ancak $t = \infty$ da sıfır olacağı anlaşılmaktadır. Bununla beraber, $t = 5\tau$ da kapasitör gerilimi, başlangıç değerinin yüzde birinden daha küçük bir değere düşer ve pratik olarak bu andaki değeri sıfır kabul edilir.

RL devrede bobin üzerinde depolanan başlangıç enerjisinin, direnç üzerinde harcandığını göstermiştik. RC devrelerde de kapasitör üzerinde depolanan başlangıç enerjisinin, yine direnç üzerinde harcandığı benzer şekilde gösterilebilir. Kapasitör gerilimi, direnç üzerindeki gerilime eşit olduğundan, direnç üzerindeki akım,

$$i_R(t) = \frac{v_c(t)}{R} = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (7.40)$$

ve direncin gücü,

$$p(t) = Ri_R^2(t) = \frac{V_0^2}{R} e^{-\frac{2t}{\tau}} \quad (7.41)$$

olacaktır. Her hangi bir t anında direncin harcadığı enerji ise,

$$w_R(t) = \int_0^t p_R(t) dt = \frac{V_0^2}{R} \int_0^t e^{-\frac{2t}{\tau}} dt = -\frac{V_0^2}{R} \frac{\tau}{2} e^{-\frac{2t}{\tau}} \Big|_0^t = \frac{\tau}{2} \frac{V_0^2}{R} \left(1 - e^{-\frac{2t}{\tau}}\right) \quad (7.42)$$

ve $\tau = RC$ kullanılarak,

$$w_R(t) = \frac{1}{2} CV_0^2 \left(1 - e^{-\frac{2t}{\tau}}\right) \quad (7.43)$$

bulunur. $t \rightarrow \infty$ için direncin harcadığı enerji

$$w_R(\infty) = \frac{1}{2} CV_0^2 \text{ J.} \quad (7.44)$$

olur ki bu, (7.31) eşitliği ile verilen kapasitör başlangıç enerjisidir.

$$w_c(0) = w_R(\infty) .(7.45)$$

RC devrelerin analizinde, kapasitör geriliminin süreklilik özelliğinden dolayı, öncelikle kapasitör geriliminin ifadesi bulunmalıdır. Şayet isteniyorsa, diğer devre değişkenleri bilinen kapasitör gerilimi ifadesini ve Kirchhoff yasalarını kullanarak bulunabilir.

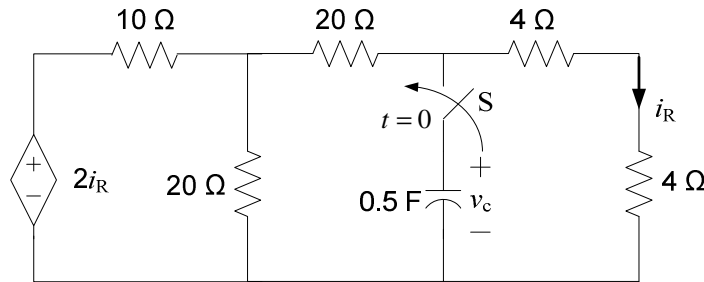
(7.38) eşitliğinden kapasitör geriliminin zamana bağlı ifadesi için kapasitör geriliminin başlangıç değerini ve devrenin zaman sabitini bulmanın yeterli olduğu görülmektedir. Şayet devrede birden fazla direnç veya dirençler ve bağımlı kaynaklar varsa, bu durumda

$$\tau = \frac{L}{R_{eş}} \quad (7.46)$$

ile ifade edilir ki, burada $R_{eş}$, bobinin bağlı olduğu terminallerden görülen eşdeğer dirençtir. Verilen devreye ilişkin zaman sabiti ve eşdeğer direnç bulunduktan sonra, bobin akımının zamana bağlı ifadesi (7.38) eşitliği ile elde edilir.

ÖRNEK PROBLEM 7.3:

Başlangıç gerilimi 5 V. olan 0.5 F'lık kapasitör S anahtarı kullanılarak $t = 0$ 'da Şekil.7.19'da görülen devreye bağlanmaktadır. $t \geq 0$ için kapasitör terminallerindeki gerilimin zamana bağlı ifadesini bulunuz. 4 Ω 'luk direnç üzerinden geçen akımın ifadesini $t > 0$ için bulunuz.



.Şekil.7.19: Problem 7.3 devresi

Çözüm: Kapasitör başlangıç gerilimi

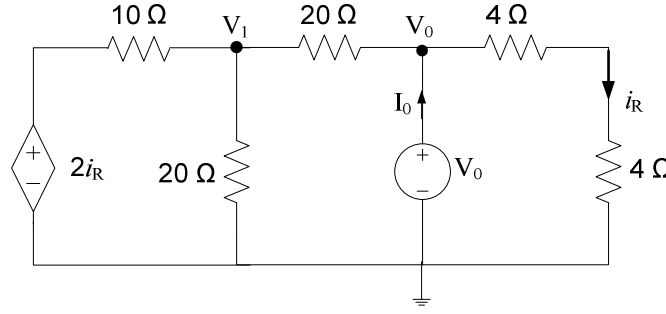
$$v_c(0^-) = v_c(0) = v_c(0^+) = 5 \text{ V.}$$

$$t \geq 0 \text{ için devrenin zaman sabiti } \tau = R_{eş} C$$

burada $R_{eş}$, kapasitörün bağlı olduğu terminallerden görülen eşdeğer dirençtir. Verilen devre bağımlı kaynak içerdiğinden, eşdeğer direnci, kapasitörün bağlı olduğu terminallere bir test kaynağı bağlayarak bulmak gerekir. Şekil.7.20'de görüldüğü gibi V_0 değerli gerilim kaynağı test kaynağı olarak kullanıldığında eşdeğer direnç

$$R_{eş} = \frac{V_0}{I_0}$$

olacaktır.



Şekil.7.20: Eşdeğer direncin hesabı için test kaynağı bağlantısı

Düğüm noktası potansiyelleri metodu kullanılarak

$$\frac{V_1 - 2i_R}{10} + \frac{V_1}{20} + \frac{V_1 - V_0}{20} = 0: \quad i_R = \frac{V_0}{8} \Rightarrow \quad V_1 = \frac{3}{8}V_0$$

$$\frac{V_0 - V_1}{20} + \frac{V_0}{8} = I_0 \Rightarrow \quad 7V_0 - 2V_1 = 40I_0$$

$$7V_0 - 2\left(\frac{3}{8}V_0\right) = 40I_0 \Rightarrow \quad R_{es} = \frac{V_0}{I_0} = 6.4 \, \Omega.$$

$$\tau = R_{es}C = (6.4)(0.25) = 1.6 \, \text{s.} \quad \text{ve} \quad v_c(t) = 5e^{-\frac{t}{1.6}} = 5e^{-0.625t} \, \text{V.}, \quad t \geq 0.$$

Kapazitöre paralel bağlı kol direnci 8 Ω olup, 4 Ω'luk direnç bu kol üzerinde bulunduğundan,

$$i_{4\Omega} = \frac{v_c(t)}{8} = 0.625e^{-0.625t} \, \text{A.}, \quad t > 0.$$

Kapazitör geriliminin $t=0$ 'da sürekli olmasından dolayı kapasitör geriliminin ifadesi $t \geq 0$ için geçerli iken, direnç üzerinden geçen akım gibi, diğer hiçbir devre değişkeni sürekli olmadığından, ifadelerinin $t > 0$ için geçerli olacağına dikkat ediniz.

(7.20) ve (7.38) eşitlikleri, bobin akımı ve kapasitör geriliminin zamana bağlı ifadelerini veren eşitliklerdir. RL ve RC devrelerin doğal cevapları herhangi bir devre değişkeni için gerçekte

$$x(t) = x(t_0^+)e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (7.47)$$

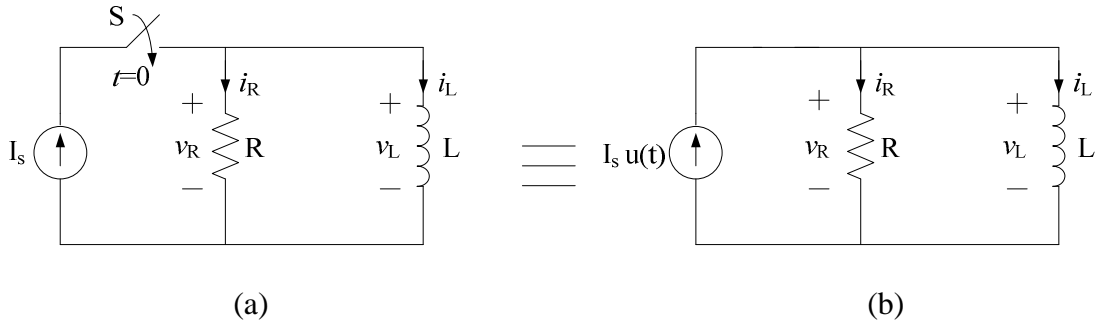
ile ifade edilir. Aranılan devre değişkeni kapasitör gerilimi veya bobin akımı olduğunda, bu değişkenler sürekli olduğundan, başlangıç değerleri t_0 da ifade edilebilir. Bunların dışında başka bir devre değişkeni için (7.47) eşitliği kullanılmalıdır. Bununla birlikte, diğer değişkenler sürekli olmadıklarından, t_0^+ 'daki değerleri ayrıca bulunmalıdır. Bu değerlerin

bulunması kapasitör gerilimi ve bobin akımına göre daha karmaşık olabileceğinden, öncelikle bobin akımı veya kapasitör geriliminin ifadesinin bulunması her zaman kolaylık sağlar.

7.3.3. RL DEVRENİN BASAMAK CEVABI

RL devreye bir t_0 anında uygulanan dc kaynağı, basamak fonksiyonları ile ifade etmek mümkün olmakta ve devrenin bu kaynakla uyarıma verdiği cevap, basamak cevabı olarak adlandırılmaktadır.

Şekil.7.21'de RL devrenin bir anahtar vasıtası ile dc akım kaynağıyla uyarımı ve bir basamak akım kaynağı ile uyarımı görülmektedir.



Şekil.7.21: (a) RL devresinin anahtar aracılığı ile dc akım kaynağı ile (b) basamak akım kaynağı ile uyarımı

Her iki devrede de, $t=0$ anında bobin başlangıç akımları eşit ise, bu iki devre eşdeğerdir. Başlangıç bobin akım değeri $i_L(0)=I_0$ olsun. $t \geq 0$ için kaynaklar devrededir. Paralel kollardaki gerilimlerin eşitliğinden,

$$v_R(t) = v_L(t); \quad i_R(t)R = L \frac{di_L(t)}{dt} \quad (7.48)$$

ve KAY kullanılarak

$$i_R(t) = I_s - i_L(t) \quad (7.49)$$

yazılırsa,

$$(I_s - i_L(t))R = L \frac{di_L(t)}{dt} \quad (7.50)$$

elde edilir. Son eşitlik düzenlendiğinde

$$\frac{di_L(t)}{dt} = -\frac{R}{L}(i_L(t) - I_s)$$

veya

$$\frac{di_L(t)}{i_L(t) - I_s} = -\frac{R}{L} dt \quad (7.51)$$

bulunur. Bu ifadenin her iki tarafı sıfır - t aralığında integrallendiğinde,

$$\int_0^t \frac{di_L(t)}{i_L(t) - I_s} = -\frac{R}{L} \int_0^t dt ; \quad \ln(i_L(t) - I_s) \Big|_0^t = -\frac{R}{L} t$$

ve

$$\ln(i_L(t) - I_s) - \ln(i_L(0) - I_s) = -\frac{R}{L} t ; \quad \ln\left(\frac{i_L(t) - I_s}{i_L(0) - I_s}\right) = -\frac{R}{L} t$$

elde edilir. Logaritma fonksiyonunun özelliği kullanılarak da,

$$\frac{i_L(t) - I_s}{i_L(0) - I_s} = e^{-\frac{R}{L} t} ; \quad i_L(t) - I_s = (i_L(0) - I_s) e^{-\frac{R}{L} t}$$

ve nihayet bobin akımının ifadesi de

$$i_L(t) = I_s + (i_L(0) - I_s) e^{-\frac{R}{L} t} \quad (7.52)$$

bulunur. Bu ifadede bobin akımının başlangıç değeri ($i_L(0) = I_0$) ve RL devrenin zaman sabiti ($\tau = L / R$) kullanılırsa,

$$i_L(t) = I_s + (I_0 - I_s) e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (7.53)$$

RL devresinde bobin akımının ifadesinin genel formu elde edilir. (7.53) eşitliğinden görüldüğü gibi, basamak cevabı iki terimden oluşmaktadır. Birinci terim, exponensiyel olarak zamanla azalan

$$(I_0 - I_s) e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (7.54)$$

ifadesinden ibaret olup, kaynak devreye girdikten sonra, belirli bir süre için geçerlidir ve devrenin zaman sabitine bağlı olarak toplam cevaba katkısı gittikçe azalır. Bu nedenle bu terime, **geçiş cevabı** denir. İkinci terim, I_s ise bobin akımının, kaynağın zorlaması nedeniyle, başlangıç anından uzun bir süre sonra, yani bobin kısa devre davranmaya başladığında aldığı değerdir. Bu nedenle bu terime, **zorlama cevap** adı verilir. (7.53) devresinde bu terim kaynak akımına eşit olmakla beraber, aslında, $t \rightarrow \infty$ için bobin akımının değeridir. Buna göre RL devrelerde bobin akımının ifadesi,

$$i_L(t) = i_L(\infty) + (i_L(0) - i_L(\infty))e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (7.55)$$

biçiminde ifade edilebilir. (7.55) eşitliğinden anlaşılacağı üzere, bobin akımının basamak cevabı için, bobin akımının başlangıç değeri, bobin akımının $t \rightarrow \infty$ için değeri ve devrenin zaman sabitinin belirlenmesi yeterlidir.

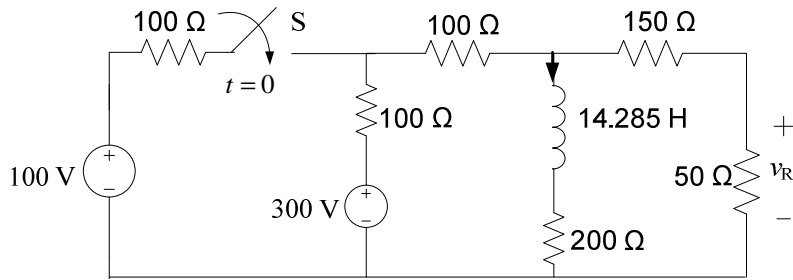
Ayrıca, RL devrenin basamak cevabı bobin akımından başka bir devre değişkeni için direkt olarak bulunacaksa, $x(t)$ aranan devre değişkeni olmak üzere,

$$x(t) = x(\infty) + (x(0^+) - x(\infty))e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (7.56)$$

ifadesinin kullanılması gerektiğini tekrar hatırlayalım!

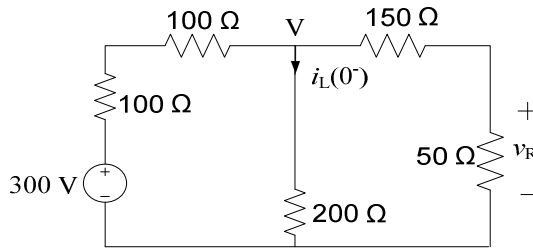
ÖRNEK PROBLEM 7.4:

Şekil.7.22’de verilen devrede S anahtarı uzun süredir açık olup, $t = 0$ da kapanmaktadır. Bobin akımının $t \geq 0$ için zamana bağlı ifadesini ve 50Ω ’luk direnç üzerindeki gerilimin ifadesini $t > 0$ için bulunuz.



.Şekil.7.22: Problem 7.4 devresi

Cözüm: $t = 0^-$ anına kadar bobin 300 V’luk gerilim kaynağına uzun süre maruz kaldığından bu anda kısa devre davranmaktadır. Bu andaki bobin akımı Şekil.7.23’deki eşdeğer devreden bulunabilir:



Şekil.7.23: $t = 0^-$ devrenin eşdeğeri

Düğüm nokta potansiyelleri metodu ile,

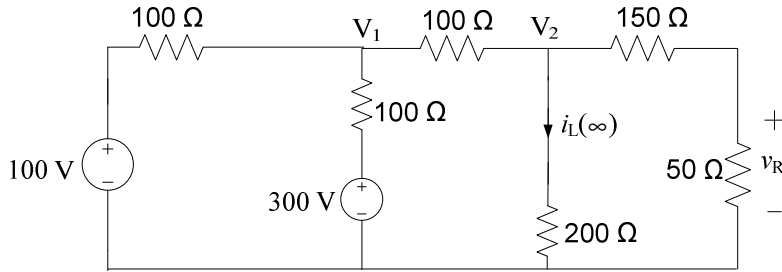
$$\frac{V-300}{200} + \frac{V}{200} + \frac{V}{200} = 0 \quad \Rightarrow \quad 3V = 300; \quad V = 100 \text{ V.}$$

$$i_L(0^-) = \frac{V}{200} = \frac{100}{200} = 0.5 \text{ A.}$$

Bobin akımının süreklilik koşulundan,

$$i_L(0^-) = i_L(0) = i_L(0^+) = 0.5 \text{ A.}$$

$t = 0$ 'da 200 V'luk kaynak da devreye girecek ve bobin uzun süre bu dc kaynaklara maruz kaldığında tekrar kısa devre davranmaya başlayacaktır. $t \rightarrow \infty$ için bobin akımı Şekil.7.24'de verilen eşdeğer devreden bulunur:



Şekil.7.24: $t \rightarrow \infty$ için eşdeğer devre

$$\frac{V_1-100}{100} + \frac{V_1-300}{100} + \frac{V_1-V_2}{100} = 0 \quad \Rightarrow \quad 3V_1 - V_2 = 400.$$

$$\frac{V_2}{200} + \frac{V_2}{200} + \frac{V_2-V_1}{100} = 0 \quad 2V_2 - V_1 = 0; \quad V_1 = 2V_2.$$

$$3 \cdot (2V_2) - V_2 = 400 \quad \Rightarrow \quad V_2 = 80 \text{ V.}$$

$$i_L(\infty) = \frac{V_2}{200} = \frac{80}{200} = 0.4 \text{ A.}$$

Bobinin bağlı olduğu terminallerden görülen eşdeğer direnç, bağımsız kaynaklar kısa devre eşdeğerleriyle değiştirildiğinde,

$$R_{eş} = ((100 // 100) + 100) // 200 + 200 = 285.7 \text{ } \Omega.$$

$$\text{ve } \tau = \frac{L}{R_{eş}} = \frac{14.285}{285.7} = 0.05 \text{ s.}$$

bulunur. (7.55) eşitliğinden de bobin akımının ifadesi,

$$i_L(t) = 0.4 + (0.5 - 0.4)e^{-\frac{t}{0.05}} = 0.4 + 0.1e^{-20t} \text{ A.}$$

bulunur. Bobinin bulunduğu kol gerilimi paralel koldaki gerilime eşittir.

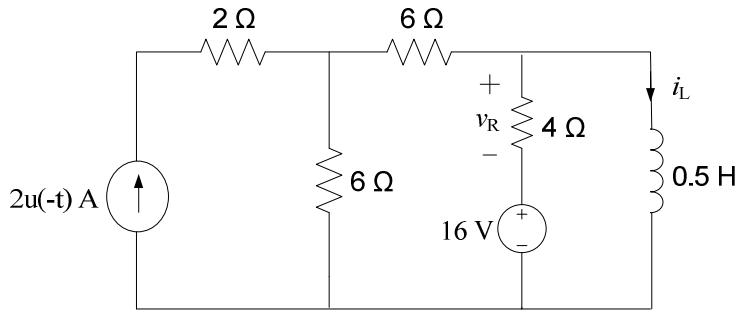
$$L \frac{di_L(t)}{dt} + 200i_L(t) = i(150 + 50) \Rightarrow 80 - 8.57e^{-20t} = 200i \text{ ve } i = 0.4 - 0.04285e^{-20t} \text{ A.}$$

ve

$$v_R(t) = 50i = 20 - 2.1425e^{-20t} \text{ V. sonucu elde edilir.}$$

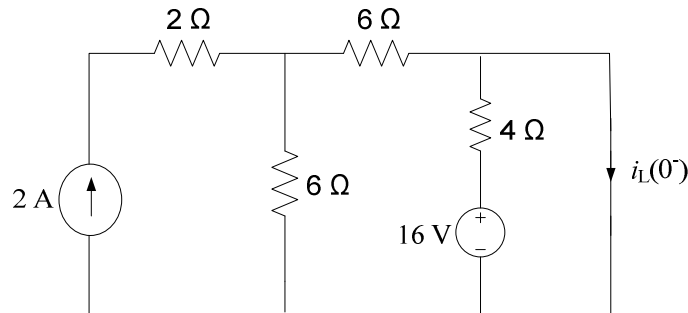
ÖRNEK PROBLEM 7.4:

Şekil.7.25’de görülen devrede 4 Ω’luk direnç üzerindeki gerilimin $t > 0$ için zamana bağlı ifadesini bulunuz



Şekil.7.25: Problem 7.4 devresi

Çözüm: Her iki kaynakta $t = 0$ anına kadar devrededir. Akım kaynağı $t = 0$ ’da devreden çıkar ve $t \geq 0$ bağlı olduğu kol açık devre davranır. Bobin, $t = 0^-$ anına kadar uzun bir süre dc kaynaklara maruz kaldığından bu anda kısa devredir. Şekil.7.26’da görülen eşdeğer devresinden, bobinin bu andaki akımı bulunur:

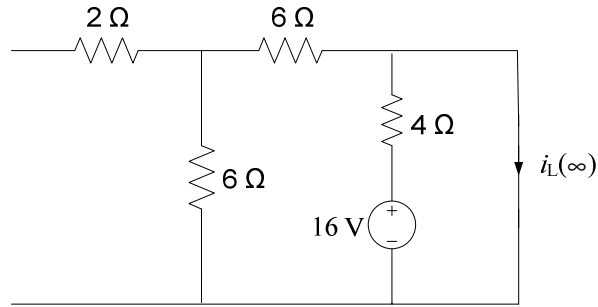


Şekil.7.26: $t = 0^-$ anında devrenin eşdeğeri

Gerilim kaynağının bulunduğu kol bobin tarafından kısa devre edilmiştir. Bu nedenle gerilim kaynağının akımı bu kısa devre üzerinden geçmekte ve akım kaynağının akımı da 6Ω luk dirençlere eşit olarak bölünmekte ve bölünmüş akımlardan biri kısa devre üstünden akmaktadır. Buna göre $t = 0^-$ 'da bobin akımı:

$$i_L(0^-) = \frac{16}{4} + 2 \cdot \frac{6}{6+6} = 4 + 1 = 5 \text{ A}$$

olacaktır. $t = 0$ 'da akım kaynağı devre dışı kaldıktan sonra, bobin uzun bir süre gerilim kaynağına maruz kaldığında tekrar kısa devre davranır. $t \rightarrow \infty$ için bobin akımı Şekil.7.27'de verilen eşdeğer devreden bulunur.



Şekil.7.27: $t \rightarrow \infty$ için devrenin eşdeğeri

Bobinin kısa devre olmasından dolayı, bütün akım bu koldan geçecektir:

$$i_L(\infty) = \frac{16}{4} = 4 \text{ A.}$$

Bobin terminallerinden görülen eşdeğer direnç, gerilim kaynağı kısa devre yapıldığında,

$$R_{eş} = (6 + 6) // 4 = 12 // 4 = 3 \Omega \quad \text{ve} \quad \tau = \frac{L}{R_{eş}} = \frac{0.5}{3} = \frac{1}{6} \text{ s}$$

bulunur. Bobin akımının ifadesi ise yine (7.55) eşitliğinden,

$$i_L(t) = 4 + (5 - 4)e^{-6t} = 4 + e^{-6t} \text{ A.}$$

ve bobin terminal gerilimi

$$v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} = -3e^{-6t} \text{ V.}$$

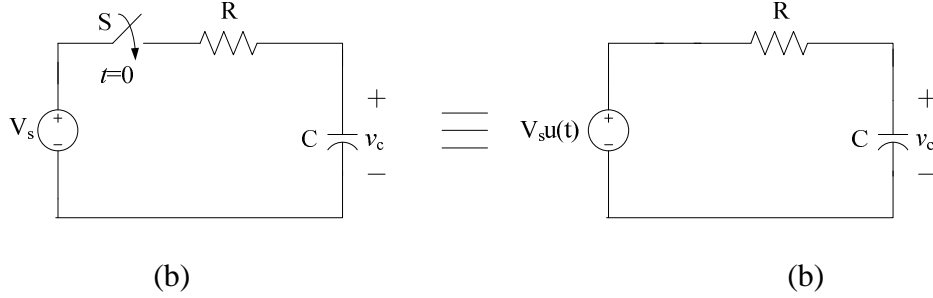
elde edilir. Bobinin bulunduğu çevrimde KGY uygulanırsa

$$-16 - v_R(t) + v_L(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad v_R(t) = -16 - 3e^{-6t} \text{ V. bulunur.}$$

7.3.4. RC DEVRENİN BASAMAK CEVABI

RC devrelerde de bir t_0 anında uygulanan dc kaynağı, basamak fonksiyonları ile ifade etmek mümkün olmakta ve devrenin bu kaynakla uyarıma verdiği cevap, basamak cevabı olarak adlandırılmaktadır.

Şekil.7.28'de RC devrenin bir anahtar vasıtası ile dc akım kaynağıyla uyarımı ve bir basamak akım kaynağı ile uyarımı görülmektedir.



Şekil.7.28: (a) RC devresinin anahtar aracılığı ile dc gerilim kaynağı ile (b) basamak gerilim kaynağı ile uyarımı

Her iki devrede de, $t=0$ anında kapasitör gerilimleri eşit ise, bu iki devre eşdeğerdir. Başlangıç kapasitör gerilim değeri $V_c(0) = V_0$ olsun. $t \geq 0$ için her iki kaynakta devrededir ve direnç üzerindeki akım aynı zamanda kapasitör akımı olacağından,

$$i_R(t) = i_c(t) \quad (7.57)$$

ve direnç ile kapasitörün terminal eşitliklerinden de

$$\frac{V_s - v_c(t)}{R} = C \frac{dv_c(t)}{dt} \quad (7.58)$$

elde edilir. (7.58) eşitliği düzenlendiğinde

$$\frac{dv_c(t)}{dt} = -\frac{v_c(t) - V_s}{RC}$$

veya

$$\frac{dv_c(t)}{v_c(t) - V_s} = -\frac{dt}{RC} \quad (7.59)$$

bulunur ki, bu eşiliğin her iki tarafının $0 - t$ aralığında integrali RL devrelerinde elde edildiği şekilde

$$\ln \left(\frac{v_c(t) - V_s}{v_c(0) - V_s} \right) = -\frac{t}{RC} \quad (7.60)$$

ve yine logaritma fonksiyonunun özelliği kullanılarak,

$$\frac{v_c(t) - V_s}{v_c(0) - V_s} = e^{-\frac{t}{RC}};$$

ya da,

$$v_c(t) = V_s + (v_c(0) - V_s)e^{-\frac{t}{RC}} \quad (7.61)$$

sonucu elde edilir. (7.61) eşitliğinde RC devreler için zaman sabitinin ifadesi, $\tau = RC$ ve kapasitör başlangıç gerilimin değeri, $v_c(0) = V_0$ kullanılarak,

$$v_c(t) = V_s + (V_0 - V_s)e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (7.62)$$

RC devresinde kapasitör geriliminin ifadesinin genel formu elde edilir. (7.62) eşitliğinden görüldüğü gibi, basamak cevabı iki terimden oluşmaktadır. Birinci terim, exponensiyel olarak zamanla azalan

$$(V_0 - V_s)e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (7.63)$$

ifadesinden ibaret olup, kaynak devreye girdikten sonra, belirli bir süre için geçerlidir ve devrenin zaman sabitine bağlı olarak toplam cevaba katkısı gittikçe azalır. Bu nedenle bu terime, geçiş cevabı denir. İkinci terim, V_s ise kapasitör geriliminin, kaynağın zorlaması nedeniyle, başlangıç anından uzun bir süre sonra, yani kapasitör açık devre davranmaya başladığında aldığı değerdir. Bu nedenle bu terime, zorlama cevap adı verilir. (7.28) devrelerinde bu terim kaynak gerilimine eşit olmakla beraber, aslında, $t \rightarrow \infty$ için kapasitör geriliminin değeridir. Buna göre RC devrelerde kapasitör geriliminin ifadesi,

$$v_c(t) = v_c(\infty) + (v_c(0) - v_c(\infty))e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (7.64)$$

biçiminde ifade edilebilir. (7.64) eşitliğinde görüldüğü üzere, kapasitör geriliminin basamak cevabı için, kapasitör geriliminin başlangıç değeri, kapasitör geriliminin $t \rightarrow \infty$ için değeri ve devrenin zaman sabitinin belirlenmesi yeterlidir.

Ayrıca, RC devrenin basamak cevabı kapasitör geriliminden başka bir devre değişkeni için direk olarak bulunacaksa, $x(t)$ aranan devre değişkeni olmak üzere,

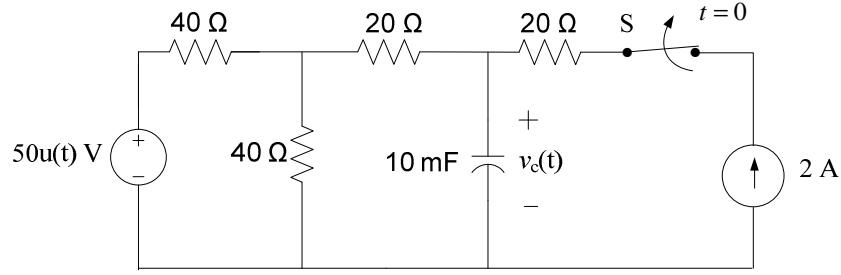
$$x(t) = x(\infty) + (x(0^+) - x(\infty))e^{-\frac{t}{\tau}}$$

ifadesinin kullanılması gerektiğini tekrar tekrar hatırlayalım!!

ÖRNEK PROBLEM 7.5:

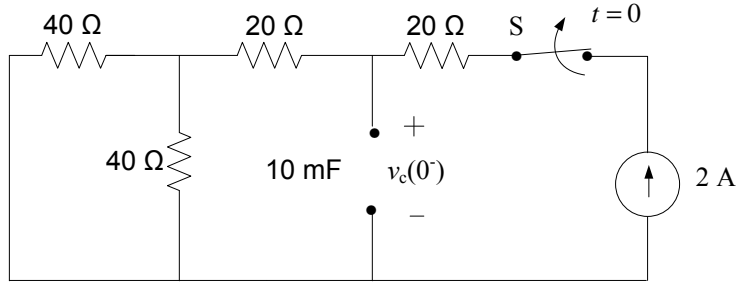
Şekil.7.29’da verilen devrede S anahtarı uzun süredir kapalı konumdadır. Anahtar $t = 0$ anında konum değiştirerek kapandığına göre, kapasitör geriliminin zamana bağlı ifadesini

$t \geq 0$ için bulunuz



Şekil.7.29: Problem 7.5 devresi

Cözüm: Gerilim kaynağı $t = 0$ anında devreye girecek ve $t = 0^-$ anına kısa devre davranacaktır. Akım kaynağı ise $t = 0^-$ anına kadar devrede ve $t = 0$ da S anahtarı aracılığıyla devre dışı bırakılmaktadır. Kapasitör $t = 0^-$ anına kadar, uzun bir süre 2 A'lık dc kaynağa maruz kaldığından bu anda bir $v_c(0^-)$ gerilimine şarj olmuş ve açık devre davranmaktadır. $t = 0^-$ anındaki bu gerilim değeri Şekil.7.30'da görülen $t = 0^-$ anı için geçerli eşdeğer devreden bulunabilir.



Şekil.7.30: $t = 0^-$ devrenin eşdeğeri

$$v_c(0^-) = 2 \cdot (20) + 2 \cdot (40 // 40) = 2 \cdot (20) + 2 \cdot (20) = 80 \text{ V.}$$

Kapasitör gerilimin süreklilik koşulundan da,

$$v_c(0^-) = v_c(0) = v_c(0^+) = 80 \text{ V.}$$

olacaktır. $t = 0$ 'da akım kaynağı devre dışı ve gerilim kaynağı devrede olacaktır. Devre uzun süre bu koşullarda çalıştığından, kapasitör $t \rightarrow \infty$ için yeni bir gerilim değerine şarj olacaktır. Bu gerilim değeri, devrenin $t \rightarrow \infty$ için Şekil.7.31'de verilen eşdeğerinden bulunabilir.

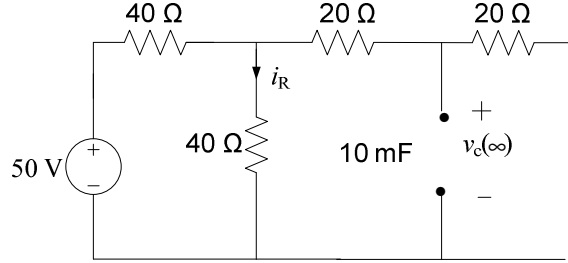
$$v_c(\infty) = 40i_R = 40 \cdot \frac{50}{80} = 25 \text{ V.}$$

$t \geq 0$ için kapasitörün bağlı olduğu terminallerden görülen eşdeğer direnç gerilim kaynağı kısa devre yapılarak,

$$R_{eş} = (40 // 40) + 20 = 40 \Omega$$

ve devreye ilişkin zaman sabiti

$\tau = CR_{eş} = 10 \times 10^{-3} \cdot 40 = 0.4$ s olduğundan, kapasitör geriliminin ifadesi (7.64) eşitliğinden,



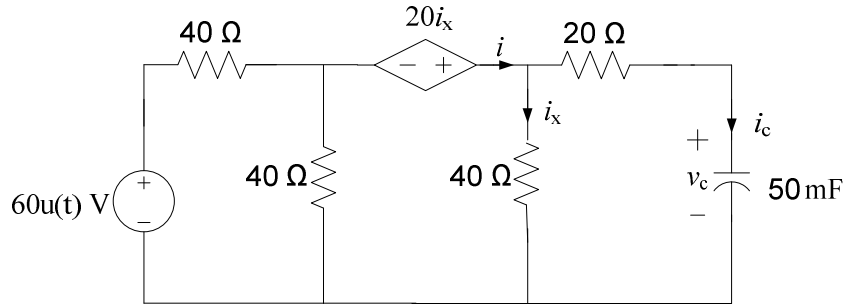
Şekil.7.31: $t \rightarrow \infty$ için eşdeğer devre

$$v_c(t) = 25 + (80 - 25)e^{-\frac{t}{0.4}} = 25 + 55e^{-2.5t} \text{ V.}$$

elde edilir.

ÖRNEK PROBLEM 7.6:

Şekil.7.32’de görülen devrede kapasitör üzerindeki başlangıç gerilimi $v_c(0) = 0$ ise, $t > 0$ için bağımlı kaynağın devreye sağladığı akımın, zamana bağlı ifadesini bulunuz.

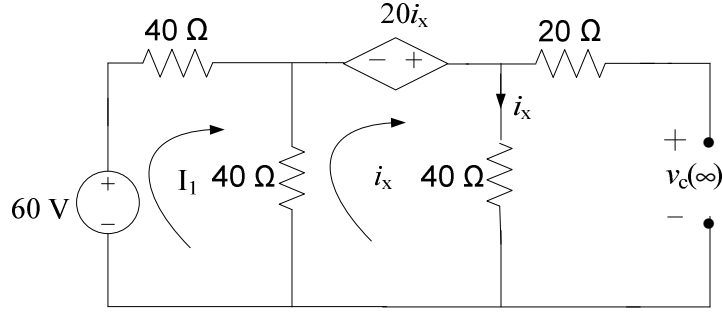


Şekil.7.32: Problem 7.6 devresi

Cözüm:

Kapasitör başlangıçta yüksüzdür. $t = 0$ anında kaynak devreye girdikten uzun bir süre sonra kapasitör şarj olacak ve açık devre davranmaya başlayacaktır. Bu an için devrenin eşdeğeri Şekil.7.32’de görülmektedir. Bu eşdeğer devreden $t \rightarrow \infty$ için kapasitör gerilimini, başka bir deyişle kapasitörün şarj olduğu gerilimi bulmak mümkündür. $t \geq 0$ için devrenin zaman sabiti ve dolayısıyla, kapasitörün bağlı olduğu terminallerden görülen eşdeğer direncinin bulunması gerekmektedir. Eşdeğer direncin bulunması amacıyla test kaynağının bağlanması da Şekil.7.33 devresinde verilmiştir. Bu devrede, gerilim kaynağı kısa devre

edildiğinde 40Ω 'luk direçler paralel konumda olacağından, paralel eşdeğerleri 20Ω olarak çizilmiştir.



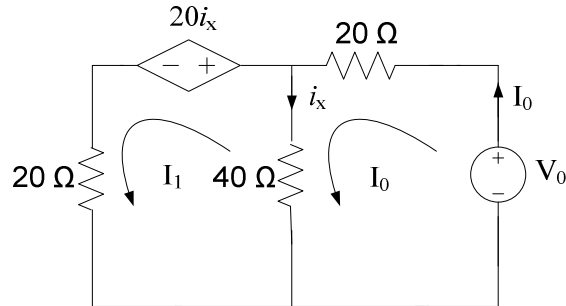
Şekil.7.32: $t \rightarrow \infty$ anında devrenin eşdeğeri

Şekil.7.32'de verilen eşdeğer devrede göz akımları metodu kullanılarak,

$$60 = 80I_1 - 40i_x; \quad -40I_1 + 80i_x - 20i_x = 0 \quad \Rightarrow \quad I_1 = \frac{3}{2}i_x.$$

$$60 = 80\left(\frac{3}{2}i_x\right) - 40i_x \quad \Rightarrow \quad 60 = 80i_x; \quad i_x = \frac{3}{4} \text{ A.}$$

$$v_c(\infty) = 40i_x = 40\left(\frac{3}{4}\right) = 30 \text{ V.}$$



Şekil.7.33: Eşdeğer direnç hesabı için test kaynağı bağlantısı

Göz akımları metodu ile,

$$V_0 = 60I_1 - 40I_1; \quad 60I_1 - 40I_0 + 20i_x = 0; \quad i_x = I_0 - I_1.$$

$$60I_1 - 40I_0 + 20(I_0 - I_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 40I_1 = 20I_0; \quad I_1 = \frac{I_0}{2}$$

$$V_0 = 60I_1 - 40\left(\frac{I_0}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad R_{es} = \frac{V_0}{I_0} = 40 \Omega.$$

ve zaman sabiti $\tau = R_{es}C = 40 \cdot (0.05) = 2 \text{ s}$ bulunur.

(7.64) eşitliğinden,

$$v_c(t) = 30 + (0 - 30)e^{-\frac{t}{2}} = 30(1 - e^{-0.5t}) \text{ V.}$$

elde edilir. Kapasitör akımı ise

$$i_c(t) = C \frac{dv_c(t)}{dt} = (0.05)(30(0.5e^{-0.25t})) = 0.75e^{-0.5t} \text{ A.}$$

bulunur. Şekil.7.32’de verilen devrede, kapasitörün bulunduğu kol üzerindeki gerilim paralel bağlı 40Ω üzerindeki gerilime eşit olduğundan,

$$20i_c(t) + v_c(t) = 40i_x(t) \quad \Rightarrow \quad 15e^{-0.5t} + 30(1 - e^{-0.5t}) = 40i_x(t).$$

ve

$$i_x(t) = 0.75 - 0.375e^{-0.5t} \text{ A. elde edilir.}$$

İkinci düğüm noktasında KAY uygulanırsa

$$i(t) = i_x(t) + i_c(t); \quad i(t) = 0.75 - 0.375e^{-0.5t} + 0.75e^{-0.5t} = 0.75 + 0.375e^{-0.5t} \text{ A.}$$

bulunur.

Şu ana kadar incelenen örneklerde, kaynakların devreye giriş ya da devreden çıkış anları, $t = 0$ olarak seçildi. Ancak sıfırdan farklı herhangi bir anda da bir anahtarlama mümkün olabileceğinden, özellikle de bir devrede farklı zamanlarda işlem gören anahtarlama söz konusu olabileceğinden, devre değişkenleri için elde edilen genel ifadeleri, bu şekilde farklı anlardaki anahtarlama için daha genel bir biçimde ifade etmek gerekmektedir. $x(t)$, RL veya RC devrelere ilişkin herhangi bir devre değişkeni olmak üzere

$$x(t) = x(\infty) + (x(t_0^+) - x(\infty))e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}$$

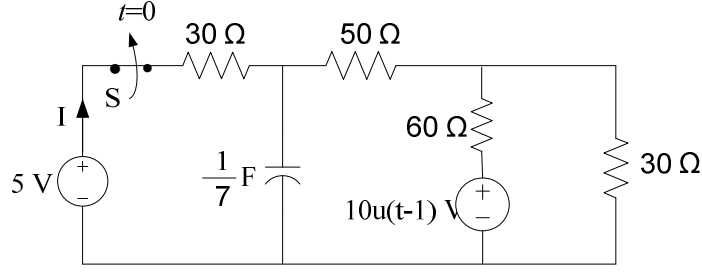
bu değişkene ilişkin en genel ifade olacaktır.

ÖRNEK PROBLEM 7.7:

Şekil.7.34’de verilen devrede S anahtarı uzun bir süredir kapalı konumda olup, $t = 0$ ’da açılmaktadır. $t \geq 0$ için kapasitör geriliminin zamana bağlı ifadesini bulunuz.

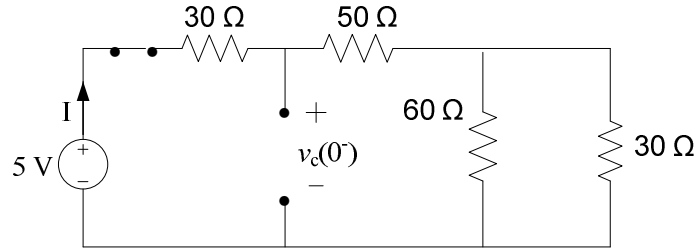
Cözüm:

Kapasitör uzun süre 5 V’luk kaynağa maruz kaldığından, $t = 0^-$ anında şarj olmuş ve açık devre davranmaktadır. Şarj olduğu gerilim değerini, $t = 0^-$ anı için Şekil.7.35’de verilen eşdeğer devresinden bulunur.



Şekil.7.34: Problem 7.7 devresi

Şekil.7.35’de görüldüğü gibi $t = 0^-$ anında 10 V’luk kaynak henüz devrede değildir ve bu nedenle kısa devre davranmaktadır.

Şekil.7.35: $t = 0^-$ için devrenin eşdeğeri

Kaynağın terminallerinden görülen eşdeğer direnç,

$$R_{eş} = (30 // 60) + 50 + 30 = 100 \text{ } \Omega. \text{ ve devre akımı,}$$

$$I = \frac{5}{R_{eş}} = \frac{5}{100} = 0.05 \text{ A. bulunur. Birinci çevrimde KGY uygulanarak,}$$

$$5 = 50I + v_c(0^-) \Rightarrow v_c(0^-) = 5 - 50 \cdot (0.05) = 2.5 \text{ V. bulunur.}$$

Kapitör geriliminin sürekliliğinden de,

$$v_c(0^-) = v_c(0) = v_c(0^+) = 2.5 \text{ V. olacaktır.}$$

$t = 0$ ’da S anahtarı açıldığında 5 V’luk kaynak devre dışı kalacaktır. 10 V’luk kaynağın devreye girdiği $t = 1$ anına kadar, devrede kaynak bulunmadığından, $0 < t < 1$ aralığında RC devrenin doğal cevabı söz konusudur. İkinci kaynağın devreye hiçbir zaman girmeyeceğini düşünülürse, kapasitör üzerinde depolanan enerji ekponensiyel olarak sıfır olacaktır.

$$v_c(\infty) = 0$$

Bu aralıkta, kapasitör terminallerinden görülen eşdeğer direnç,

$$R_{eş} = (30 // 60) + 50 = 70 \Omega$$

olduğundan, zaman sabiti de,

$$\tau = R_{eş} C = 70 \cdot \left(\frac{1}{7}\right) = 10 \text{ s}$$

bulunur. O halde kaynakların devrede olmadığı bu aralıkta kapasitör gerilimi:

$$v_c(t) = v_c(\infty) + (v_c(0) - v_c(\infty))e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow v_c(t) = 0 + (2.5 - 0)e^{-\frac{t}{10}} :$$

$$v_c(t) = 2.5e^{-0.1t} \text{ V}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

elde edilir. 10 V'luk kaynak devreye girmeseydi, kapasitör gerilimi bu şekilde davranacaktı. Ancak, $t=1$ 'de 10 V'luk kaynak devreye girdiğinden, bu andan itibaren kapasitör geriliminin ifadesi değişecektir. $1 \leq t$ için,

$$v_c(t) = v_c(\infty) + (v_c(1) - v_c(\infty))e^{-\frac{(t-1)}{\tau}}$$

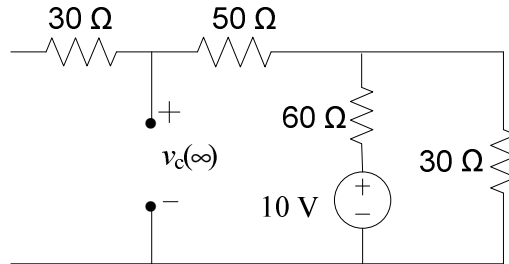
ifadesinde, değişmiş devre için ilgili değerler yeniden hesaplanmalıdır. Dikkat edilirse, bu ifadede kapasitör geriliminin $t=1$ 'de ki değeri gerekmektedir. Zira değişmiş devre için kapasitör başlangıç gerilimi bu andaki gerilimdir. Bu değer içinde yine kapasitör geriliminin süreklilik koşulu kullanılır:

$$v_c(1^-) = v_c(1) = v_c(1^+)$$

Burada, $0 \leq t \leq 1$ aralığı için bulunan kapasitör gerilimi ifadesi $t=1^-$ 'da geçerli ifade olduğundan, bu ifadede $t=1$ kullanılarak,

$$v_c(1) = 2.5e^{-0.1} = 0.905 \text{ V.}$$

bulunur. $1 \leq t$ için devre 10 V'luk kaynağa maruz kaldığından uzun bir süre sonra yine, yeni bir gerilime şarj olacak ve kısa devre davranacaktır. $t \rightarrow \infty$ için eşdeğer devre Şekil.7.36'da verilmiştir.



Şekil.7.36: $t \rightarrow \infty$ için eşdeğer devre

Bu eşdeğer devrede, kapasitör gerilimi $30\ \Omega$ 'luk direnç üzerindeki gerilime eşit olacağından,

$$v_c(\infty) = \frac{10}{60+30} \cdot 30 = \frac{10}{3} \text{ V.}$$

bulunur. Kapasitör terminallerinden görülen eşdeğer direnç değişmediğinden, devrenin zaman sabiti değişmez. Ancak, anahtarlama sonucu devrenin yapısı değişmiş olaydı, yeni zaman sabitinin de hesaplanması gerekeceği unutulmamalı! Bu aralıktaki kapasitör gerilimi,

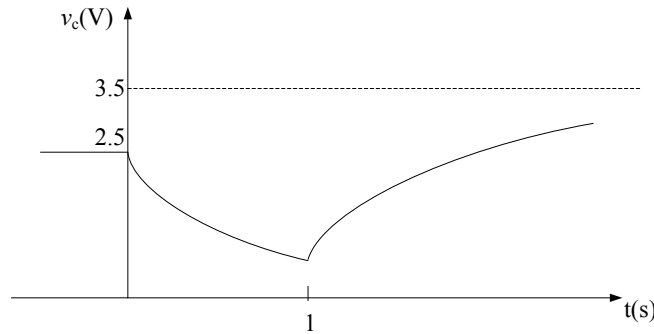
$$v_c(t) = v_c(\infty) + (v_c(1) - v_c(\infty))e^{-\frac{(t-1)}{\tau}} \Rightarrow v_c(t) = \frac{10}{3} + (0.905 - \frac{10}{3})e^{-\frac{(t-1)}{10}};$$

$$v_c(t) = 3.333 - 2.49e^{-0.1(t-1)} \text{ V, } 1 \leq t$$

sonucu bulunur. O halde kapasitör geriliminin ifadesi,

$$v_c(t) = \begin{cases} 2.5e^{-0.1t} \text{ V,} & 0 \leq t \leq 1 \\ 3.333 - 2.49e^{-0.1(t-1)} \text{ V,} & 1 \leq t \end{cases}$$

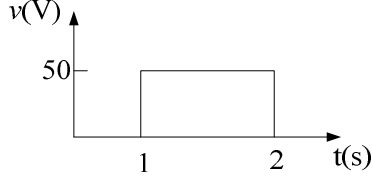
şeklinde ifade edilir. Şekil.7.37'de kapasitör geriliminin zamanla değişimi görülmektedir.



Şekil.7.37: Kapasitör geriliminin zamanla değişim grafiği

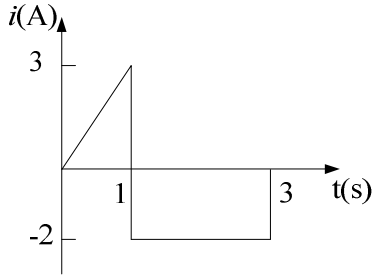
PROBLEMLER

7.1. Şekil.7.38’de verilen gerilim sinyalinin basamak fonksiyonları ile ifade ediniz.



Şekil.7.38: Problem 7.1

7.2. Şekil.7.39’da verilen akım sinyalinin zaman bağımlı ifadesini bulunuz.



Şekil.7.39: Problem 7.2

7.3. Bir RL devresinde, bobin akımı ve bobin gerilimi,

$$i_L(t) = -2e^{-5t} \text{ A., } t \geq 0$$

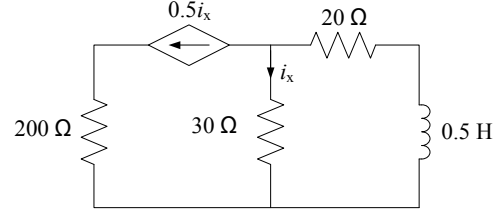
ve

$$v_L(t) = 10e^{-5t} \text{ V., } t > 0$$

olarak verilmiştir. Bu devrede,

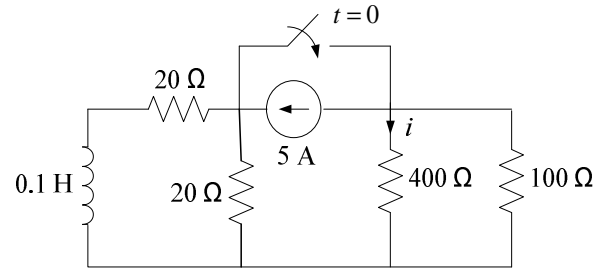
- a) Eşdeğer direnci
- b) Devrenin zaman sabitini
- c) Bobin indüktansını
- c) Bobin başlangıç enerjisini
- d) Bobin başlangıç enerjisinin yarısının harcanması için gerekli süreyi bulunuz.

7.4. Şekil.7.40’da görülen devrenin zaman sabitini bulunuz.



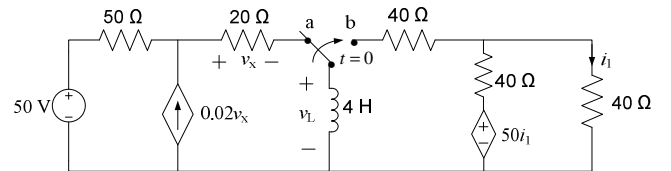
Şekil.7.40: Problem 7.4

7.5. Şekil.7.41’de verilen devrede anahtar uzun süredir açık konumdadır ve $t = 0$ ’da kapatılmaktadır. $t > 0$ için $i(t)$ akımını bulunuz.



Şekil.7.41: Problem 7.5 devresi

7.6. Şekil.7.42’de görülen devrede anahtar uzun bir süredir ‘a’ konumunda olup, $t = 0$ anında ‘b’ konumuna geçmiştir. Bobin terminal geriliminin zamana bağlı ifadesini bulunuz.



Şekil.7.42: Problem 7.5 devresi

7.7. Bir RC devresinde, kapasitör akımı ve gerilimi,

$$i_c(t) = 0.1e^{-20t} \text{ A., } t > 0$$

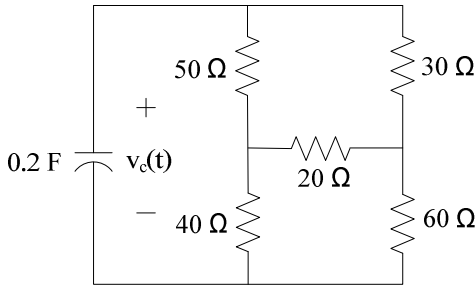
ve

$$v_c(t) = 10e^{-20t} \text{ V., } t \geq 0$$

olarak verilmiştir. Bu devrede,

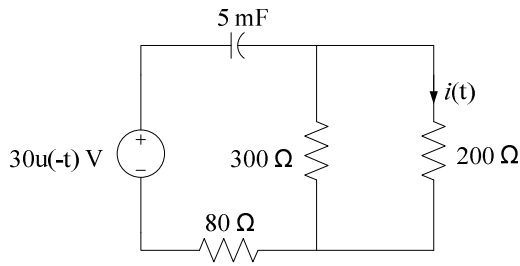
- a) Eşdeğer direnci
- b) Devrenin zaman sabitini
- c) Kapasitörün kapasitansını
- c) Kapasitör başlangıç enerjisini
- d) Kapasitör başlangıç enerjisinin yüzde onunun harcanması için gerekli süreyi bulunuz.

7.8. Şekil.7.43’de verilen devrenin zaman sabitini bulunuz. Kapasitör başlangıç gerilimi 12 V ise, $t \geq 0$ için kapasitör gerilimin zamana bağlı ifadesini bulunuz.



Şekil.7.43: Problem 7.8 devresi

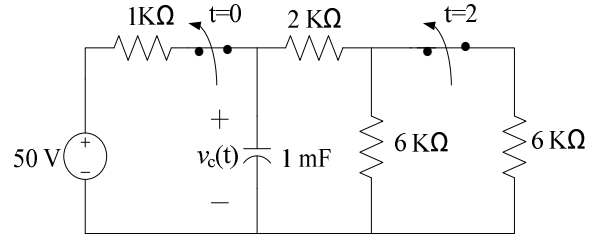
7.9. Şekil.7.44’de verilen devrede, $t > 0$ için, $i(t)$ akımını bulunuz.



Şekil.7.44: Problem 7.9 devresi

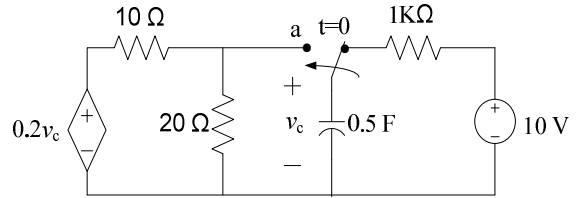
7.10. Şekil.7.45’de görülen devrede S_1 anahtarı uzun süredir kapalı konumdadır. $t=0$ anında S_1 anahtarı açılmaktadır. Bundan 2 saniye sonrada S_2 anahtarı açıldığına göre, $t \geq 0$ için kapasitör geriliminin zamana bağlı ifadesini ve $0 < t < 2$ aralığında başlangıçta sahip

olduğu enerjinin ne kadarının harcadığını bulunuz.



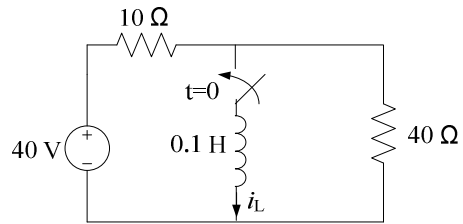
Şekil.7.45: Problem 7.10 devresi

7.11. Şekil.7.46’ da görülen devre uzun süre bu konumda çalıştıktan sonra, $t=0$ da S anahtarı, ‘a’ konumuna geçmektedir. $t > 0$ için bağımlı kaynağın gücünü bulunuz.



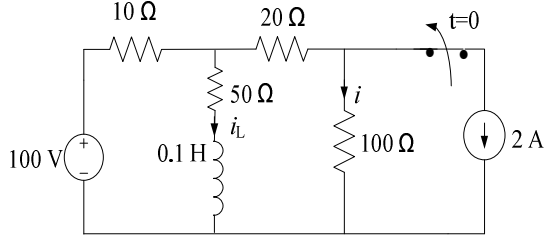
Şekil.7.46: Problem 7.11 devresi

7.12. Şekil.7.47’de verilen devrede S anahtarı $t=0$ ’da kapanmaktadır. Bobin başlangıç akımı 2 A. olduğuna göre, $t \geq 0$ için bobin akımının zamana bağlı ifadesini bulunuz.



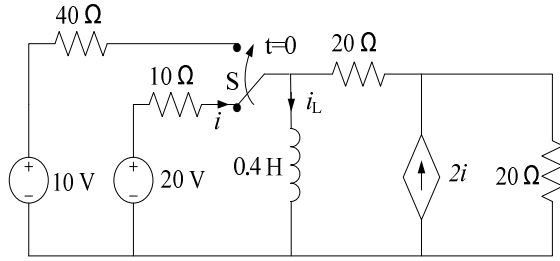
Şekil.7.47: Problem 7.12

7.13. Şekil.7.48’de verilen devrede S anahtarı uzun süredir kapalı konumdadır ve $t=0$ ’da açılmaktadır. $t \geq 0$ için bobin akımının ifadesini buluz. Aynı aralıkta, $i(t)$ akımının bulunuz



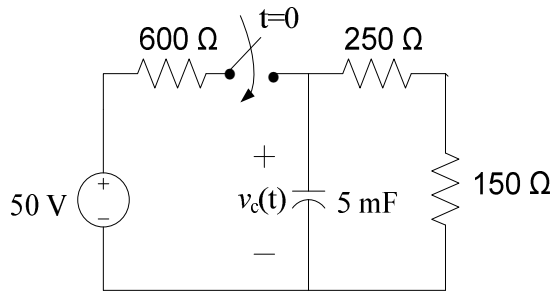
Şekil.7.48. Problem 7.13

7.14. Şekil.7.49’da verilen devrede S anahtarı $t = 0$ ’da ‘a’ konumundan ‘b’ konumuna geçmektedir. $t \geq 0$ için bobin akımının ifadesini bulunuz.



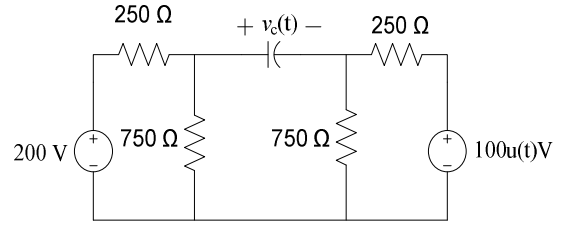
Şekil.7.49: Problem 7.14

7.15. Şekil.7.50’deki devrede kapasitör başlangıç gerilimi 30 V’dur. $t \geq 0$ için kapasitör geriliminin ifadesini bulunuz.



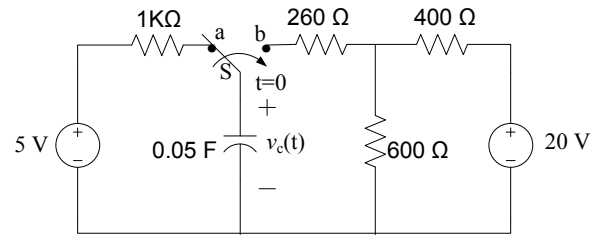
Şekil.7.50: Problem 7.15 devresi

6.16. Şekil.7.51 de verilen devrede $t \geq 0$ için kapasitör geriliminin zamana bağlı ifadesini bulunuz. Kapasitör geriliminin 100 V’a eriştiği anı saniye cinsinden bulunuz.



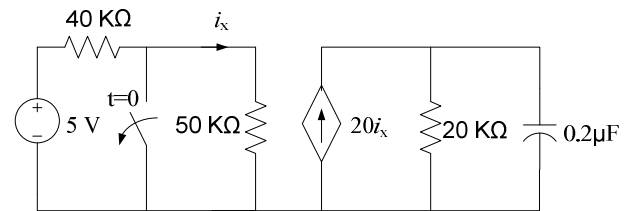
Şekil.7.51: Problem 7.16 devresi

7.17. Şekil.7.52’de verilen devrede S anahtarı, $t = 0$ ’da konum değiştirmekte ve ‘b’ konumuna gelmektedir. Anahtar konum değiştirmeden önce uzun süre ‘b’ konumunda kaldığına göre, $t \geq 0$ için kapasitör geriliminin zaman bağımlı ifadesini bulunuz.



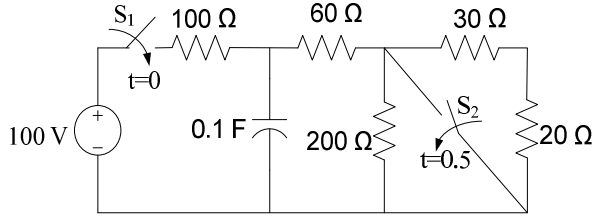
Şekil.7.52: Problem 7.17 devresi

7.18. Şekil.7.53’de verilen devrede, $t = 0$ ’da anahtar açılmaktadır. $t \geq 0$ için kapasitör geriliminin ifadesini bulunuz.

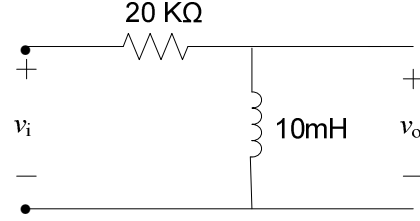


Şekil.7.53: Problem 7.18 devresi

7.19. Şekil.7.54’deki devrede kapasitör başlangıç gerilimi sıfırdır. $t = 0$ ’da S_1 anahtarı kapanmakta ve 0.5 saniye sonra da S_2 anahtarı kapanmaktadır. Kapasitör geriliminin, $t \geq 0$ için ifadesini bulunuz.

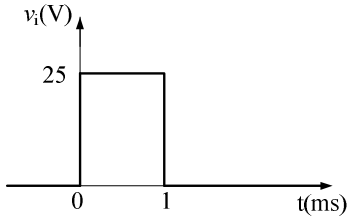


Şekil.7.54: Problem 7.19 devresi

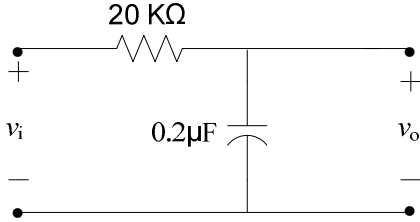


Şekil.7.56.b: Problem 7.21 devresi

7.20. Şekil.7.55.a'daki gerilim sinyali, Şekil.7.55.b'deki devreye uygulanmıştır. Kapasitör başlangıç gerilimi sıfır olduğuna göre, çıkış terminallerindeki $v_o(t)$ gerilimini bulunuz.

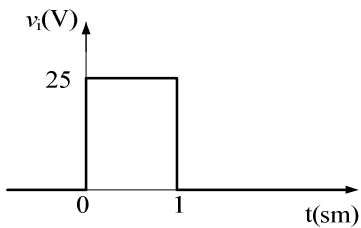


Şekil.7.55.a: Giriş gerilimi



Şekil.7.55.b: Problem 7.20 devresi

7.21. Şekil.7.56.a'daki gerilim sinyali, Şekil.7.56.b'deki devreye uygulanmıştır. Bobin başlangıç akımı sıfır olduğuna göre, çıkış terminallerindeki $v_o(t)$ gerilimini bulunuz.



Şekil.7.56.a: Giriş gerilimi

8.BÖLÜM: İKİNCİ MERTEBE DEVRELER

8.1. GİRİŞ

Tek bir enerji depolama elemanı içeren devreler birinci mertebe bir diferansiyel denklemle karakterize edildiklerinden, bu devreler birinci mertebe devreler olarak adlandırılmıştı. Şayet devre, iki enerji depolama elemanı içeriyor ve bu elemanların seri ya da paralel bir eşdeğeri elde edilemiyorsa, bu devreler ikinci dereceden bir diferansiyel denklemle karakterize edilirler ve bu nedenle de ikinci mertebe devreler olarak adlandırılırlar. Enerji depolama elemanları aynı cins olabileceği gibi farklı cins de olabilirler.

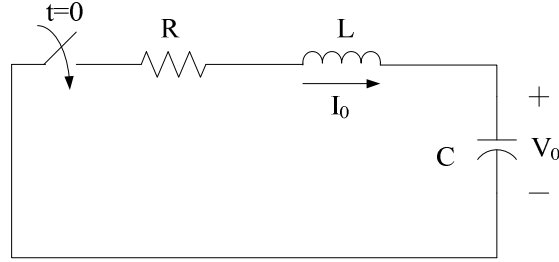
İkinci mertebe devrelerde, tıpkı birinci mertebe devreler gibi, kapasitör ve/veya bobin üzerindeki başlangıç enerjisiyle uyarılabilirler gibi, bir dc kaynakla da uyarılabilirler. Bu uyarımlara karşı devrenin cevapları ayrı ayrı incelenecektir.

İkinci mertebeden diferansiyel denklemlerin çözümünde iki bilinmeyen katsayı ortaya çıkacağından, bu katsayıların belirlenmesi için iki başlangıç değerine ihtiyaç duyulur. Bu başlangıç değerleri, aranan devre değişkeninin $t = 0^+$ 'daki değeri ve aynı devre değişkeninin türevinin yine $t = 0^+$ 'daki değeridir. Birinci mertebeden devreler incelenirken, kapasitör gerilimi ve bobin akımının süreklilik koşulu üzerinde sıklıkla durulmuştu. Bu değişkenlerin türevlerinin süreklilik koşulu yoktur. Bu nedenle, özellikle türevin $t = 0^+$ 'daki değerinin belirlenmesi, verilen devrenin analizinde en önemli adımı oluşturmaktadır.

İkinci mertebe devreler, çok değişik biçimlerde tasarlanabilirler. Ancak, özellikle seri ve paralel RLC devreleri, standart analiz ve tasarım metodlarına sahip olmalarından dolayı, sıklıkla kullanılan devrelerdir. Bu nedenle, öncelikle seri ve paralel RLC devreleri incelenecektir. Bununla birlikte, karmaşık bağlı, ikinci mertebe devrelerin analizi üzerinde de durulacaktır.

8.2. SERİ RLC DEVRESİNİN DOĞAL CEVABI

Şekil.8.1’de verilen seri RLC devresinde, bobin başlangıç akımı ve kapasitör başlangıç gerilimi



Şekil.8.1: Seri RLC devresi başlangıç enerjileri

$$i(0) = I_0 \quad (8.1)$$

$$v_c(0) = V_0 = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^0 i(t) dt \quad (8.2)$$

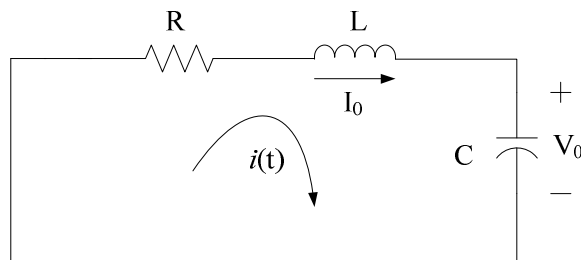
olsun. Bu anda bobin ve kapasitör üzerinde depolanmış enerji miktarları,

$$w_L(0) = \frac{1}{2} L I_0^2 \quad (8.3)$$

ve

$$w_c(0) = \frac{1}{2} C V_0^2 \quad (8.4)$$

olup, $t = 0$ ’da anahtar kapatıldığında, bu başlangıç enerjilerinden dolayı devre uyarılır ve devrede bir i akımı oluşur. Şekil.8.2’de verilen devrede KGY’nı uygulayarak,



Şekil.8.2: Seri RLC devresi doğal cevabı

$$i(t)R + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(t) dt = 0 \quad (8.5)$$

elde edilir. (8.5) ifadesinde $t = 0^+$ kullanılarak,

$$i(0^+)R + L \frac{di(0^+)}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{0^+} i(t) dt = 0$$

ve

$$i(0^+) = i(0) = I_0, \quad \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{0^+} i(t) dt = v_c(0^+) = v_c(0) = V_0$$

ile

$$I_0 R + L \frac{di(0^+)}{dt} + V_0 = 0 \quad (8.6)$$

ve böylece,

$$\frac{di(0^+)}{dt} = -\frac{(I_0 R + V_0)}{L} \quad (8.7)$$

elde edilir. Burada, eşitliğin sol tarafındaki ifade

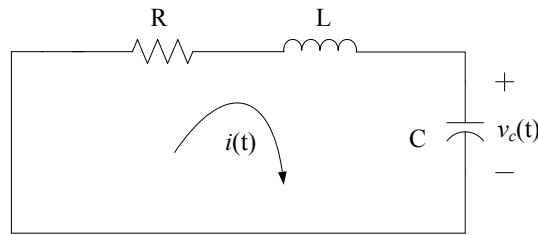
$$\left. \frac{di(t)}{dt} \right|_{t=0^+} \quad (8.8)$$

anlamındadır.

(8.5) eşitliğinin her iki tarafının türevi alınır ve katsayılar düzenlenirse,

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{LC} i(t) = 0 \quad (8.9)$$

elde edilir ki, bu eşitlik devreyi karakterize eden ikinci dereceden diferansiyel eşitliktir. (8.9) eşitliğinin çözümünden önce, aynı devrede kapasitör gerilimi için diferansiyel denklemini ve kapasitör geriliminin başlangıç değerlerini elde edelim. Bu amaçla, Şekil.8.3'de görüldüğü gibi kapasitör gerilimini devre değişkeni olarak seçelim:



Şekil.8.3: Seri RLC devresinde kapasitör geriliminin devre değişkeni olarak seçilmesi

Bu durumda (8.5) eşitliği,

$$i(t)R + L \frac{di(t)}{dt} + v_c(t) = 0 \quad (8.10)$$

şeklinde ifade edilebilir. Devre akımı aynı zamanda kapasitör terminal akımı da olduğundan,

$$i(t) = C \frac{dv_c(t)}{dt} \quad (8.11)$$

(8.11) ifadesi (8.10) da kullanılır ve katsayılar düzenlenirse,

$$\frac{d^2 v_c(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{1}{LC} v_c(t) = 0 \quad (8.12)$$

elde edilir ki bu form, (8.9) eşitliği formu ile aynıdır. **Kapasitör gerilimi için başlangıç değerleri de,**

$$v_c(0) = V_0 \quad (8.13)$$

ve (8.11) eşitliğinden,

$$\frac{dv_c(0^+)}{dt} = \frac{i(t)}{C} = \frac{I_0}{C} \quad (8.14)$$

bulunur. Buradan kolayca anlaşılabileceği gibi, RLC devrede devre akımının formu ile kapasitör gerilimin formu aynı olacak fakat sabitler farklı değerler alacaktır.

(8.9) da verilen diferansiyel eşitliğin çözümünün,

$$i(t) = Ke^{st} \quad (8.15)$$

şeklinde olduğunu kabul edelim. Bu durumda $i(t)$, (8.9) eşitliğini sağlamalıdır. (8.15) ifadesi (8.9) da kullanılarak,

$$s^2 Ke^{st} + \frac{R}{L} sKe^{st} + \frac{1}{LC} Ke^{st} = Ke^{st} \left(s^2 + \frac{R}{L} s + \frac{1}{LC} \right) = 0 \quad (8.16)$$

elde edilir. $i(t) = Ke^{st}$, aranan akım ifadesi olup sıfırdan farklı olacağından,

$$s^2 + \frac{R}{L} s + \frac{1}{LC} = 0 \quad (8.17)$$

olmalıdır. (8.17) eşitliği, (8.9) eşitliğinde verilen diferansiyel denklemin karakteristik eşitliği olarak adlandırılır. Bu eşitliğin çözümünden,

$$s_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad (8.18)$$

ve

$$s_2 = -\frac{R}{2L} - \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad (8.19)$$

elde edilir ki, her iki s değeri de (8.15) ifadesini sağlayacağından, bunların bir lineer bileşimi en genel çözümü verecektir:

$$i(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t} \quad (8.20)$$

Burada K_1 ve K_2 , belirsiz katsayılar olup, başlangıç koşulları kullanılarak bulunur.

(8.18) ve (8.19) eşitlikleri

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - w_0^2} \quad (8.21)$$

ve

$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - w_0^2} \quad (8.22)$$

şeklinde ifade edilirse

$$\alpha = \frac{R}{2L} \quad (8.23)$$

ve

$$w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (8.24)$$

elde edilir. Burada α , sönüm katsayısı veya neper frekansı (Np/s), ve w_0 , rezonans frekansı (rad/s) olarak adlandırılır. s_1 ve s_2 ise devrenin doğal frekansları (Np/s) adıyla anılırlar.

(8.21) ve (8.22) eşitliklerine dikkat edilirse, α ve w_0 değerlerine bağlı olarak s_1 ve s_2 değerleri

1. $\alpha > w_0$, negatif, reel ve birbirinden farklı
2. $\alpha < w_0$, karmaşık ve birbirinin eşleniği
3. $\alpha = w_0$, negatif, reel ve birbirine eşit

olacaktır. Bu durumların her birini ayrı ayrı inceleyelim:

8.2.1. SALINIMSIZ SÖNÜM

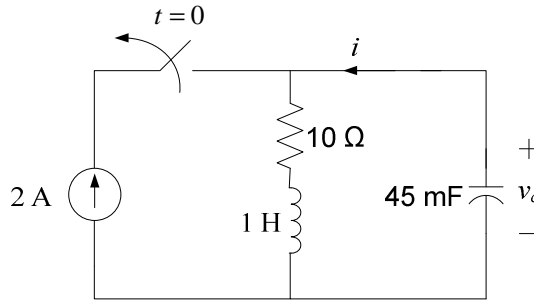
$\alpha > \omega_0$ için, (8.21) ve (8.22) eşitlikleri ile tanımlı doğal frekanslar birbirinden farklı, reel ve negatif değerler olacağından, devrenin doğal cevabı

$$i(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t} \quad (8.25)$$

biçiminde olacaktır. $\alpha > \omega_0$ hali, $C > 4L/R^2$ olması durumunda gerçekleşecektir. K_1 ve K_2 sabitleri, devre akımının ve devre akımının türevinin $t=0^+$ daki başlangıç değerleri kullanılarak elde edilir.

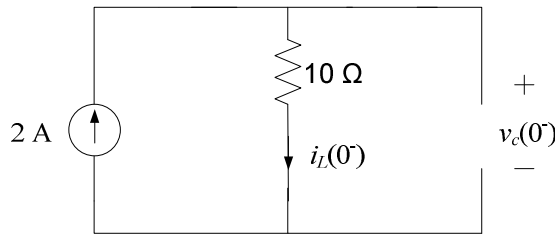
ÖRNEK PROBLEM 8.1:

Şekil.8.3’de verilen devrede anahtar uzun bir süredir kapalı konumda olup, $t=0$ anında açılmaktadır. $t \geq 0$ için devre akımının ve kapasitör geriliminin zamana bağlı ifadelerini bulunuz.



.Şekil.8.3: Problem 8.3 devresi

Çözüm: Devre uzun süre dc kaynağa maruz kaldığından, $t=0^-$ anında kapasitör şarj olmuş ve açık devre davranırken, bobin ise kısa devre davranmaktadır. Bu andaki kapasitör gerilimi ve bobin akımı Şekil.8.4’de, $t=0^-$ için verilen eşdeğer devreden bulunur:



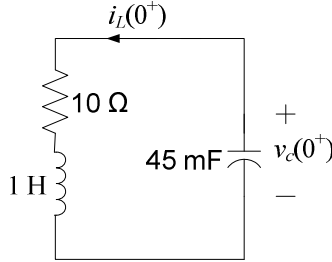
Şekil.8.4: $t=0^-$ için eşdeğer devre

$$i_L(0^-) = 2 \text{ A} \text{ ve } v_c(0^-) = 10 \cdot i_L(0^-) = 10 \cdot 2 = 20 \text{ V.}$$

Bobin akımı ve kapasitör geriliminin süreklilik koşullarındanda,

$$i_L(0^-) = i_L(0) = i_L(0^+) = 2 \text{ A.}, \quad v_c(0^-) = v_c(0) = v_c(0^+) = 20 \text{ V.}$$

elde edilir. Bobin akımının türevinin $t = 0^+$ anındaki değeri ise Şekil.8.5’de $t = 0^+$ için verilen eşdeğer devreden bulunur:



Şekil.8.5: $t = 0^+$ için eşdeğer devre

Bu anda kaynak devre dışı olduğundan, devre bu ana kadar kapasitör ve bobin üzerinde depolanmış enerji ile uyarılacaktır. Başka bir ifade ile seri RLC devresinin doğal cevabı elde edilecektir.

Bobin akımı, aynı zamanda kapasitör terminal akımına eşit olduğundan,

$$i_L(0^+) = -C \frac{v_c(0^+)}{dt} \Rightarrow \frac{v_c(0^+)}{dt} = -\frac{i_L(0^+)}{C} = -\frac{2}{45 \times 10^{-3}} = -44.44 \text{ V/s.}$$

bulunur. Kapasitör akımının negatif terminalden girdiğine dikkat ediniz. Bobin akımının türevinin değeri ise, KGY uygulanarak elde edilebilir:

$$\frac{di_L(0^+)}{dt} = 20 - 2 \cdot 10 = 0 \text{ A/s.}$$

olacaktır. Verilen devre için,

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{10}{2} = 5 \text{ Np/s} \quad \text{ve} \quad w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0.045}} = 4.714 \text{ rad/s}$$

$\alpha > w_0$ olduğundan cevap, salınımsız sönüm biçiminde olmalıdır. Devreye ilişkin doğal frekanslar,

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - w_0^2} = -3.333 \text{ Np/s} \quad \text{ve} \quad s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - w_0^2} = -6.666 \text{ Np/s}$$

bulunur. Buna göre devre akımı,

$$i(t) = K_1 e^{-3.33t} + K_2 e^{-6.66t}$$

olacaktır. Başlangıç koşulları uygulanırsa

$$i(0) = K_1 + K_2 = 2 \quad \text{ve} \quad \frac{di(0^+)}{dt} = 0 = -3.33K_1 - 6.66K_2$$

ve bu iki denklemin çözümünden de

$$K_1 = 4 \quad \text{ve} \quad K_2 = -2$$

elde edileceğinden, akımın ifadesi

$$i(t) = 4e^{-3.33t} - 2e^{-6.66t} \quad \text{A, } t \geq 0$$

bulunur. Kapasitör geriliminin ifadesi ise,

$$v_c(t) = K_3e^{-3.33t} + K_4e^{-6.66t}$$

ifadesinde, kapasitör gerilimine ilişkin başlangıç değerleri kullanılarak bulunabilir:

$$v_c(0) = 20 = K_3 + K_4 \quad \text{ve} \quad \frac{v_c(0^+)}{dt} = -44.44 = -3.33K_3 - 6.66K_4$$

eşitliklerinden

$$K_3 = 26.65 \quad \text{ve} \quad K_4 = -6.65$$

olacağından,

$$v_c(t) = 26.65e^{-3.33t} - 6.65e^{-6.66t} \quad \text{V., } t \geq 0$$

bulunur. Kapasitör geriliminin ve bobin akımının her ikisini de başlangıç değerleri kullanılarak belirlemeye gerek olmadığına dikkat ediniz. Devre akımı aynı zamanda kapasitör terminal akımı olduğundan, ilgili terminal eşitliği kullanılarak kapasitör gerilimi belirlenebilir. Kapasitör gerilimi ve devre akımının zamana göre değişimlerini gösteren grafikler Şekil.8.6'da görülmektedir.

Şekil.8.6: Kapasitör gerilimi ve devre akımının salınımsız sönümü

8.2.3. SALINIMLI SÖNÜM

$\alpha < w_0$ için, (8.21) ve (8.22) eşitlikleri ile tanımlı doğal frekanslar birbirinin eşleniği olan karmaşık değerler olacaktır. Bu ifadeleri,

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - w_0^2} = -\alpha + \sqrt{-(w_0^2 - \alpha^2)} = -\alpha + j\sqrt{(w_0^2 - \alpha^2)} = -\alpha + jw_d \quad (8.26)$$

ve

$$s_2 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - w_0^2} = -\alpha - \sqrt{-(w_0^2 - \alpha^2)} = -\alpha - j\sqrt{(w_0^2 - \alpha^2)} = -\alpha - jw_d \quad (8.27)$$

şeklinde yazmak mümkün olduğundan, devre akımının ifadesi,

$$i(t) = K_1 e^{(-\alpha + jw_d)t} + K_2 e^{(-\alpha - jw_d)t} = e^{-\alpha t} (K_1 e^{+jw_d t} + K_2 e^{-jw_d t})$$

olacaktır. Bu ifadede Euler özdeşliği kullanılarak,

$$i(t) = e^{-\alpha t} (K_1 (\cos w_d t + j \sin w_d t) + K_2 (\cos w_d t - j \sin w_d t))$$

ve

$$i(t) = e^{-\alpha t} ((K_1 + K_2) \cos w_d t + j(K_1 - K_2) \sin w_d t)$$

yazılabilir. Burada,

$$C_1 = K_1 + K_2 \quad \text{ve} \quad C_2 = j(K_1 - K_2)$$

kullanılarak,

$$i(t) = e^{-\alpha t} (C_1 \cos w_d t + C_2 \sin w_d t) \quad (8.28)$$

elde edilir. Burada,

$$w_d = \sqrt{w_0^2 - \alpha^2} \quad (8.29)$$

sönüm frekansı olarak adlandırılır.

$w_0 > \alpha$ hali, $C < 4L/R^2$ olması durumunda gerçekleşecektir. C_1 ve C_2 sabitleri, devre akımının ve devre akımının türevinin $t = 0^+$ daki başlangıç değerleri kullanılarak elde edilir.

ÖRNEK PROBLEM 8.2:

Örnek Problem 8.1 devresini, kapasitans değerini 0.025 F alarak çözünüz.

Cözüm: Kapasitör gerilimi ve bobin akımının $t = 0^-$ daki değerleri değişmeyecek ancak, türevlerinin değeri değişecektir.

$$i_L(0^-) = i_L(0) = i_L(0^+) = 2 \text{ A.}, \quad v_c(0^-) = v_c(0) = v_c(0^+) = 20 \text{ V.}$$

$$i_L(0^+) = -C \frac{v_c(0^+)}{dt} \Rightarrow \frac{v_c(0^+)}{dt} = -\frac{i_L(0^+)}{C} = -\frac{2}{25 \times 10^{-3}} = -80 \text{ V/s.}$$

olacaktır. Verilen devre için,

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{10}{2} = 5 \text{ Np/s} \quad \text{ve} \quad w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0.025}} = 6.324 \text{ rad/s}$$

$\alpha < w_0$ olduğundan cevap, salınımlı sönüm biçiminde olmalıdır. Devreye ilişkin doğal frekanslar,

$$s_1 = -\alpha - w_d = -5 - j3.87 \text{ Np/s} \quad \text{ve} \quad s_2 = -\alpha + w_d = -5 + j3.87 \text{ Np/s}$$

olacaktır. Buna göre devre akımı,

$$i(t) = e^{-5t} (C_1 \cos 3.87t + C_2 \sin 3.87t)$$

bulunur. Başlangıç değerlerini kullanarak,

$$i(0) = 2 = C_1 \quad \text{ve} \quad \frac{di(0^+)}{dt} = -80 = -5C_1 + 3.87C_2; \quad C_2 = -18.09,$$

ve

$$i(t) = e^{-5t} (2 \cos 3.87t - 18.09 \sin 3.87t) \text{ A.}, \quad t \geq 0$$

elde edilir. Devre akımının grafiği

8.2.4. KRİTİK SÖNÜM

$\alpha = w_0$ için, (8.21) ve (8.22) eşitlikleri ile tanımlı doğal frekanslar birbirine eşit olacaktır:

$$s_1 = s_2 = -\alpha \quad (8.30)$$

Bu hal için devre akımının ifadesi,

$$i(t) = K_1 e^{-\alpha t} + K_2 e^{-\alpha t} = (K_1 + K_2) e^{-\alpha t} = K e^{-\alpha t} \quad (8.31)$$

şeklini alır ki, bu ifade, tek bir sabit içerdiğinden ikinci mertebe bir diferansiyel denklemin çözümü olamaz. $\alpha = w_0$ için (8.9) eşitliği

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + 2\alpha \frac{di(t)}{dt} + \alpha^2 i(t) = 0 \quad (8.32)$$

olarak yeniden düzenlenebilir. Bu eşitlikde

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{di(t)}{dt} + \alpha i(t) \right) + \alpha \left(\frac{di(t)}{dt} + \alpha i(t) \right) = 0 \quad (8.33)$$

ve

$$g(t) = \frac{di(t)}{dt} + \alpha i(t) \quad (8.34)$$

yazılırsa,

$$\frac{dg(t)}{dt} + \alpha g(t) = 0 \quad (8.35)$$

elde edilir. Bu birinci mertebe diferansiyel denklemin çözümü

$$g(t) = K_1 e^{-\alpha t} \quad (8.36)$$

formundadır. Bu ifade (8.34) eşitliğinde kullanılarak,

$$\frac{di(t)}{dt} + \alpha i(t) = K_1 e^{-\alpha t} \quad \text{veya} \quad e^{\alpha t} \left(\frac{di(t)}{dt} + \alpha i(t) \right) = K_1 \quad (8.37)$$

bulunur ki bu ifade de

$$\frac{d}{dt} (i(t) e^{\alpha t}) = K_1 \quad (8.38)$$

biçiminde yazılabilir. (8.38) eşitliğinin her iki tarafının integrali alınarak da,

$$e^{\alpha t} i(t) = K_1 t + K_2 \quad \text{veya} \quad i(t) = e^{-\alpha t} (K_1 t + K_2) \quad (8.39)$$

elde edilir. Burada K_2 integral sabitidir. $w_0 = \alpha$ hali, $C = 4L/R^2$ olması durumunda gerçekleşecektir ve salınımlı sönüm ile salınımsız sönüm arasındaki sınır değeridir.

ÖRNEK PROBLEM 8.3:

Örnek Problem 8.1 devresini, kapasitans değerini 0.04 F alarak çözünüz.

.Şekil.8.8: Problem 8.3 devresi

Cözüm: Kapasitör gerilimi ve bobin akımının $t = 0^-$ daki değerleri değişmeyecek ancak, türevlerinin değeri değişecektir.

$$i_L(0^-) = i_L(0) = i_L(0^+) = 2 \text{ A.}, \quad v_c(0^-) = v_c(0) = v_c(0^+) = 20 \text{ V.}$$

$$i_L(0^+) = -C \frac{v_c(0^+)}{dt} \Rightarrow \frac{v_c(0^+)}{dt} = -\frac{i_L(0^+)}{C} = -\frac{2}{40 \times 10^{-3}} = -50 \text{ V/s.}$$

olacaktır. Verilen devre için,

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{10}{2} = 5 \text{ Np/s} \quad \text{ve} \quad w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0.025}} = 5 \text{ rad/s}$$

$\alpha = w_0$ olduğundan cevap, kritik sönüm biçiminde olmalıdır. Buna göre devre akımı,

$$i(t) = e^{-5t}(tK_1 + K_2)$$

formunda olup, başlangıç değerlerini kullanarak,

$$i(0) = 2 = K_2 \quad \text{ve} \quad \frac{di(0^+)}{dt} = -50 = -5K_2 + K_1; \quad K_1 = -40,$$

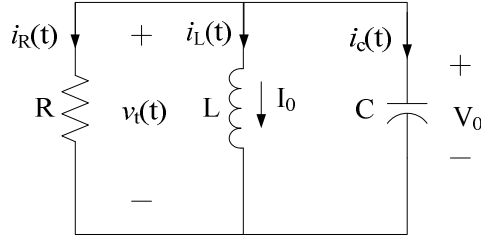
bulunur. Böylece akım da,

$$i(t) = e^{-5t}(2 - 40t) \text{ A.}, \quad t \geq 0$$

olacaktır. Devre akımının grafiği

8.3. PARALEL RLC DEVRESİNİN DOĞAL CEVABI

Şekil.8.8’de görülen paralel RLC devresinde, bobin başlangıç akımı ve kapasitör başlangıç gerilimi



Şekil.8.9: Paralel RLC

$$i(0) = I_0 \quad (8.40)$$

$$v_c(0) = V_0 = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^0 i(t) dt \quad (8.41)$$

dir. Bu anda bobin ve kapasitör üzerinde depolanmış enerji miktarları,

$$w_L(0) = \frac{1}{2} L I_0^2 \quad (8.42)$$

ve

$$w_c(0) = \frac{1}{2} C V_0^2 \quad (8.43)$$

olup, $t > 0$ için KAY uygulanarak,

$$\frac{v(t)}{R} + I_0 + \frac{1}{L} \int_0^t v(t) dt + C \frac{dv(t)}{dt} = 0 \quad (8.44)$$

elde edilir ve bu eşitliğin her iki tarafının türevi alınırsa

$$\frac{1}{R} \frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{L} v(t) + C \frac{d^2 v(t)}{dt^2} = 0 \quad (8.45)$$

bulunur. Katsayılar düzenlenerek paralel RLC devresinde, devre elemanları üzerindeki gerilim cinsinden aşağıdaki ikinci mertebe diferansiyel denklem bulunur:

$$\frac{d^2 v(t)}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{LC} v(t) = 0 \quad (8.46)$$

(8.46) eşitliği katsayılar dışında (8.9) eşitliği ile aynıdır. Bu durumda çözüm formları aynı ancak devrelerin doğal frekans ifadeleri farklı olacaktır. Buna göre $v(t) = Ke^{st}$ ifadesi, (8.46) eşitliğinde kullanılarak bu diferansiyel denkleme ilişkin karakteristik eşitlik

$$s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC} = 0 \quad (8.47)$$

ve karakteristik denkleme ilişkin kökler de,

$$s_1 = -\frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad (8.48)$$

ve

$$s_2 = -\frac{1}{2RC} - \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad (8.49)$$

elde edilir. Seri RLC devresinde olduğu gibi, doğal frekanslar

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - w_0^2} \quad \text{ve} \quad s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - w_0^2}$$

olarak ifade edilirse, paralel RLC devresine ilişkin neper frekansı ve rezonans frekansları

$$\alpha = \frac{1}{2RC} \quad (8.50)$$

ve

$$w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (8.51)$$

şeklinde elde edilir. Görüldüğü gibi, paralel RLC devresinde, sadece neper frekansının ifadesi değişmektedir. Bunun dışında, α ve w_0 'ın değerlerine bağlı olarak çözüm;

1. $\alpha > w_0 \Rightarrow$ salınımsız sönüm: $v(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t}$
2. $\alpha < w_0 \Rightarrow$ salınımlı sönüm $v(t) = K_1 e^{-\alpha t} (K_1 \cos w_d t + K_2 \sin w_d t)$
3. $\alpha = w_0 \Rightarrow$ kritik sönüm $v(t) = e^{-\alpha t} (tK_1 + K_2)$

formunda olacaktır. K_1 ve K_2 değerleri yine kapasitör geriliminin ve kapasitör geriliminin türevinin başlangıç değerleri kullanılarak bulunur. Paralel elemanlar üzerindeki gerilimlerin eşit olduğunu göz önünde bulundurarak Şekil.8.9'da verilen devrede $t = 0^+$ için KAY'sı uygulanırsa,

$$i_R(0^+) + i_L(0^+) + i_C(0^+) = 0 \quad (8.52)$$

ve

$$\frac{v(0^+)}{R} + I_0 + C \frac{dv(0^+)}{dt} = 0 \quad (8.53)$$

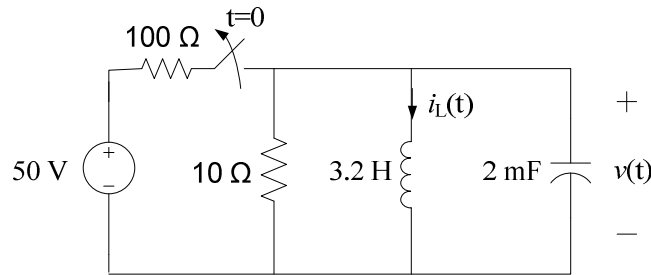
elde edilir. Bu eşitlikten, bilinmeyen katsayıların belirlenmesi için gereken ikinci başlangıç koşulu,

$$\frac{dv(0^+)}{dt} = -\frac{I_0}{C} - \frac{v(0^+)}{RC} \quad (8.54)$$

olarak bulunur.

ÖRNEK PROBLEM 8.4:

Şekil.8.9’da verilen devrede S anahtarı uzun süredir kapalı olup, $t = 0$ da açılmaktadır. Bobin akımının ve kapasitör geriliminin $t \geq 0$ için zamana bağlı ifadelerini bulunuz.



.Şekil.8.9: Problem 8.4 devresi

Cözüm: $t = 0^-$ anına kadar bobin 50 V’luk gerilim kaynağına uzun süre maruz kaldığından bu anda kısa devre davranmaktadır. Bu andaki bobin akımı,

$$i_L(0^-) = \frac{50}{100} = 0.5 \text{ A.},$$

ve kapasitör gerilimi

$$v(0^-) = 0 \text{ V.},$$

bulunur. Kapasitör gerilimi ve bobin akımının süreklilik koşulundan da,

$$i_L(0^-) = i_L(0) = i_L(0^+) = 0.5 \text{ A.}, \text{ ve } v(0^-) = v(0) = v(0^+) = 0 \text{ V.},$$

olacaktır. (8.45) eşitliğinden de,

$$\frac{dv(0^+)}{dt} = -\frac{I_0}{C} = -\frac{0.5}{0.002} = -250 \text{ V/s},$$

elde edilir. Neper ve rezonans frekansları

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2(10)(0.002)} = 25 \text{ Np/s} \quad \text{ve} \quad w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{(3.2)(0.002)}} = 12.5 \text{ rad/s}$$

olduğundan, $\alpha > w_0$ ve cevap, salınımsız sönüm formundadır. Doğal frekanslar (8.21) ve (8.22) eşitliklerinden,

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - w_0^2} = -3.35 \quad \text{ve} \quad s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - w_0^2} = -46.65$$

ve gerilim,

$$v(t) = K_1 e^{-3.35t} + K_2 e^{-46.65t}$$

bulunur. Kapasitör gerilimi için yukarıda elde edilen başlangıç değerleri kullanılırsa,

$$v(0) = K_1 + K_2 = 0 \quad \text{ve} \quad \frac{dv(0^+)}{dt} = -3.35K_1 - 46.65K_2 = -250$$

ve bu iki denklem çözülerek

$$K_1 = -5.29, \quad K_2 = 5.29$$

bulunacağından, gerilimin ifadesi de

$$v(t) = 5.29(-e^{-3.35t} + e^{-46.65t}) \text{ V.}, \quad t \geq 0$$

bulunur. Bu gerilim aynı zamanda bobin terminal gerilimi olduğundan, bobin akımı, bobin terminal eşitliğinden elde edilebilir. Ancak burada, bobin başlangıç değerlerini kullanarak bobin akımının ifadesi bulunacaktır. Bunun için, bobin akımının türevinin $t = 0^+$ 'daki değeri gereklidir. Bobin terminal eşitliği $t = 0^+$ için yazılırsa,

$$v(0^+) = L \frac{di_L(0^+)}{dt} = 0 \quad \text{ve} \quad \frac{di_L(0^+)}{dt} = 0$$

bulunur. Bobin akımı da salınımsız sönüm formunda olacağından,

$$i_L(t) = K_3 e^{-3.35t} + K_4 e^{-46.65t}$$

ve başlangıç değerleri uygulanarak,

$$i_L(0) = K_3 + K_4 = 0.5 \quad \text{ve} \quad \frac{di_L(0^+)}{dt} = -3.35K_3 - 46.65K_4 = 0$$

ve böylece,

$$K_3 = 0.538 \quad \text{ve} \quad K_4 = -0.0386$$

bulunur. Bobin akımı da,

$$i_L(t) = 0.538e^{-3.35t} - 0.0386e^{-46.65t} \text{ A.}, t \geq 0$$

elde edilir.

ÖRNEK PROBLEM 8.5:

Şekil.8.9’da görülen devrede 10 Ω ’luk direncin 25 Ω ’luk bir dirençle değiştirilmesi durumunda kapasitör geriliminin $t \geq 0$ için zamana bağlı ifadesini bulunuz

Cözüm: Kapasitör gerilimi başlangıç değerleri değişmeyecek, ancak neper frekansı değeri değişeceğinden cevabın formu değişecektir:

$$v(0^+) = 0, \quad \frac{dv(0^+)}{dt} = -250 \text{ V/s.}$$

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2(25)(0.002)} = 10 \text{ Np/s}, \quad w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 12.5 \text{ rad/s.}$$

$\alpha < w_0$ olduğundan cevap salınımlı sönüm formundadır;

$$v(t) = e^{-\alpha t} (K_1 \cos w_d t + K_2 \sin w_d t); \quad w_d = \sqrt{w_0^2 - \alpha^2} = 7.5,$$

$$v(t) = e^{-10t} (K_1 \cos 7.5t + K_2 \sin 7.5t).$$

Başlangıç değerlerini kullanarak

$$K_1 = 0 \quad \text{ve} \quad -10K_1 + 7.5K_2 = -250 \quad \Rightarrow \quad K_2 = 33.33$$

elde edilir. Böylece kapasitör geriliminin ifadesi de

$$v(t) = 33.33e^{-10t} \sin 7.5t \text{ V.}, t \geq 0 \quad \text{bulunur.}$$

ÖRNEK PROBLEM 8.6:

Şekil.8.9’da görülen devrede 10 Ω ’luk direncin 20 Ω ’luk bir dirençle değiştirilmesi durumunda kapasitör geriliminin $t \geq 0$ için zamana bağlı ifadesini bulunuz

Cözüm: Kapasitör gerilimi başlangıç değerleri değişmeyecek, ancak neper frekansı değeri değişeceğinden cevabın formu değişecektir:

$$v(0^+) = 0, \quad \frac{dv(0^+)}{dt} = -250 \text{ V/s.}$$

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2(20)(0.002)} = 12.5 \text{ Np/s,} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 12.5 \text{ rad/s.}$$

$\alpha = \omega_0$ olduğundan cevap kritik sönüm formundadır;

$$v(t) = e^{-\alpha t} (tK_1 + K_2); \quad v(t) = e^{-12.5t} (tK_1 + K_2).$$

Başlangıç değerlerini kullanarak

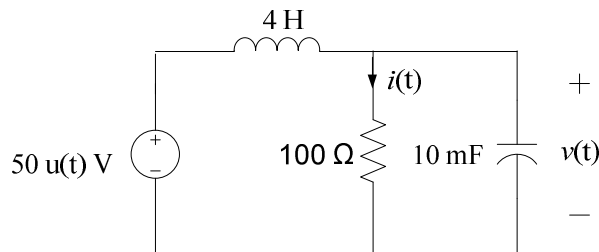
$$K_2 = 0 \quad \text{ve} \quad -12.5K_2 + K_1 = -250 \Rightarrow K_1 = -250$$

elde edilir. Böylece kapasitör geriliminin ifadesi de

$$v(t) = -250te^{-12.5t} \text{ V., } t \geq 0 \text{ bulunur.}$$

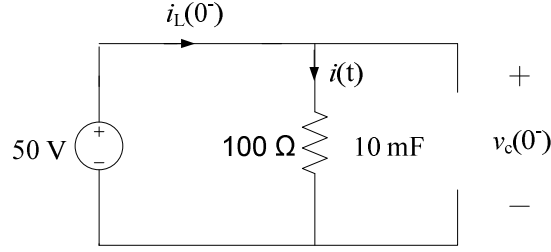
ÖRNEK PROBLEM 8.7:

Şekil.8.10’da verilen devrede 100 Ω ’luk direnç üzerindeki akımın $t > 0$ için zamana bağlı ifadesini bulunuz.



Şekil.8.10: Problem 8.7 devresi

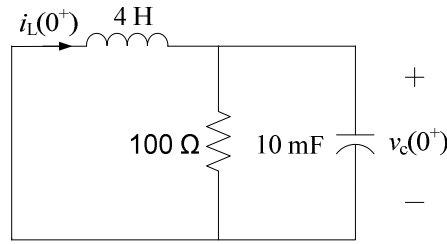
Cözüm: Gerilim kaynağı $t = 0$ anına kadar devrededir ve bu anda devre dışı kalarak kısa devre gibi davranır. Yine, $t = 0^-$ anında, bobin ve kapasitör uzun süre dc kaynağa maruz kaldıklarından, bobin kısa devre ve kapasitör açık devre davranmaktadır. Bobin akımı ve kapasitör geriliminin bu andaki değerleri $t = 0^-$ için Şekil 8.11’de verilen eşdeğer devreden bulunur.

Şekil.8.11: $t = 0^-$ için eşdeğer devre

$$i_L(0^-) = i_L(0) = i_L(0^+) = \frac{50}{100} = 0.5 \text{ A.},$$

$$v_c(0^-) = v_c(0) = v_c(0^+) = 100i_L(0^-) = 100 \cdot 0.5 = 50 \text{ V.}$$

Kapasitör geriliminin türevi için başlangıç değeri $t = 0^+$ anı için Şekil.8.12’de verilen eşdeğer devreden bulunur.

Şekil.8.12: $t = 0^+$ için eşdeğer devre

KAY kullanılarak,

$$\frac{v_c(0^+)}{R} + C \frac{dv_c(0^+)}{dt} = i_L(0^+); \quad \frac{dv_c(0^+)}{dt} = \frac{0.5}{0.01} - \frac{50}{(100)(0.01)} = 50 - 50 = 0 \text{ V/s,}$$

bulunur. Verilen devrenin neper ve rezonans frekansları

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2(100)(0.01)} = 0.5 \text{ Np/s,} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{4(0.01)}} = 5 \text{ rad/s.},$$

$\omega_0 > \alpha$ olduğundan cevap salınımlı sönüm formunda olacaktır. Sönüm frekansı

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = 4.975 \text{ rad/s ve,}$$

$$v_c(t) = e^{-\alpha t} (K_1 \cos \omega_d t + K_1 \sin \omega_d t); \quad v_c(t) = e^{-0.5t} (K_1 \cos 4.975t + K_2 \sin 4.975t)$$

elde edilir. Başlangıç değerleri kullanılarak belirsiz katsayıların hesaplanması için

$$50 = K_1 \quad \text{ve} \quad 0 = -0.5K_1 + 4.975K_2$$

denklemleri elde edilir. Buradan,

$$K_1 = 50 \quad \text{ve} \quad K_2 = 5.025 \quad \text{ve,}$$

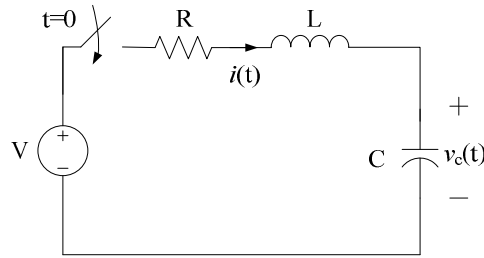
$$v_c(t) = e^{-0.5t} (50 \cos 4.975t + 5.025 \sin 4.975t) \text{ V.}, \quad t \geq 0$$

elde edilir. Direnç üzerindeki akım, direnç ve kapasitör paralel bağlı olduklarından,

$$i(t) = \frac{v_c(t)}{100} = e^{-0.5t} (0.5 \cos 4.975t + 0.05025 \sin 4.975t) \text{ A.}, \quad t > 0 \text{ olacaktır.}$$

8.4. SERİ RLC DEVRESİNİN BASAMAK CEVABI

Bir dc kaynağın, bir t anında devreye girmesiyle elde edilen cevap, basamak cevabı olarak adlandırılır. Şekil.8.13'de görülen devredeki anahtarın $t=0$ anında kapandığını düşünersek, $t \geq 0$ için KGY'nı uygulayarak,



Şekil.8.13: Seri RLC devresi basamak cevabı

$$i(t)R + L \frac{di(t)}{dt} + v_c(t) = V \quad (8.55)$$

ve kapasitör terminal eşitliği,

$$i(t) = C \frac{dv_c(t)}{dt} \quad (8.56)$$

ile bu ifadenin türevi

$$\frac{di(t)}{dt} = C \frac{d^2v_c(t)}{dt^2} \quad (8.57)$$

(8.55) eşitliğinde kullanılarak da,

$$\frac{d^2 v_c(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{1}{LC} v_c(t) = \frac{V}{LC} \quad (8.58)$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklemin homejen çözümü,

$$\frac{d^2 v_c(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{1}{LC} v_c(t) = 0 \quad (8.59)$$

denkleminin çözümüdür. (8.59) eşitliği, (8.12) eşitliği ile aynı olup, Çözümde aynı olmalıdır. Buna göre;

$\alpha > w_0$ için:

$$v_c(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t} \quad (\text{salınımsız sönüm}) \quad (8.60)$$

$w_0 > \alpha$ için:

$$v_c(t) = e^{-\alpha t} (K_1 \cos w_d t + K_2 \sin w_d t) \quad (\text{salınlı sönüm}) \quad (8.61)$$

$w_0 = \alpha$ için:

$$v_c(t) = e^{-\alpha t} (tK_1 + K_2) \quad (\text{kritik sönüm}) \quad (8.62)$$

biçiminde olacaktır. Burada, α , w_0 , w_d , s_1 ve s_2 , seri RLC devresinin doğal cevabında tanımlanan parametrelerdir. Problemin homojen olmayan çözümü de diferansiyel denklem çözüm metodu ile kolaylıkla belirlenebilir. Ancak burada, birinci mertebe devrelerin analizinde, basamak cevabını bulurken edindiğimiz bilgi ile, homojen olmayan çözümün zorlama çözüm olduğunu kolayca söyleyebiliriz. Bu demektir ki, anahtar kapandıktan uzun süre sonra, devre değişkeninin kaynak tarafından zorlandığı değer, homojen olmayan çözümü verecektir. Verilen devreden açıkça görüldüğü gibi, kapasitör dc kaynağa uzun süre maruz kaldığında kaynak gerilimini şarj olacak ve açık devre davranacaktır. O halde, (8.59) eşitliğinin tam çözümü, α ve w_0 değerlerine bağlı olarak;

$\alpha > w_0$ için:

$$v_c(t) = v_c(\infty) + K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t} \quad (\text{salınımsız sönüm}) \quad (8.61)$$

$w_0 > \alpha$ için:

$$v_c(t) = v_c(\infty) + K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t} e^{-\alpha t} (K_1 \cos w_d t + K_2 \sin w_d t) \quad (\text{salınlı sönüm}) \quad (8.61)$$

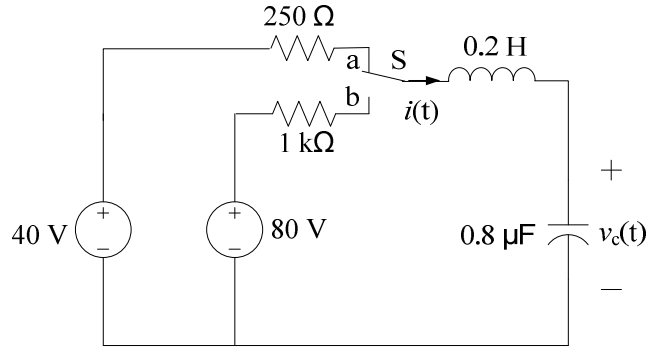
$w_0 = \alpha$ için:

$$v_c(t) = v_c(\infty) + e^{-\alpha t}(tK_1 + K_2) \text{ (kritik sönüm)} \quad (8.62)$$

formunda olacaktır. K_1 ve K_2 sabitlerinin değerleri yine kapasitör geriliminin başlangıç değerleri kullanılarak elde edilen iki lineer cebirsel denklem yardımı ile bulunur. Bu ifadelerde, Şekil.8.13’de verilen devre için $v_c(\infty)$, kaynak gerilimi değeri V olacaktır. Ancak, ifadelerin daha genel bir formda yazılması amacıyla bu gösterim tercih edilmiştir.

ÖRNEK PROBLEM 8.8:

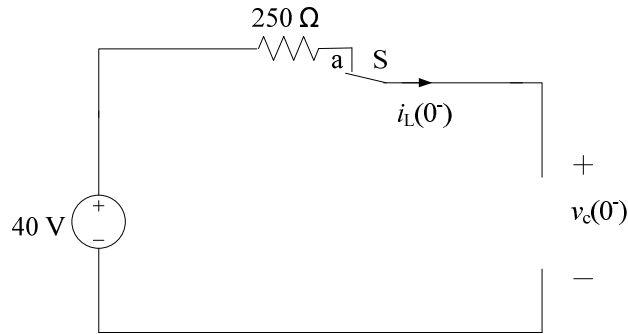
Şekil.8.14’de görülen devrede S anahtarı uzun süredir ‘a’ konumundadır ve $t=0$ ’da ‘b’ konumuna geçmektedir. Kapasitör gerilimi ve devre akımının $t \geq 0$ için zamana bağlı ifadelerini bulunuz.



Şekil.8.14: Problem 8.8 devresi

Cözüm:

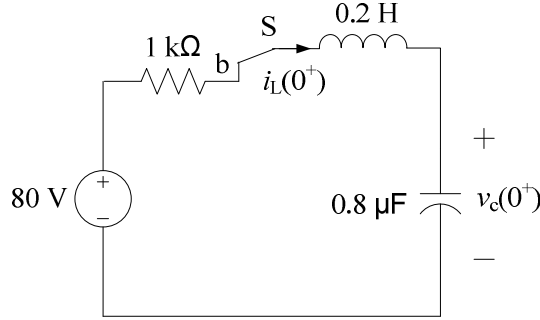
Kapasitör ve bobin uzun süre 40 V’luk dc kaynağa maruz kaldığından, $t=0^-$ ’da kapasitör açık devre ve bobin kısa devre davranmaktadır. Şekil.8.15’de $t=0^-$ için verilen eşdeğer devreden kapasitör gerilimi ve bobin akımının başlangıç değerleri bulunur



Şekil.8.15: $t=0^-$ anında devrenin eşdeğeri

$$i_L(0^-) = i_L(0) = i_L(0^+) = 0 \quad \text{ve} \quad v_c(0^-) = v_c(0) = v_c(0^+) = 40 \text{ V.}$$

Kapasitör gerilimi ve devre akımının türevlerinin $t = 0^+$ anındaki değerleri de Şekil.8.16'da verilen $t = 0^+$ anındaki eşdeğer devreden bulunur.



Şekil.8.16: $t = 0^+$ anında devrenin eşdeğeri

$t = 0^+$ için KGY uygulanırsa,

$$1000 \cdot i_L(0^+) + 0.2 \cdot \frac{di_L(0^+)}{dt} + v_c(0^+) = 80; \quad 0.2 \cdot \frac{di_L(0^+)}{dt} + 40 = 80$$

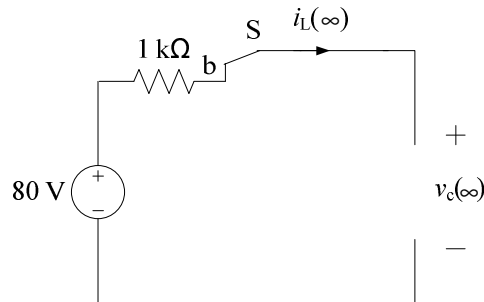
$$\frac{di_L(0^+)}{dt} = \frac{80 - 40}{0.2} = 200 \text{ A/s,}$$

ve kapasitör terminal eşitliğinden de,

$$i_L(0^+) = C \frac{dv_c(0^+)}{dt}; \quad \frac{dv_c(0^+)}{dt} = \frac{i_L(0^+)}{C} = 0 \text{ V/s.}$$

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{1000}{2(0.2)} = 2500 \text{ Np/s,} \quad w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{(0.2)(0.8 \times 10^{-6})}} = 2500 \text{ rad/s}$$

olduğundan cevap kritik sönüm formunda olmalıdır. Son olarak, devrenin zorlama cevabı Şekil.8.17'de $t \rightarrow \infty$ için verilen eşdeğer devreden bulunur. Bu anda, kapasitör ve bobin, bu kez 80 V'luk dc kaynağa maruz kaldıklarından, tekrar bobin kısa devre ve kapasitör açık devre davranmaktadır.



Şekil.8.17: $t \rightarrow \infty$ için devrenin eşdeğeri

$$v_c(\infty) = 80 \text{ V.}, \text{ ve } i_L(\infty) = 0 \text{ A.}$$

Böylece, kapasitör gerilimi ve bobin akımının ifadeleri, belirsiz katsayılarla birlikte,

$$v_c(t) = v_c(\infty) + e^{-\alpha t} (tK_1 + K_2); \quad v_c(t) = 80 + e^{-2500t} (tK_1 + K_2)$$

$$i_L(t) = i_L(\infty) + e^{-\alpha t} (tK_3 + K_4); \quad i_L(t) = 0 + e^{-2500t} (tK_3 + K_4)$$

olarak elde edilir. Başlangıç değerleri kullanılarak da kapasitör gerilimi için

$$40 = 80 + K_2 \quad \text{ve} \quad -2500K_2 + K_1 = 0$$

ve bobin akımı için de,

$$0 = K_4 \quad \text{ve} \quad -2500K_4 + K_3 = 200$$

eşitlikleri bulunur. Bu eşitliklerin çözümünden

$$K_1 = -1 \times 10^6, \quad K_2 = -40, \quad K_3 = 200 \text{ ve } K_4 = 0$$

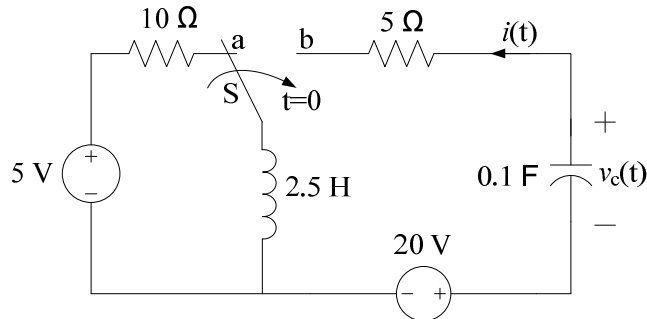
ve aranan cevaplar da,

$$v_c(t) = 80 - 40e^{-2500t} (2500t + 1) \text{ V.}, \quad t \geq 0, \quad i_L(t) = 200te^{-2500t} \text{ A.}, \quad t \geq 0$$

bulunur.

ÖRNEK PROBLEM 8.9:

Şekil.8.18'de verilen devre uzun süredir bu konumda çalışmıştır. S anahtarları $t = 0$ 'da 'a' konumundan 'b' konumuna geçtiğine göre, $t \geq 0$ için kapasitör geriliminin ve devre akımının zamana bağlı ifadelerini bulunuz ve grafiklerini çiziniz.



Şekil.8.18: Problem 8.9 devresi

Çözüm:

$t = 0^-$ 'da bobin kısa devredir ve üzerinden geçmekte olan akım,

$$i_L(0^-) = \frac{5}{10} = 0.5 \text{ A}$$

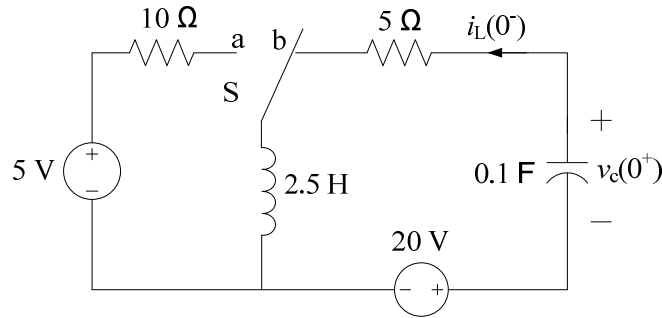
dir. Bu anda kapasitör gerilimi

$$v_c(0^-) = 0$$

dır. Bobin akımı ve kapasitör geriliminin süreklilik koşullarından,

$$i_L(0^-) = i_L(0) = i_L(0^+) = 0.5 \text{ ve } v_c(0^-) = v_c(0) = v_c(0^+) = 0$$

olur. Anahtar konum değiştirdikten hemen sonra, $t = 0^+$ anında devrenin eşdeğeri Şekil.8.19'da görüldüğü gibi olacaktır.



Şekil.8.19: $t = 0^+$ için eşdeğer devre

Bu devrede KAY uygulanırsa,

$$5i_L(0^+) + 2.5 \frac{di_L(0^+)}{dt} - 20 - v_c(0^+) = 0; \quad 5(0.5) + 2.5 \frac{di_L(0^+)}{dt} - 20 - 0 = 0, \text{ ve}$$

$$\frac{di_L(0^+)}{dt} = \frac{20 - 2.5}{2.5} = 7 \text{ A/s}$$

bulunur. Kapasitör terminal eşitliği $t = 0^+$ için kullanılarakda,

$$C \frac{dv_c(0^+)}{dt} = -i_L(0^+); \quad \frac{dv_c(0^+)}{dt} = -\frac{i_L(0^+)}{C} = -\frac{0.5}{0.1} = -5 \text{ V/s}$$

elde edilir. $t \geq 0$ için aktif olan seri RLC devresi için

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{5}{(2)(2.5)} = 1 \text{ Np/s} \quad \text{ve} \quad w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{(2.5)(0.1)}} = 2 \text{ rad/s},$$

$w_0 > \alpha$ olduğundan, cevap salınımlı sönüm formundadır. Sönüm frekansı,

$$w_d = \sqrt{w_0^2 - \alpha^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3} \text{ rad/s ve}$$

$t \rightarrow \infty$ için kapasitör -20 V değerine şarj olup açık devre davranacağından bu anda devre akımı sıfırdır.

$$v_c(\infty) = -20 \text{ V.}, \quad i_L(\infty) = 0.$$

Böylece, belirsiz katsayılarla birlikte çözüm,

$$v_c(t) = v_c(\infty) + e^{-\alpha t} (K_1 \cos w_d t + K_2 \sin w_d t); \quad v_c(t) = -40 + e^{-t} (K_1 \cos \sqrt{3}t + K_2 \sin \sqrt{3}t)$$

$$i_L(t) = i_L(\infty) + e^{-\alpha t} (K_3 \cos w_d t + K_4 \sin w_d t); \quad i_L(t) = 0 + e^{-t} (K_3 \cos \sqrt{3}t + K_4 \sin \sqrt{3}t)$$

bulunur. Başlangıç değerleri kullanılarak,

$$v_c(0) = -40 + K_1 = 0 \quad \text{ve} \quad \frac{dv_c(0^+)}{dt} = -K_1 + \sqrt{3}K_2 = -5,$$

$$i_L(0) = K_3 = 0.5 \quad \text{ve} \quad \frac{di_L(0^+)}{dt} = -K_3 + \sqrt{3}K_4 = 7$$

ve bu eşitliklerin çözümünden de bilinmeyen katsayılar

$$K_1 = 40, \quad K_2 = \frac{35}{\sqrt{3}}, \quad K_3 = 0.5 \quad \text{ve} \quad K_4 = \frac{7.5}{\sqrt{3}}$$

olarak belirlenir. Aranan devre değişkenlerinin ifadeleri de bu katsayılarla birlikte, aşağıdaki gibi belirlenir.

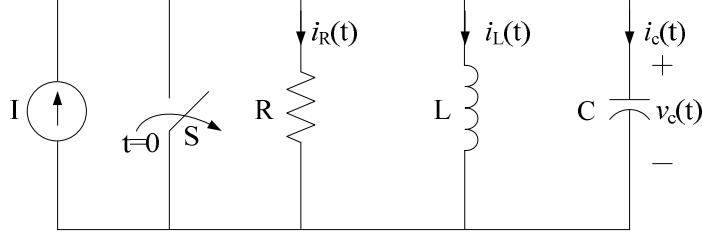
$$v_c(t) = -40 + e^{-t} (40 \cos \sqrt{3}t + \frac{35}{\sqrt{3}} \sin \sqrt{3}t) \text{ V.}, \quad t \geq 0 \quad \text{ve}$$

$$i_L(t) = e^{-t} (0.5 \cos \sqrt{3}t + \frac{7.5}{\sqrt{3}} \sin \sqrt{3}t) \text{ A.}, \quad t \geq 0.$$

Kapasitör gerilimini bulduktan sonra, devre akımının ifadesi, akım için başlangıç değerlerini kullanmak yerine, kapasitör terminal eşitliği kullanılarak da elde edilebilirdi. Akımın ifadesini, bu metotla da bulunuz.

8.4. PARALEL RLC DEVRESİNİN BASAMAK CEVABI

Şekil.8.20’de görülen paralel RLC devresinde S anahtarının $t = 0$ anında açıldığını düşünelim.



Şekil.8.20: Paralel RLC devresi basamak cevabı

$t \geq 0$ için KAY’ı uygulırsı,ı

$$\frac{v_c(t)}{R} + i_L(t) + C \frac{dv_c(t)}{dt} = I \quad (8.63)$$

elde edilir. Bu ifadeyi bir tek devre değışkeni cinsinden yazmak amacıyla bobin terminal eşitliğini,

$$v_c(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \quad (8.64)$$

ve türevini

$$\frac{dv_c(t)}{dt} = L \frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} \quad (8.65)$$

(8.63) eşitliğinde kullanıldığında,

$$\frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{di_L(t)}{dt} + \frac{1}{LC} i_L(t) = \frac{I}{LC} \quad (8.66)$$

diferansiyel denklemini elde edilir. Bu denklemin homejen çözümü,

$$\frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{di_L(t)}{dt} + \frac{1}{LC} i_L(t) = 0 \quad (8.67)$$

denkleminin çözümüdür. (8.67) eşitliği, (8.46) eşitliği ile aynı olup, çözümde aynı olmalıdır. Buna göre;

$\alpha > \omega_0$ için:

$$i_L(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t} \quad (\text{salınımsız sönüm}) \quad (8.68)$$

$w_0 > \alpha$ için:

$$i_L(t) = e^{-\alpha t} (K_1 \cos w_d t + K_2 \sin w_d t) \quad (\text{salınımlı sönüm}) \quad (8.69)$$

$w_0 = \alpha$ için:

$$i_L(t) = e^{-\alpha t} (tK_1 + K_2) \quad (\text{kritik sönüm}) \quad (8.70)$$

biçiminde olacaktır. Burada, α , w_0 , w_d , s_1 ve s_2 , paralel RLC devresinin doğal cevabında tanımlanan parametrelerdir. Seri RLC devrede olduğu gibi, homojen olmayan çözüm, zorlama çözüm olacaktır. Şekil.8.20’de görüldüğü gibi, bobin dc kaynağa uzun süre maruz kaldığında kısa devre olacak ve akımı, kaynak akımına eşit olacaktır. Bu durumda, (8.59) eşitliğinin tam çözümü, α ve w_0 değerlerine bağlı olarak;

$\alpha > w_0$ için:

$$i_L(t) = v_c(\infty) + K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t} \quad (\text{salınımsız sönüm}) \quad (8.71)$$

$w_0 > \alpha$ için:

$$i_L(t) = i_L(\infty) + e^{-\alpha t} (K_1 \cos w_d t + K_2 \sin w_d t) \quad (\text{salınımlı sönüm}) \quad (8.72)$$

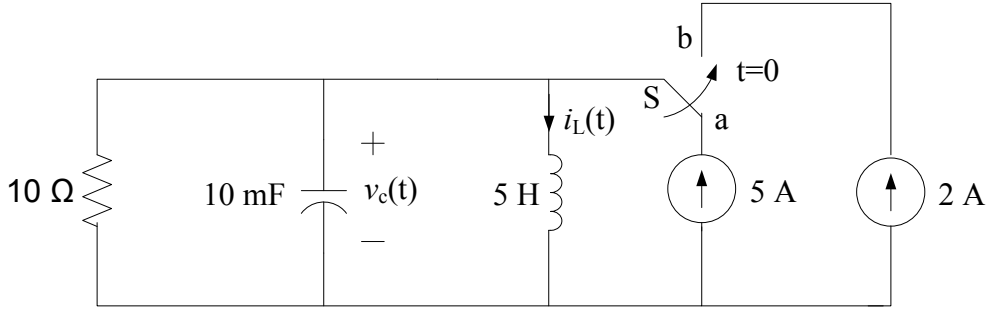
$w_0 = \alpha$ için:

$$i_L(t) = i_L(\infty) + e^{-\alpha t} (tK_1 + K_2) \quad (\text{kritik sönüm}) \quad (8.73)$$

formunda olacaktır. K_1 ve K_2 sabitlerinin değerleri, bobin akımının başlangıç değerleri kullanılarak bulunur. Paralel devre için bobin kısa devre akımının değeri I olmakla birlikte, genel ifadeler elde etmek amacıyla bu değer $i_L(\infty)$ olarak belirtilmiştir.

ÖRNEK PROBLEM 8.10:

Şekil.8.21’de görülen devrede S anahtarı uzun süredir ‘a’ konumunda iken, $t = 0$ ’da ‘b’ konumuna geçmektedir. Bobin akımının ve kapasitör geriliminin $t \geq 0$ için zamana bağlı ifadelerini bulunuz.



Şekil.8.21: Problem 8.10 devresi

Cözüm:

$$i_L(0^-) = i_L(0) = i_L(0^+) = 5 \text{ A}, \text{ ve } v_c(0^-) = v_c(0) = v_c(0^+) = 0 \text{ V}.$$

$t = 0^+$ anında 5 A'lık kaynak devre dışı olmakta ancak 2 A'lık kaynak devreye girmektedir. Bu an için KAY uygulanırsa,

$$i_L(0^+) + i_c(0^+) + i_R(0^+) = 2; \quad i_L(0^+) + C \frac{dv_c(0^+)}{dt} + \frac{v_c(0^+)}{R} = 2 \text{ ve}$$

$$\frac{dv_c(0^+)}{dt} = \frac{1}{0.01} \left(2 - \frac{0}{10} - 5 \right) = -300 \text{ V/s}.$$

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2(10)(0.01)} = 5 \text{ Np/s}, \text{ ve } w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{5(0.01)}} = 4.47 \text{ rad/s}.$$

$\alpha > w_0$ olduğundan cevap salınımsız sönüm formunda olacaktır.

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - w_0^2} = -5 + \sqrt{25 - 20} = -2.76, \quad s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - w_0^2} = -5 - \sqrt{25 - 20} = -7.23$$

Anahtar kapandıktan uzun süre sonra bobin tekrar kısa devre davranacağından bu anda kapasitör gerilimi tekrar sıfır olacaktır.

$$v_c(\infty) = 0.$$

$$v_c(t) = v_c(\infty) + K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t}; \quad v_c(t) = K_1 e^{-2.76t} + K_2 e^{-7.23t}.$$

Kapasitör geriliminin başlangıç değerleri kullanılarak aşağıdaki eşitlikler bulunur:

$$v_c(0) = K_1 + K_2 = 0; \quad \frac{dv_c(0^+)}{dt} = -2.76K_1 - 7.23K_2 = -300$$

Bu iki denklem çözülerek $K_1 = -67.1$ ve $K_2 = 67.1$ bulunur. Böylece kapasitör gerilimi

$$v_c(t) = 67.1(e^{-7.23t} - e^{-2.76t}) \text{ V. } t \geq 0$$

sonucu elde edilir. Bobin akımının ifadesi

$$i_L(t) = i_L(0) + \frac{1}{L} \int_0^t v_c(t) dt$$

ifadesinden bulunabilir. Burada, akım ifadesindeki bilinmeyen katsayıları, başlangıç değerlerini kullanarak aynı sonucu bulalım:

$$v_L(0^+) = v_c(0^+) = L \frac{di_L(0^+)}{dt}; \quad \frac{di_L(0^+)}{dt} = \frac{v_c(0^+)}{L} = 0 \text{ A/s}$$

ve $t \rightarrow \infty$ bobin tekrar kısa devre davranacağından

$i_L(\infty) = 2 \text{ A}$ olacaktır. Bobin akımında salınımsız sönüm formundadır:

$$i_L(t) = i_L(\infty) + K_3 e^{s_1 t} + K_4 e^{s_2 t}; \quad i_L(t) = 2 + K_3 e^{-2.76t} + K_4 e^{-7.23t}$$

Başlangıç değerleri ile,

$$i_L(0) = 2 + K_3 + K_4 = 5 \quad \Rightarrow \quad K_3 + K_4 = 3$$

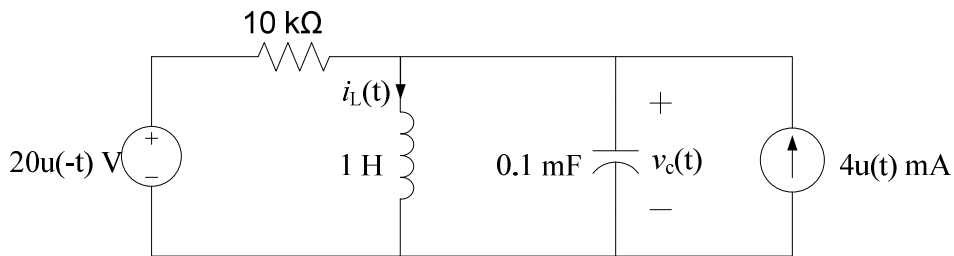
$$\frac{di_L(0^+)}{dt} = 0 = -2.76K_3 - 7.23K_4$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitliklerin çözümü ile $K_3 = 4.85$, $K_4 = -1.85$ ve bobin akımı da,

$$i_L(t) = 2 + 4.85e^{-2.76t} - 1.85e^{-7.23t} \text{ A., } t \geq 0 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK PROBLEM 8.11:

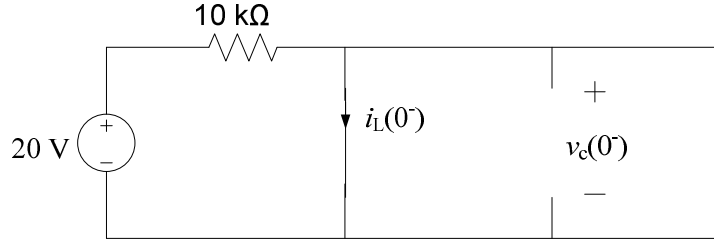
Şekil.8.22’de verilen devrede direnç üzerindeki akımın $t > 0$ için, zamana bağlı ifadesini bulunuz.



Şekil.8.22: Problem 8.11 devresi

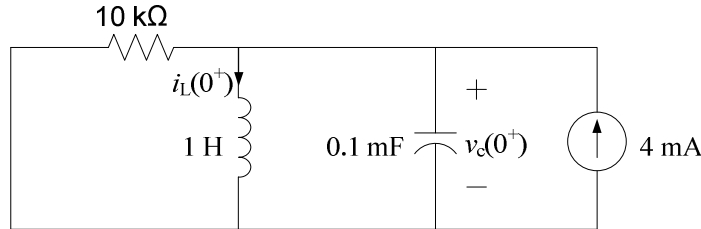
Çözüm:

$t = 0$ anına kadar gerilim kaynağı aktiftir ve $t = 0$ 'da devre dışı kalacaktır. Bu andan itibaren gerilim kaynağı kısa devre olur. Akım kaynağı ise $t = 0$ anına kadar devre dışıdır ve bu ana kadar açık devredir. $t = 0$ 'da akım kaynağı aktif olacaktır. Şekil.8.23'de görülen, $t = 0^-$ için devrenin eşdeğerinden bobin akımı ve kapasitör geriliminin başlangıç değerleri bulunur:

Şekil.8.23: $t = 0^-$ için eşdeğer devre

$$i_L(0^-) = \frac{20}{10 \times 10^3} = 2 \text{ mA} \quad \text{ve} \quad v_c(0^-) = 0.$$

Şekil.8.24'de verilen $t = 0^+$ için eşdeğer devreden de, kapasitör gerilimi ve bobin akımının türevlerinin bu andaki değerleri bulunur:

Şekil.8.24: $t = 0^+$ için eşdeğer devre

KAY'nı uygulayarak,

$$i_L(0^+) + \frac{v_c(0^+)}{10 \times 10^3} + 0.1 \times 10^{-3} \frac{dv_c(0^+)}{dt} = 4 \times 10^{-3} \Rightarrow \frac{dv_c(0^+)}{dt} = \frac{4 \times 10^{-3} - 2 \times 10^{-3}}{0.1 \times 10^{-3}} = 20 \text{ V/s ve}$$

$$v_c(0^+) = v_L(0^+) = L \frac{di_L(0^+)}{dt} \Rightarrow \frac{di_L(0^+)}{dt} = 0.$$

$t \rightarrow \infty$ için, bobin tekrar kısa devre davranacağından,

$$i_L(\infty) = 4 \text{ mA, ve } v_c(\infty) = 0 \text{ V. bulunur.}$$

Verilen devre için,

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2 \cdot (10 \times 10^3) \cdot (0.1 \times 10^{-3})} = 0.5 \text{ Np/s}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{1 \cdot (0.1 \times 10^{-3})}} = 100 \text{ rad/s}$$

olduğundan cevap salınımlı sönüm formundadır ($\omega_0 > \alpha$). Sönüm frekansı ise

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \sqrt{1 \times 10^4 - 0.25} \approx 100 \text{ rad/s dir.}$$

Kapasitör gerilimi ve bobin akımının ifadeleri, bilinmeyen sabitlerle birlikte,

$$v_c(t) = v_c(\infty) + e^{-\alpha t} (K_1 \cos \omega_d t + K_2 \sin \omega_d t); \quad v_c(t) = e^{-0.5t} (K_1 \cos 100t + K_2 \sin 100t)$$

$$i_L(t) = i_L(\infty) + e^{-\alpha t} (K_3 \cos \omega_d t + K_4 \sin \omega_d t); \quad i_L(t) = 4 \times 10^{-3} + e^{-0.5t} (K_3 \cos 100t + K_4 \sin 100t)$$

olacaktır. Başlangıç değerleri kullanıldığında,

$$v_c(0) = K_1 = 0 \quad \text{ve} \quad \frac{dv_c(0^+)}{dt} = 20 = -0.5K_1 + 100K_2,$$

$$i_L(0) = 2 \times 10^{-3} = 4 \times 10^{-3} + K_3 \quad \text{ve} \quad \frac{di_L(0^+)}{dt} = 0 = -0.5K_3 + 100K_4$$

elde edilir. Bu eşitliklerin çözümü ile $K_1 = 0$, $K_2 = 0.2$, $K_3 = -2 \times 10^{-3}$ ve $K_4 = -1 \times 10^{-5}$ ve

$$v_c(t) = 0.2e^{-0.5t} \sin 100t \text{ V.}, \quad t \geq 0 \quad \text{ve} \quad i_L(t) = 4 - e^{-0.5t} (2 \cos 100t + 0.01 \sin 100t) \text{ mA.},$$

$t \geq 0$ sonucu elde edilir. Direnç üzerindeki akım ise,

$$i_R = \frac{v_c(t)}{10 \times 10^3} = 0.02e^{-0.5t} \sin 100t \text{ mA.}, \quad t > 0 \text{ elde edilir.}$$

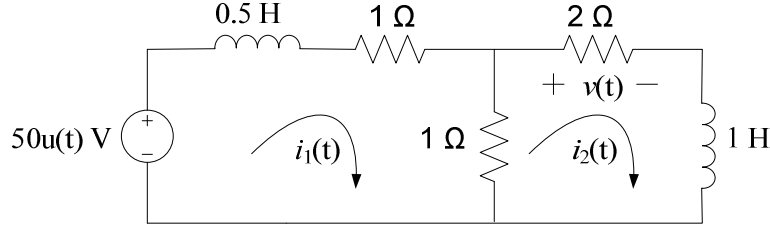
8.5. KARMAŞIK BAĞLI İKİNCİ MERTEBE RLC DEVRELER

Seri ve paralel RLC devreler sıklıkla kullanılan devreler olmakla birlikte, karmaşık bağlı devrelerin de aynı amaçlarla kullanılmaları mümkündür. Bu tip devrelere ilişkin parametreler için genel ifadeler elde etmek mümkün değildir. Bu nedenle, karmaşık devrelerin analizinde, devredeki bağımsız kaynaklar eşdeğer iç dirençleri ile değiştirilerek pasif hale getirildikten sonra, aranan devre değişkeni için diferansiyel denklem ve bu denkleme ait karakteristik eşitlik elde edilir. Karakteristik eşitliğin çözümünden bulunan doğal frekans değerlerine göre, aranan devre değişkeninin doğal cevabının formu belirlenir. Daha sonra devre değişkeninin zorlama cevabı elde edilir. Doğal cevap ve zorlama cevabın toplamı, ile

elde edilen tam cevaptaki belirsiz katsayılar, seri ve paralel RLC devrelerde olduğu gibi, devre değişkenine ilişkin başlangıç değerleri kullanılarak bulunur.

ÖRNEK PROBLEM 8.12:

Şekil.8.25’de verilen devrede $t > 0$ için, $v(t)$ gerilimini bulunuz.



Şekil.8.25: Problem 8.12 devresi

Cözüm: Kaynak $t = 0$ ’da aktif olacaktır. $t = 0^-$ iki bobin akımı da sıfırdır.

$$i_1(0^-) = i_1(0) = i_1(0^+) = 0, \quad i_2(0^-) = i_2(0) = i_2(0^+) = 0.$$

$t = 0^+$ için KGY uygulanırsa,

$$0.5 \frac{di_1(0^+)}{dt} + 2i_1(0^+) - i_2(0^+) = 50; \quad \frac{di_1(0^+)}{dt} = \frac{50}{0.5} = 100 \text{ A/s}$$

ve

$$\frac{di_2(0^+)}{dt} + 3i_2(0^+) - i_1(0^+) = 0; \quad \frac{di_2(0^+)}{dt} = 0 \text{ A/s}$$

bulunur. $t \rightarrow \infty$ için her iki bobin de kısa devre olacağından,

$$i_1(\infty) = \frac{50}{(2//1)+1} = \frac{50}{(5/3)} = 30 \text{ A},$$

ve akım bölücü devre eşitliğinden

$$i_2(\infty) = i_1(\infty) \frac{1}{1+2} = \frac{30}{3} = 10 \text{ A}$$

elde edilir. $t > 0$ için, gerilim kaynağını kısa devre yapıp, devrenin doğal cevabını elde etmek amacıyla, devreyi karakterize eden diferansiyel denklemi yazalım. Her iki çevride KGY uygulanarak,

$$2i_1(t) - i_2(t) + 0.5 \frac{di_1(t)}{dt} = 0 \quad \text{ve} \quad 3i_2(t) - i_1(t) + \frac{di_2(t)}{dt} = 0$$

2. eşitlikten elde edilen

$$i_1(t) = \frac{di_2(t)}{dt} + 3i_2(t); \quad \text{ve} \quad \frac{di_1(t)}{dt} = \frac{d^2i_2(t)}{dt^2} + 3\frac{di_2(t)}{dt}$$

ifadeleri 1. eşitlikte yerine yazılırsa,

$$2\left(\frac{di_2(t)}{dt} + 3i_2(t)\right) - i_2(t) + 0.5\left(\frac{d^2i_2(t)}{dt^2} + 3\frac{di_2(t)}{dt}\right) = 0; \quad \frac{d^2i_2(t)}{dt^2} + 7\frac{di_2(t)}{dt} + 11i_2(t) = 0$$

diferansiyel denklemi bulunur. Bu denklemin karakteristik eşitliği,

$$s^2 + 7s + 11 = 0$$

ve karakteristik eşitliğin kökleri de,

$$s_1 = -4.36 \quad \text{ve} \quad s_2 = -2.63$$

dür. Yani s_1 ve s_2 reel ve birbirinden farklıdır. O halde çözüm, salınımsız sönüm formundadır.

$$i_2(t) = i_2(\infty) + K_1e^{s_1t} + K_2e^{s_2t}; \quad i_2(t) = 10 - K_1e^{-4.36t} + K_2e^{-2.63t}$$

Akımın başlangıç değerleri kullanılırsa;

$$i_2(0) = 0 = 10 + K_1 + K_2 \quad \text{ve} \quad \frac{di_1(t)}{dt} = 100 = -4.36K_1 - 2.63K_2$$

denklemleri bulunur ve bu denklemlerin çözümünden de $K_1 = -42.6$, $K_2 = 32.6$ elde edilir. Böylece,

$$i_2(t) = 10 - 42.6e^{-4.36t} + 32.6e^{-2.63t} \quad \text{A., } t \geq 0 \quad \text{ve}$$

$$v(t) = 2i_2(t) = 20 - 85.2e^{-4.36t} + 65.2e^{-2.63t} \quad \text{V., } t > 0 \quad \text{sonucu elde edilir.}$$

PROBLEMLER

8.1. Bir seri RLC devresinde, devre akımının bağlı ifadesi

$$i(t) = e^{-0.5t}(2t - 0.5) \quad \text{A., } t \geq 0$$

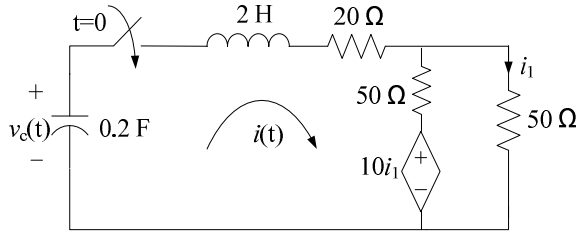
dır. $t = 0^+$ anında bobin üzerindeki gerilim 3.5 Volt olduğuna göre,

a) Devre elemanlarının değerlerini bulunuz.

b) Kapasitör geriliminin başlangıç değerini bulunuz.

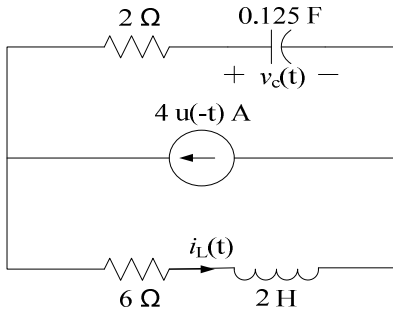
c) Kapasitör geriliminin zamana bağlı ifadesini bulunuz.

8.2. Şekil.8.26'da verilen devrede kapasitör üzerinde gerilim 20 V dur. $t \geq 0$ için devre akımının zamana bağlı ifadesini bulunuz.



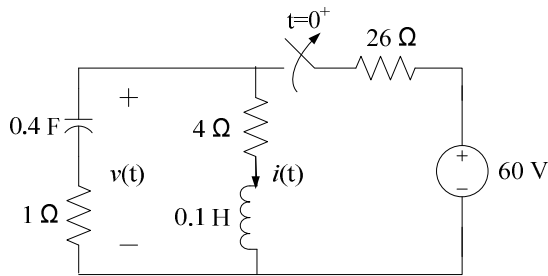
Şekil.8.26: Problem 8.2 devresi

8.3. Şekil.8.27’de verilen devrede $t \geq 0$ için, kapasitör gerilimi ve bobin akımının zamana bağlı ifadelerini bulunuz.



Şekil.8.27: Problem 8.3

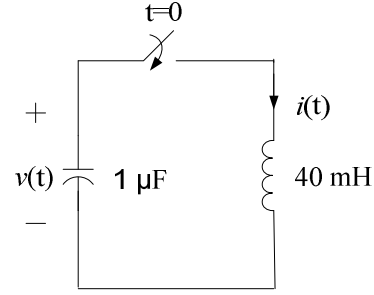
8.4. Şekil.8.28’de görülen devrede anahtar uzun süredir kapalı konumda olup, $t = 0$ ’da açılmaktadır. $i(t)$ akımını ve $v(t)$ gerilimini $t \geq 0$ için bulunuz.



Şekil.8.28: Problem 8.4

8.5. Şekil.8.29’da verilen devrede, anahtar kapanmadan önce kapasitör üzerinde ki gerilim 5 V’dur. Anahtar

$t = 0$ anında kapanmaktadır. $t \geq 0$ için devre akımının ifadesini bulunuz.



Şekil.8.29: Problem 8.5

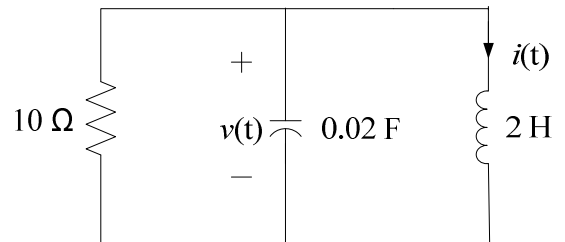
8.6. Bir paralel RLC devresinde, devre elemanları üzerindeki gerilimin zamana bağlı ifadesi

$$v(t) = 20e^{-400t} - 50e^{-1000t} \text{ V}, t \geq 0$$

dir. Bobinin değeri 1 H olduğuna göre,

- Devrenin neper frekansı α ve rezonans frekansı ω_0 değerlerini bulunuz.
- Kapasitör ve direnç değerlerini bulunuz.
- Kapasitör başlangıç gerilimi ve bobin başlangıç akım değerlerini bulunuz.

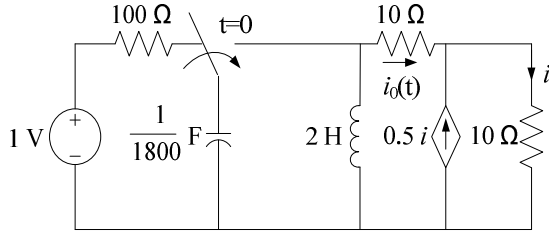
8.7. Şekil.8.30’da görülen devrede, $t = 0$ anında kapasitör gerilimi 70 V ve bobin akımı sıfırdır. $t \geq 0$ için kapasitör gerilimini ve bobin akımını bulunuz.



Şekil.8.30: Problem 8.7

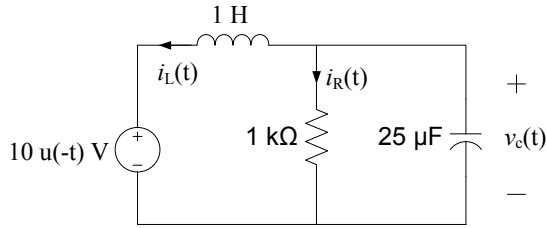
8.8. Şekil.8.31’de görülen devre uzun bir süredir çalışmaktadır. Anahtar $t = 0$ ’da konum değiştirdiğine göre, $t > 0$ için

direnç üzerindeki i_0 akımının zamana bağlı ifadesini bulunuz.



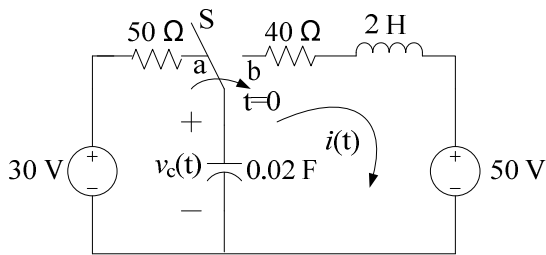
Şekil.8.31: Problem 8.8

8.9. Şekil.8.32'deki devrede $t \geq 0$ için kapasitör geriliminin ve bobin akımının zamana bağlı ifadesini bulunuz. $t > 0$ için kapasitör akımı ve direnç üzerindeki akımın zamana bağlı ifadelerini bulunuz.



Şekil.8.32: Problem 8.9

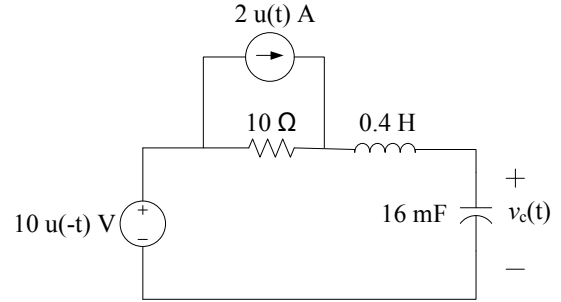
8.10. Şekil.8.33'de verilen devrede S anahtarı uzun bir süredir açık olup $t = 0$ 'da kapanmaktadır. $t \geq 0$ için devre akımının ifadesini bulunuz.



Şekil.8.33. Problem 8.10

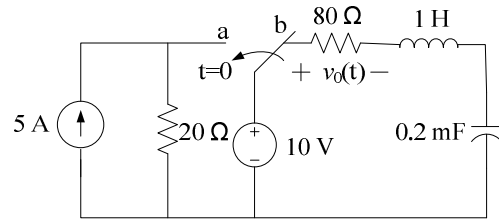
8.11. Şekil.8.34'de görülen devrede kapasitör terminal geriliminin zamana bağlı ifadesini bulunuz. Kapasitör geriliminin zamana göre değişim grafiğini

çizerek, gerilimin 15 V'a erişmesi için gerekli olan süreyi bu grafikten bulunuz.



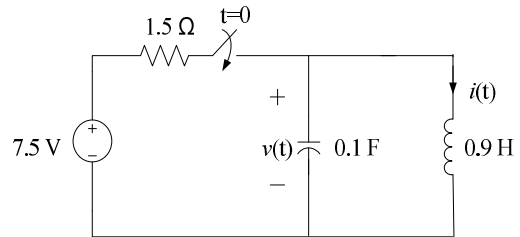
Şekil.8.34: Problem 8.11

8.12. Şekil.8.35'deki devrede S anahtarı uzun süredir 'b' konumunda olup, $t = 0$ 'da 'a' konumuna geçmektedir. $t > 0$ için direnç üzerindeki $v_0(t)$ gerilimini bulunuz.



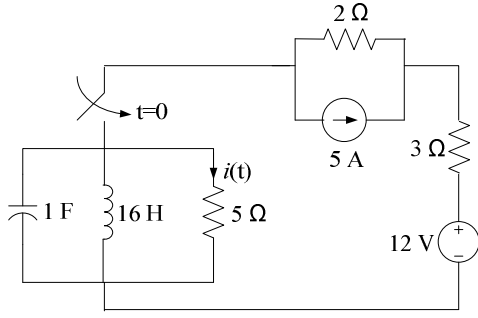
Şekil.8.35: Problem 8.12.

8.13. Şekil.8.36'da görülen devrede kapasitör başlangıç gerilimi 50 V ve bobin başlangıç akımı sıfırdır. Anahtar $t = 0$ 'da kapandığına göre, $t \geq 0$ için kapasitör gerilimini ve bobin akımını bulunuz.



Şekil.8.36: Problem 8.13.

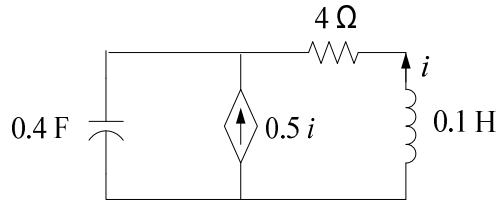
8.14. Şekil.8.37'de verilen devrede anahtar uzun bir süredir açık konumda olup, $t = 0$ 'da kapanmaktadır. $t > 0$ için $i(t)$ akımını bulunuz.



Şekil.8.37: Problem 8.14

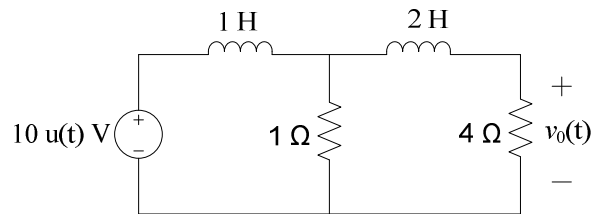
8.15. Şekil.8.37’de verilen devrede 16 H’lık bobinin 36 H’lık bir bobinle değiştirilmesi durumunda, $t > 0$ için $i(t)$ akımını bulunuz.

8.16. Şekil.8.38’de görülen devrede bobin üzerindeki akım $t = 0$ anında 4 A. ve kapasitör gerilimi de 8 V’dur. Akım kaynağının değerini $t > 0$ için bulunuz.



Şekil.8.38: Problem 8.16 devresi

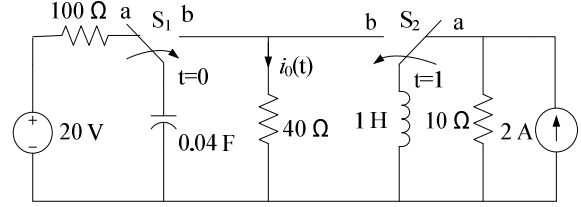
8.17. Şekil.8.39’da verilen devrede, $t > 0$ için $v_0(t)$ gerilimini bulunuz.



Şekil.8.39: Problem 8.17 devresi

8.18. Şekil.8.40’da verilen devrede, S_1 ve S_2 anahtarları uzun süredir ‘a’

konumlarındadır. S_1 anahtarı $t = 0$ ’da ‘b’ konumuna geçerken, S_2 anahtarı bundan 1 saniye sonra ‘b’ konumuna geçmektedir. $t > 0$ için $i_0(t)$ akımının ifadesini bulunuz.



Şekil.8.40: Problem 8.18 devresi

8.19. Şekil.7.44’de verilen devrede, $t > 0$ için, $i(t)$ akımını bulunuz.

Şekil.7.44: Problem 7.9 devresi

8.20. Şekil.7.45’de görülen devrede S_1

Şekil.7.45: Problem 7.10 devresi

9.1. 1.BÖLÜM ÇÖZÜMLERİ

1.1. -4.6 Kulon'luk bir elektron bulutu kaç adet elektron içerir, bulunuz.

Bir elektronun yükü -1.602×10^{-19} C olduğundan,

$$Q_T = n \cdot (-1.602 \times 10^{-19})$$

$$n = \frac{Q_T}{-1.602 \times 10^{-19}} = \frac{-4.6}{-1.602 \times 10^{-19}} = 2.8714107 \times 10^{19} \text{ adet elektron.}$$

1.2. Bir devre elemanı üzerindeki yük miktarı

a) $q(t) = t^2$ C,

b) $q(t) = 1 - e^{-5t}$ mC

c) $q(t) = 0.1 \sin 100t$

ise bu eleman üzerinden geçen akımı bulunuz.

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt};$$

a) $i(t) = \frac{d}{dt}(t^2) = 2t$ A,

b) $i(t) = 10^{-3} \cdot \frac{d}{dt}(1 - e^{-5t}) = 5 \times 10^{-3} \cdot e^{-5t}$ A $\Rightarrow i(t) = 5e^{-5t}$ mA.

c) $i(t) = \frac{d}{dt}(0.1 \sin 100t) = 10 \cos 100t$ A.

1.3. Bir devre elemanı üzerindeki akım

a) $i(t) = 10(1 + e^{-t})$ A, $q(0) = 0$

b) $i(t) = 50 \cos 100t$ A, $q(0) = 0$

c) $i(t) = e^{-t} \sin t$ mA, $q(0) = 1$ mC

ise, devre elemanı üzerindeki yük miktarının ifadesini bulunuz.

Herhangi bir t anındaki yük miktarını veren ifade bulunacağından, integralin üst sınırı t olmalıdır.

$$q(t) - q(0) = \int_0^t i(t) dt \Rightarrow q(t) = \int_0^t i(t) dt + q(0)$$

$$\text{a)} \quad q(t) = 10 \int_0^t (1 - e^{-t}) dt + 0 = 10(t + e^{-t}) \Big|_0^t = 10(t + e^{-t} - 1) \text{ C}$$

$$\text{b)} \quad q(t) = 50 \int_0^t \cos 100t dt + 0 = 0.5(\sin 100t) \Big|_0^t = 0.5 \sin 100t \text{ C}$$

$$\text{c)} \quad q(t) = 10^{-3} \int_0^t e^{-t} \sin t dt + 10^{-3} = 10^{-3} \cdot \frac{e^{-t}}{2} (-\sin t - \cos t) \Big|_0^t + 10^{-3}$$

$$q(t) = \frac{-e^{-t}(\sin t + \cos t) + 3}{2} \text{ mC.}$$

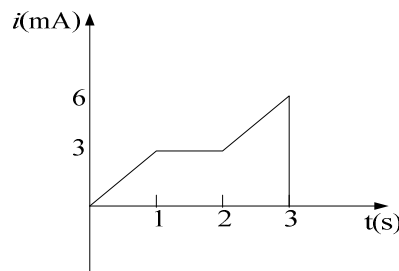
1.4. Bir devre elemanı üzerindeki akım

$$i(t) = 4t^2 - 2t + 1 \text{ mA}$$

ise 1 ve 3. saniyeler arasındaki zaman aralığında bu eleman üzerinden geçen yük miktarını bulunuz.

$$q(t) = 10^{-3} \int_1^3 (4t^2 - 2t + 1) dt = 10^{-3} \left(\frac{4t^3}{3} - t^2 + t \right) \Big|_1^3 = 28.67 \text{ mC}$$

1.5. Bir kaynağın devreye sağladığı akımın zamana bağlı değişimi şekilde verilmiştir. Bu kaynağın 3. saniye sonunda transfer ettiği yük miktarını bulunuz.



Akımın ifadesi,

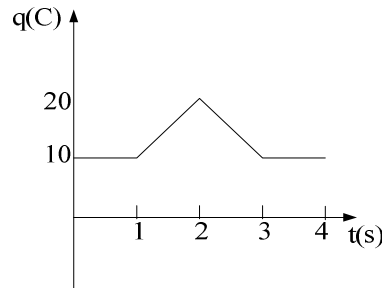
$$i(t) = \begin{cases} 3t & \text{mA,} & 0 \leq t \leq 1 \\ 3 & \text{mA,} & 1 \leq t \leq 2 \\ 3t - 3 & \text{mA,} & 2 \leq t < 3 \end{cases}$$

$$q(3) = 10^{-3} \cdot \left(\int_0^1 3t dt + \int_1^2 3 dt + \int_2^3 (3t - 3) dt \right) = 10^{-3} \cdot \left(\frac{3t^2}{2} \Big|_0^1 + 3t \Big|_1^2 + \frac{3t^2}{2} - 3t \Big|_2^3 \right) = 9 \text{ mC}.$$

Akım eğrisinin altında kalan alan, integral ifade kullanmadan bulunabilirdi:

$$q(t) = \frac{3 \cdot 1}{2} + 2 \cdot 3 + \frac{(6-3) \cdot (3-2)}{2} = 9 \text{ mC}.$$

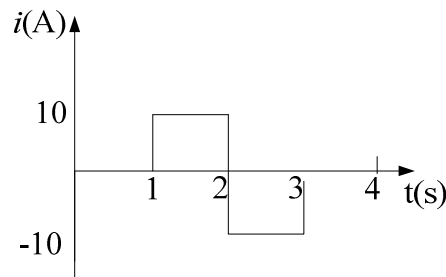
1.6. Bir devre elemanı üzerinden geçen yük miktarının zamana bağlı değişimi şekilde görüldüğü gibidir. Bu eleman üzerinden geçen akımın zamana göre değişim grafiğini çiziniz. Akımın zamana bağlı ifadesini bulunuz.



$$i(t) = \frac{dq}{dt},$$

$$\begin{aligned} 0 \leq t \leq 1 \text{ için } q \text{ eğrisinin eğimi sıfır,} & \quad i(t) = 0. \\ 1 \leq t \leq 2 \text{ için } q \text{ eğrisinin eğimi } 10, & \quad i(t) = 10 \text{ A.} \\ 2 \leq t \leq 3 \text{ için } q \text{ eğrisinin eğimi } -10, & \quad i(t) = -10 \text{ A.} \\ 3 \leq t \leq 4 \text{ için } q \text{ eğrisinin eğimi sıfır,} & \quad i(t) = 0. \end{aligned}$$

Buna göre akım grafiği aşağıda görüldüğü gibidir.



Akımın ifadesi grafikten elde edilebilir.

$$i(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < 1 \\ 10 \text{ A,} & 1 \leq t < 2 \\ -10 \text{ A,} & 2 \leq t < 3 \\ 0 & 3 \leq t \leq 4 \end{cases}.$$

Yük grafiğinden, yükün zamana bağlı ifadesi elde edilip, bu ifadeden akımı elde etmek de mümkündür:

$$q(t) = \begin{cases} 10 & C, 0 \leq t \leq 1 \\ 10t & C, 1 \leq t \leq 2 \\ -10t + 40 & C, 2 \leq t \leq 3 \\ 10 & C, 3 \leq t \leq 4 \end{cases} \quad \text{ve} \quad i(t) = \frac{dq}{dt} \quad \Rightarrow \quad i(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < 1 \\ 10 & A, 1 \leq t \leq 2 \\ -10 & A, 2 < t \leq 3 \\ 0 & 3 < t \leq 4 \end{cases}.$$

1.7. Bir devre elemanının pozitif terminalinden giren akımın ve terminal geriliminin ifadeleri

$$i(t) = 10 \cos 400t \text{ mA}, \quad v(t) = 2 \cos 400t \text{ V}$$

ise, bu devre elemanının gücünü ve 10 ms sonunda tükettiği enerjiyi bulunuz. ($t < 0$ için $i(t) = 0$ ve $v(t) = 0$)

$$p(t) = v(t)i(t) \quad \Rightarrow \quad p(t) = 20 \times 10^{-3} \cos^2 400t \text{ W} = 20 \cos^2 400t \text{ mW}.$$

$$w(t) = \int_0^t p(t) dt \quad \Rightarrow$$

$$w(t) = 10^{-3} \cdot \int_0^{10 \times 10^{-3}} 20 \cos^2 400t dt = 10^{-2} \int_0^{10 \times 10^{-3}} (1 + \cos 800t) dt = 0.1 \cdot (t + 1.25 \times 10^{-3} \sin 800t) \Big|_0^{10 \times 10^{-3}}$$

$$w(t) = 112.3 \times 10^{-6} \text{ J} = 112.3 \mu\text{J}.$$

1.8. Bir devre elemanının pozitif terminalinden giren akımın ve terminal geriliminin ifadeleri

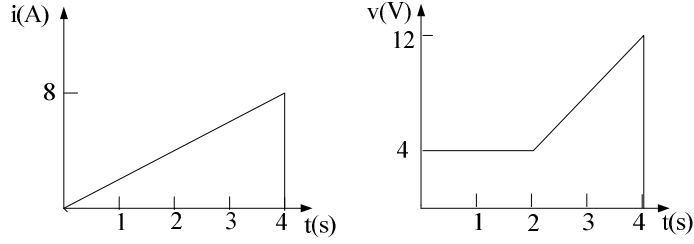
$$i(t) = 20e^{-t} \text{ A ve } v(t) = \cos 4t \text{ V}, \quad t \geq 0 \text{ ve } v(t) = i(t) = 0, \quad t < 0$$

ise, bu devre elemanı üzerinden geçen toplam yük miktarını ve harcanan toplam enerjiyi bulunuz.

$$q(t) = \int_0^{\infty} 20e^{-t} dt = -20e^{-t} \Big|_0^{\infty} = 20 \text{ C}.$$

$$w = \int_0^{\infty} p(t) dt = 20 \int_0^{\infty} e^{-t} \cos 4t dt = 20 \frac{e^{-t} (4 \sin 4t - \cos 4t)}{17} \Big|_0^{\infty} = 1.176 \text{ J}.$$

1.9. Aşağıdaki şekillerde verilen akım ve gerilim formları bir devre elemanı üzerindeki terminal akımı ve terminal gerilimi ise, bu elemanın güç ifadesini ve harcadığı toplam enerjiyi bulunuz..



Verilen akım ve gerilim grafiklerinden bu değişkenlerin ifadeleri yazılabilir:

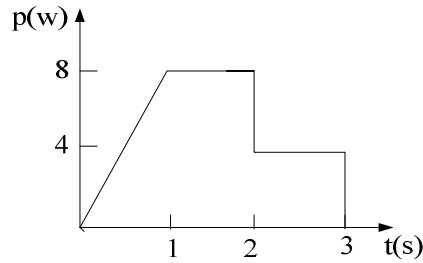
$$i(t) = 2t \text{ A}, \quad 0 \leq t \leq 4, \quad v(t) = \begin{cases} 4 \text{ V}, & 0 \leq t \leq 2 \\ 4t - 4 \text{ V}, & 2 \leq t \leq 4 \end{cases}$$

$$p(t) = v(t)i(t) \Rightarrow p(t) = 4 \cdot 2t = 8t \text{ W}, \quad 0 \leq t \leq 2$$

$$p(t) = (4t - 4) \cdot 2t = 8t^2 - 8t \text{ W}, \quad 2 \leq t \leq 4.$$

$$w = \int_0^2 8t dt + \int_2^4 (8t^2 - 8t) dt = 4t^2 \Big|_0^2 + \left(\frac{8t^3}{3} - 4t^2 \right) \Big|_2^4 = 117.33 \text{ J}.$$

1.10. Aşağıda, bir kaynağın güç eğrisi verilmiştir. Kaynağın, $0 \leq t \leq 3$ s aralığında ürettiği enerji miktarını bulunuz.



Toplam enerji güç eğrisi altındaki alana eşit olduğundan

$$w(3) = \frac{1 \cdot 8}{2} + 1 \cdot 8 + 1 \cdot 4 = 16 \text{ J}$$

veya,

$$p(t) = \begin{cases} 8t \text{ W}, & 0 \leq t < 1 \\ 8 \text{ W}, & 1 \leq t \leq 2 \\ 4 \text{ W}, & 2 < t \leq 3 \end{cases} \Rightarrow p(t) = \int_0^1 8t dt + \int_1^2 8 dt + \int_2^3 4 dt = 16 \text{ J}.$$

1.11. Bir devre elemanının terminal gerilimi, üzerinden geçen akımın integrali ile orantılı olup, orantı sabiti 3 dür. Bu elemanın üzerinden geçen akımın ifadesi,

$$i(t) = 5 + e^{-0.2t} \text{ mA}, \quad t \geq 0$$

ise, $t = 3$ s için gücünü bulunuz

Verilenler doğrultusunda,

$$\frac{v(t)}{\int i(t) dt} = 3 \quad \text{ve} \quad v(t) = 3 \int i(t) dt \quad \text{olmalıdır.}$$

O halde,

$$v(t) = 3 \times 10^{-3} \int (5 + e^{-0.2t}) dt = 3 \times 10^{-3} \cdot (5t - \frac{e^{-0.2t}}{0.2}) = 15 \times 10^{-3} (t - e^{-0.2t}) \text{ V.}$$

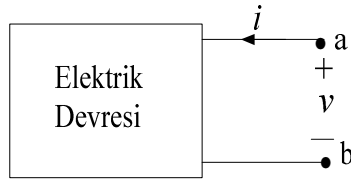
$$p(t) = v(t)i(t) = 15 \times 10^{-6} (t - e^{-0.2t}) \cdot (5 + e^{-0.2t}) = 15 \times 10^{-6} \cdot (5t + te^{-0.2t} - 5e^{-0.2t} - e^{-0.4t}),$$

$$p(3) = 204 \text{ } \mu\text{W.}$$

1.12. Şekilde görülen elektrik devresinin terminallerindeki akım ve gerilim,

- a) $i = 15 \text{ A}$, $v = 50 \text{ V}$,
- b) $i = -4 \text{ A}$, $v = 40 \text{ V}$,
- c) $i = -6 \text{ A}$, $v = -80 \text{ V}$.

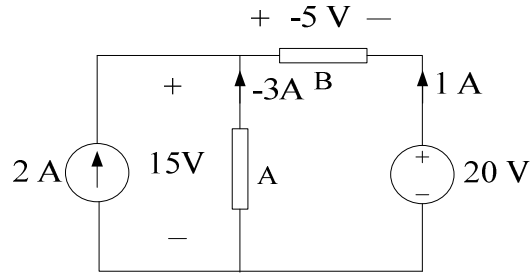
ise, devrenin gücünü bulunuz.



Akım pozitif terminalden girmektedir:

- a) $p = (15) \cdot (50) = 750 \text{ W}$ (devre güç tüketmektedir)
- b) $p = (-4) \cdot (40) = -160 \text{ W}$ (devre güç üretmektedir)
- c) $p = (-6) \cdot (-80) = 480 \text{ W}$ (devre güç tüketmektedir).

1.13. Şekilde verilen devrede devre elemanlarının güçlerini bulunuz.



$$P_A = -15(-3) = 45 \text{ W},$$

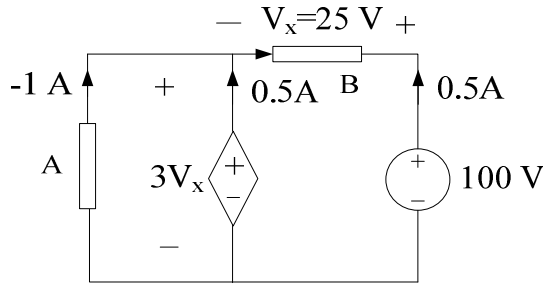
$$P_B = -(1)(-5) = 5 \text{ W},$$

$$P_{2A} = -(15)(2) = -30 \text{ W},$$

$$P_{20V} = -(20)(1) = -20 \text{ W}.$$

Buna göre A ve B elemanları güç tüketen elemanlar olup iki kaynağın ürettiği toplam 50 W gücü tüketmektedirler.

1.14. Şekilde verilen devrede, devre elemanlarının güçlerini bulunuz.



$$P_{100V} = -(100)(0.5) = -50 \text{ W},$$

$$P_{3V_x} = -(3V_x)(0.5) = -(3 \cdot 25)(0.5) = -37.5 \text{ W},$$

$$P_A = -(3V_x) \cdot (-1) = -(3 \cdot 25) \cdot (-1) = 75 \text{ W},$$

$$P_B = V_x \cdot (0.5) = 25 \cdot (0.5) = 12.5 \text{ W}.$$

1.15. Bir batarya ile 100 W'lık bir ampul 150 saat süre ile beslenebilmektedir. Bataryada depolanabilen enerji miktarını Jul cinsinden bulunuz.

$$\Delta w = p \cdot \Delta t \quad (t: \text{saniye ve } 150 \text{ saat} = 3600 \text{ saniye})$$

$$\Delta w: \text{bataryada depolanmış toplam enerji.}$$

$$\Delta w = 100 \cdot (150 \cdot 3600) = 54 \cdot 10^6 \text{ MJ}.$$

9.2. 2.BÖLÜM ÇÖZÜMLERİ

9.BÖLÜM: ÇÖZÜMLER

2.1. 1000 metre uzunluğunda ve 2 mm^2 kesit alanlı bakır telin direncini bulunuz.

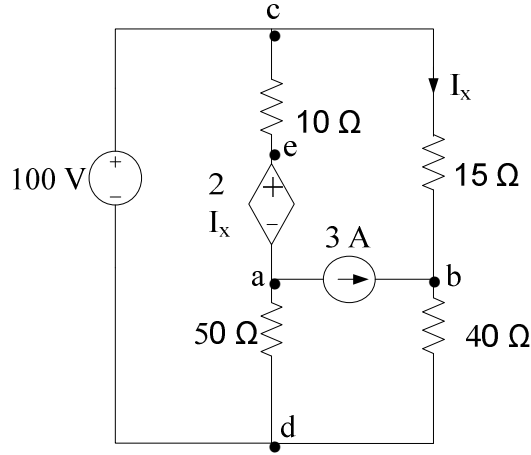
$$R = \rho_{cu} \frac{l}{A}; \quad \rho_{cu} = 0.0177 \frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}}.$$

$$R = 0.0177 \frac{1000}{2} = 8.85 \Omega.$$

2.2. 10Ω 'luk bir direnç üzerindeki gerilim 100 Volt ise direnç üzerinden geçen akımı ve direncin gücünü bulunuz.

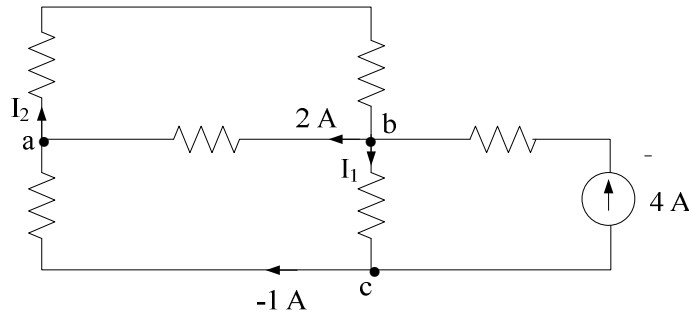
$$I = \frac{V}{R} = \frac{100}{10} = 1 \text{ A}, \quad P_R = I^2 R = 1^2 \cdot 10 = 10 \text{ W}.$$

2.3. Şekilde verilen devrede düğüm noktası, kol ve çevrim sayılarını bulunuz.



a, b, c, d ve e olmak üzere 4 düğüm noktası, 7 adet devre elemanı kullanıldığından yedi kol mevcuttur. Ancak, 10Ω direnç ve bağımlı kaynak seri bağlı olduklarından üzerlerinden aynı akım geçecektir. Bu nedenle, kol akımları düşünüldüğünde, devre 6 kol içermektedir. ceadc, cbaec, abd bağımsız çevrimleri (ya da gözleri) ve cdabc, ceabdc, cbdaec ve cbdc bağımlı çevrimleri olmak üzere 7 adet çevrim vardır.

2.4. Şekilde verilen devrede I_1 ve I_2 akımlarını bulunuz.



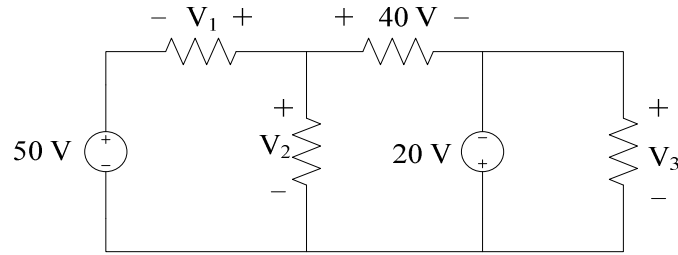
Çıkan akımlar pozitif ve giren akımlar negatif seçilip, c noktasında KAY uygulanırsa,

$$4 + (-1) - I_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad I_1 = 3 \text{ A.}$$

a noktasında KAY uygulanırsa,

$$I_2 - (-1) - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad I_2 = 1 \text{ A.}$$

2.5. Şekil.2.37’de verilen devrede V_1 , V_2 ve V_3 gerilimlerini bulunuz.



Saat dönüş yönünde ilerleyerek, 2. gözde KGY kullanılırsa,

$$-V_2 + 40 - 20 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_2 = 20 \text{ V.}$$

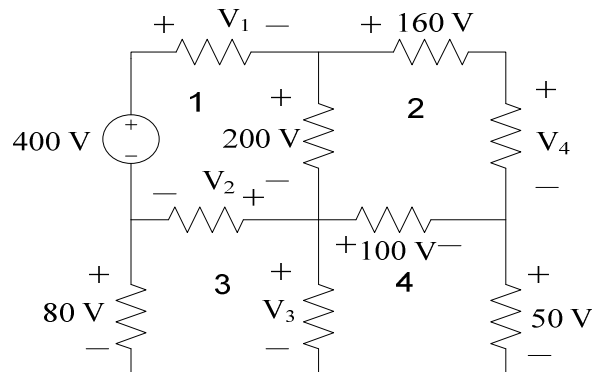
3. gözde yine KGY’nı uygulayarak,

$$20 + V_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_3 = -20 \text{ V}$$

ve 1. gözde de KGY uygulanırsa,

$$-50 - V_1 + V_2 = 0; \quad -50 - V_1 + 20 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_1 = -30 \text{ V.}$$

2.6. Şekilde verilen devrede V_1 , V_2 , V_3 ve V_4 bulunuz.



3. ve 4. gözlerden oluşan çevrim için KGY uygulanırsa,

$$-80 - V_2 + 100 + 50 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_2 = 70 \text{ V.}$$

3. göz için KGY,

$$-80 - V_2 + V_3 = 0; \quad -80 - 70 + V_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_3 = 150 \text{ V.}$$

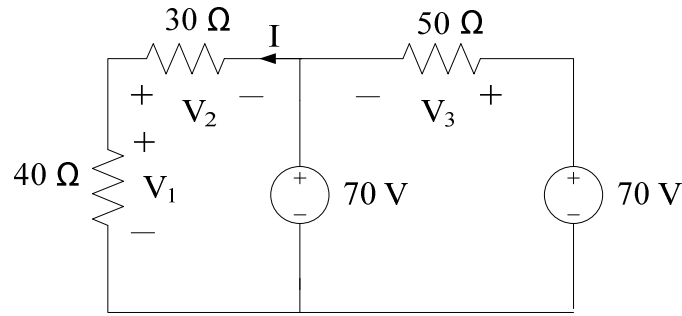
1.göz için KGY,

$$-400 + V_1 + 200 + V_2 = 0, \quad -400 + 70 + 200 + V_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_1 = 130 \text{ V.}$$

2. göz için KGY,

$$-200 + 160 + V_4 + (-100) = 0 \quad \Rightarrow \quad V_4 = 140 \text{ V.}$$

2.7. Şekilde verilen devrede V_1 , V_2 ve V_3 gerilimlerini bulunuz.



2. göz için KGY uygulanırsa,

$$-70 - V_3 + 70 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_3 = 0.$$

Direnç terminallerindeki gerilimler eşit ise direnç üzerinden bir akım geçmeyeceğine dikkat ediniz.

1. göz için KGY'nı uygulanırsa,

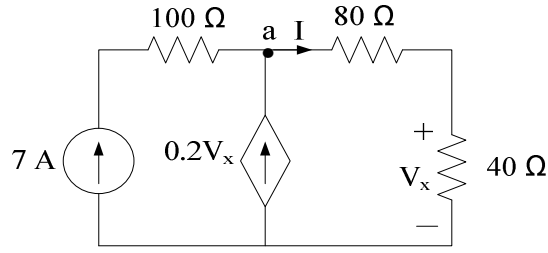
$$-V_1 + V_2 + 70 = 0;$$

Ohm yasası ile dirençler üzerindeki gerilimler ifade edilirse,

$$V_1 = 40I, \quad V_2 = -30I.$$

$$-40I - 30I = -70 \quad \Rightarrow \quad I = 1 \text{ A}; \quad V_1 = 40 \cdot (1) = 40 \text{ V}, \quad V_2 = -30 \cdot (1) = -30 \text{ V.}$$

2.8. Şekil.2.40' da verilen devrede V_x gerilimini bulunuz.



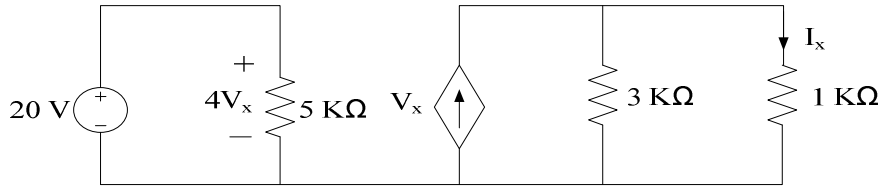
a-düğüm noktasında KAY uygulanarak,

$$7 + 0.2V_x = I$$

Ohm yasası ile,

$$V_x = 40I = 40(7 + 0.2V_x) \Rightarrow 7V_x = -280; \quad V_x = -40 \text{ V.}$$

2.9. Şekilde verilen devrede I_x bulunuz.



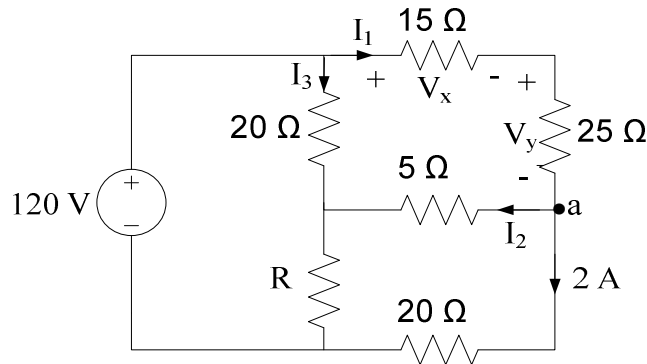
1. gözde KGY kullanılırsa,

$$-20 + 4V_x = 0 \Rightarrow V_x = 5 \text{ V.}$$

Devrenin 2. kısmında akım bölücü devre eşiliği ile,

$$I_x = V_x \cdot \frac{3000}{3000 + 1000} = 5 \cdot \frac{3}{4} = 3.75 \text{ A.}$$

2.10. Şekilde verilen devrede R direncinin değerlerini bulunuz.



En dış çevrimde KGY'nı uygulayalım:

$$-120 + V_x + V_y + 2 \cdot 20 = 0 \Rightarrow V_x + V_y = 80 \text{ V.}$$

Seri bağlı 15Ω ve 25Ω ' luk dirençler üzerinden geçen akım,

$$I_1 = \frac{V_x + V_y}{15 + 25} = \frac{80}{40} = 2 \text{ A.}$$

a-düğüm noktasında KAY uygulanırsa,

$$2 + I_2 - I_1 = 0; \quad 2 + I_2 - 2 = 0 \Rightarrow I_2 = 0.$$

5Ω ' luk direnç üzerinden akım geçmemektedir ($V_{5\Omega} = 0$). İkinci gözde KGY uygulayarak,

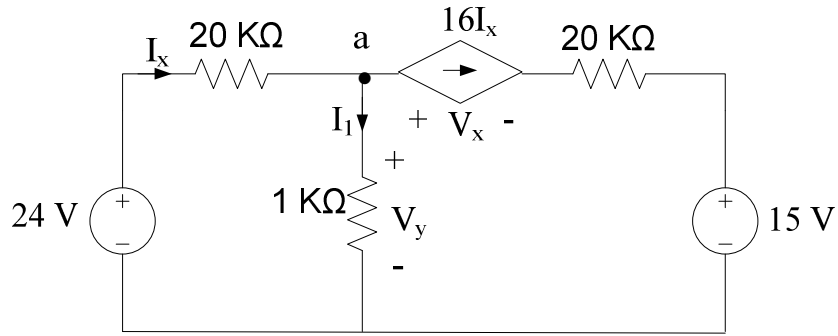
$$V_x + V_y + 5I_2 - 20I_3 = 0; \quad 80 + 0 - 20I_3 = 0 \Rightarrow I_3 = 4 \text{ A.}$$

5Ω ' luk direnç üzerinden akım geçmediğinden I_3 akımı R direnci üzerinden geçen akıma eşit olur. $I_R = 3$. Böylece, 1. gözde KGY uygulanırsa,

$$-120 + I_3(20 + R) = 0; \quad -120 + 4 \cdot (20 + R) = 0 \Rightarrow 4R = 40; \quad R = 10 \Omega$$

bulunur.

2.11. Şekilde verilen devrede bağımlı kaynağın gücünü bulunuz.



a-düğüm noktasında KAY uygulanırsa,

$$-I_x + I_1 + 16I_x = 0 \Rightarrow I_1 = -15I_x.$$

1. gözde KGY'ı uygulayalım,

$$-24 + 20 \times 10^3 I_x + 1 \times 10^3 I_1 = 0; \quad 24 = 20 \times 10^3 I_x + 1 \times 10^3 (-15I_x) \Rightarrow 24 = 5000 I_x; \quad I_x = 4.8 \text{ mA.}$$

Bağımlı akım kaynağının terminalleri arasındaki gerilim için 2. gözde KGY'ı uygulayalım,

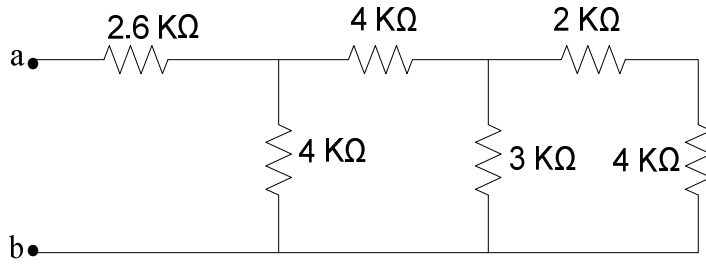
$$-1 \times 10^3 I_1 + V_x + 20 \times 10^3 (16 I_x) + 15 = 0; \quad -1 \times 10^3 (-15 I_x) + V_x + 20 \times 10^3 (16 I_x) + 15 = 0;$$

$$V_x = -15 - 335 \times 10^3 I_x \quad \Rightarrow \quad V_x = -1623 \text{ V.}$$

$$P_{16 I_x} = V_x \cdot 16 I_x = (-1623) \cdot (16 \cdot 0.0048) = -124.64 \text{ W}$$

sonucu elde edilir.

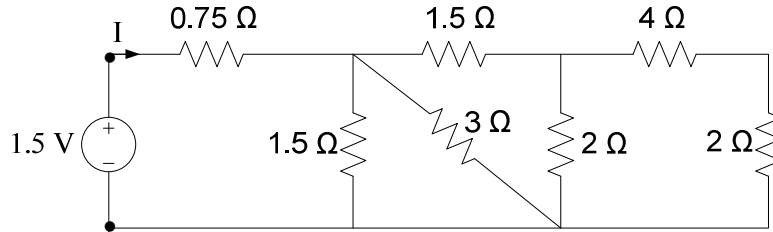
2.12. Şekilde verilen devrenin a-b terminallerinden görülen eşdeğer direncini bulunuz.



$$R_{ab} = \left(\left(\left((4 + 2) // 3 \right) + 4 \right) // 4 \right) + 2.6 = \left(\left((6 // 3) + 4 \right) // 4 \right) + 2.6$$

$$R_{ab} = \left((2 + 4) // 4 \right) + 2.6 = (6 // 4) + 2.6 = 2.4 + 2.6 = 5 \text{ } \Omega.$$

2.13. Şekilde verilen devrede kaynağın devreye sağladığı I akımını bulunuz



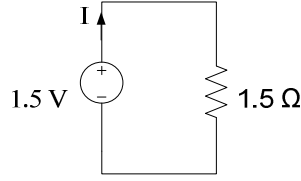
Kaynağın bağlı olduğu terminallerden görülen eşdeğer direnç,

$$R_{eş} = \left(\left(\left((4 + 2) // 2 \right) + 1.5 \right) // 3 // 1.5 \right) + 0.75$$

$$R_{eş} = \left(\left((6 // 2) + 1.5 \right) // 1 \right) + 0.75 = \left((1.5 + 1.5) // 1 \right) + 0.75$$

$$R_{eş} = (3 // 1) + 0.75 = 0.75 + 0.75 = 1.5 \text{ } \Omega.$$

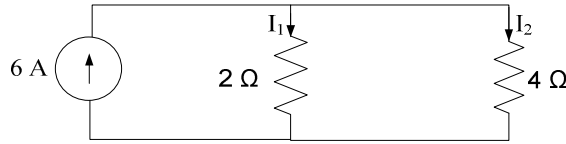
Eşdeğer devre şekilde görüldüğü gibi olduğundan,



$$I = \frac{V}{R_{eş}} = \frac{1.5}{1.5} = 1 \text{ A}$$

bulunur.

2.14. Şekilde verilen devrede I_1 ve I_2 kol akımlarını bulunuz.

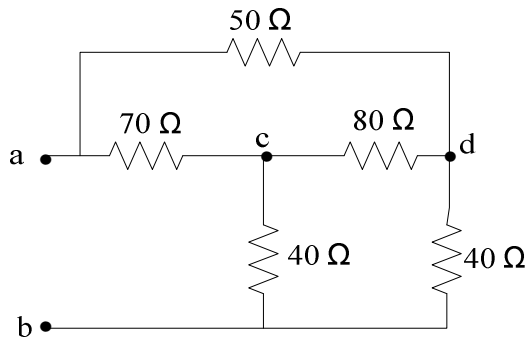


Akım bölücü devre eşitliklerinden,

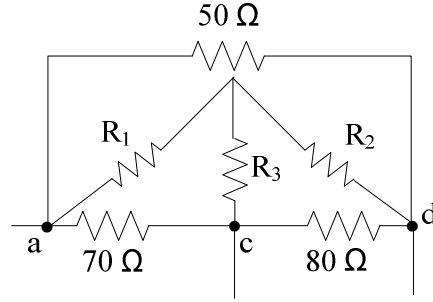
$$I_1 = 6 \frac{4}{2+4} = 4 \text{ A} \quad \text{ve} \quad I_2 = 6 \frac{2}{2+4} = 2 \text{ A}$$

elde edilir.

2.15. Şekilde verilen devrede a-b terminallerinden görülen eşdeğer direnci bulunuz.



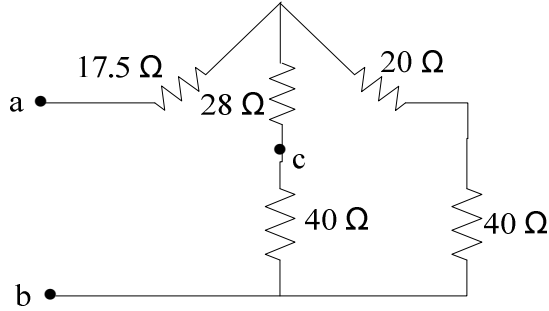
Dirençler seri yada paralel bağlı olmadığından, seri paralel basitleştirme yapmak mümkün olmaz. Ancak, devrede a-c-d ve cdb düğüm noktaları arasında iki üçgen (50Ω , 70Ω ve 80Ω luk dirençler - 80Ω , 40Ω ve 40Ω 'luk dirençler) ve a-c-d-b düğüm noktaları arasında da bir yıldız (70Ω , 80Ω ve 40Ω luk dirençler) bağlantı mevcuttur. 50Ω , 70Ω ve 80Ω 'luk dirençlerin oluşturduğu üçgen bağlantı aşağıdaki biçimde yıldız bağlantıya dönüştürülebilir:



$$R_1 = \frac{70 \cdot 50}{70 + 50 + 80} = \frac{3500}{200} = 17.5 \, \Omega, \quad R_2 = \frac{50 \cdot 80}{70 + 50 + 80} = \frac{4000}{200} = 20 \, \Omega,$$

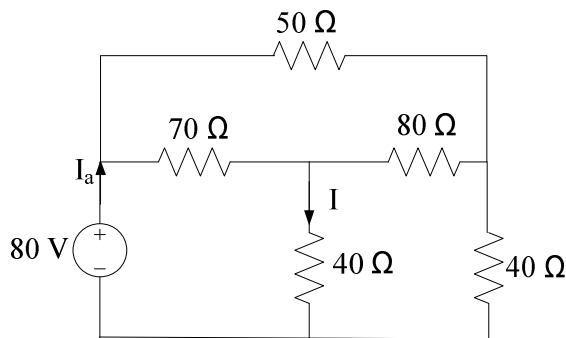
$$R_3 = \frac{70 \cdot 80}{70 + 50 + 80} = \frac{5600}{140} = 28 \, \Omega.$$

Dönüşüme giren üçgen dirençleri kaldırılırsa aşağıdaki dönüşmüş devre elde edilir.



$$R_{ab} = 17.5 + (28 + 40) // (20 + 40) = 17.5 + 68 // 60 = 17.5 + 31.875 = 49.375 \, \Omega \text{ bulunur.}$$

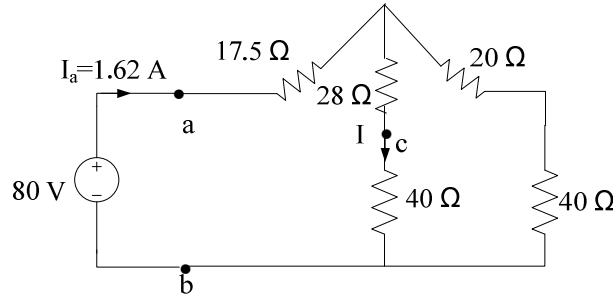
2.16. Şekilde verilen devrede I_1 akımını bulunuz.



Problem 2.15’de 80 V’luk kaynağın bağlı olduğu terminallerden görülen eşdeğer direnç, $R_{ab} = 49.375 \, \Omega$ bulunmuştu. Buna göre kaynağın devreye sağladığı ana kol akımı,

$$I_a = \frac{V}{R_{ab}} = \frac{80}{49.375} = 1.62 \, \text{A. bulunur.}$$

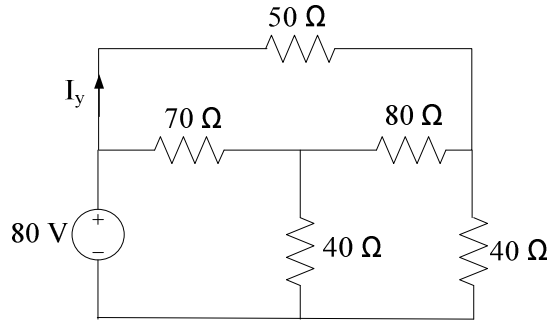
Bu kaynağı dönüşmüş devrede a-b terminallerine bağlarsak aşağıdaki devre elde edilecektir.



Bu devrede ana kol akımı bilindiğinden, kol akımlarından biri olan I , akım bölücü devre eşitliğinden kolayca bulunabilir.

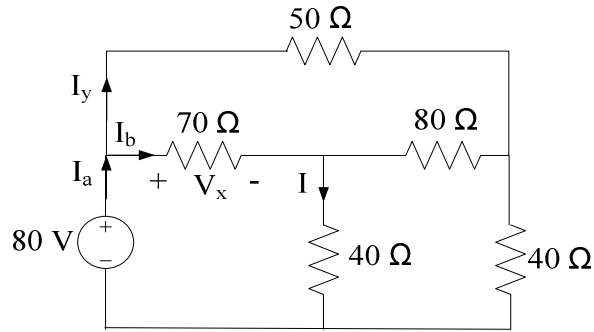
$$I = I_a \cdot \frac{20 + 40}{20 + 40 + 28 + 40} = 1.62 \cdot \frac{60}{128} = 0.759 \text{ A.}$$

2.17. Şekilde verilen devrede, I akımını bulunuz.



Problem 2.15 ve 2.16'da eşdeğer direnci ve kol akımlarından biri bulunan devrenin, bir başka kol akımı istenmektedir. Ancak üzerindeki akımın istendiği kol, dönüşüm sonunda ortadan kaldığından, bu kol akımını dönüşmüş devrede bulmak mümkün olmaz. Orijinal devreye dönüp bulunan ana kol akımı ve orta kol akımı değerleri kullanılarak aranan kol akımı, I_y bulunabilir. Fakat böyle bir durumda, aranan devre değişkenini dönüşüme dahil etmemek işlem kolaylığı sağlar. Örneğin, yukarıdaki üçgeni yıldızla dönüştürmek yerine, yıldız yapı üçgene dönüştürülseydi, 50Ω 'luk direnç dönüşüme girmeyeceğinden, üzerindeki akım dönüşmüş devreden kolayca bulunabilirdi. Biz çözümü her iki dönüşümlede bulalım.

40Ω 'luk direnç üzerindeki akım $I = 0.76 \text{ A.}$ ve ana kol akımı $I_a = 1.62 \text{ A.}$ bilindiğine göre, aşağıdaki orijinal devrede Kirchhoff yasalarını kullanarak aranan akım bulunabilir:



1. göz için KGY uygulanırsa,

$$-80 + V_x + 40I = 0; \quad V_x = 80 - 40(0.759) \Rightarrow V_x = 49.625 \text{ V.}$$

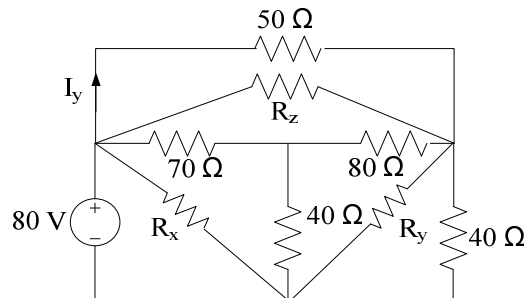
Ohm yasası ile $70\ \Omega$ 'luk direnç üzerindeki akım,

$$I_b = \frac{V_x}{70} = \frac{49.625}{70} = 0.7089 \text{ A},$$

ve a-düğüm noktasında KAY'nı uygulayarak,

$$I_a - I_b - I_y = 0; \quad I_y = I_a - I_b = 1.62 - 0.709 \Rightarrow I_y = 0.911 \text{ A.}$$

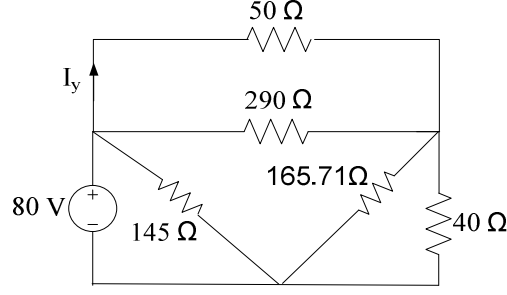
bulunur. Şimdi de orijinal devrede yıldız-üçgen dönüşümünü uygulayalım:



$$R_x = \frac{70 \cdot 80 + 70 \cdot 40 + 40 \cdot 80}{80} = 145 \text{ } \Omega, \quad R_y = \frac{70 \cdot 80 + 70 \cdot 40 + 40 \cdot 80}{70} = 165.71 \text{ } \Omega,$$

$$R_z = \frac{70 \cdot 80 + 70 \cdot 40 + 40 \cdot 80}{40} = 290 \text{ } \Omega.$$

Dönüşmüş devre aşağıdaki gibi olacaktır:



Kaynağın bağlı olduğu terminalden görülen eşdeğer direnç,

$$R_{eş} = ((50 // 290) + (40 // 165.71)) // 145 = (42.647 + 32.22) // 145$$

$$R_{eş} = 74.869 // 145 = 49.375 \Omega.$$

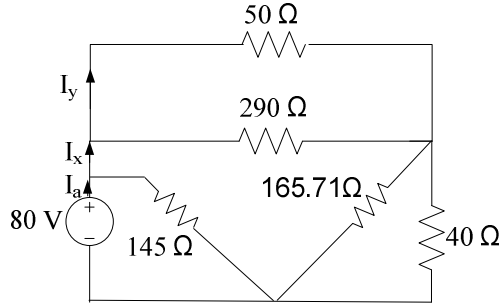
Ana kol akımı,

$$I_a = \frac{80}{49.375} = 1.62 \text{ A.}$$

bulunur. Ana kol akımı iki paralel kola bölünmektedir. Aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi kollardan bir 145 Ω' luk direnç içeren kol, diğeri ise,

$$R = (40 // 165.71) + (50 // 290) = 74.869 \Omega,$$

eşdeğer dirence sahip koldur.



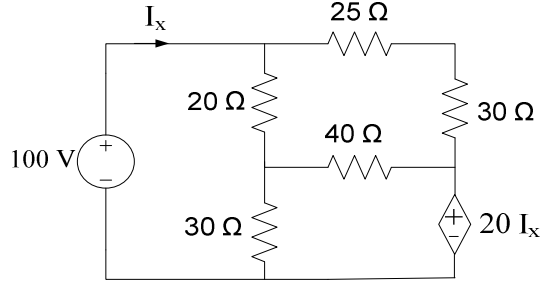
O halde akım bölücü devre eşitliğinden,

$$I_x = I_a \cdot \frac{145}{145 + 74.869} = 1.068 \text{ A,}$$

elde edilir. I_x akımı tekrar iki paralel kola bölünür. Bu kollar 290 Ω dirence sahip kol ve 50Ω dirence sahip kollarıdır. Buna göre aranan kol akımı, tekrar akım bölücü devre eşitliğini kullanarak,

$$I_y = I_x \cdot \frac{290}{290 + 50} = 0.911 \text{ A bulunur.}$$

2.18. Şekil.2.49’ da verilen devrede I_x akımını bulunuz

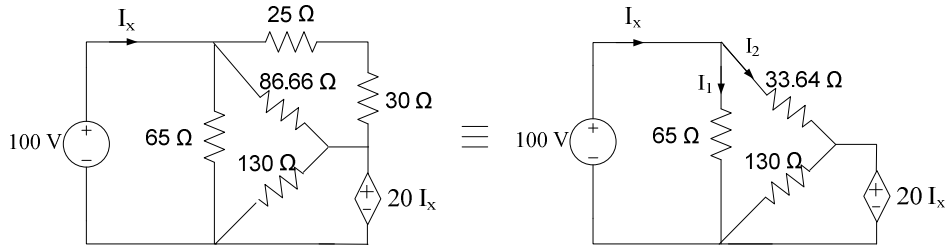


20, 30 ve 40 Ω ’luk dirençlerden oluşan yıldız bağlantıyı üçgen bağlantıya dönüştürelim:

$$R_x = \frac{20 \cdot 40 + 20 \cdot 30 + 30 \cdot 40}{40} = 65 \Omega, \quad R_y = \frac{20 \cdot 40 + 20 \cdot 30 + 30 \cdot 40}{30} = 86.66 \Omega,$$

$$R_z = \frac{20 \cdot 40 + 20 \cdot 30 + 30 \cdot 40}{20} = 130 \Omega,$$

ve dönüşmüş devre aşağıdaki gibidir.



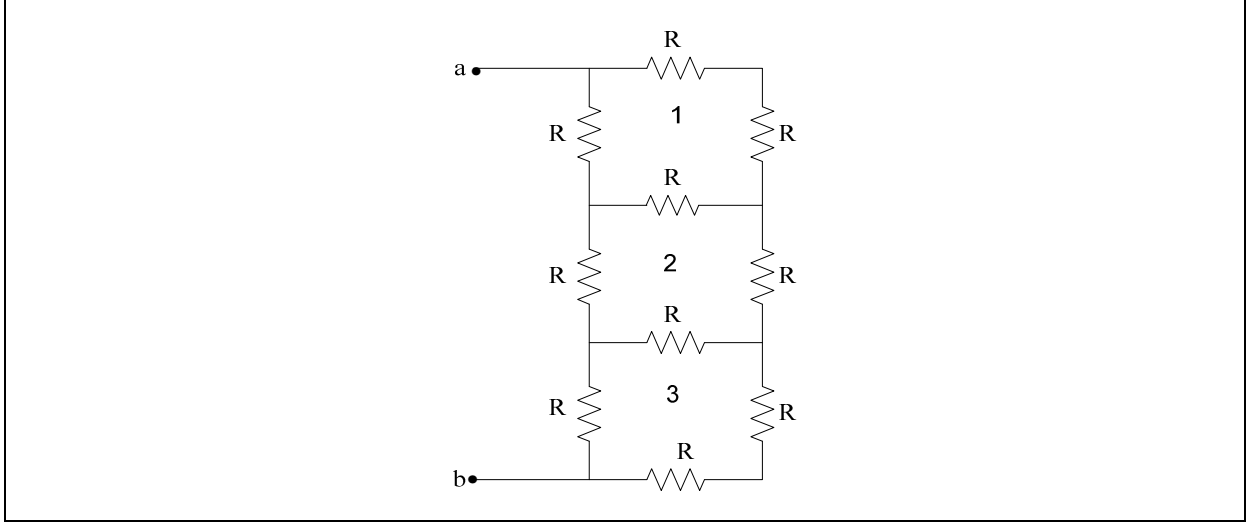
$$I_1 = \frac{100}{65} = 1.538 \text{ A.} \Rightarrow I_2 = I_x - I_1 = I_x - 1.538$$

En dış çevrimde KGY uygulanırsa,

$$-100 + 33.64I_2 + 20I_x = 0; \quad -100 + 33.64(I_x - 1.538) + 20I_x = 0 \Rightarrow 53.64I_x = 151.7$$

$$I_x = 2.828 \text{ A bulunur.}$$

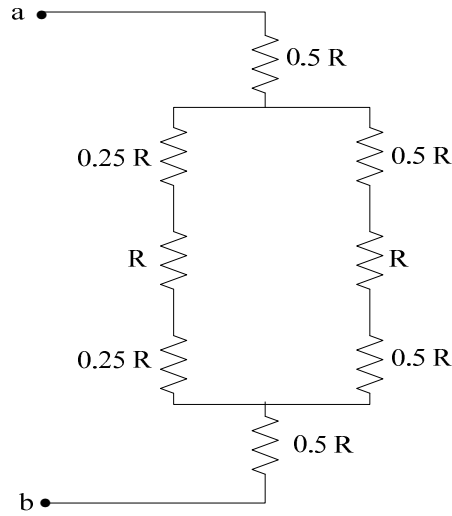
2.19. Şekilde verilen devrede giriş terminal direncini bulunuz.



1. ve 3 gözlerde üçgen-yıldız dönüşümleri yapılırsa,

$$R_1 = R_3 = \frac{2R \cdot R}{4R} = 0.5R, \quad R_2 = \frac{R \cdot R}{4R} = 0.25R$$

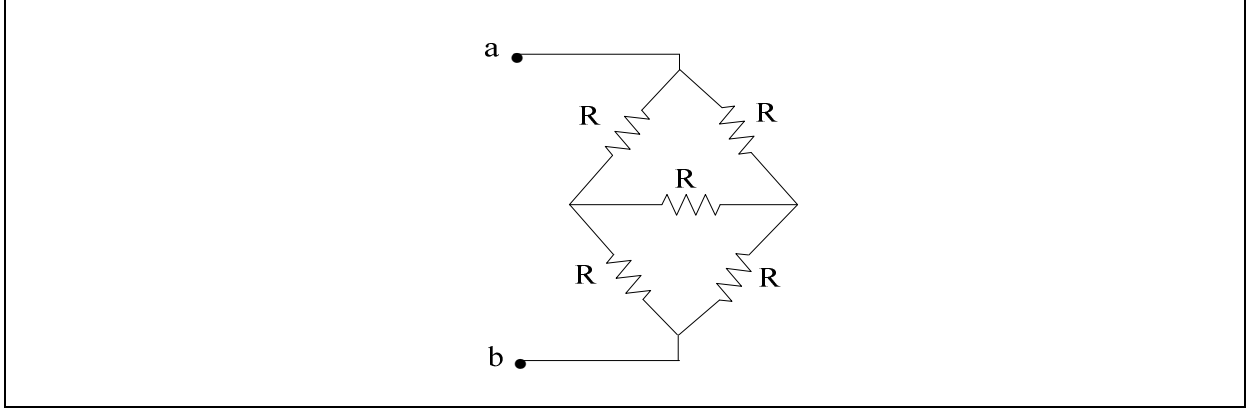
aşağıdaki dönüşmüş devre elde edilir:



$$R_{ab} = 0.5R + 0.5R + ((0.25R + R + 0.25R) // (0.5R + R + 0.5R))$$

$$R_{ab} = R + ((1.5R) // (2R)) = R + 0.857R = 1.857R.$$

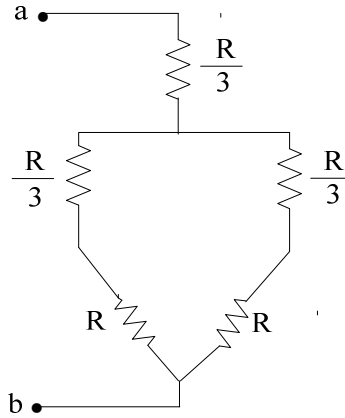
2.20. Şekilde verilen devrede giriş terminallerinden görülen eşdeğer direnci bulunuz.



Üstteki üçgen yıldızla dönüştürülürse,

$$R_1 = R_2 = R_3 = \frac{R \cdot R}{3R} = \frac{R}{3}$$

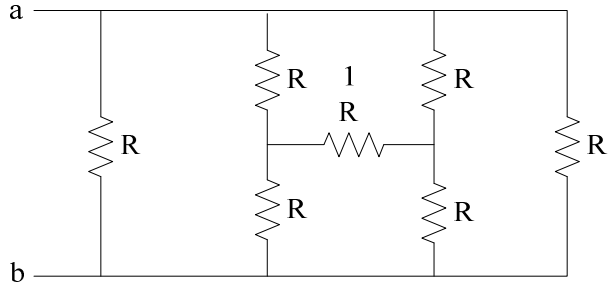
aşağıda görülen dönüşmüş devre elde edilir ve eşdeğer direnç:



$$R_{ab} = \left(\left(\frac{R}{3} + R \right) // \left(\frac{R}{3} + R \right) \right) + \frac{R}{3} = \left(\frac{4R}{3} // \frac{4R}{3} \right) + \frac{R}{3}$$

$$R_{ab} = \frac{2R}{3} + \frac{R}{3} = R \text{ bulunur.}$$

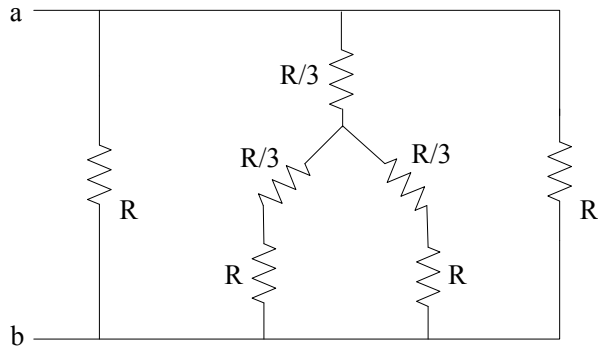
2.21. Şekilde verilen devrenin a-b terminallerinden görülen eşdeğer direncini bulunuz.



1 nolu üçgen bağlantı yıldızza dönüştürülürse;

$$R_1 = R_2 = R_3 = \frac{R \cdot R}{3R} = \frac{R}{3}$$

ve dönüşmüş devre aşağıda görüldüğü şekilde elde edilir.

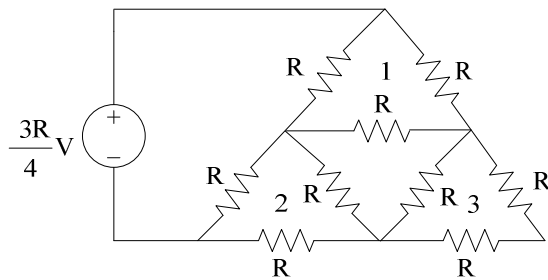


a-b terminallerinden görülen eşdeğer direnç ise,

$$R_{ab} = R // R // \left(\frac{R}{3} + (R + \frac{R}{3}) // (R + \frac{R}{3}) \right); \quad R_{ab} = \frac{R}{2} // \left(\frac{R}{3} + (4R/3) // (4R/3) \right)$$

$$R_{ab} = \frac{R}{2} // \left(\frac{R}{3} + 2R/3 \right) = \frac{R}{2} // R = \frac{R}{3} \text{ olacaktır.}$$

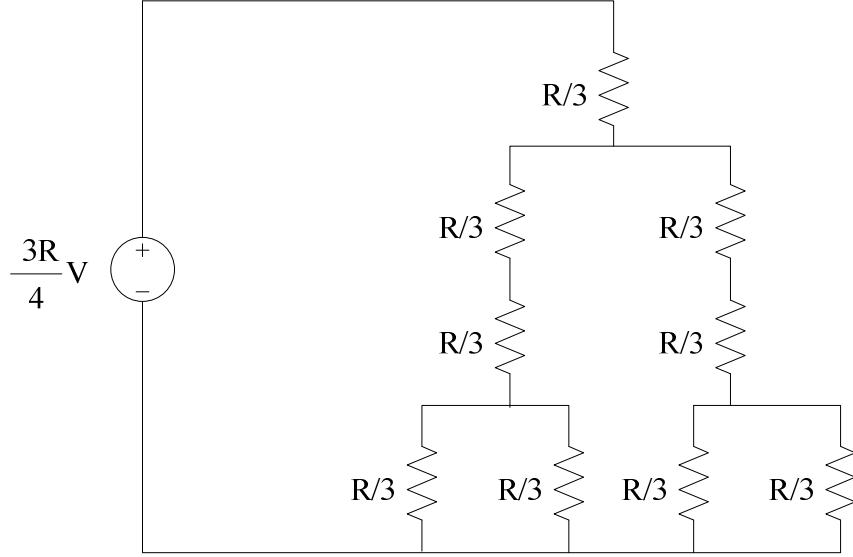
2.22. Şekilde verilen devrede a-b terminallerinden görülen eşdeğer direnci ve kaynağın devreye sağladığı akımı bulunuz.



1, 2, ve 3 nolu üçgen bağlantılar yıldız bağlantıya dönüştürülürse, dönüşmüş direnç değerlerinin her biri

$$R_1 = R_2 = R_3 = \frac{R \cdot R}{3R} = \frac{R}{3}$$

olacağından, dönüşmüş devre de aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi olacaktır:



Kaynağın bağlı olduğu terminallerden görülen eşdeğer direnç:

$$R_{eş} = \frac{R}{3} + \left(\left(\frac{R}{3} // \frac{R}{3} \right) + \frac{R}{3} + \frac{R}{3} \right) // \left(\left(\frac{R}{3} // \frac{R}{3} \right) + \frac{R}{3} + \frac{R}{3} \right)$$

$$R_{eş} = \frac{R}{3} + \left(\frac{R}{6} + \frac{R}{3} + \frac{R}{3} \right) // \left(\frac{R}{6} + \frac{R}{3} + \frac{R}{3} \right)$$

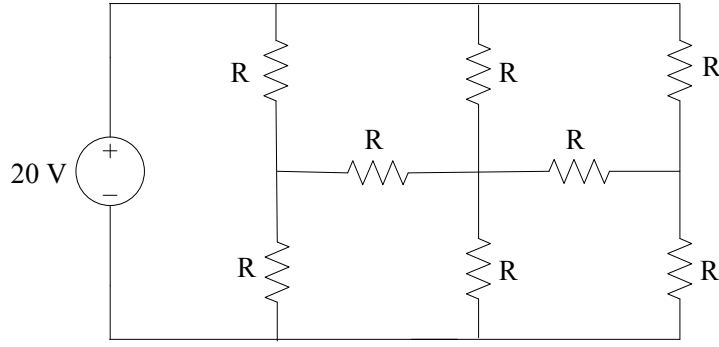
$$R_{eş} = \frac{R}{3} + \frac{5R}{6} // \frac{5R}{6}$$

$$R_{eş} = \frac{R}{3} + \frac{5R}{12} = \frac{9R}{12}$$

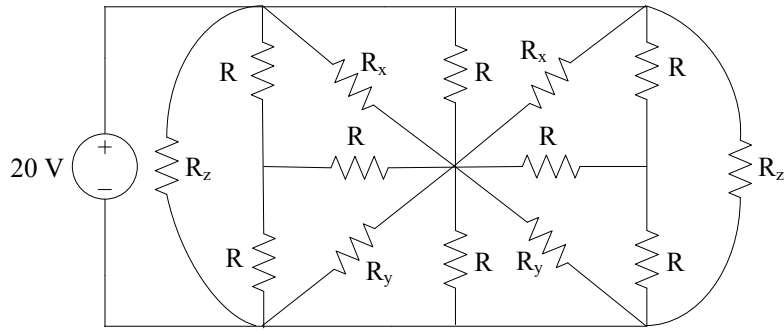
ve devre akımı da,

$$I = \frac{V}{R_{eş}} = \frac{3R/4}{9R/12} = 1 \text{ A bulunur.}$$

2.23. Şekilde verilen devrede, kaynağın gücü 100 W ise, R direncinin değerini bulunuz.

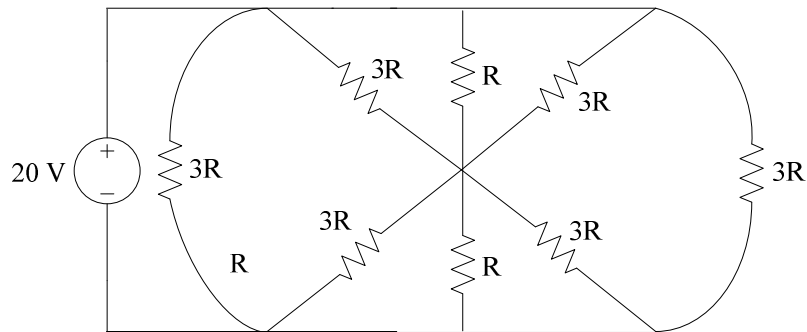


Aşağıdaki şekilde gösterilen yıldız-üçgen dönüşümleri yapılırsa,



$$R_x = R_y = R_z = \frac{R \cdot R + R \cdot R + R \cdot R}{R} = \frac{3R^2}{R} = 3R$$

olacağından, aşağıda görülen dönüşmüş devre elde edilir:



Kaynağın bağlı olduğu terminallerden görülen eşdeğer direnç:

$$R_{eş} = ((3R // 3R // R) + (3R // 3R // R)) // 3R // 3R$$

$$R_{eş} = \left(\left(\frac{3R}{5} \right) + \left(\frac{3R}{5} \right) \right) // \frac{3R}{2}$$

$$R_{eş} = \frac{3R}{10} // \frac{3R}{2} = \frac{R}{4}$$

olacaktır. Kaynağın gücü 100 W ise devre akımı

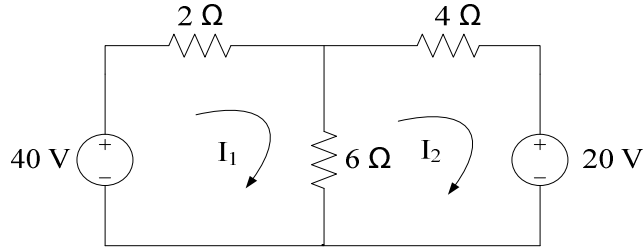
$$P = IV ; \quad 100 = 20I \Rightarrow I = 5 \text{ A dir.}$$

$$P = I^2 R_{eş} ; \quad 100 = 25R_{eş} \Rightarrow R_{eş} = 4 \Omega \text{ olmalıdır.}$$

$$R_{eş} = \frac{R}{4} = 4 \Rightarrow R = 16 \Omega \text{ olmalıdır.}$$

9.3. 3.BÖLÜM ÇÖZÜMLERİ

3.1. Aşağıda verilen devrede göz akımlarını bulunuz.



Çözüm:

I. göz için KGY uygulanarak,

$$40 = 8I_1 - 6I_2$$

II. göz için KGY uygulanarak da,

$$-20 = -6I_1 + 10I_2$$

elde edilir. Bu eşitlikler bir matriks eşitlik formunda yazılırsa

$$\begin{bmatrix} 8 & -6 \\ -6 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ -20 \end{bmatrix}$$

bulunur. Cramer yasası ile de

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 40 & -6 \\ -20 & 10 \\ 8 & -6 \\ -6 & 10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & -6 \\ -6 & 10 \end{vmatrix}} = \frac{400 - 120}{80 - 36} = \frac{280}{44} = 6.36 \text{ A}, \quad I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 40 \\ -6 & -20 \\ 8 & -6 \\ -6 & 10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & -6 \\ -6 & 10 \end{vmatrix}} = \frac{-160 + 240}{80 - 36} = \frac{80}{44} = 1.818 \text{ A}.$$

3.2. Problem 3.1’de verilen devrede 6Ω ’luk direncin gücünü ve 20 Volt’luk kaynağın gücünü bulunuz.

Çözüm:

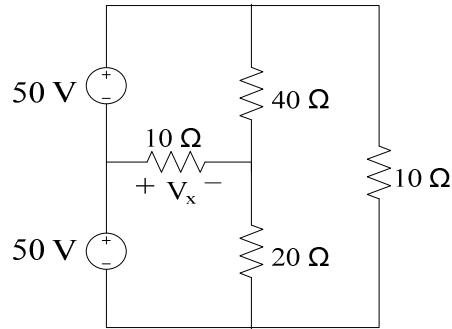
6Ω ’luk direnç üzerindeki akım $I = I_1 - I_2$ olduğundan,

$$P_{6\Omega} = 6I^2 = 6(I_1 - I_2)^2 = 6(6.36 - 1.818)^2 = 123.78 \text{ W. (güç tüketiyor)}$$

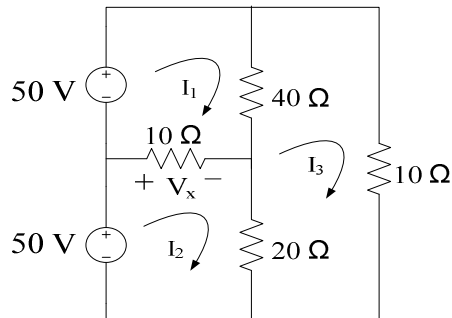
20 V’luk kaynak üzerinden I_2 akımı geçtiğinden,

$$P_{20V} = VI_2 = 20I_2 = 20(1.818) = 36.36 \text{ W. (güç tüketiyor)}$$

3.3. Göz akımları metodunu kullanarak aşağıda verilen devrede V_x gerilimini bulunuz.



Göz akımları aşağıda görüldüğü gibi saat dönüş yönünde seçilmiş olsun:



I., II. ve III. gözlerde KGY uygulanarak sırasıyla,

$$50 = 50I_1 - 10I_2 - 40I_3, \quad 50 = -10I_1 + 30I_2 - 20I_3, \quad 0 = -40I_1 - 20I_2 + 70I_3$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler matris formunda yazıldığında,

$$\begin{bmatrix} 50 & -10 & -40 \\ -10 & 30 & -20 \\ -40 & -20 & 70 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 50 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ve Kramer kuralı ile de,

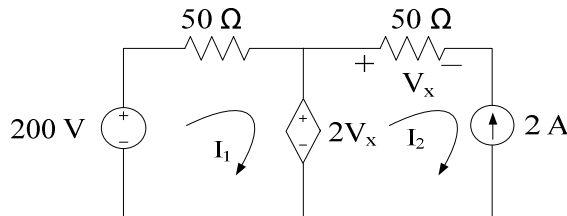
$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 50 & -10 & -40 \\ 50 & 30 & -20 \\ 0 & -20 & 70 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 50 & -10 & -40 \\ -10 & 30 & -20 \\ -40 & -20 & 70 \end{vmatrix}} = \frac{160}{14} = 11.428 \text{ A}, \quad I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 50 & 50 & -40 \\ -10 & 50 & -20 \\ -40 & 0 & 70 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 50 & -10 & -40 \\ -10 & 30 & -20 \\ -40 & -20 & 70 \end{vmatrix}} = \frac{170}{14} = 12.143 \text{ A}.$$

bulunur. Bulunan göz akımları cinsinden V_x gerilimi de

$$V_x = 10(I_2 - I_1) = 10(12.143 - 11.428) = 7.15 \text{ V}$$

olarak elde edilir.

3.4. Göz akımları metodunu kullanarak aşağıda verilen devrede bağımlı kaynağın gücünü akımı bulunuz.



Cözüm:

I. göz için KGY ile

$$200 = 50I_1 + 2V_x$$

eşitliği elde edilir. II. gözde, akım kaynağının tersi yönünde bir göz akımı seçildiğinden

$$I_2 = -2 \text{ A}$$

olacaktır. Ohm yasası kullanılarak

$$V_x = 50I_2; \quad V_x = -100 \text{ V}$$

bulunur. V_x değeri ilk eşitlikte kullanıldığında

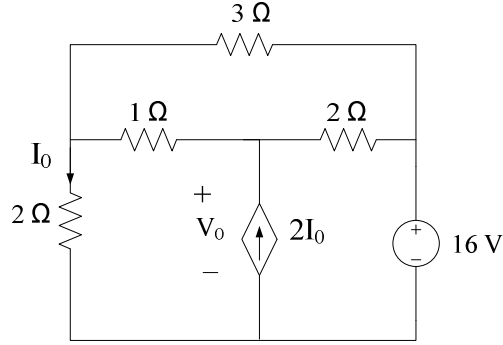
$$50I_1 = 200 - 2V_x = 200 - 2(-100) = 400 \text{ ve } I_1 = 400/50 = 8 \text{ A}$$

elde edilir. Bağımlı kaynağın gücü için de

$$P_{2V_x} = (2V_x)(I_1 - I_2) = -200(8 - (-2)) = -2000 \text{ W (güç üretiyor)}$$

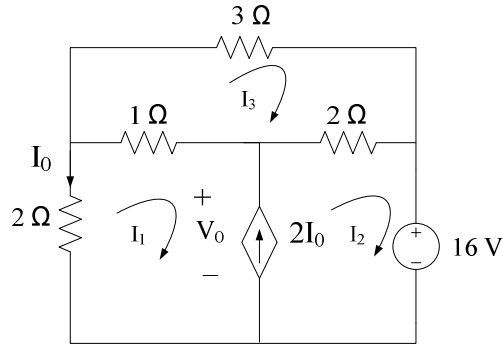
sonucu elde edilir.

3.5. Göz akımları metodunu kullanarak aşağıda verilen devrede V_0 gerilimi ve I_0 akımını bulunuz.



Çözüm:

Göz akımları aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi seçilmiş olsun:



KAY ile

$$I_2 - I_1 = 2I_0$$

ve I. Göz için seçilmiş göz akımı yönü, kol akımının tersi yönünde olduğundan,

$$I_0 = -I_1$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece,

$$I_2 - I_1 = -2I_1; \quad I_2 = -I_1$$

bulunur. Süper-göz için KGY ile

$$3I_1 + 2I_2 - 3I_3 = -16 \Rightarrow 3I_1 - 2I_1 - 3I_3 = -16 \Rightarrow I_1 - 3I_3 = -16$$

eşitliği elde edilir. 3. göz için ise yine KGY uygulanarak

$$-I_1 - 2I_2 + 6I_3 = 0 \Rightarrow -I_1 + 2I_1 + 6I_3 = 0 \Rightarrow I_1 + 6I_3 = 0$$

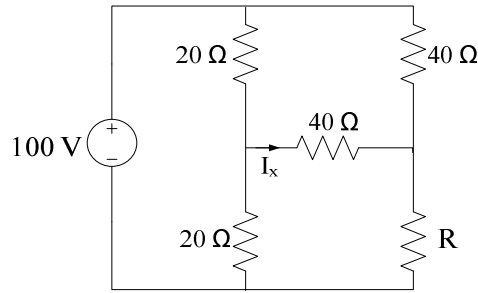
eşitliği elde edilir. Bu iki eşitliğin çözümü ile

$$I_3 = \frac{16}{9} \text{ A}, \quad I_1 = -\frac{32}{3} \text{ A}, \quad I_2 = \frac{32}{3} \text{ A}, \quad I_0 = \frac{32}{3} \text{ A}.$$

sonuçları bulunur. III. gözde KGY uygulanarak bağımlı kaynağın terminalleri arasındaki gerilim bulunur:

$$-V_0 + 2(I_2 - I_3) + 16 = 0 \Rightarrow V_0 = 16 + 2\left(\frac{32}{3} - \frac{16}{9}\right) = 33.77 \text{ V}.$$

3.6. Göz akımları metodunu kullanarak Şekil.3.25’de verilen devrede I_x akımının sıfır olması için gerekli R direncini bulunuz.



Cözüm:

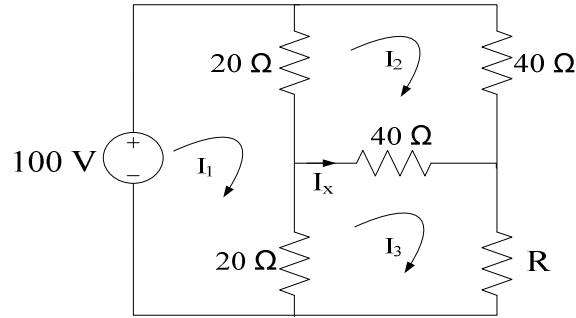
Şekilde görüldüğü gibi seçilmiş göz akımları için aşağıdaki denklemler her bir gözde KGY uygulanarak elde edilir:

$$40I_1 - 20I_2 - 20I_3 = 100; \quad -20I_1 + 100I_2 - 40I_3 = 0; \quad -20I_1 - 40I_2 + (60 + R)I_3 = 0.$$

KAY ile,

$$I_x = I_3 - I_2 = 0 \Rightarrow I_2 = I_3$$

ve bu eşitlik yukarıdaki ifadelerde kullanılarak da



$$40I_1 - 40I_2 = 100; \quad -20I_1 + 60I_2 = 0; \quad -20I_1 + (20 + R)I_2 = 0$$

eşitlikleri bulunur. İkinci ifadeden

$$I_1 = 3I_2$$

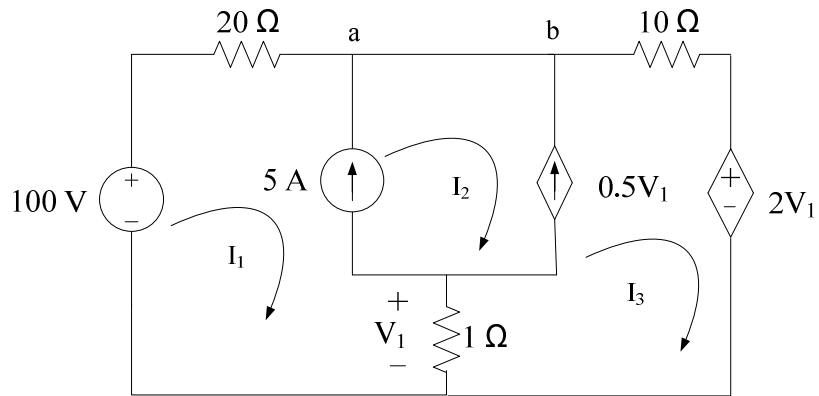
olacağından,

$$40(3I_2) - 40I_2 = 100 \Rightarrow 80I_2 = 100 \Rightarrow I_2 = 1.25 \text{ A.}, \quad I_1 = 3.75 \text{ A.}$$

bulunur. Bu akım değerleri son eşitlikte kullanılarak da,

$$-20(3.75) + (20 + R)(1.25) = 0 \Rightarrow R = 40 \text{ } \Omega. \text{ bulunur.}$$

3.7. Göz akımları metodunu kullanarak aşağıda verilen devrede V_1 gerilimini bulunuz.



Çözüm:

Yukarıdaki devrede görüldüğü gibi seçilmiş göz akımları için, a ve b noktalarında KAY uygulandığında,

$$I_2 - I_1 = 5; \quad I_2 = 5 + I_1$$

$$I_3 - I_2 = 0.5V_1 \quad \text{ve} \quad V_1 = 1(I_1 - I_3)$$

$$I_3 - I_2 = 0.5(I_1 - I_3)$$

$$I_3 - (5 + I_1) = 0.5(I_1 - I_3) \Rightarrow -3I_1 + 3I_3 = 10$$

eşitlikleri elde edilir. Süper-göz için de

$$20I_1 + 10I_3 + 2V_1 = 100; \quad 20I_1 + 10I_3 + 2(I_1 - I_3) = 100 \Rightarrow 22I_1 + 8I_3 = 100$$

ifadesi bulunur. Bu iki eşitlik bir matris eşitlik formunda yazıldığında

$$\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 22 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 100 \end{bmatrix}$$

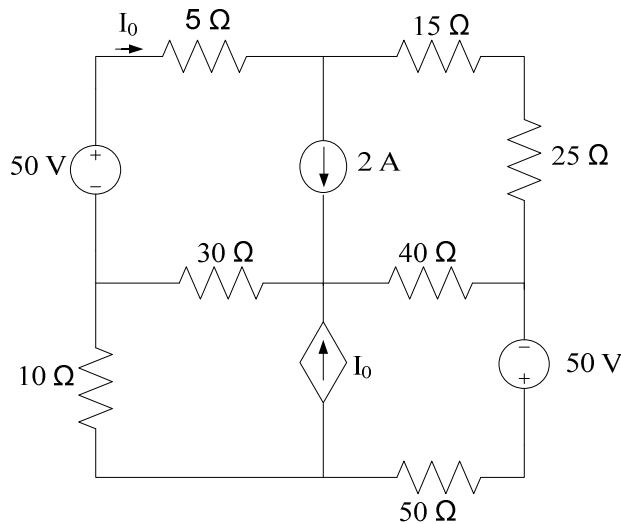
ve I_1 , I_3 göz akımları Kramer kuralı ile aşağıdaki gibi bulunur:

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 3 \\ 100 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 22 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{80 - 300}{-24 - 66} = \frac{-220}{-90} = 2.444 \text{ A}, \quad I_3 = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 10 \\ 22 & 100 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 22 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{-300 - 220}{-24 - 66} = \frac{-520}{-90} = 5.777 \text{ A}.$$

Böylece aranan gerilimde,

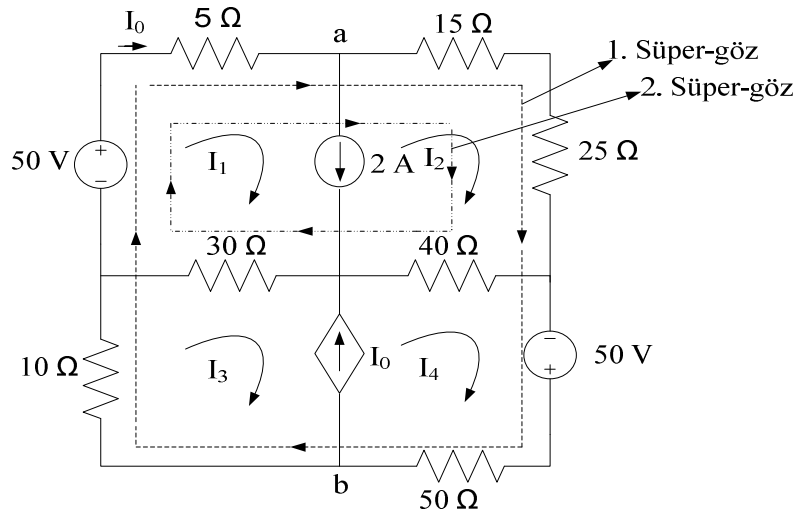
$$V_1 = 2.444 - 5.777 = -3.333 \text{ V} \text{ olarak elde edilir.}$$

3.8. Göz akımları metodunu kullanarak aşağıda verilen devrede, devre elemanlarının güçlerini bulunuz.



Çözüm:

Aşağıdaki şekildeki gibi seçilmiş göz akımları için, a ve b noktalarında KAY uygulanarak,



$$I_1 - I_2 = 2; \quad I_2 = I_1 - 2$$

$$I_4 - I_3 = I_0; \quad I_4 = I_0 + I_3$$

$$I_0 = I_1 \Rightarrow I_4 = I_1 + I_3$$

bulunur. Şekilde belirtilen I.Süper-göz için,

$$5I_1 + 40I_2 + 10I_3 + 50I_4 = 100$$

ve II.Süper-göz için de,

$$35I_1 + 80I_2 - 30I_3 - 40I_4 = 50$$

eşitlikleri yazılır ve bu eşitliklerde I_2 ve I_4 ifadeleri kullanılırsa,

$$5I_1 + 40(I_1 - 2) + 10I_3 + 50(I_1 + I_3) = 100; \quad 95I_1 + 60I_3 = 180,$$

$$35I_1 + 80(I_1 - 2) - 30I_3 - 40(I_1 + I_3) = 50; \quad 75I_1 - 70I_3 = 210$$

bulunur. Son iki eşilikten;

$$\begin{bmatrix} 95 & 60 \\ 75 & -70 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 180 \\ 210 \end{bmatrix} \Rightarrow I_1 = 2.26 \text{ A}, \quad I_3 = -0.578 \text{ A}.$$

ve I_1 , I_3 değerleri kullanılarakta, I_2 ve I_4 değerleri

$$I_2 = 2.26 - 2 = 0.26 \text{ A}, \quad I_4 = 2.26 + (-0.578) = 1.682 \text{ A}$$

elde edilir. Bağımsız gerilim kaynakların akımları ve terminal gerilimleri bilindiğinden,

$$P_{(50V)_1} = -50I_1 = -50(2.26) = -113 \text{ W},$$

$$P_{(50V)_2} = -50I_4 = -50(1.682) = -84.1 \text{ W}$$

bulunur. Bağımsız akım kaynağının terminallerindeki gerilim, akımın girdiği terminalde negatif olmak üzere V_x ve bağımlı akım kaynağının terminallerindeki gerilim, akımın girdiği terminalde yine negatif olmak üzere V_y olsun:

Bu durumda, 2.göz için:

$$80I_2 - 40I_4 + V_x = 0 \Rightarrow V_x = 40I_4 - 80I_2; \quad V_x = 46.48 \text{ V}$$

ve

$$P_{2A} = -2xV_x = -92.96 \text{ W},$$

3.göz için de:

$$40I_3 - 30I_1 + V_y = 0 \Rightarrow V_y = 30I_1 - 40I_3; \quad V_y = 90.92$$

ve

$$P_{I_0} = -I_0xV_y = -205.48 \text{ W}$$

bulunur. Direnç güçleri $P = RI^2$ eşitliğinden,

$$P_{5\Omega} = 5xI_1^2 = 25.538 \text{ W},$$

$$P_{15\Omega} = 15xI_2^2 = 1.014 \text{ W},$$

$$P_{25\Omega} = 25xI_2^2 = 1.69 \text{ W},$$

$$P_{50\Omega} = 50xI_4^2 = 141.45 \text{ W},$$

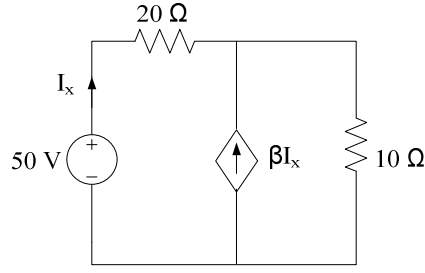
$$P_{10\Omega} = 10xI_3^2 = 3.340 \text{ W},$$

$$P_{30\Omega} = 30x(I_1 - I_3)^2 = 241.63 \text{ W},$$

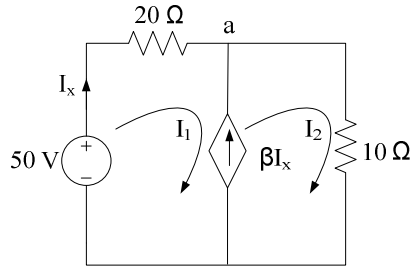
$$P_{40\Omega} = 40x(I_2 - I_4)^2 = 80.88 \text{ W}$$

sonuçları bulunur. Üretilen toplam gücün, tüketilen toplam güce eşit olduğuna dikkat ediniz.

3.9. Göz akımları metodunu kullanarak aşağıda verilen devrede 10Ω ' luk direnç üzerindeki akımın 1 A olması için gerekli β değerini bulunuz.

**Cözüm:**

Göz akımları aşağıda görüldüğü gibi saat dönüş yönünde seçilmiş olsun:



a-düğüm noktasında KAY ile

$$I_2 - I_1 = \beta I_x \quad \text{ve} \quad I_x = I_1 \Rightarrow I_2 - I_1 = \beta I_1; \quad I_2 = I_1(1 + \beta)$$

$$I_2 = 1 \text{ A} \Rightarrow I_1(1 + \beta) = 1$$

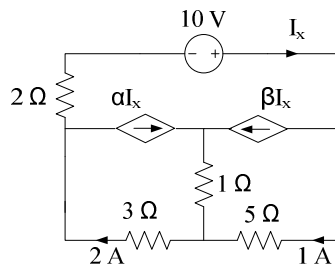
eşitliği elde edilir. Süper-göz için de,

$$20I_1 + 10I_2 = 50; \quad I_2 = 1 \text{ A} \Rightarrow 20I_1 + 10 = 50; \quad I_1 = 2 \text{ A} \quad \text{ve,}$$

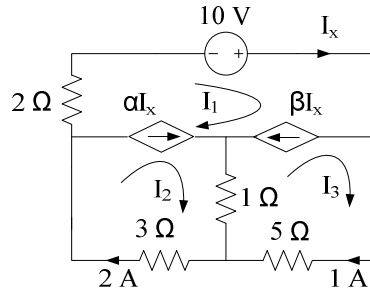
$$2(1 + \beta) = 1 \Rightarrow \beta = \frac{1}{2} - 1 = -0.5$$

sonucu elde edilir.

3.10. Göz akımları metodunu kullanarak aşağıda verilen devrede β ve α değerlerini bulunuz.

**Cözüm:**

Şekilde görüldüğü gibi saat dönüş yönünde seçilmiş göz akımları için



$$I_2 = 2 \text{ A}, \quad \text{ve} \quad I_3 = 1 \text{ A}$$

olacaktır. Süper-göz için:

$$2I_1 + 3I_2 + 5I_3 = 10 \Rightarrow 2I_1 = 10 - 5(1) - 3(2); \quad I_1 = -0.5 \text{ A}$$

bulunur. KAY ile,

$$I_2 - I_1 = \alpha I_x; \quad I_1 - I_3 = \beta I_x$$

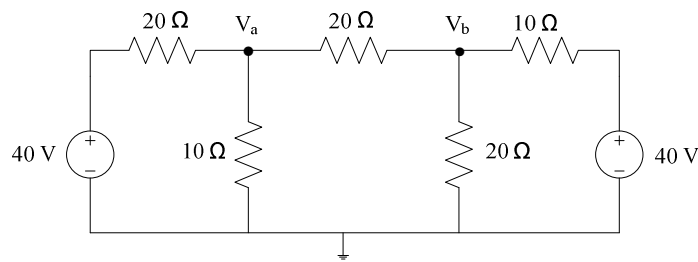
eşitlikleri yazılır ve $I_x = I_1$ ifadesi bu eşitliklerde kullanılırsa,

$$I_2 = I_1(1 + \alpha); \quad I_3 = I_1(1 - \beta) \quad \text{eşitlikleri elde edilir.}$$

$$I_1 = \frac{I_2}{1 + \alpha} = \frac{2}{1 + \alpha} \quad \text{ve} \quad I_1 = \frac{I_3}{1 - \beta} = \frac{1}{1 - \beta}$$

eşitliklerinden, $I_1 = -0.5 \text{ A}$ için $\alpha = -5$ ve $\beta = 3$ bulunur.

3.11. Nokta potansiyelleri metodunu kullanarak aşağıda verilen devrede V_a , V_b potansiyellerini bulunuz.



Çözüm:

a-düğüm noktası için:

$$\frac{V_a - 40}{20} + \frac{V_a}{10} + \frac{V_a - V_b}{20} = 0 \Rightarrow 4V_a - V_b = 40.$$

b-düğüm noktası için:

$$\frac{V_b - 40}{10} + \frac{V_b}{20} + \frac{V_b - V_a}{20} = 0 \Rightarrow -V_a + 4V_b = 80.$$

Bu eşitlikler bir matriks eşitlik formunda yazılırsa

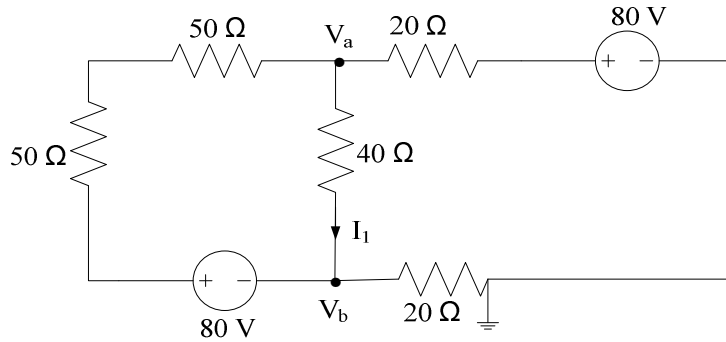
$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ 80 \end{bmatrix},$$

ve Kramer kuralı ile de,

$$V_a = \frac{\begin{vmatrix} 40 & -1 \\ 80 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{160 - (-80)}{16 - 1} = \frac{240}{15} = 16 \text{ V}, \quad V_b = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 40 \\ -1 & 80 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{320 - (-40)}{16 - 1} = \frac{360}{15} = 24 \text{ V}$$

değerleri bulunur.

3.12. Nokta potansiyelleri metodunu kullanarak aşağıda verilen devrede I_1 akımını bulunuz.



Cözüm:

a ve b düğümleri için sırasıyla;

$$\frac{V_a - 80}{20} + \frac{V_a - V_b}{40} + \frac{V_a - 80 - V_b}{50 + 50} = 0 \Rightarrow 17V_a - 7V_b = 960,$$

$$\frac{V_b - (-80) - V_a}{50 + 50} + \frac{V_b - V_a}{40} + \frac{V_b}{20} = 0 \Rightarrow -7V_a + 17V_b = -160$$

eşitlikleri ya da

$$\begin{bmatrix} 17 & -7 \\ -7 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 960 \\ -160 \end{bmatrix}$$

matriks eşitliği elde edilir. Bu eşitlik, bilinmeyen düğüm potansiyelleri için çözülürse,

$$V_a = \frac{\begin{vmatrix} 960 & -7 \\ -160 & 17 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 17 & -7 \\ -7 & 17 \end{vmatrix}} = \frac{16320 - 1120}{289 - 49} = \frac{15200}{240} = 63.33 \text{ V},$$

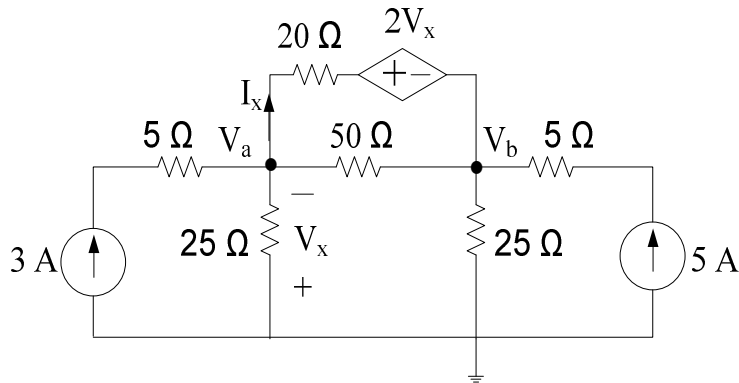
$$V_b = \frac{\begin{vmatrix} 17 & 960 \\ -7 & -160 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 17 & -7 \\ -7 & 17 \end{vmatrix}} = \frac{-2720 + 6720}{289 - 49} = \frac{4000}{240} = 16.66 \text{ V}$$

ve

$$I_1 = \frac{V_a - V_b}{40} = \frac{63.33 - 16.66}{40} = 1.166 \text{ A}$$

sonucu elde edilir.

3.13. Nokta potansiyelleri metodunu kullanarak aşağıda verilen devrede bağımlı kaynağın gücünü bulunuz.



Çözüm:

$$V_x = -V_a.$$

a ve b düğümlerinde düğüm potansiyelleri metodu ile, sırasıyla

$$-3 + \frac{V_a}{25} + \frac{V_a - V_b}{50} + \frac{V_a - 2V_x - V_b}{20} = 0 \Rightarrow 21V_a - 7V_b = 300,$$

$$-5 + \frac{V_b}{25} + \frac{V_b - V_a}{50} + \frac{V_b - (-2V_x) - V_a}{20} = 0 \Rightarrow -17V_a + 11V_b = 500$$

ve matriks eşitlik formunda da,

$$\begin{bmatrix} 21 & -7 \\ -17 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300 \\ 500 \end{bmatrix}$$

ifadesi elde edilir. Matriks eşiliğın çözümüyle

$$V_a = \frac{\begin{vmatrix} 300 & -7 \\ 500 & 11 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 21 & -7 \\ -17 & 11 \end{vmatrix}} = \frac{3300 + 3500}{231 - 119} = \frac{6800}{112} = 60.71 \text{ V},$$

$$V_b = \frac{\begin{vmatrix} 21 & 300 \\ -17 & 500 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 21 & -7 \\ -17 & 11 \end{vmatrix}} = \frac{10500 + 5100}{231 - 119} = \frac{15600}{112} = 139.29 \text{ V}.$$

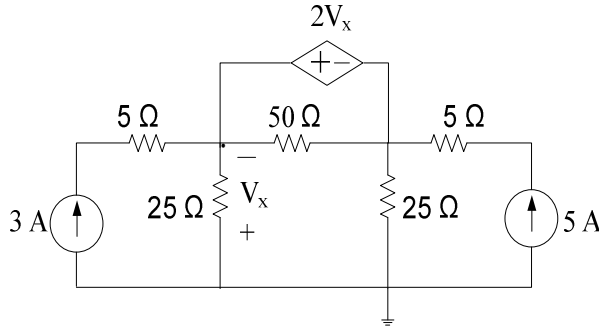
olacağından, bağımlı kaynağın üzerinden geçen akım

$$I_x = \frac{V_a - 2V_x - V_b}{20} = 2.142 \text{ A}$$

ve gücü de

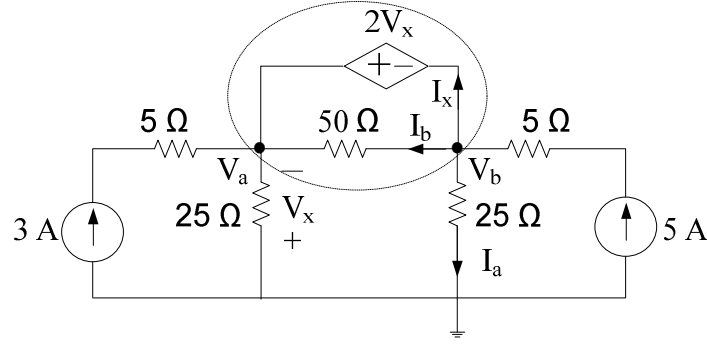
$$P_{2V_x} = 2V_x I_x = -2V_a I_x = -260 \text{ W olur.}$$

3.14. Nokta potansiyelleri metodu ile, aşağıda görülen devrede bağımlı kaynağın gücünü bulunuz.



Çözüm:

Düğüm potansiyelleri ve kol akımları aşağıda görüldüğü gibi seçilmiş olsun:



Şekilde belirtilmiş süper-nokta için,

$$-3 - 5 + \frac{V_a}{25} + \frac{V_b}{25} = 0 \Rightarrow V_a + V_b = 200,$$

ve süper-noktayı içeren gözde KGY uygulanarak,

$$-V_a + 2V_x + V_b = 0, \quad V_a = -V_x; \quad -V_a - 2V_a + V_b = 0 \Rightarrow V_b = 3V_a$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan,

$$V_a + 3V_a = 200 \Rightarrow V_a = 50 \text{ V} \text{ ve } V_b = 150 \text{ V bulunur.}$$

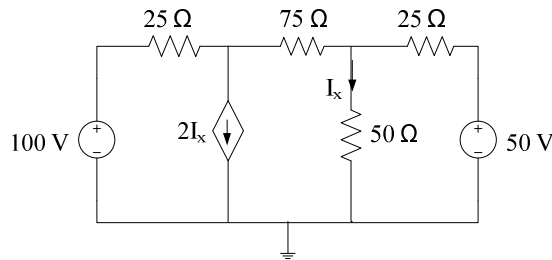
B noktasında akım yasası uygulanarak bağımlı kaynağın üzerinden geçen akım aşağıdaki gibi bulunur:

$$-5 + I_a + I_b + I_x = 0 \Rightarrow \frac{V_b}{25} + \frac{V_b - V_a}{50} + I_x = 5; \quad I_x = -3 \text{ A}$$

Böylece, kaynağın güce de,

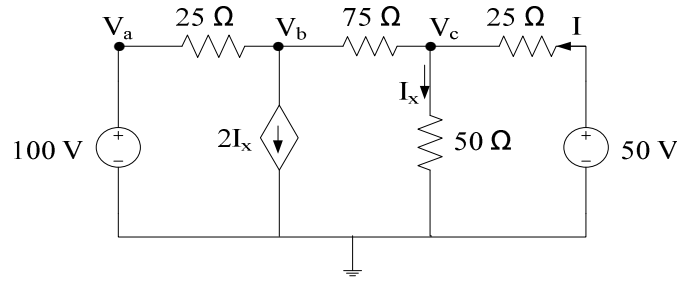
$$P_{2V_x} = -2V_x(I_x) = -2(-50)(-3) = -300 \text{ W (güç üretiyor) bulunur.}$$

3.15. Nokta potansiyelleri metodunu kullanarak Şekil.3.34' de verilen devrede 50 V'luk kaynağın bağlı olduğu terminalden görülen eşdeğer direnci bulunuz.



Çözüm:

Düğüm potansiyelleri aşağıda görüldüğü gibi seçilmiştir.



50 Volt'luk kaynağın terminallerinden görülen eşdeğer direnç

$$R_{eş} = \frac{50}{I} \quad \text{ve} \quad I = \frac{50 - V_c}{25}$$

olacağından düğüm potansiyelleri metodu kullanılarak V_c potansiyeli bulunmalıdır.

$$V_a = 100 \text{ V}, \quad I_x = \frac{V_c}{50}.$$

b ve c düğümlerinde düğüm potansiyel denklemleri sırasıyla aşağıdaki gibi olacaktır:

$$\frac{V_b - V_a}{25} + 2I_x + \frac{V_b - V_c}{75} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{V_b - 100}{25} + 2\left(\frac{V_c}{50}\right) + \frac{V_b - V_c}{75} = 0;$$

$$8V_b + 4V_c = 600.$$

$$\frac{V_c - 50}{25} + \frac{V_c}{50} + \frac{V_c - V_b}{75} = 0 \quad \Rightarrow \quad -2V_b + 11V_c = 300.$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ -2 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_b \\ V_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 600 \\ 300 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad V_b = 56.25 \text{ V}, \quad V_c = 37.50 \text{ V}.$$

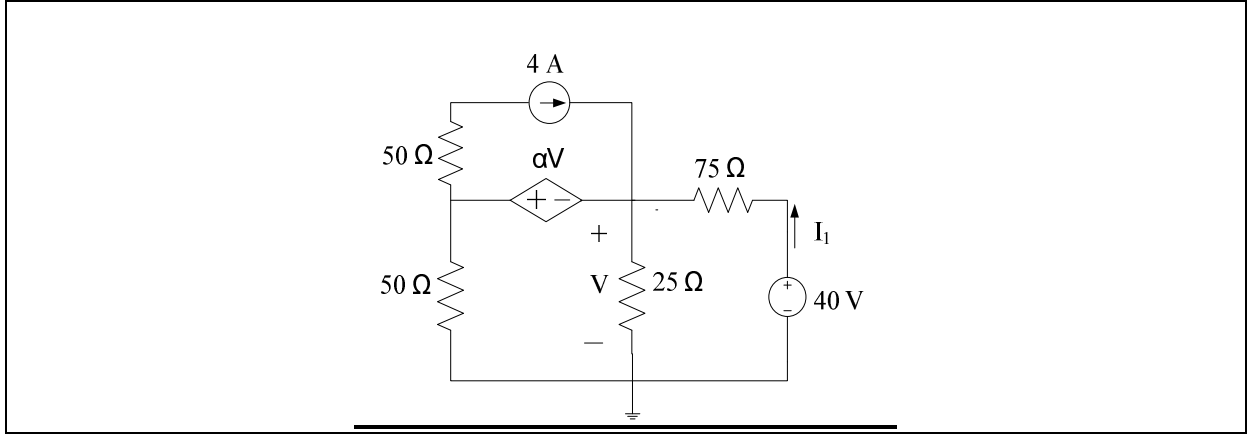
Böylece, kaynak akımı

$$I = \frac{50 - 37.5}{25} \Rightarrow I = 0.5 \text{ A}$$

ve eşdeğer direnç de

$$R_{eş} = \frac{50}{0.5} \Rightarrow R_{eş} = 100 \text{ } \Omega \text{ bulunur.}$$

3.16. Nokta potansiyelleri metodunu kullanarak aşağıda verilen devrede I_1 akımının 2 A. olması için gerekli α değerini bulunuz.

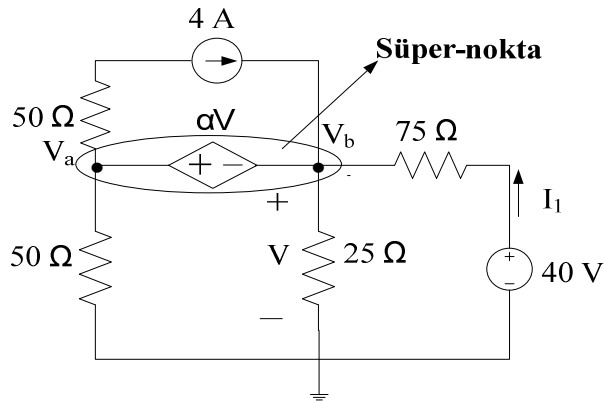


Cözüm:

$$I_1 = \frac{40 - V_b}{75}; \quad I_1 = 2 \Rightarrow 2 = \frac{40 - V_b}{75}; \quad V_b = -110 \text{ V, ve } V_b = V.$$

Süper-nokta için:

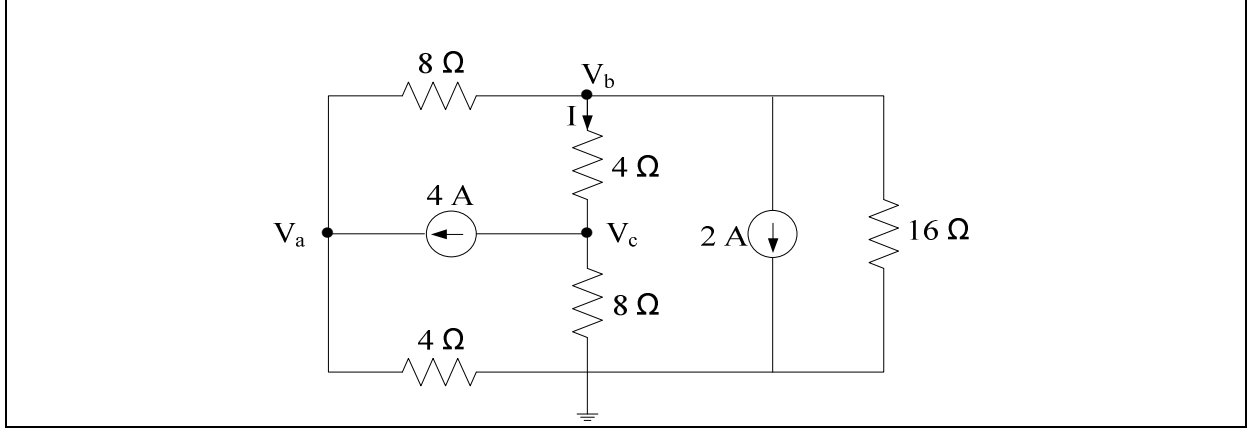
$$\frac{V_a}{50} + \frac{-110}{25} - 2 = 0 \Rightarrow V_a = 320 \text{ V.}$$



Süper noktayı içeren gözde KGY'nı uygulayarak,

$$-V_a + \alpha V + V_b = 0 \Rightarrow -V_a + V_b(1 + \alpha) = 0 \quad \text{ve} \quad \alpha = \frac{V_a}{V_b} - 1 = -3.91 \text{ bulunur.}$$

3.17. Nokta potansiyelleri metodunu kullanarak aşağıda verilen devrede, I akımını bulunuz.



$$I = \frac{V_b - V_c}{4}$$

olduğundan b ve c düğümlerinin potansiyellerinin bulunması gerekir:

$$-4 + \frac{V_a - V_b}{8} + \frac{V_a}{4} = 0 \Rightarrow 3V_a - V_b = 32$$

$$4 + \frac{V_c - V_b}{4} + \frac{V_c}{8} = 0 \Rightarrow -2V_b + 3V_c = -32.$$

$$2 + \frac{V_b - V_a}{8} + \frac{V_b - V_c}{4} + \frac{V_b}{16} = 0 \Rightarrow -2V_a + 7V_b - 4V_c = -32.$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ -2 & 7 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \\ -32 \\ -32 \end{bmatrix}$$

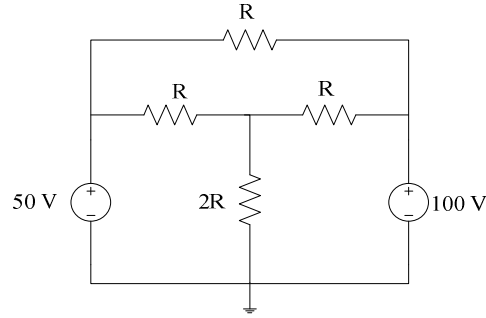
$$V_b = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 32 & 0 \\ 0 & -32 & 3 \\ -2 & -32 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ -2 & 7 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{480}{-33} = -14.54 \text{ A}, \quad V_c = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 32 \\ 0 & -2 & -32 \\ -2 & 7 & -32 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ -2 & 7 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{672}{-33} = -20.36 \text{ A}.$$

ve

$$I = \frac{V_b - V_c}{4} = \frac{-14.54 - (-20.36)}{4} = 1.456 \text{ A}$$

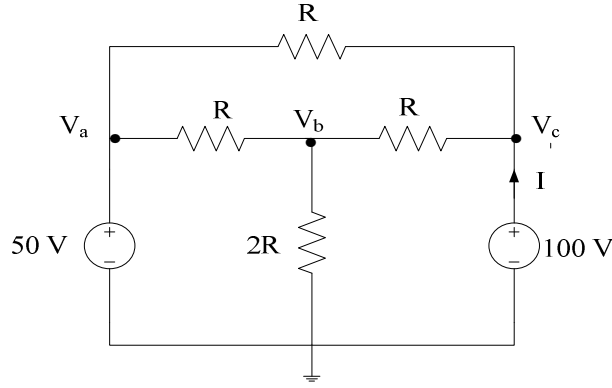
sonucu elde edilir.

3.18. Nokta potansiyelleri metodunu kullanarak, verilen devrede 100 Volt'luk kaynağın 900 W güç üretmesi için gerekli R değerini bulunuz.



Çözüm:

Gerilim kaynağının 900 Wat güç üretmesi, üzerindeki akımın aşağıdaki şekilde görüldüğü yönde olmasını gerektirir. (Güç tüketiyor konumda olsa akım yönü ters olurdu)



Kaynağın güç ifadesinden I akımı bulunabilir:

$$P_{50V} = 100I \Rightarrow 900 = 100I; \quad I = 9 \text{ A.}$$

a ve c noktaları ile referans noktası arasında sadece gerilim kaynakları bağlı olduğundan,

$$V_a = 50 \text{ V}, \quad V_c = 100$$

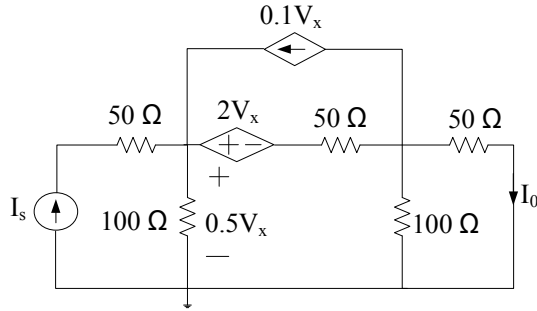
olacaktır. b noktası için,

$$\frac{V_b - V_a}{R} + \frac{V_b}{2R} + \frac{V_b - V_c}{R} = 0 \Rightarrow \frac{V_b - 50}{R} + \frac{V_b}{2R} + \frac{V_b - 100}{R} = 0; \quad 5V_b = 300 \Rightarrow V_b = 60 \text{ V}$$

bulunur. c noktasında akım yasasını uygulayarak:

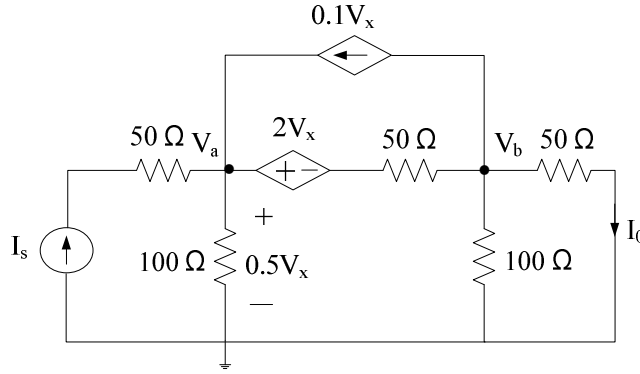
$$\frac{V_c - V_b}{R} + \frac{V_c - V_a}{R} - 9 = 0 \Rightarrow R = \frac{2V_c - V_b - V_a}{9}; \quad R = \frac{90}{9} = 10 \Omega \text{ bulunur.}$$

3.19. Nokta potansiyelleri metodunu kullanarak aşağıda verilen devrede I_0/I_s oranını bulunuz.



Çözüm:

Aşağıda görüldüğü gibi seçilmiş düğüm potansiyelleri için



$$V_x = 2V_a, \quad I_0 = \frac{V_b}{50},$$

$$\frac{V_a}{100} + \frac{V_a - V_b - 2V_x}{50} - 0.1V_x = I_s \quad \Rightarrow \quad -25V_a - 2V_b = 100I_s$$

$$\frac{V_b}{100} + \frac{V_b}{50} + \frac{V_b - V_a + 2V_x}{50} + 0.1V_x = 0 \quad \Rightarrow \quad 26V_a + 5V_b = 0$$

veya

$$\begin{bmatrix} -25 & -2 \\ 26 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100I_s \\ 0 \end{bmatrix}$$

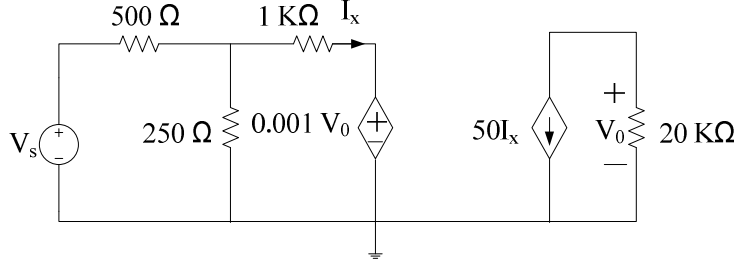
eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin çözümünü de

$$V_b = \frac{\begin{vmatrix} -25 & 100I_s \\ 26 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -25 & -2 \\ 26 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{-2600I_s}{-125 + 52} \quad \Rightarrow \quad V_b = \frac{2600I_s}{73}$$

bulunur. Böylece,

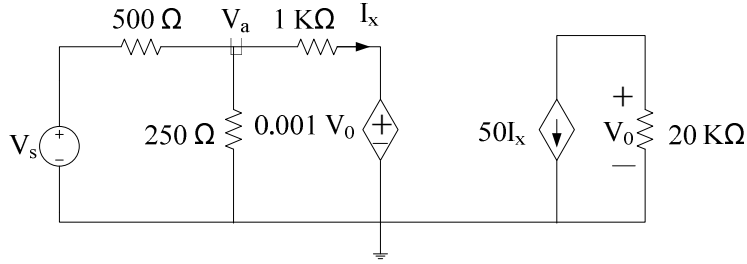
$$50I_0 = \frac{2600I_s}{73} \Rightarrow \frac{I_0}{I_s} = \frac{52}{73} \text{ sonucu elde edilir.}$$

3.20. Şekilde verilen devrede V_0/V_s oranını bulunuz.



Çözüm:

Aşağıda görüldüğü gibi seçilmiş a noktası için:



$$\frac{V_a - V_s}{500} + \frac{V_a}{250} + \frac{V_a - 0.001V_0}{1000} = 0 \Rightarrow 7V_a - 2V_s = 0.001V_0$$

ve

$$V_0 = -50I_x \cdot 20 \times 10^3 = -1 \times 10^6 I_x \Rightarrow I_x = -\frac{V_0}{1 \times 10^6}$$

olacaktır. I_x akımı, a noktası potansiyeli cinsinden

$$I_x = \frac{V_a - 0.001V_0}{1000}$$

dir. Bu iki ifadenin eşitliğinden,

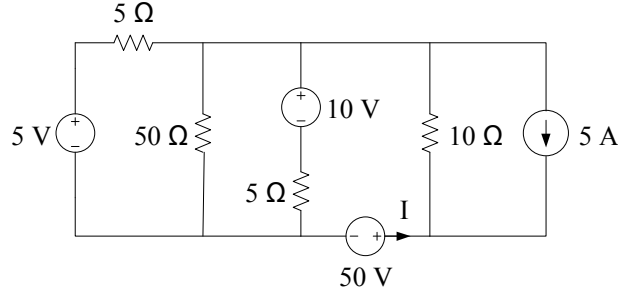
$$\frac{V_a - 0.001V_0}{1000} = -\frac{V_0}{1 \times 10^6}; \quad 1000V_a - V_0 = -V_0 \Rightarrow V_a = 0$$

bulunur. V_a değeri ilk eşitlikte kullanıldığında da,

9.BÖLÜM: ÇÖZÜMLER

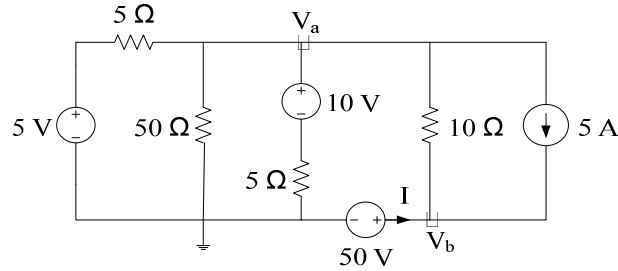
$$-2V_s = 0.001V_0; \quad \frac{V_0}{V_s} = -2000 \text{ sonucu elde edilir.}$$

3.21. Şekilde verilen devrede 50 V'luk kaynağın üzerinden geçen I akımını bulunuz.



Çözüm:

Verilen devrede referans noktası belirtilmediğinden, aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi referans noktası seçilir ve bu noktaya göre potansiyeli bilinmeyen diğer düğüm noktalarına değişkenler atanır:



Bu seçime göre $V_b = 50$ V dur. a noktası için de,

$$\frac{V_a - 5}{5} + \frac{V_a}{50} + \frac{V_a - 10}{5} + \frac{V_a - V_b}{10} = 5; \quad 26V_a - 5V_b = 400$$

eşitliği elde edilir. $V_b = 50$ değeri bu eşitlikte kullanıldığında

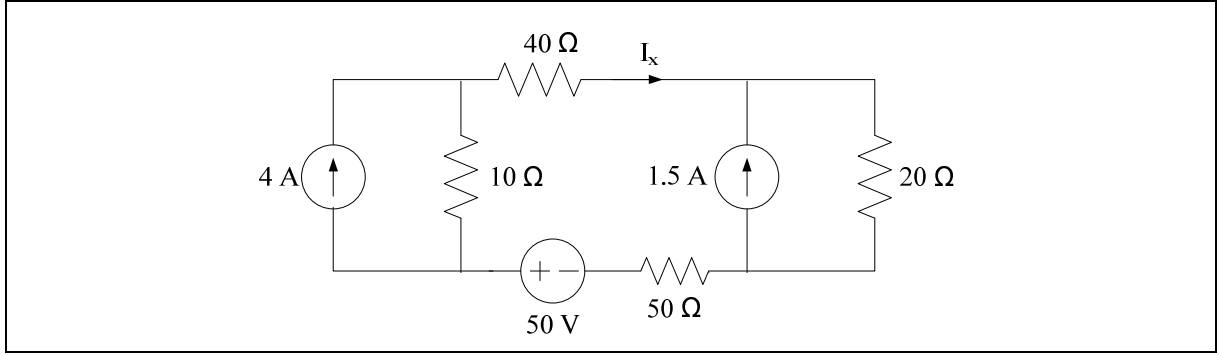
$$26V_a = 400 + 5 \cdot 50; \quad V_a = 25 \text{ V}$$

bulunur. b noktasında KAY uygulanırsa

$$-I - \frac{V_a - V_b}{10} - 5 = 0; \quad I = -\frac{V_a - V_b}{10} - 5 \text{ ve } I = -2.5 \text{ A bulunur.}$$

9.4. 4.BÖLÜM ÇÖZÜMLERİ

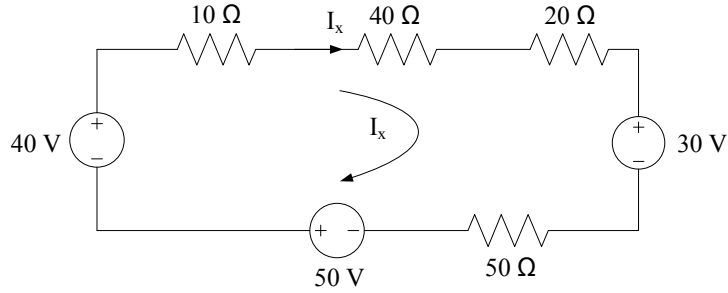
4.1 Kaynak dönüşümü prensibini kullanarak aşağıda verilen devrede I_x akımını bulunuz.

**Çözüm:**

Akım kaynaklarına kaynak dönüşümü uygulanırsa, bir gözlü bir devre elde edilecektir:

$$V_{s1} = 4 \cdot 10 = 40 \text{ V}, \quad V_{s2} = 1.5 \cdot 20 = 30 \text{ V}.$$

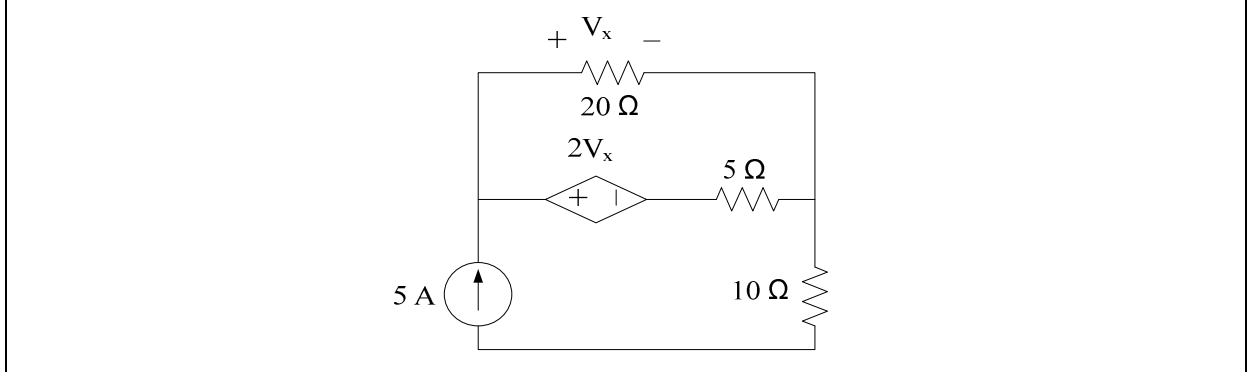
$$R_{s1} = R_{p1} = 10 \text{ } \Omega, \quad R_{s2} = R_{p2} = 20 \text{ } \Omega.$$



KGY ile de,

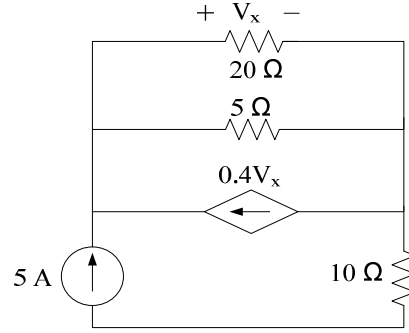
$$-50 - 40 + 30 + I_x(10 + 40 + 20 + 50) = 0 \quad \Rightarrow \quad 120I_x = 60; \quad I_x = 0.5 \text{ A bulunur.}$$

4.2 Kaynak dönüşümü prensibini kullanarak aşağıda verilen devrede V_x gerilimini bulunuz.

**Çözüm:**

Bağımlı gerilim kaynağına kaynak dönüşümü uygulanırsa aşağıdaki dönüşmüş devre elde edilir.

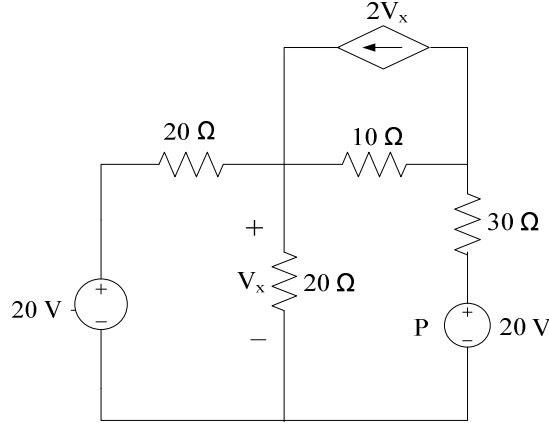
$$I_p = \frac{2V_x}{5} = 0.4 \text{ A}, \quad R_p = R_s = 5 \text{ } \Omega.$$



Paralel elemanlar üzerindeki gerilim eşit olacağından, akım yasası uygulanarak

$$\frac{V_x}{20} + \frac{V_x}{5} = 0.4V_x + 5 \Rightarrow -3V_x = 100; \quad V_x = -\frac{100}{3} \text{ V bulunur.}$$

4.3 Kaynak dönüşümü prensibini uygulayarak aşağıda verilen devrede P kaynağının gücünü bulunuz.

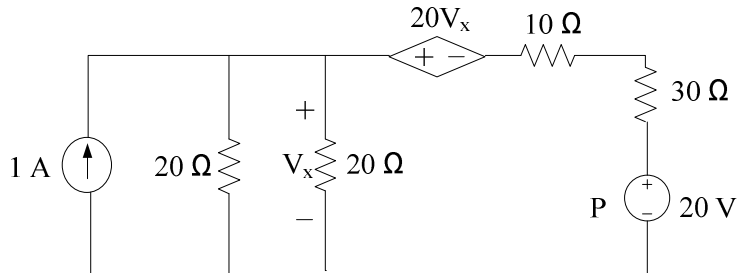


Çözüm:

20 V'luk diğer gerilim kaynağı ve bağımlı akım kaynağına aşağıdaki gibi kaynak dönüşümü uygulanırsa,

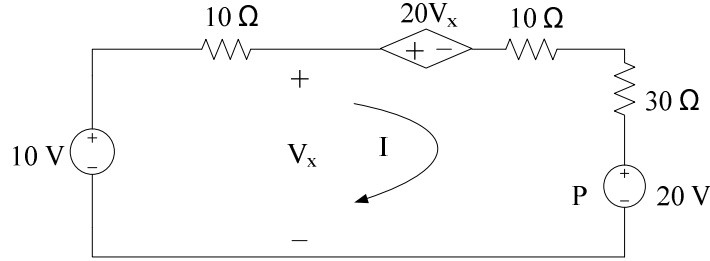
$$I_p = \frac{20}{20} = 1 \text{ A}, \quad R_p = R_s = 20 \Omega,$$

$$V_{s1} = 10(2V_x) = 20V_x, \quad R_s = R_p = 10 \Omega$$



yukarıdaki dönüşmüş devre elde edilir. Paralel bağlı $20\ \Omega$ 'luk dirençlerin eşdeğeri olan $10\ \Omega$ 'luk direnç ve akım kaynağı tekrar kaynak dönüşümüne tabii tutulursa aşağıdaki bir gözlü devre bulunur.

$$V_{s2} = 10 \cdot 1 = 10\ \text{V}, \quad R_s = R_p = 10\ \Omega.$$



Dönüşmüş bu devrede KGY uygulanırsa,

$$20V_x + 50I + 10 = 0 \quad \text{ve} \quad -10 + 10I + V_x = 0$$

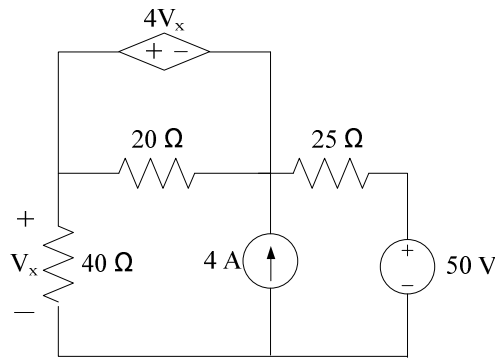
eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler I akımı için çözülürse,

$$I = 1.4\ \text{A}$$

bulunur. P kaynağının gücü ise

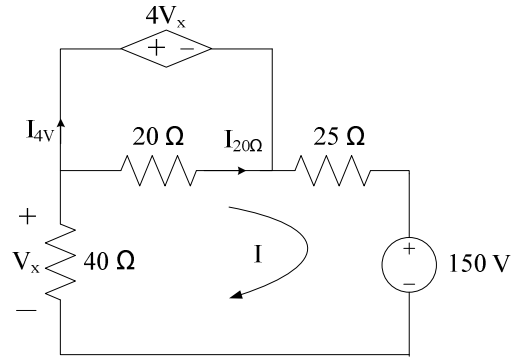
$$P_{20V} = 20I = 20 \cdot 1.4 = 28\ \text{W} \text{ bulunur.}$$

4.4 Kaynak dönüşümü prensibini kullanarak aşağıda verilen devrede bağımlı kaynağın gücünü bulunuz.



Çözüm

Bağımsız gerilim kaynağına kaynak dönüşümü uygulandığına, $50/25 = 2\ \text{A}$ lik akım kaynağı ile $25\ \Omega$ 'luk direncin paralel bağlantısı elde edilir. Paralel akım kaynaklarının toplamı $2 + 4 = 6\ \text{A}$ olacaktır. Bu akım kaynağı ve paralel direncin oluşturduğu kısma tekrar kaynak dönüşümü uygulanırsa $6 \cdot 25 = 150\ \text{V}$ 'luk gerilim kaynağının $25\ \Omega$ 'luk dirence seri bağlantısı elde edilir. Sonuç dönüşmüş devresi aşağıdaki şekilde görüldüğü gibidir. Bu aşamadan sonra bir kaynak dönüşümü mümkün olmadığından aranan devre değişkeni bu devreden elde edilmelidir.



KGY uygulanırsa,

$$150 + 25I + 4V_x - V_x = 0 \quad \Rightarrow \quad 3V_x + 25I = -150.$$

$$V_x = -40I; \quad -120I + 25I = -150 \quad \Rightarrow \quad I = \frac{150}{95} = 1.579 \text{ A}; \quad V_x = -63.15 \text{ V}.$$

20 Ω ' luk direnç üzerindeki akım:

$$I_{20\Omega} = \frac{4V_x}{20} = -12.63 \text{ A}.$$

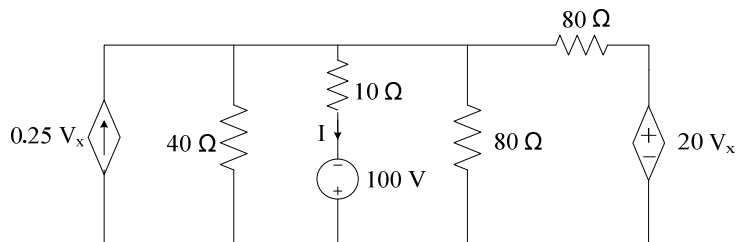
Bağımlı kaynak akımı, KAY ile,

$$I_{4V} + I_{20\Omega} - I = 0; \quad I_{4V} = -I_{20\Omega} + I = 12.63 + 1.579 = 14.21 \text{ A}$$

ve bağımlı kaynağın gücü;

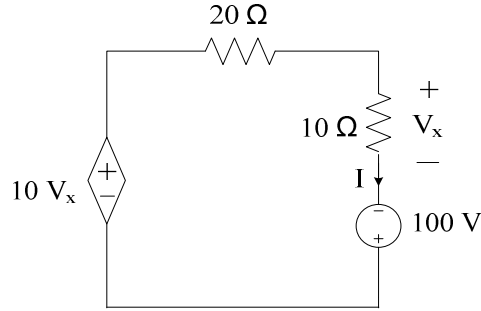
$$P_{4V_x} = 4V_x (I_{4V_x}) = 4(-63.15)(14.21) = -3589.4 \text{ W bulunur}$$

4.5 Kaynak dönüşümü prensibini kullanarak aşağıda verilen devrede I akımını bulunuz.



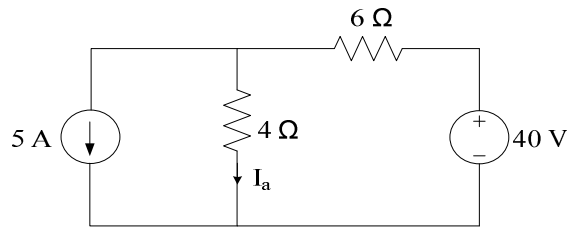
Çözüm:

Bağımlı gerilim kaynağına 80 Ω 'luk dirençle birlikte kaynak dönüşümü uygulanırsa, $20V_x / 80 = 0.25V_x$ A'lık akım kaynağına paralel bağlı 80 Ω 'luk dirençten oluşan yapı elde edilir. Bağımlı kaynaklar paralel olduğundan toplanabilir ve eşdeğer bağımlı akım kaynağı $0.5V_x$ A, 80 Ω 'luk dirençler ve 40 Ω 'luk direnç paralel olacağından eşdeğerleri $80 // 80 // 40 = 20 \Omega$ olacaktır. Son olarak, akım kaynağı ile paralel bağlı bu direnç tekrar kaynak dönüşümüne tabii utulursa, $0.5V_x (20) = 10V_x$ V'luk gerilim kaynağına seri bağlı 20 Ω 'luk dirençten oluşan yapı elde edilir. Böylece elde edilen sonuç dönüşmüş devresi aşağıda görüldüğü gibi olacaktır. Bu devrede KGY uygulanırsa,



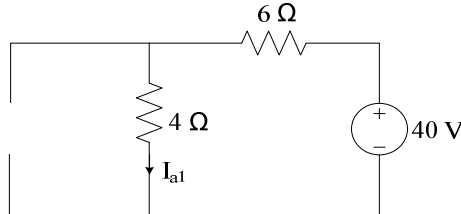
$$-10V_x + 30I - 100 = 0; \quad V_x = 10I \Rightarrow -70I = 100; \quad I = -\frac{10}{7} \text{ A bulunur.}$$

4.6 Süper-pozisyon teoremini kullanarak aşağıda verilen devrede I_a akımını bulunuz.



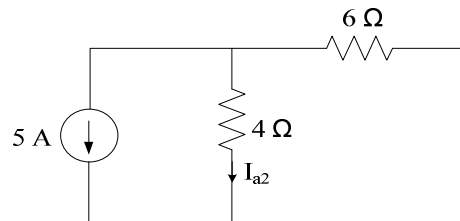
Çözüm:

Akım kaynağı izole edilerek, I_a akımına gerilim kaynağının katkısı bulunur:



$$I_{a1} = \frac{40}{6+4} = 4 \text{ A.}$$

Gerilim kaynağı izole edilerek, I_a akımına gerilim kaynağının katkısı bulunur

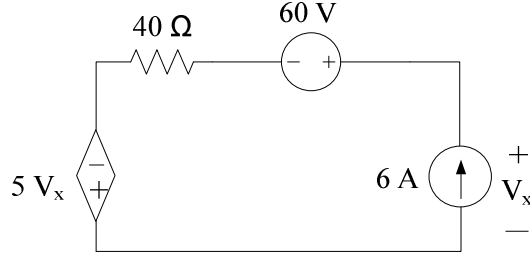


$$I_{a2} = -5 \frac{6}{6+4} = -3 \text{ A.}$$

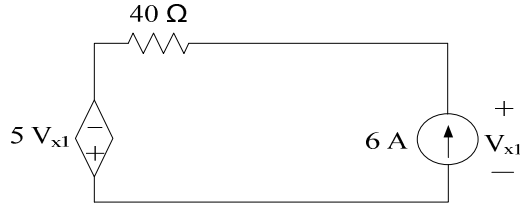
Toplam akım her iki kaynağın katkılarının cebirsel toplamı kadardır:

$$I_a = I_{a1} + I_{a2} = 4 + (-3) = 1 \text{ A.}$$

4.7 Süper-pozisyon teoremini kullanarak aşağıda verilen devrede V_x gerilimini bulunuz.

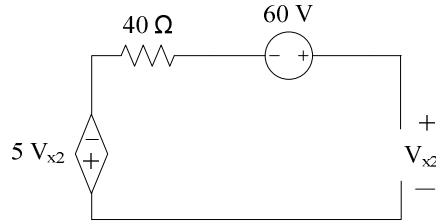


Gerilim kaynağı izole edilerek elde edilen aşağıdaki devreden, akım kaynağının katkısı bulunur:



$$-V_{x1} - 5V_{x1} + 40(6) = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{x1} = 40 \text{ V}$$

ve akım kaynağı izole edilerek gerilim kaynağının katkısı

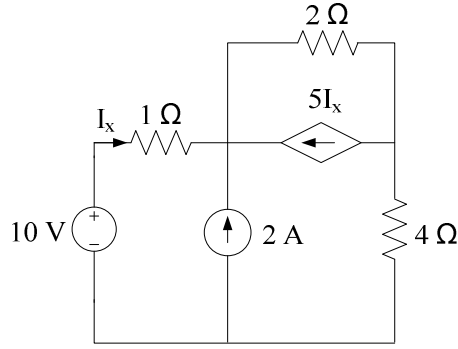


$$-V_{x2} - 5V_{x2} + 60 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{x2} = 10 \text{ V}$$

bulunur. Toplam gerilim ise bu katkıların cebirsel toplamıdır:

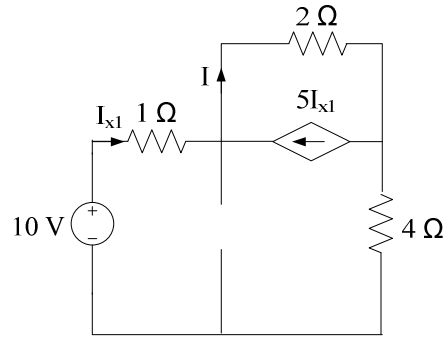
$$V_x = V_{x1} + V_{x2} = 40 + 10 = 50 \text{ V.}$$

4.8 Süper-pozisyon teoremini kullanarak aşağıda verilen devrede 1Ω 'luk direncin gücünü bulunuz.



Çözüm:

Akım kaynağı izole edilerek elde edilen aşağıdaki devreden, gerilim kaynağının I_x akımına katkısı bulunur:



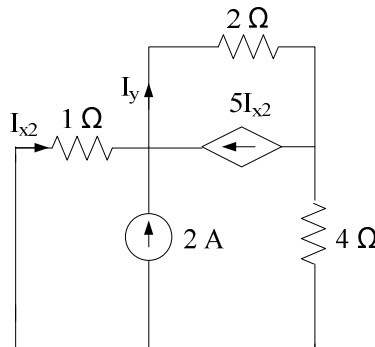
KAY ile,

$$I = I_{x1} + 5I_{x1}; \quad I = 6I_{x1}$$

ve en dış çevrimde KAY'ı uygulayarak da,

$$I_{x1} + 2(6I_{x1}) + 4I_{x1} = 10; \quad 17I_{x1} = 10 \Rightarrow I_{x1} = 0.588 \text{ A bulunur.}$$

Gerilim kaynağı izole edilerek elde edilen aşağıdaki devreden de, akım kaynağının I_x akımına katkısı bulunur:



KAY uygulanarak,

$$I_{x2} + 5I_{x2} + 2 = I_y; \quad 6I_{x2} + 2 = I_y,$$

ve yine en dış çevrimde KAY'nı uygulayarak da,

$$I_{x2} + 2(6I_{x2} + 2) + 4(I_{x2} + 2) = 0; \quad 17I_{x2} = -12 \Rightarrow I_{x2} = -0.705 \text{ A bulunur.}$$

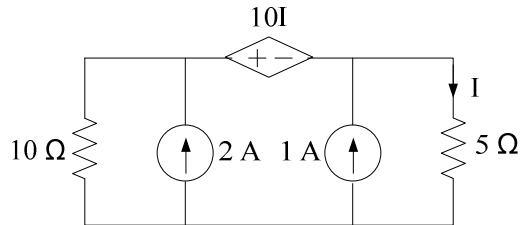
Toplam akım bu iki akımın cebirsel toplamı olduğundan:

$$I_x = I_{x1} + I_{x2} = 0.588 - 0.705 = -0.117 \text{ A}$$

ve 1Ω 'luk direncin gücü de

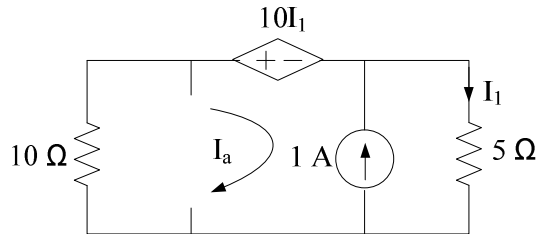
$$P_{1\Omega} = 1 \cdot I_x^2 = 13.69 \text{ mW bulunur.}$$

4.9 Süper-pozisyon teoremini kullanarak aşağıda verilen devrede bağımlı kaynağın gücünü bulunuz.



Cözüm:

2 A'lık akım kaynağı izole edildiğinde aşağıdaki devre elde edilir:



Dış çevrimde KGY ile,

$$10I_a + 10I_1 + 5I_1 = 0$$

ve KAY ile de,

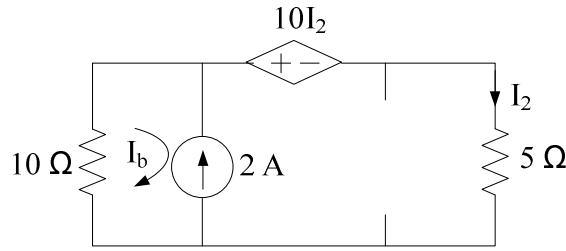
$$I_1 - I_a = 1; \quad I_a = I_1 - 1$$

eşitlikleri elde edilir. I_a akımının ifadesi ilk eşitlikte kullanılarak

$$10(I_1 - 1) + 10I_1 + 5I_1 = 0; \quad 25I_1 = 10 \Rightarrow I_1 = 0.4 \text{ A ,}$$

$$I_a = 0.4 - 1 = -0.6 \text{ A bulunur.}$$

1 A'lık akım kaynağı izole edildiğinde aşağıdaki devre elde edilir:



Dış çevrimde KGY ile,

$$10I_b + 10I_2 + 5I_2 = 0$$

ve KAY ile de,

$$I_2 - I_b = 2; \quad I_b = I_2 - 2$$

eşitlikleri elde edilir. I_b akımının ifadesi ilk eşitlikte kullanılarak

$$10(I_2 - 2) + 10I_2 + 5I_2 = 0; \quad 25I_2 = 20 \Rightarrow I_2 = 0.8 \text{ A},$$

$$I_b = 0.8 - 2 = -1.2 \text{ A bulunur.}$$

I akımı için

$$I = I_1 + I_2 = 0.4 + 0.8 = 1.2 \text{ A}$$

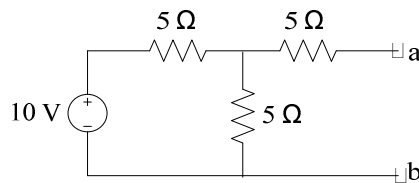
ve gerilim kaynağı üzerinden geçen akım için de

$$I_a + I_2 = -0.6 + 0.8 = 0.2 \text{ A}$$

değerleri bulunur. Gerilim kaynağına 0.2 A'lık akım pozitif terminalinden girmektedir. Bu nedenle gücü:

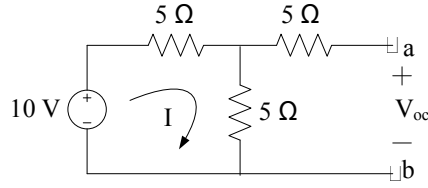
$$P_{10I} = (I_a + I_2)(10I) = 0.2 \cdot (10 \cdot 1.2) = 2.4 \text{ W bulunur.}$$

4.10 Aşağıda verilen devrenin a-b terminallerinden görülen Thevenin eşdeğer devresini bulunuz.



Çözüm:

Aşağıda görülen devreden açık devre gerilimi bulunur:

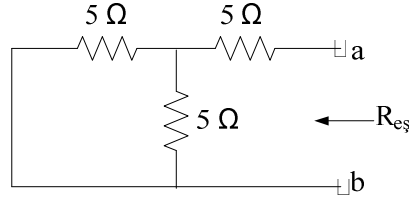


$$I = \frac{10}{5+5} = 1 \text{ A} \quad \text{ve} \quad V_{oc} = 5I = 5 \cdot 1 = 5 \text{ V.}$$

Açık devre gerilimi Thevenin eşdeğer gerilimine eşittir:

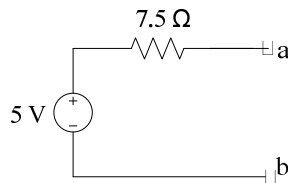
$$V_{Th} = V_{oc} = 5 \text{ V.}$$

Devrede bağımlı kaynak bulunmadığından, Thevenin eşdeğer direnci, devredeki bağımsız kaynaklar izole edildiğinde a-b terminallerinden görülen dirence eşit olacaktır.

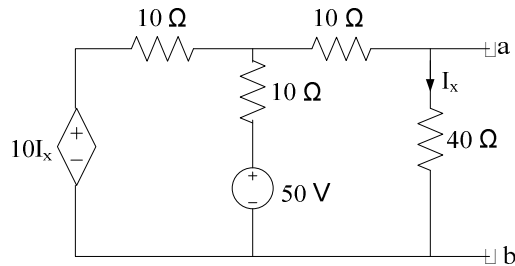


$$R_{es} = R_{Th} = (5 // 5) + 5 = 7.5 \Omega.$$

Thevenin eşdeğer devresi aşağıda görüldüğü gibi olacaktır.

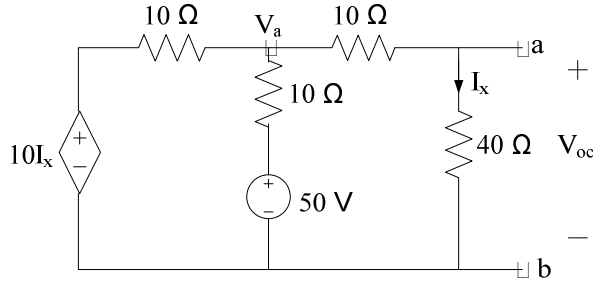


4.11 Aşağıda verilen devrenin a-b terminallerine 18Ω , 28Ω ve 88Ω 'luk dirençler sırasıyla bağlanıyor. Her bir durumda dirençlerin harcadığı gücü bulunuz.



Çözüm:

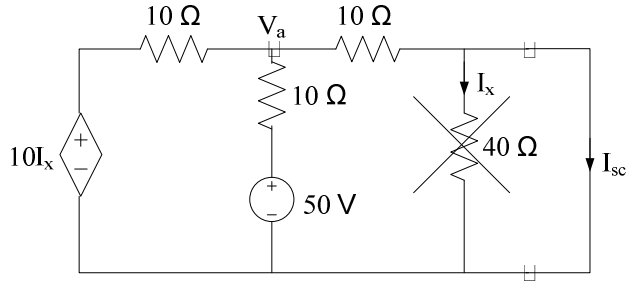
Aşağıdaki devrede düğüm potansiyelleri uygulanarak açık devre gerilimi bulunur:



$$\frac{V_a - 10I_x}{10} + \frac{V_a - 50}{10} + \frac{V_a}{10 + 40} = 0; \quad I_x = \frac{V_a}{10 + 40} = \frac{V_a}{50} \Rightarrow 2V_a = 50; \quad V_a = 25 \text{ V.}$$

$$V_{oc} = V_{Th} = 40 \cdot \frac{V_a}{50} = 20 \text{ V.}$$

Aşağıdaki devreden de kısa devre akımı bulunur: Bu devrede 40 Ω'luk direnç kısa devredir.



$$\frac{V_a - 10I_x}{10} + \frac{V_a - 50}{10} + \frac{V_a}{10} = 0; \quad I_x = 0 \Rightarrow 3V_a = 50; \quad V_a = \frac{50}{3} \text{ V.}$$

$$I_{sc} = \frac{V_a}{10} = \frac{50/3}{10} = \frac{5}{3} \text{ A.}$$

Thevenin eşdeğer direnci, açıkdevre geriliminin kısa devre akımına oranıdır:

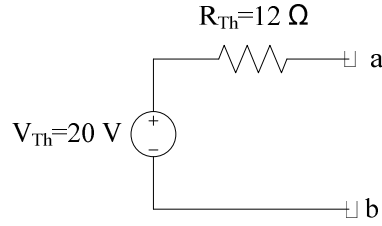
$$R_{Th} = \frac{V_{oc}}{I_{sc}} = \frac{20}{5/3} = 12 \text{ } \Omega.$$

Thevenin eşdeğer devresi aşağıda görülen devre olacaktır. Bu devrede sırasıyla verilen dirençler çıkış terminallerine bağlandığında,

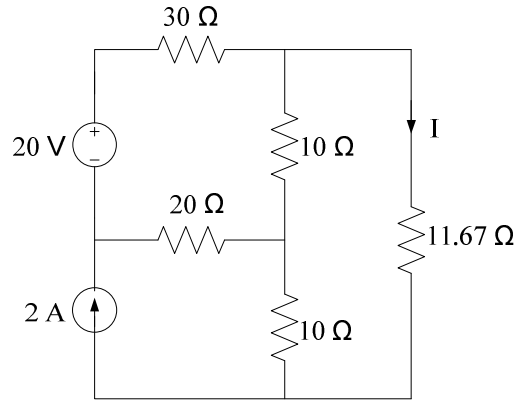
$$R = 18 \text{ } \Omega; \quad P_R = I^2 R = \left(\frac{V_{Th}}{R_{Th} + R} \right)^2 \cdot R = \left(\frac{20}{12 + 18} \right)^2 \cdot 18 = 8 \text{ W,}$$

$$R = 28 \, \Omega; \quad P_R = I^2 R = \left(\frac{V_{Th}}{R_{Th} + R} \right)^2 \cdot R = \left(\frac{20}{12 + 28} \right)^2 \cdot 28 = 7 \, \text{W},$$

$$R = 88 \, \Omega; \quad P_R = I^2 R = \left(\frac{V_{Th}}{R_{Th} + R} \right)^2 \cdot R = \left(\frac{20}{12 + 88} \right)^2 \cdot 88 = 3.52 \, \text{W bulunur.}$$

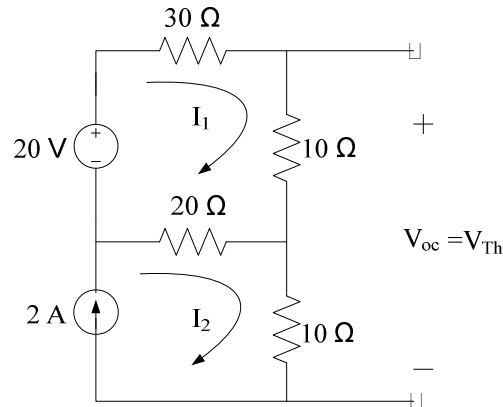


4.12 Şekil.4.62’de verilen devrede Thevenin teoremini kullanarak V_0 gerilimini bulunuz.



Çözüm:

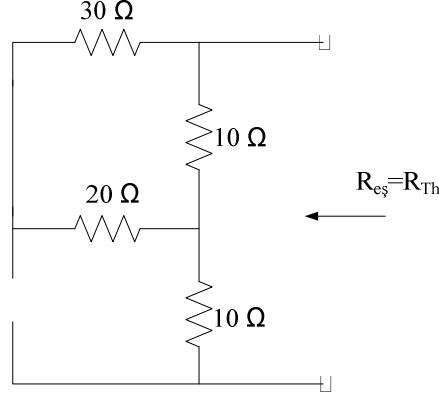
Üzerinden geçen akımın arandığı direnç devreden çıkarılarak, bu direncin bağlı olduğu terminallerden görülen Thevenin eşdeğer devresinin bulunması gereklidir. Bu amaçla öncelikle aşağıdaki devreden açık devre gerilimini bulalım:



$$60I_1 - 20I_2 = 20; \quad I_2 = 2 \text{ A} \Rightarrow 60I_1 = 20 + 40; \quad I_1 = 1 \text{ A},$$

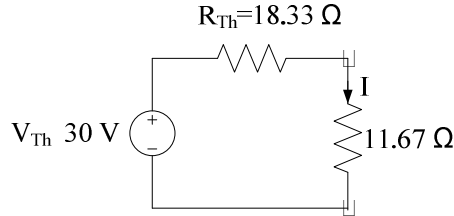
$$-V_{oc} + 10I_1 + 10I_2 = 0; \quad V_{oc} = V_{Th} = 10I_1 + 10I_2 = 10 \cdot 1 + 10 \cdot 2 = 30 \text{ V}.$$

Devrede bağımlı kaynak bulunmadığından, Thevenin eşdeğer direnci bağımsız kaynaklar izole edilerek elde edilen aşağıdaki devreden bulunur:



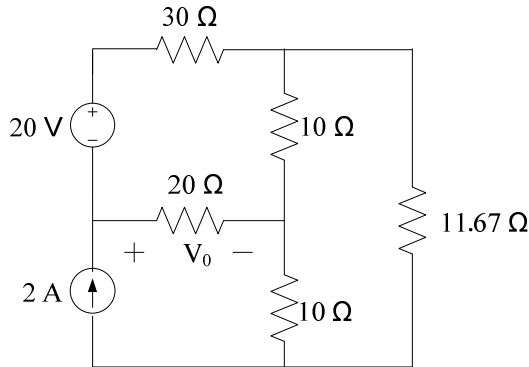
$$R_{Th} = ((20 + 30) // 10) + 10 = 18.33 \text{ } \Omega.$$

Elde edilen Thevenin eşdeğer devresine aşağıda görüldüğü gibi üzerindeki akım aranan direnç bağlanırsa, akım bu tek gözlü devreden kolaylıkla,



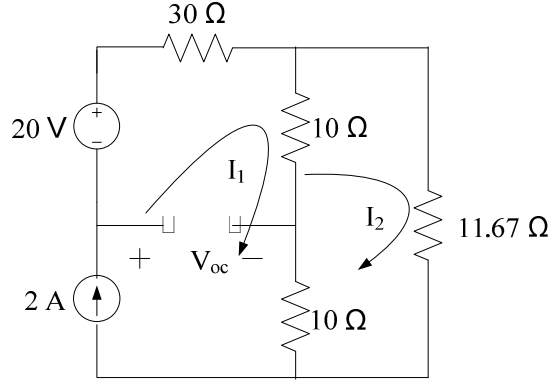
$$I = \frac{V_{Th}}{R_{Th} + R} = \frac{30}{18.33 + 11.67} = 1 \text{ A} \text{ olarak bulunur.}$$

4.13 Aşağıd verilen devrede Thevenin teoremini kullanarak V_0 değerini bulunuz.



Çözüm:

Problem 4.12' de verilen devrenin, $20\ \Omega$ 'luk direncin bağlı oldu terminallerden görülen Thevenin eşdeğrinin bulunması gerekmektedir. Bu amaçla, $20\ \Omega$ 'luk direnç devreden çıkarılarak elde edilen, aşağıdaki devrede açık devre gerilimini bulalım:

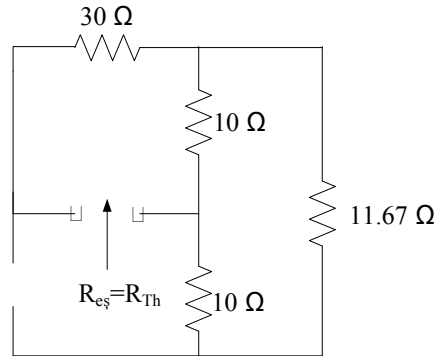


$$31.67I_2 - 20I_1 = 0; \quad I_1 = 2\text{ A} \Rightarrow 31.67I_2 = 20 \cdot 2; \quad I_2 = \frac{40}{31.67} = 1.263\text{ A.}$$

KGY ile,

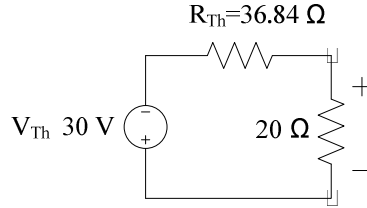
$$-V_{oc} - 20 + 10(I_1 - I_2) = 0; \quad V_{oc} = V_{Th} = -20 + 10(2 - 1.263) = -12.63\text{ V bulunur.}$$

Kaynaklar izole edildiğinde elde edilen aşağıdaki devreden de Thevenin eşdeğer direnci bulunur:



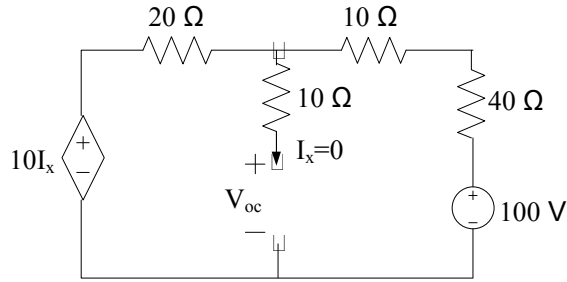
$$R_{Th} = ((10 + 11.67) // 10) + 30 = 36.84\ \Omega.$$

Aşağıda, elde edilen Thevenin eşdeğer devresine, üzerindeki gerilim aranan direnç bağlanmıştır. Bu devreden gerilim,

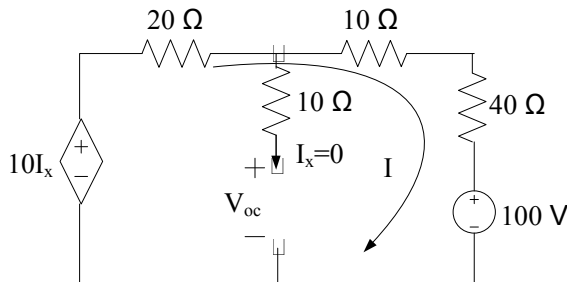


$$V_0 = -\frac{V_{Th}}{R_{Th} + R} \cdot R = -\frac{30}{36.84 + 20} \cdot 20 = -10.55 \text{ V bulunur.}$$

4.14 Aşağıda verilen devrede Thevenin teoremini kullanarak 50 V'luk kaynağın gücünü bulunuz.



50 V'luk kaynak devreden çıkarılılarak elde edilen aşağıdaki devreden açık devre gerilimi bulunur.



$$-10I_x + 70I + 100 = 0; \quad I_x = 0 \Rightarrow 70I = -100; \quad I = -1.428 \text{ A.}$$

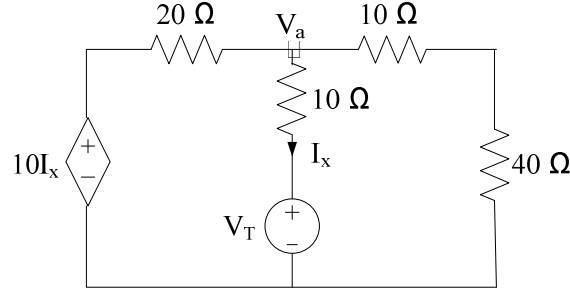
İkinci gözde KGY uygulanarakda,

$$-V_{oc} + 50I + 100 = 0; \quad V_{oc} = 50I + 100 = 0 \Rightarrow V_{oc} = 50 \cdot (-1.428) + 100 = 28.57 \text{ V}$$

bulunur. Aynı terminalden görülen Thevenin eşdeğer direnci için, devredeki 100 V'luk bağımsız kaynak izole edilip, direncin hesaplanacağı terminale bir test kaynağı bağlanarak aşağıdaki devre elde edilmiştir:

Düğüm potansiyelleri metodu ile,

$$\frac{V_a - V_T}{10} + \frac{V_a - 10I_x}{20} + \frac{V_a}{50} = 0; \quad I_x = \frac{V_a - V_T}{10} \Rightarrow V_a = \frac{5V_T}{12}.$$



$$I_x = \frac{(5V_T / 12) - V_T}{10} = -\frac{7V_T}{120}; \quad R_{Th} = -\frac{V_T}{I_x} \Rightarrow R_{Th} = \frac{120}{7} \Omega.$$

Thevenin eşdeğer devresine, gücü hesaplanacak 50 V'luk kaynak bağlanarak elde edilen aşağıdaki devreden,

6.1. Kapasitansı $0.2 \mu\text{F}$ olan bir kapasitörün plakalarında biriken yükün zamana bağlı ifadesi

$$q(t) = 10^{-3} \frac{t^3}{3} \text{ C}$$

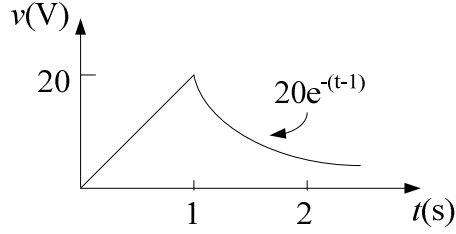
ise kapasitör terminal akımını ve terminal gerilimini bulunuz.

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = 10^{-3} \frac{d}{dt} \left(\frac{t^3}{3} \right) = (10^{-3}) \cdot (3) \left(\frac{t^2}{3} \right) = 10^{-3} t^2 \text{ A.}$$

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt + v(0); \quad v(0) = 0.$$

$$v(t) = \frac{1}{0.2 \times 10^{-6}} (10^{-3}) \int_0^t t^2 dt = 5 \times 10^3 \frac{t^3}{3} = 1666.6 t^3 \text{ V.}$$

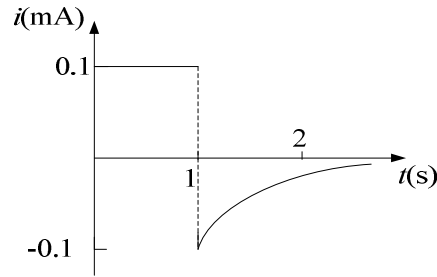
6.2. $5 \mu\text{F}$ ' lık bir kapasitörün terminal geriliminin zamana bağlı değişimi aşağıdaki şekilde verilmiştir. Bu kapasitörün terminal akımının zamana göre değişimini bulunuz. Akımı ve kapasitörde depolanan enerjiyi zamanın bir fonksiyonu olarak çiziniz.



$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$$

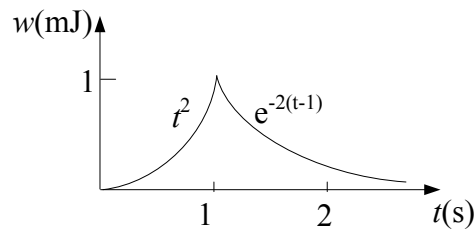
olduğundan verilen eğrinin ilgili aralıkta eğimi bulunup kapasitör kapasitansı ile çarpılabilir:

$$\frac{dv(t)}{dt} = \begin{cases} 20 & 0 \leq t \leq 1 \\ -20e^{-(t-1)} & 1 \leq t \end{cases} \quad \text{ve} \quad i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} = \begin{cases} 0.1 \times 10^{-3} & 0 \leq t \leq 1 \\ -0.1 \times 10^{-3} e^{-(t-1)} & 1 \leq t \end{cases}$$

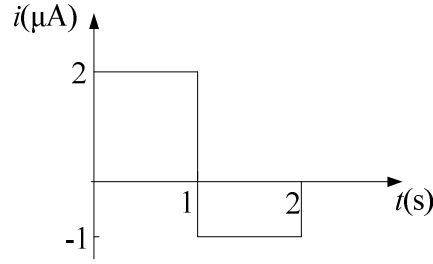


$$w(t) = \frac{1}{2} C v^2(t) \Rightarrow w(t) = \begin{cases} 1 \times 10^{-3} t^2 \text{ J} & 0 \leq t \leq 1 \\ 1 \times 10^{-3} e^{-2(t-1)} \text{ J} & 1 \leq t \end{cases}$$

$$w(t) = \begin{cases} t^2 \text{ mJ} & 0 \leq t \leq 1 \\ e^{-2(t-1)} \text{ mJ} & 1 \leq t \end{cases}$$



6.3. Başlangıçta yüksüz olan 1 mF' bir kapasitör üzerindeki akımın zamana göre değişim grafiği Şekil.6.22'de verilmiştir. Kapasitörün terminal gerilimini bulunuz ve zamana göre değişim grafiğini çiziniz.



$0 \leq t \leq 1$ için kapasitör akımı $i(t) = 2 \times 10^{-6}$ A ve $v(0) = 0$;

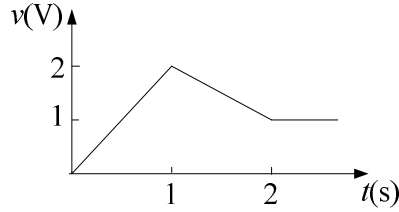
$$v(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt + v(0) \Rightarrow v(t) = \frac{2 \times 10^{-6}}{1 \times 10^{-6}} \int_0^t dt = 2t \text{ V.}$$

$1 \leq t = 2$ için kapasitör akımı $i(t) = -1 \times 10^{-6}$ A. ve $v(1) = 2t|_{t=1} = 2$ V.

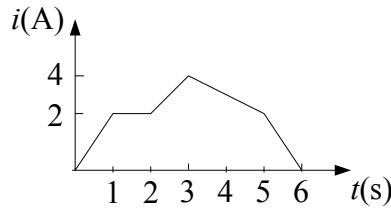
$$v(t) = \frac{-1 \times 10^{-6}}{1 \times 10^{-6}} \int_0^t dt + 2 = -t|_1^t + 2 = -t + 1 + 2 = -t + 3 \text{ V.}$$

$1 \leq t < 2$ için kapasitör akımı sıfır olduğundan bu andan sonra kapasitör üzerindeki gerilim $t = 2$ anındaki gerilim değerinde sabit kalacaktır.

$$v(2) = -2 + 3 = 1 \text{ V.}$$



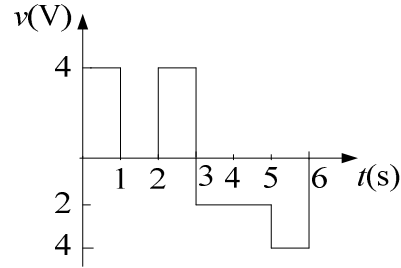
6.4. İndüktansı 2 H olan bir bobinin terminal akımının zamanla değişimi Şekil.6.23'de verilmiştir. Bobin terminal geriliminin zamana göre değişimini çiziniz.



$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

olduğundan verilen eğrinin, ilgili aralıkta eğimi bulunup bobin indüktansı ile çarpılabilir:

$$\frac{di(t)}{dt} = \begin{cases} 2 & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & 1 < t < 2 \\ 2 & 2 \leq t \leq 3 \\ -1 & 3 < t < 5 \\ -2 & 5 \leq t \leq 6 \end{cases} \quad \text{ve} \quad v(t) = L \frac{di(t)}{dt} = \begin{cases} 4V & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & 1 < t < 2 \\ 4V & 2 \leq t \leq 3 \\ -2V & 3 < t < 5 \\ -4V & 5 \leq t \leq 6 \end{cases}.$$



6.5. İndüktansı 2 mH olan bir bobinin terminal gerilimi

$$v(t) = \begin{cases} 5 \text{ mV}, & 0 \leq t < 1 \\ e^{-2t} \text{ mV}, & 1 \leq t \end{cases}$$

ve başlangıçta bobin üzerinde depolanan enerji sıfır ise, bobin terminal akımını zamanın bir fonksiyonu olarak çiziniz.

$0 \leq t < 1$ için,

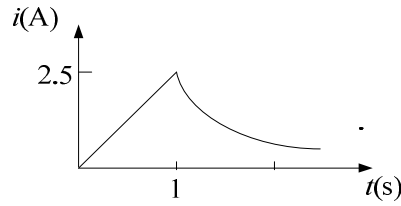
$$i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t v(t) dt + i(0) \quad \text{ve} \quad i(0) = 0 \quad \text{olduğundan,}$$

$$i(t) = \frac{5 \times 10^{-3}}{2 \times 10^{-3}} \int_0^t dt = 2.5t \text{ A.} \quad \text{ve} \quad i(1) = 2.5 \text{ A.}$$

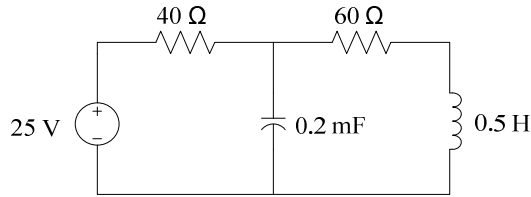
$1 \leq t$ için,

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_1^t v(t) dt + i(1) \quad \text{ve} \quad i(1) = 2.5 \text{ A.} \quad \text{olduğundan}$$

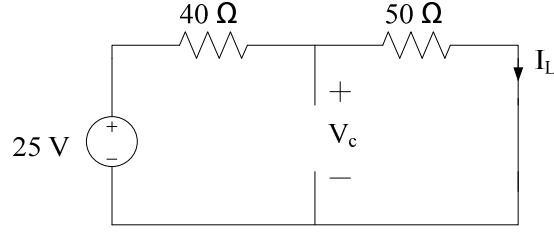
$$i(t) = \frac{1 \times 10^{-3}}{2 \times 10^{-3}} \int_1^t e^{-2t} dt + 2.5 = -0.25 e^{-2t} \Big|_1^t + 2.5 = -0.25 e^{-2t} + 0.0338 + 2.5 = 2.5338 - 0.25 e^{-2t} \text{ A.}$$



6.6. Şekilde verilen devre uzun süredir çalışmaktadır. Kapasitör ve bobin üzerinde depolanan enerji miktarlarını bulunuz.



Kapasitör ve bobin uzun süre dc kaynağa maruz kaldıklarından, artık dc koşullarında çalışmaktadırlar. Yani kapasitör açık devre, bobin ise kısa devre gibi davranmaktadır. Bu koşullar altında eşdeğer devre aşağıdaki gibi olacaktır.



Bobin akımı,

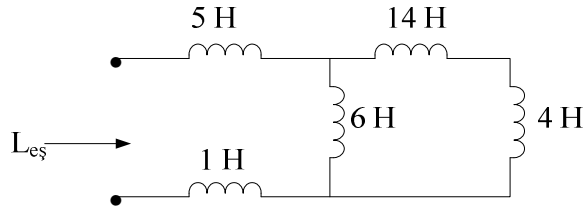
$$I_L = \frac{25}{40 + 60} = 0.25 \text{ A. ve kapasitör gerilimi } V_c = 50 I_L = 50 \cdot (0.25) = 12.5 \text{ V. olacaktır.}$$

Depolanan enerjiler ise

$$w_c = \frac{1}{2} C V_c^2 = \frac{1}{2} (0.2 \times 10^{-3}) \cdot (12.5)^2 = 15.625 \text{ mJ}$$

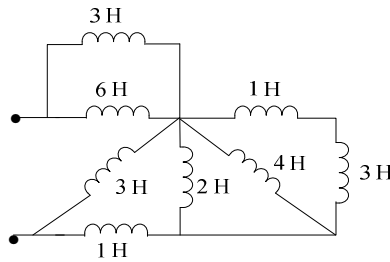
$$w_L = \frac{1}{2} I_L^2 = \frac{1}{2} (0.5) \cdot (0.25)^2 = 15.625 \text{ mJ. bulunur.}$$

6.7. Şekilde görülen devrenin giriş terminalinden görülen eşdeğer indüktansı bulunuz.



$$L_{eş} = ((14 + 4) // 6) + 5 + 1 = (18 // 6) + 6 = \frac{18 \cdot 6}{18 + 6} + 6 = 10.5 \text{ H.}$$

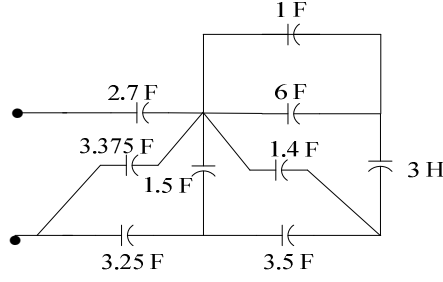
6.8. Şekilde verilen devrenin giriş terminalinden görülen eşdeğer indüktansı bulunuz.



$$L_{eş} = (((1 + 3) // 4 // 2) + 1) // 3 + (3 // 6) = (((4 // 4 // 2) + 1) // 3) + 2$$

$$L_{eş} = ((1 + 1) // 3) + 2 = (2 // 3) + 2 = 3.5 \text{ H.}$$

6.9. Şekilde görülen devrenin giriş terminallerinden görülen eşdeğer kapasitansı bulunuz



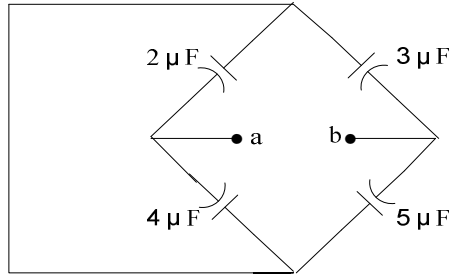
$$C_{eş1} = 6 + 1 = 7 \text{ F.} \quad C_{eş2} = \frac{C_{eş1} \cdot 3}{C_{eş1} + 3} = \frac{7 \cdot 3}{7 + 3} = 2.1 \text{ F.}$$

$$C_{eş3} = C_{eş2} + 1.4 = 2.1 + 1.4 = 3.5 \text{ F.} \quad C_{eş4} = \frac{C_{eş3} \cdot (3.5)}{C_{eş3} + 3.5} = \frac{(3.5) \cdot (3.5)}{3.5 + 3.5} = 1.75 \text{ F.}$$

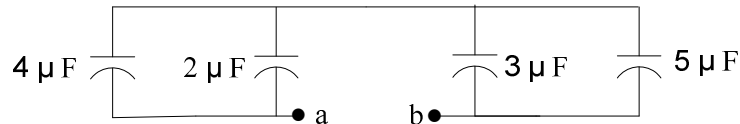
$$C_{eş5} = C_{eş4} + 1.5 = 1.75 + 1.5 = 3.25 \text{ F} \quad C_{eş6} = \frac{C_{eş5} \cdot (3.25)}{C_{eş5} + 3.25} = \frac{(3.25) \cdot (3.25)}{3.25 + 3.25} = 1.625 \text{ F.}$$

$$C_{eş7} = C_{eş6} + 3.375 = 1.625 + 3.375 = 5 \text{ F.} \quad C_{eş} = \frac{C_{eş7} \cdot (1.25)}{C_{eş7} + 1.25} = \frac{5 \cdot (1.25)}{5 + 1.25} = 1 \text{ F.}$$

6.10. Şekilde görülen devrenin a-b terminallerinden görülen eşdeğer kapasitansını bulunuz.

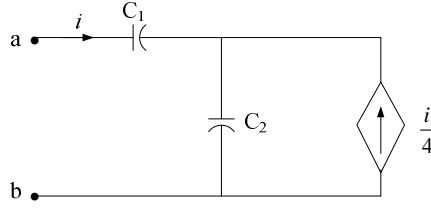


Kısa devre uçları birleştirilirse devre aşağıda görüldüğü şekilde yeniden çizilebilir:



$$C_{eş1} = 4 + 2 = 6 \mu\text{F}, \quad C_{eş2} = 3 + 5 = 8 \mu\text{F}, \quad C_{eş} = \frac{C_{eş1} \cdot C_{eş2}}{C_{eş1} + C_{eş2}} = \frac{6 \cdot 8}{6 + 8} = 4 \mu\text{F.}$$

6.11. Şekilde verilen devrenin eşdeğer kapasitansını bulunuz.

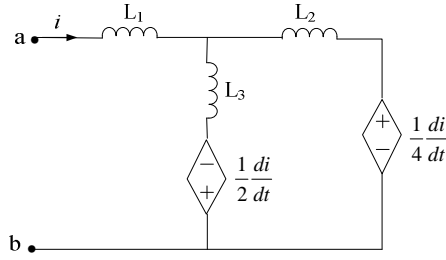


Giriş terminallerine $v(t)$ gerilimini uygulayarak KGY'nı uygulayalım:

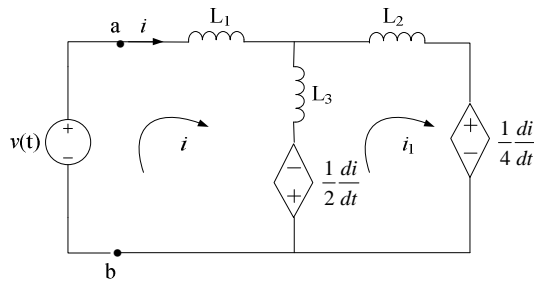
$$v(t) = \frac{1}{C_1} \int i(t) dt + \frac{1}{C_2} \int \left(i(t) + \frac{i(t)}{4} \right) dt = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{5}{4C_2} \right) \int i(t) dt$$

$$v(t) = \frac{4C_2 + 5C_1}{4C_1C_2} \int i(t) dt = \frac{1}{C_{eş}} \int i(t) dt \quad \Rightarrow \quad C_{eş} = \frac{4C_1C_2}{4C_2 + 5C_1}.$$

6.12. Şekilde verilen devrenin eşdeğer indükansını bulunuz.



Giriş terminallerine $v(t)$ gerilimini uygulayarak KGY'nı uygulayalım:



$$v(t) = L_1 \frac{di}{dt} + L_3 \frac{di}{dt} - L_3 \frac{di_1}{dt} - \frac{1}{2} \frac{di}{dt} = \left(L_1 + L_3 - \frac{1}{2} \right) \frac{di}{dt} - L_3 \frac{di_1}{dt}$$

$$0 = L_3 \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_1}{dt} - L_3 \frac{di}{dt} + \frac{1}{2} \frac{di}{dt} + \frac{1}{4} \frac{di}{dt} = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - L_3 \right) \frac{di}{dt} + (L_3 + L_2) \frac{di_1}{dt}$$

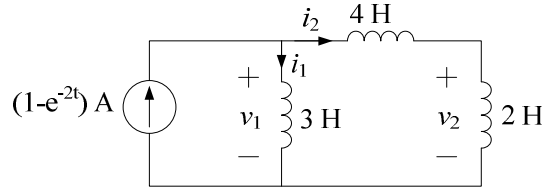
$$\frac{di_1}{dt} = \frac{L_3 - 0.75}{L_3 + L_2} \frac{di}{dt}.$$

$$v(t) = (L_1 + L_3 - 0.5) \frac{di}{dt} - L_3 \frac{L_3 - 0.75}{L_3 + L_2} \frac{di}{dt} = \left(L_1 + L_3 - 0.5 - \frac{L_3^2 - 0.75L_3}{L_3 + L_2} \right) \frac{di}{dt}$$

$$v(t) = \left(\frac{L_2(L_1 + L_3 - 0.5) + L_3(L_1 - 0.125)}{L_3 + L_2} \right) \frac{di}{dt} \quad \text{ve} \quad v(t) = L_{es} \frac{di}{dt} \Rightarrow$$

$$L_{es} = \frac{L_2(L_1 + L_3 - 0.5) + L_3(L_1 - 0.125)}{L_3 + L_2}$$

6.13. Şekilde verilen devrede $i_1(0)=0.5$ A ise, $i_1(t)$, $i_2(t)$, $v_1(t)$ ve $v_2(t)$ akım ve gerilimlerini bulunuz.



$t=0$ da KAY sağlanmalı,

$$i_1(0) + i_2(0) = (1 - e^{-2t}) \Big|_{t=0} \Rightarrow 0.5 + i_2(0) = 0; \quad i_2(0) = -0.5 \text{ A.}$$

Kaynağın bağlı olduğu terminalden görülen eşdeğer indüktans

$$L_{es} = (2 + 4) // 3 = 6 // 3 = \frac{6 \cdot 3}{6 + 3} = 2 \text{ H}$$

$$v_1(t) = L_{es} \frac{di}{dt} = 2 \frac{d}{dt} (1 - e^{-2t}) = 4e^{-2t} \text{ V.}$$

$v_1(t)$ gerilimi paralel kollardaki gerilimdir. Yani aynı gerilim seri bağlı 4 H ve 2 H'lik bobinlerin üzerindeki toplam gerilimdir. Gerilim bölücü devre eşitliğinden,

$$v_2(t) = \frac{v_1(t)}{4 + 2} \cdot 2 = \frac{v_1(t)}{3} = 1.333e^{-2t} \text{ V.}$$

bulunabilir. Bobin terminal eşitliğinden,

$$i_1(t) = \frac{1}{3} \int_0^t v_1(t) dt + i_1(0) = \frac{1}{3} \int_0^t 4e^{-2t} dt + 0.5 \Rightarrow i_1(t) = -1.333 \cdot \left(\frac{e^{-2t}}{2} \right) \Big|_0^t + 0.5$$

$$i_1(t) = 1.1666 - 0.666e^{-2t} \text{ A.}$$

KAY kullanılarak,

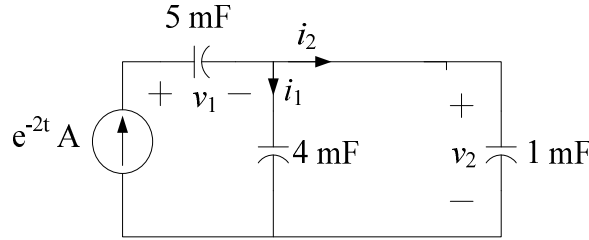
$$1 - e^{-2t} = i_1(t) + i_2(t) \Rightarrow i_2(t) = 1 - e^{-2t} - (1.1666 - 0.666e^{-2t}) = -0.1666 - 0.334e^{-2t} \text{ A.}$$

veya bobin terminal eşitliği bir kez daha kullanılarak,

$$i_2(t) = \frac{1}{2} \int_0^t v_2(t) dt + i_2(0) = \frac{1}{2} \int_0^t 1.333e^{-2t} dt - 0.5 \Rightarrow i_2(t) = -0.1666 - 0.334e^{-2t} \text{ A.}$$

bulunabilir. $t \rightarrow \infty$ için de KAY'nın sağlandığına dikkat ediniz.

6.14. Şekildeki devrede başlangıç kapasitör gerilimleri sıfırdır. Kapasitör gerilimleri $v_1(t)$ ve $v_2(t)$ ve kapasitör akımları $i_1(t)$, $i_2(t)$ ' yi bulunuz. Ayrıca Kapasitörlerde depolanan toplam enerji miktarlarını bulunuz.



Kapasitör terminal eşitliğinden,

$$v_1(t) = \frac{1}{5 \times 10^{-3}} \int_0^t i_1(t) dt + v_1(0); \quad v_1(0) = 0.$$

$$v_1(t) = \frac{1}{5 \times 10^{-3}} \int_0^t e^{-2t} dt = -100(e^{-2t}) \Big|_0^t = 100(1 - e^{-2t}) \text{ V.}$$

Paralel kapasitörler üzerindeki gerilim $v_2(t)$ olduğundan, $C_{es} = 4 + 1 = 5 \text{ mF}$ ve bu eşdeğer kapasitans üzerinden kaynak akımı geçtiğinden,

$$v_2(t) = \frac{1}{5 \times 10^{-3}} \int_0^t e^{-2t} dt = 100(1 - e^{-2t}) \text{ V.}$$

Kol akımları için,

$$i_1(t) = 4 \times 10^{-3} \frac{dv_2(t)}{dt} \quad \text{ve} \quad i_2(t) = 1 \times 10^{-3} \frac{dv_2(t)}{dt};$$

$$i_1(t) = 0.4 \frac{d}{dt}(1 - e^{-2t}) = 0.8e^{-2t} \text{ A ve } i_2(t) = 0.1 \frac{d}{dt}(1 - e^{-2t}) = 0.2e^{-2t} \text{ A}$$

elde edilir. $v_1(t)$ ve $v_2(t)$ eşitliklerinde $t \rightarrow \infty$ için $v_1(\infty) = v_2(\infty) = 100 \text{ V}$ olduğundan, kapasitörlerde depolanan enerjiler,

$$w_1 = \frac{1}{2} 5 \times 10^{-3} \cdot 100^2 = 25 \text{ J}, w_2 = \frac{1}{2} 1 \times 10^{-3} \cdot 100^2 = 5 \text{ ve } w_3 = \frac{1}{2} 4 \times 10^{-3} \cdot 100^2 = 20 \text{ J}.$$

Kapasitörlerde depolanan toplam enerji, $w = w_1 + w_2 + w_3 = 25 + 5 + 20 = 50 \text{ J}$.

Akım kaynağının terminallerindeki gerilim, $v(t) = v_1(t) + v_2(t) = 200(1 - e^{-2t})$.

Akım kaynağının gücü, $p(t) = v(t)i(t) = 200(1 - e^{-2t}) \cdot e^{-2t} = 200e^{-2t} - 200e^{-4t} \text{ W}$.

$0 \leq t < \infty$ kaynağın ürettiği enerji,

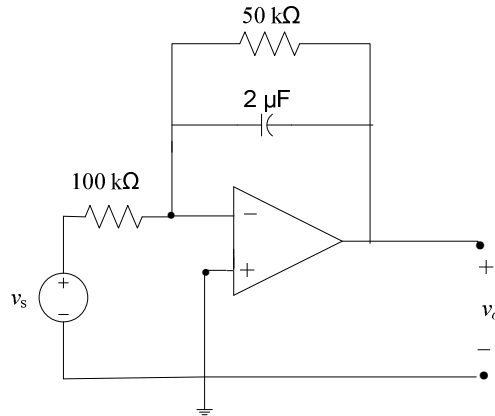
$$w = \int_0^{\infty} p(t) dt = \int_0^{\infty} (200e^{-2t} - 200e^{-4t}) dt = -\frac{200e^{-2t}}{2} \Big|_0^{\infty} + \frac{200e^{-4t}}{4} \Big|_0^{\infty} = 100 - 50 = 50 \text{ J}.$$

Kaynağın ürettiği toplam enerjinin kapasitörlerde depolanan toplam enerjiye eşit olduğuna dikkat ediniz.

6.15. Şekilde verilen devrenin giriş sinyali

$$v_s(t) = \begin{cases} 0.1 \text{ V} & 0 \leq t \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

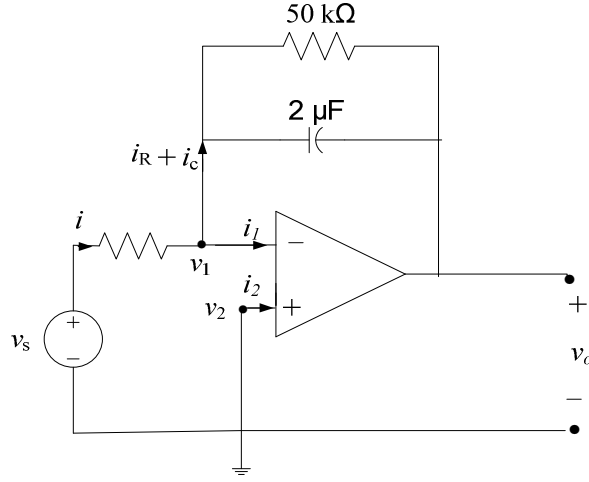
ise çıkış sinyalini bulunuz.



İdeal yükseltici yaklaşımını kullanarak devreyi analiz etmek üzere aşağıda görüldüğü gibi yeniden çizelim:

$$i_1 = i_2 = 0, \quad v_1 = v_2 = 0 \Rightarrow$$

$$i_R = -\frac{v_o}{50 \times 10^3}, \quad i_c = -2 \times 10^{-3} \frac{dv_o}{dt}, \quad i = \frac{v_s}{100 \times 10^3}$$

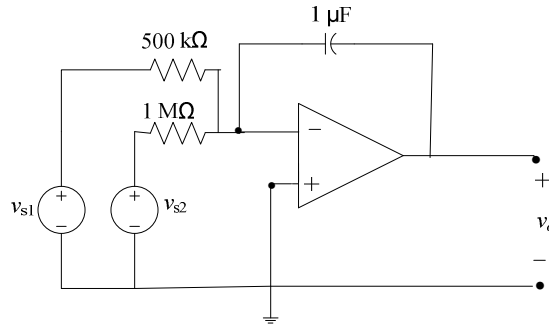


KAY, v_1 potansiyeline sahip noktada uygulanırsa:

$$i = i_R + i_c \quad \Rightarrow \quad \frac{v_s}{100 \times 10^3} = -\frac{v_o}{50 \times 10^3} - 2 \times 10^{-6} \frac{dv_o}{dt}; \quad v_s = 0.1.$$

$$\frac{dv_o}{dt} + 10v_o = -0.5 \quad \Rightarrow \quad v_o(t) = 0.05(e^{-10t} - 1) \text{ V.}$$

6.16. Şekilde verilen devrede $v_{s1}(t) = 0.5e^{-0.5t}$ V ve $v_{s2}(t) = 0.5t$ V olduğuna göre, çıkış sinyalini bulunuz.



Şekilde verilen devre bir integral yükseltici olup, her bir giriş için

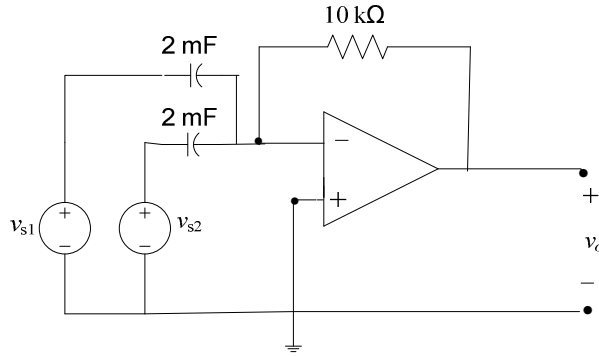
$$v_o(t) = -\frac{1}{RC} \int_0^t v_s(t) dt$$

çıkış sinyali üretilecektir. O halde toplam çıkış sinyali

$$v_o(t) = -\frac{1}{(500 \times 10^3)(1 \times 10^{-6})} \int_0^t 0.5e^{-0.5t} dt - \frac{1}{(1 \times 10^6)(1 \times 10^{-6})} \int_0^t 0.5t dt$$

$$v_o(t) = -\left(-\frac{1}{0.5}e^{-0.5t}\right)\Bigg|_0^t - \left(0.5\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_0^t = 2(e^{-0.5t} - 1) - 0.25t^2 \text{ V. olacaktır.}$$

6.17. Şekil.6.34’de verilen devred $v_{s1}(t) = 0.5e^{-0.5t}$ V ve $v_{s2}(t) = 0.5t$ V ise, çıkış sinyalini bulunuz.



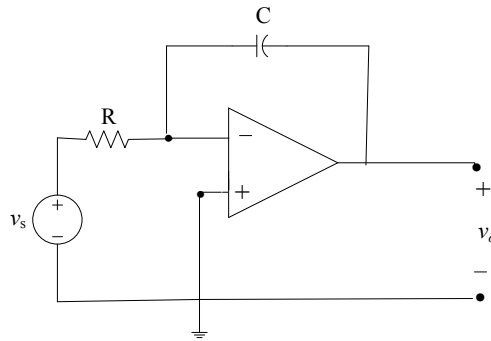
Verilen devre bir türev yükselticidir ve her bir giriş sinyali için

$$v_o(t) = -RC \frac{dv_s(t)}{dt}$$

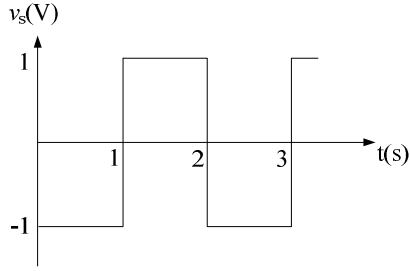
çıkış sinyali üretilecektir. Buna göre toplam çıkış sinyali,

$$v_o(t) = -(10 \times 10^3)(2 \times 10^{-3}) \left(\frac{d}{dt} (0.5e^{-0.5t} + 0.5t) \right) = -20(-0.25e^{-0.5t} + 0.5) = 5e^{-0.5t} - 10 \text{ V. olur.}$$

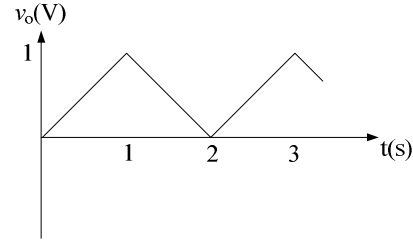
6.18. Şekil.a’da verilen yükseltici devresi girişine Şekil.b’de görülen gerilim uygulanmış ve çıkışında Şekil.c’de görülen sinyal elde edilmiştir. R ve C değerlerini bulunuz.



Şekil.a



Şekil.b: Giriş gerilimi



Şekil.c: Çıkış gerilimi

Verilen devre bir integral yükseltici olup çıkış sinyalinin ifadesi

$$v_o = -\frac{1}{RC} \int_0^t v_s(t) dt$$

olmalıdır. Çıkış sinyali, giriş sinyalinin negatif integralidir. O halde çıkış sinyali ifadesindeki katsayı 1 olmalıdır

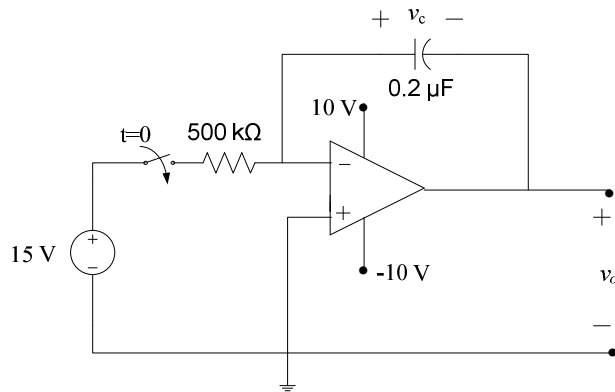
$$\frac{1}{RC} = 1$$

Uygun kapasitör değeri seçilirse, yukarıdaki eşitliği sağlayacak kapasitans değeri bulunabilir: $C = 1 \mu\text{F}$ için

$$R = \frac{1}{C} = \frac{1}{1 \times 10^{-6}} = 1 \text{ M}\Omega$$

bulunur. Burada öncelikle kapasitör değerinin seçilmesi, sonucun pratik olarak gerçekleşmesine olanak verir. Aksi durumda, seçilmiş bir direnç değeri için, örneğin 1 F'lık bir kapasitans bulursa idi, bu teorik olarak doğru olmakla birlikte, pratikte bu kadar büyük kapasitanslı bir kapasitörün gerçekleşmesi kolay olmazdı!

6.19. Şekilde görülen yükseltici devresinde kapasitör başlangıç gerilimi 4 Volt'tur. Anahtar kapatıldıktan sonra işlemsel yükselticinin doyuma ulaşması için geçecek süreyi bulunuz.



9.BÖLÜM: ÇÖZÜMLER

$t=0$ anında anahtar kapatılana kadar çıkış terminalinde -4 V luk sinyal görülmektedir. Anahtar kapatıldıktan sonra bu sinyale integral yükseltici çıkışı eklenecektir:

$$v_o(t) = -v_c(0) - \frac{1}{RC} \int_0^t v_s(t) dt = -4 - \frac{1}{(0.2 \times 10^{-6})(500 \times 10^3)} \int_0^t 15 dt$$

$$v_o(t) = -4 - 150t \text{ V.}$$

Çıkış sinyali seviyesi dc besleme gerilimi değerine ulaştığında yükseltici doyuma ulaşacağından,

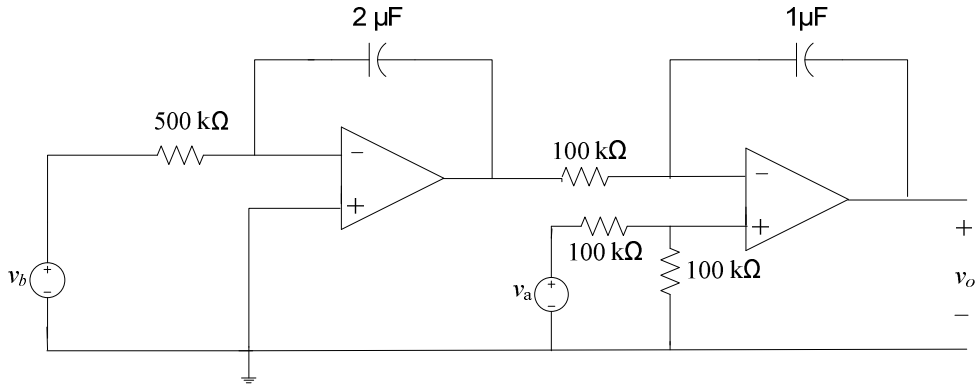
$$-10 = -4 - 150t \Rightarrow t = \frac{14}{150} = 93.3 \text{ ms. bulunur.}$$

6.20. Şekilde verilen devrede

$$v_a(t) = 5 \text{ V}$$

$$v_a(t) = 5 \text{ V}$$

olduğuna göre çıkış terminali gerilimini bulunuz (Kapasitör başlangıç enerjileri sıfırdır).



Birinci integral yükseltici çıkışı, ikinci integral yükseltici tersleyen girişine uygulanmış ve ikinci integral yükseltici terslemeyen girişine de v_a sinyali uygulanarak ikinci yükseltici aynı zamanda bir fark yükseltici olarak kullanılmıştır. Birinci yükseltici çıkışı:

$$v_{o1}(t) = \frac{1}{(500 \times 10^3)(2 \times 10^{-6})} \int_0^t 5 dt = -5t \text{ V.}$$

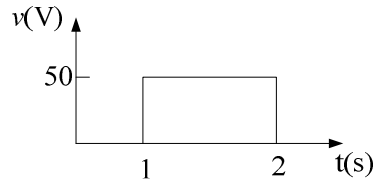
ideal yükseltici yaklaşımı ile ($v_1 = v_2$),

$$v_2 = \frac{5}{100 + 100} \cdot 100 = 2.5; \quad v_1 = 2.5 \text{ V.}$$

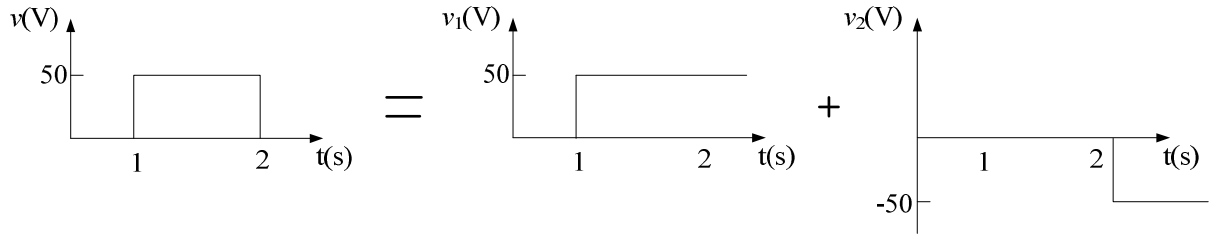
$$\frac{v_1 - v_{o1}}{100 \times 10^3} + C \frac{d}{dt}(v_1 - v_o) = 0 \Rightarrow \frac{2.5 + 5t}{100 \times 10^3} + 2 \times 10^{-6} \frac{d}{dt}(2.5 - v_o) = 0$$

$$\frac{dv_o}{dt} = \frac{2.5 + 5t}{(100 \times 10^3)(2 \times 10^{-6})} = 2.5 + 5t \Rightarrow v_o = \int_0^t (2.5 + 5t) dt = 2.5t(1 + t) \text{ V.}$$

7.1. Şekilde verilen gerilim sinyalini basamak fonksiyonları ile ifade ediniz.



Verilen sinyal, iki basamak fonksiyonunun toplamı şeklinde ifade edilebilir:



$v_1(t)$ sinyali, $t=1$ 'de başlatan ve sonsuza kadar devam eden basamak fonksiyonu olup ifadesi,

$$v_1(t) = 50u(t-1)$$

dir. $v_2(t)$ sinyali ise $t=2$ 'de başlayan ve yine sonsuza kadar devam eden basamak fonksiyonudur ve

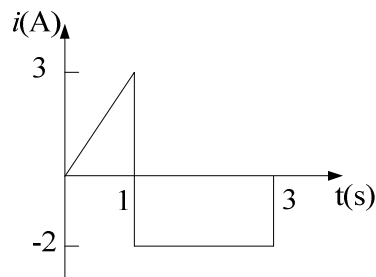
$$v_2(t) = -50u(t-2)$$

ile ifade edilir. $1 < t < 2$ için sadece $v_1(t) = 50$ sinyali mevcut olup, $2 < t$ için $v_2(t) = -50$ V sinyali de mevcuttur ve bu iki sinyalin toplamı $2 < t$ için sıfır olacaktır. O halde,

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) = 50u(t-1) - 50u(t-2)$$

$$v(t) = 50[u(t-1) - u(t-2)] \text{ olacaktır.}$$

7.2. Şekilde verilen akım sinyalinin zaman bağımlı ifadesini bulunuz.



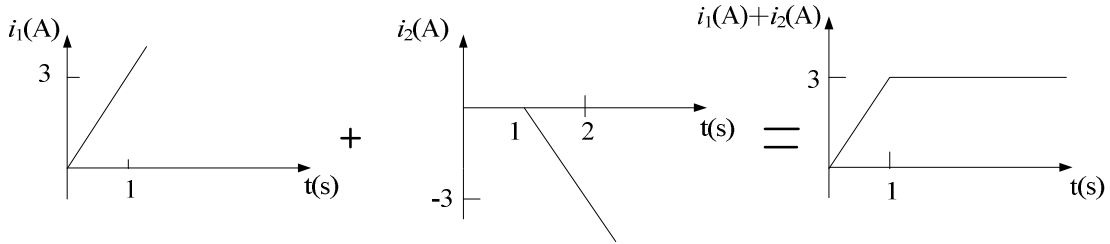
$0 \leq t < 1$ aralığında eğimi 3 olan bir rampa fonksiyonu mevcuttur. Bu fonksiyon

$$i_1(t) = 3r(t)$$

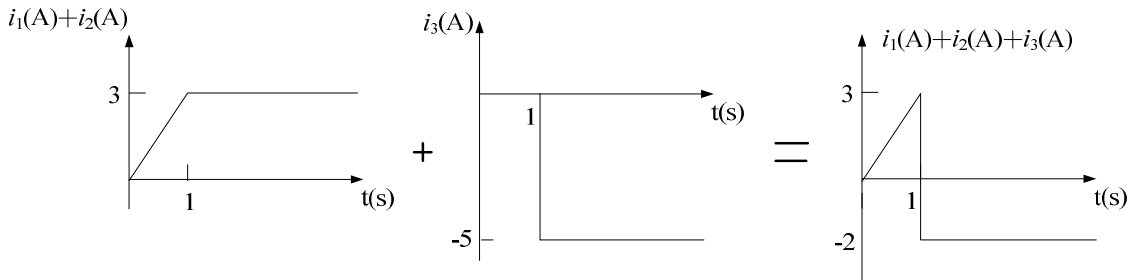
ile ifade edilir. $t > 1$ için bu rampa fonksiyonu mevcut olmadığından, $t = 1$ 'de, $t > 1$ için $i_1(t)$ akımını ile toplamı, bir sabit olacak $i_2(t)$ akımı eklenmelidir. Bu akım

$$i_2(t) = -3r(t-1)$$

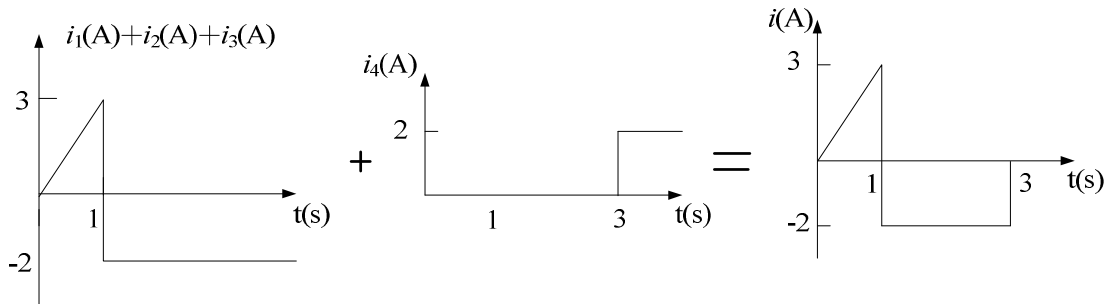
sinyalidir. Bu iki sinyalin toplamı aşağıda görülmektedir.



Toplam sinyale $t = 1$ 'de başlayacak ve değeri -5 A. olan, $i_3(t) = -5u(t-1)$ bir basamak sinyali eklenirse, $t > 1$ için sonuç sinyali -2 A. olacaktır. Bu sinyallerin toplamı aşağıdaki şekilde görülmektedir.



$t > 3$ için toplam sinyal sıfır olacağından, $3 > t > 1$ için mevcut olan sinyali, $t = 3$ sıfır yapacak 2 a. değerindeki $i_3(t) = 2u(t-3)$ basamak akımını toplamak gereklidir. Bu sinyallerin toplamı da aşağıda görülmektedir



O halde,

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) + i_4(t) = 3r(t) - 3r(t-1) - 5u(t-1) + 2u(t-3)$$

veya

$$i(t) = 3[r(t) - r(t-1)] - 5u(t-1) + 2u(t-3) \text{ bulunur.}$$

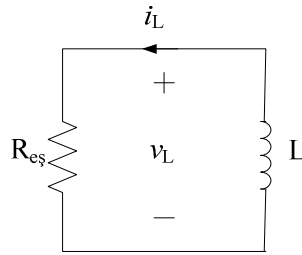
7.3. Bir RL devresinde, bobin akımı ve bobin gerilimi,

$$i_L(t) = -2e^{-5t} \text{ A.}, t \geq 0 \quad \text{ve} \quad v_L(t) = 10e^{-5t} \text{ V.}, t > 0$$

olarak verilmiştir. Bu devrede,

- a) Eşdeğer direnci
- b) Devrenin zaman sabitini
- c) Bobin indüktansını
- d) Bobin başlangıç enerjisini
- e) Bobin başlangıç enerjisinin yarısının harcanması için gerekli süreyi bulunuz.

Verilen akım ve gerilim ifadelerine göre, devrede kaynak bulunmamaktadır. Başka bir deyişle, bu devrenin doğal cevabıdır. Buna göre devre aşağıda görüldüğü gibidir.



Bu devrede, bobin üzerindeki gerilim ve akım eşdeğer direnç üzerindeki gerilim ve akıma eşit olduğundan (akımın dirence pozitif terminalden girdiğine dikkat ediniz)

$$a) R_{eş} = \frac{|v_L(t)|}{|i_L(t)|} = \frac{10}{2} = 5 \text{ } \Omega$$

b) $i_L(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ genel ifadesi, verilen akım ifadesi ile karşılaştırıldığında,

$$\frac{1}{\tau} = 5 \Rightarrow \tau = \frac{1}{5} = 0.2 \text{ s.}$$

c) ve bobin indüktansı, zaman sabiti ifadesinden,

$$\tau = \frac{L}{R_{eş}} \Rightarrow L = \tau R_{eş}; \quad L = (0.2) \cdot (5) = 1 \text{ H.}$$

d) Bobin başlangıç enerjisi

$$w_L(0) = \frac{1}{2} L i_L^2(0) = \frac{1}{2} (1) \cdot (2)^2 = 2 \text{ J. bulunur.}$$

e) Dirençte harcanan enerjinin zamana bağlı ifadesi (7.25) eşitliği ile,

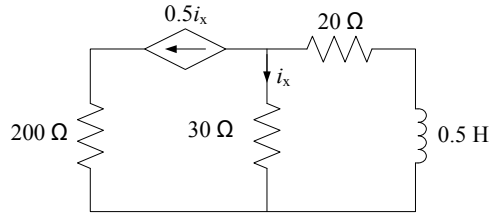
$w_R(t) = \frac{1}{2} L i_0^2 \left(1 - e^{-\frac{2t}{\tau}} \right)$ olduğundan, bobinin başlangıç enerjisinin yarısının harcanması için gereken süre,

$$1 = \frac{1}{2} (1) \cdot (2)^2 \left(1 - e^{-\frac{2t}{0.2}} \right) \text{ eşitliği } t \text{ için çözümlenerek;}$$

$$0.5 = (1 - e^{-10t}) \Rightarrow e^{-10t} = 0.5; \quad -10t = \ln(0.5) \text{ ve}$$

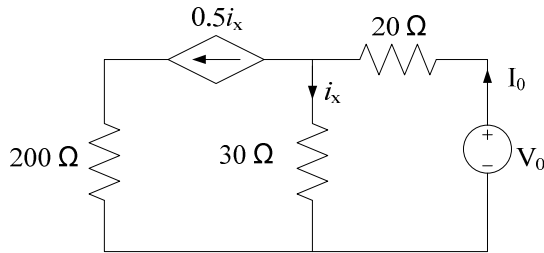
$$t = -\frac{\ln(0.5)}{10} = 69.3 \text{ ms elde edilir.}$$

7.4. Şekilde görülen devrenin zaman sabitini bulunuz.



Şekil.7.40: Problem 7.4

Verilen devre bağımlı kaynak içerdiğinden, eşdeğer direnci bulmak için bobinin bağlı olduğu terminallere test kaynağı bağlanmalıdır. Test kaynağı şekilde görüldüğü gibi gerilim kaynağı olarak seçilsin:



KAY kullanılarak,

$$i_x + 0.5i_x = I_0 \Rightarrow i_x = \frac{I_0}{1.5}.$$

İkinci çevrimde KGY uygulanılarak da,

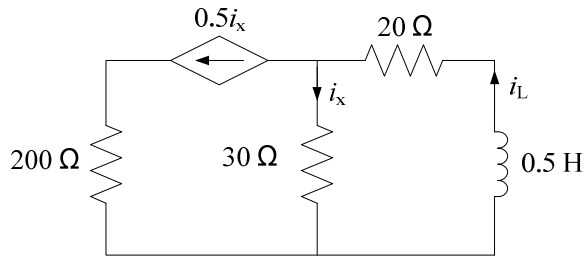
$$V_0 = 20I_0 + 30i_x; \quad V_0 = 20I_0 + 30\left(\frac{I_0}{1.5}\right) \Rightarrow R_{eş} = \frac{V_0}{I_0} = 20 + \frac{30}{1.5} = 40 \, \Omega$$

ve $\tau = \frac{L}{R_{eş}} = \frac{0.5}{40} = 0.0125 \, \text{s}.$

elde edilir.

7.5. Problem 7.4’de verilen devrede bobin akımı $t = 0$ ’da 4 A. ise, i_x akımının, $t > 0$ için zaman bağımlı ifadesini bulunuz.

$t \geq 0$ için devre aşağıda tekrar öiülmüştür:



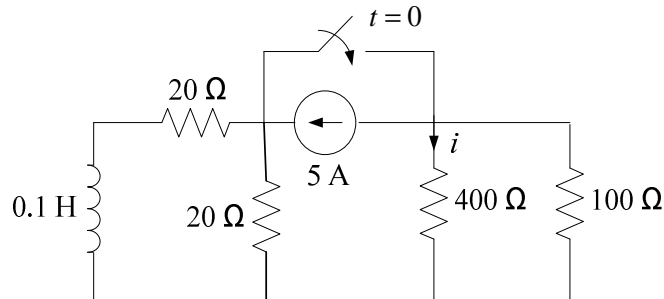
Bobin akımının doğal cevabı

$$i_L(t) = i_L(0)e^{-\frac{t}{\tau}} = 4e^{-\frac{t}{0.0125}} = 4e^{-80t} \, \text{A.}, \, t \geq 0$$

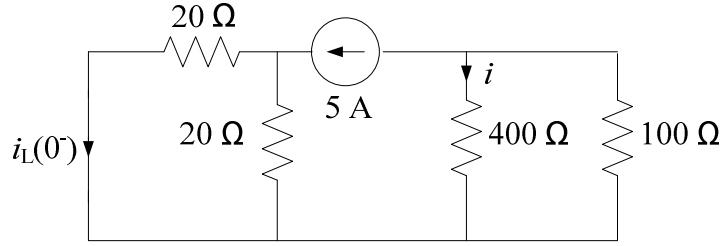
dir. $i_L(t) = 1.5i_x(t)$ olduğundan,

$$i_x(t) = \frac{i_L(t)}{1.5} = 2.666e^{-80t} \, \text{A. bulunur.}$$

7.5. Şekilde verilen devrede anahtar uzun süredir açık konumdadır ve $t = 0$ ’da kapatılmaktadır. $t > 0$ için $i(t)$ akımını bulunuz.

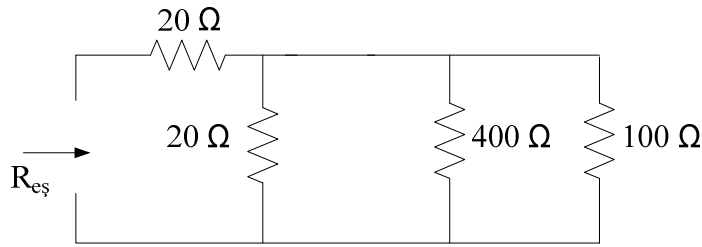


$t = 0^-$ anına kadar bobin dc kaynağa maruz kaldığından, bu anda kısa devredir. Bu andaki bobin akımı, aşağıda $t = 0^-$ için verilen eşdeğer devreden bulunur.



$$i_L(0^-) = 5 \cdot \frac{20}{20 + 20} = 2.5 \text{ A.}$$

$t = 0$ 'da anahtar kapanmakta ve akım kaynağını kısa devre etmektedir. Bu durumda kaynak devreye bir akım sağlamayacak fakat bobin üzerinde depolanan enerji nedeniyle devre $t > 0$ da uyarılacaktır. O halde, bobin akımının doğal cevabı bulunmalıdır. Bobin terminallerinden görülen eşdeğer direnç aşağıdaki devreden bulunursa:



$$R_{es} = (100 // 400 // 20) + 20 = 16 \text{ } \Omega$$

ve zaman sabiti de,

$$\tau = \frac{L}{R_{es}} = \frac{0.1}{16} = 0.00625 \text{ s}$$

elde edilir. Bobin akımının ifadesi (7.20) eşitliğinden:

$$i_L(t) = 2.5e^{-\frac{t}{0.00625}} = 2.5e^{-160t} \text{ A.}$$

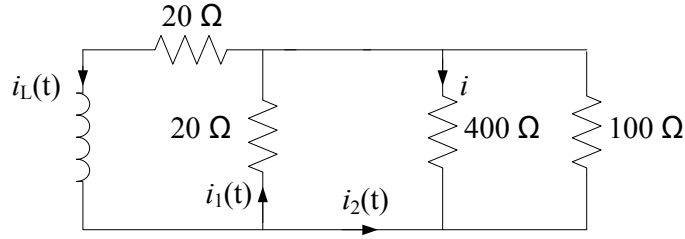
bulunur. Aşağıdaki devre kullanılarak, akım bölücü devre eşitliğinden

$$i_2(t) = i_L(t) \frac{20}{20 + (400 // 100)} = i_L(t) \frac{20}{20 + 80} = \frac{i_L(t)}{5} = 0.5e^{-160t} \text{ A.}$$

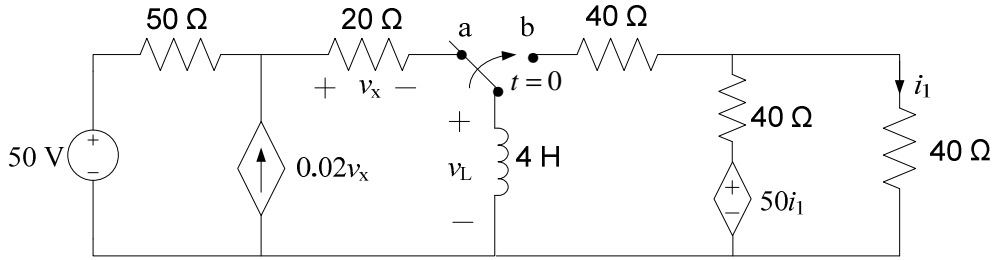
ve bir kez daha akım bölücü devre eşitliği kullanılarak,

$$i(t) = -i_2(t) \frac{100}{100+400} = -\frac{i_2(t)}{5} = -0.1e^{-160t} \text{ A.}$$

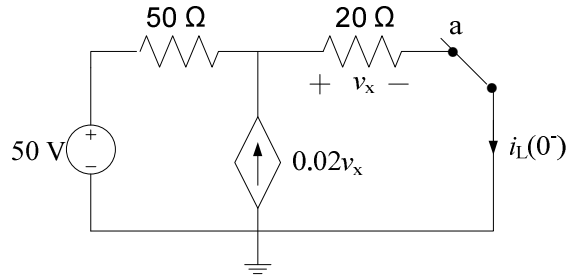
bulunur.



7.6. Şekilde görülen devrede anahtar uzun bir süredir 'a' konumunda olup, $t = 0$ anında 'b' konumuna geçmiştir. Bobin terminal geriliminin zamana bağlı ifadesini bulunuz.



$t = 0^-$ anına kadar bobin 50 V'luk dc kaynağa uzun süre maruz kaldığından bu anda kısa devre davranmaktadır. $t = 0^-$ için aşağıda verilen eşdeğer devreden bobin akımının bu andaki değeri bulunur.



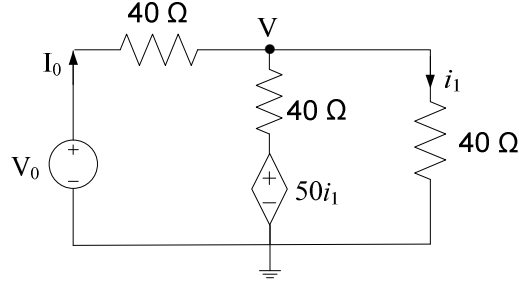
$$\frac{v_x - 50}{50} - \frac{v_x}{50} + \frac{v_x}{20} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_x = 20 \text{ V.}$$

$$i_L(0^-) = \frac{v_x}{20} = \frac{20}{20} = 1 \text{ A.}$$

ve bobin akımı süreklilik koşulundan da

$$i_L(0^-) = i_L(0^+) = i_L(0) = 1 \text{ A.}$$

$t=0$ 'da anahtar konum değiştirdiğinde, bobinin bağlandığı devrede bağımsız kaynak bulunmadığından, aranan cevap, devrenin doğal cevabı olacaktır. O halde bobin akımının ifadesi için, devrenin zaman sabitini bulmak yeterli olacaktır. Aşağıda, eşdeğer direncin hesaplanması için test kaynağının bağlantısı verilmiştir.



$$\frac{V - 50i_1}{40} + \frac{V - V_0}{40} + \frac{V}{40} = 0 \Rightarrow 3V - V_0 = 50i_1; \quad i_1 = \frac{V}{40}.$$

$$3V - V_0 = \frac{5}{4}V \Rightarrow V = \frac{4}{7}V_0.$$

$$I_0 = \frac{V_0 - V}{40} \Rightarrow 40I_0 = V_0 - \frac{4}{7}V_0 = \frac{3}{7}V_0; \quad R_{es} = \frac{V_0}{I_0} = \frac{280}{3} \Omega.$$

ve

$$\tau = \frac{L}{R_{es}} = \frac{4}{93.33} = 0.0429 \text{ s. bulunur.}$$

Bobin akımının ifadesi ise

$$i_L(t) = i_L(0)e^{-\frac{t}{\tau}} = e^{-23.33t} \text{ A}$$

dir. Bobin terminal gerilimi, bobin terminal eşitliği ile,

$$v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} = -93.33e^{-23.33t} \text{ V., } t > 0$$

olacaktır.

7.7. Bir RC devresinde, kapasitör akımı ve gerilimi,

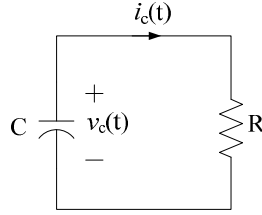
$$i_c(t) = 0.1e^{-20t} \text{ A., } t > 0 \quad \text{ve} \quad v_c(t) = 10e^{-20t} \text{ V., } t \geq 0$$

olarak verilmiştir. Bu devrede,

a) Eşdeğer direnci

- b)** Devrenin zaman sabitini
c) Kapasitörün kapasitansını
c) Kapasitör başlangıç enerjisini
d) Kapasitör başlangıç enerjisinin yüzde onunun harcanması için gerekli süreyi bulunuz.

Verilen akım ve gerilim ifadelerinden devrede kaynak bulunmadığı ve devrenin kapasitör başlangıç enerjisiyle uyarıldığı anlaşılmaktadır. Başka bir deyişle, bu devrenin doğal cevabıdır. Buna göre devre aşağıda görüldüğü gibidir.



Bu devrede, kapasitör üzerindeki gerilim ve akım eşdeğer direnç üzerindeki gerilim ve akıma eşit olduğundan,

$$a) R_{eş} = \frac{|v_c(t)|}{|i_c(t)|} = \frac{10}{0.1} = 100 \text{ } \Omega.$$

b) $v_c(t) = V_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ genel ifadesi, verilen gerilim ifadesi ile karşılaştırıldığında,

$$\frac{1}{\tau} = 20 \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{1}{20} = 0.05 \text{ s.}$$

c) ve kapasitans, zaman sabiti ifadesinden,

$$\tau = R_{eş} C \quad \Rightarrow \quad C = \frac{\tau}{R_{eş}}; \quad C = \frac{0.05}{100} = 0.5 \text{ mF.}$$

d) Kapasitör başlangıç enerjisi

$$w_c(0) = \frac{1}{2} C v_c^2(0) = \frac{1}{2} (0.5 \times 10^{-3}) \cdot (10)^2 = 25 \text{ mJ. bulunur.}$$

e) Dirençte harcanan enerjinin zamana bağlı ifadesi (7.25) eşitliği ile,

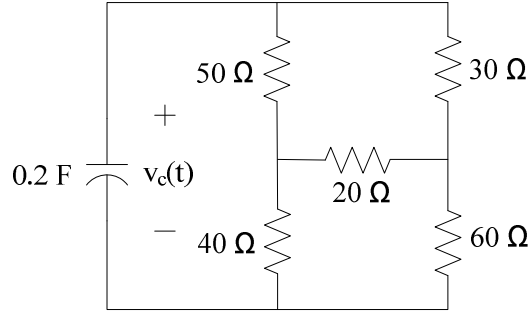
$$w_R(t) = \frac{1}{2} C V_0^2 \left(1 - e^{-\frac{2t}{\tau}} \right) \text{ olduğundan, bobinin başlangıç enerjisinin yarısının harcanması için gereken süre,}$$

$$2.5 \times 10^{-3} = \frac{1}{2} (0.5 \times 10^{-3}) \cdot (10)^2 \left(1 - e^{-\frac{2t}{0.05}} \right) \text{ eşitliği } t \text{ için çözülerek;}$$

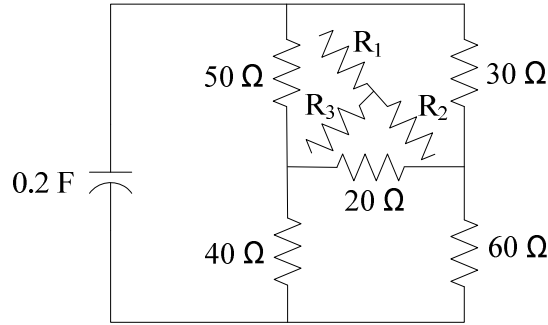
$$0.1 = (1 - e^{-40t}) \Rightarrow e^{-40t} = 0.9; \quad -40t = \ln(0.9) \text{ ve}$$

$$t = -\frac{\ln(0.9)}{40} = 2.63 \text{ ms elde edilir.}$$

7.8. Şekilde verilen devrenin zaman sabitini bulunuz. Kapasitör başlangıç gerilimi 12 V ise, kapasitör gerilimin zamana bağlı ifadesini bulunuz.

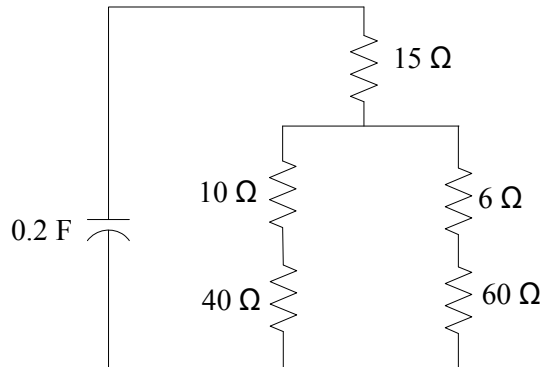


Karışık bağlı dirençlerden oluşan devreyi basitleştirmek için aşağıda görüldüğü şekilde üçgen yıldız dönüşümü yapılabilir:



$$R_1 = \frac{50 \cdot 30}{50 + 30 + 20} = 15 \, \Omega, \quad R_2 = \frac{20 \cdot 30}{50 + 30 + 20} = 6 \, \Omega, \quad R_3 = \frac{20 \cdot 50}{50 + 30 + 20} = 10 \, \Omega.$$

Dönüştürmüş devre aşağıda görüldüğü şekilde olacaktır.



Kapasitör terminallerinden görülen eşdeğer direnç,

$$R_{eş} = 15 + ((10 + 40) // (6 + 60)) = 15 + (50 // 66) = 43.45 \Omega$$

ve zaman sabiti,

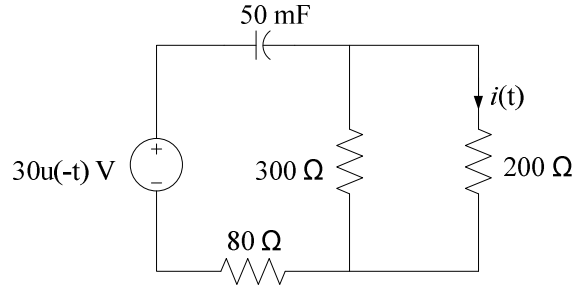
$$\tau = R_{eş} C = (43.45) \cdot (0.2) = 86.9 \text{ s}$$

bulunur. Kapasitör geriliminin ifadesi (7.38) eşitliğinden:

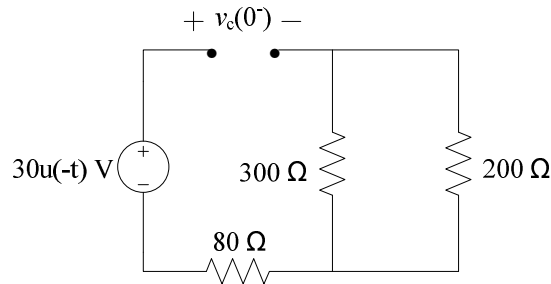
$$v_c(t) = 12e^{-\frac{t}{86.9}} = 12e^{-0.115t} \text{ V}, t \geq 0$$

elde edilir.

7.9. Şekilde verilen devrede, $t > 0$ için, $i(t)$ akımını bulunuz.



Basamak gerilim kaynağı, argümanını pozitif yapan t değerlerinde devrede olacağından $t < 0$ için devrede ve $t = 0$ 'da devreden çıkmaktadır. $t > 0$ için ise kısa devredir. Kapasitör, $t = 0^-$ anına kadar dc kaynağa maruz kaldığından, bu anda şarj olmuş ve açık devredir. Bu andaki kapasitör gerilimi aşağıdaki $t = 0^-$ için verilen eşdeğer devreden bulunur.



$$v_c(0^-) = 30 \text{ V.}$$

Kapasitör geriliminin süreklilik koşulundan da,

$$v_c(0^-) = v_c(0) = v_c(0^+) = 30 \text{ V.}$$

dur. $t > 0$ için, kaynak kısa devre ve kapasitör terminallerinden görülen eşdeğer direnç,

$$R_{eş} = 80 + (300 // 200) = 80 + 120 = 200 \Omega$$

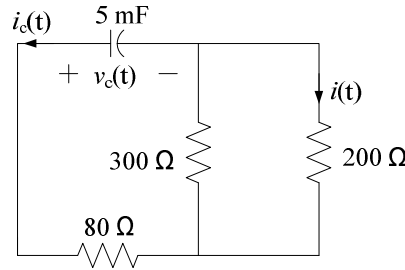
olacağından zaman sabiti,

$$\tau = R_{eş} C = (200) \cdot (50 \times 10^{-3}) = 10 \text{ s}$$

bulunur. (7.38) eşitliğinden kapasitör geriliminin ifadesi,

$$v_c(t) = 30e^{-\frac{t}{10}} = 30e^{-0.1t} \text{ V.}$$

elde edilir. Aşağıdaki şekilde, $t > 0$ için devre verilmiştir.



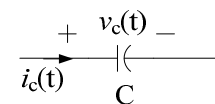
Bu devreden kapasitör akımının ifadesi,

$$i_c(t) = -C \frac{dv_c(t)}{dt} = -50 \times 10^{-3} (30)(-0.1e^{-0.1t}) = 0.5e^{-0.1t} \text{ A.},$$

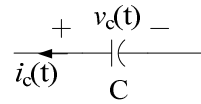
dir. Akım bölücü devre eşitliği kullanılarak aranan kol akımı da

$$i(t) = -i_c(t) \frac{300}{300 + 200} = -0.3e^{-0.1t} \text{ A.}$$

bulunur. Kapasitör akımının hesaplanmasında ki eksi işareti, kapasitör deşarj olurken akımının, şarj akımına göre ters yönde olmasından kaynaklanmaktadır. Deşarj anında kapasitörün kaynak gibi davrandığına dikkat ediniz ve kapasitör terminal eşitliğinin elde edildiği, kapasitör gerilim polaritesi ve kapasitör akım yönü ilişkisini hatırlayınız:

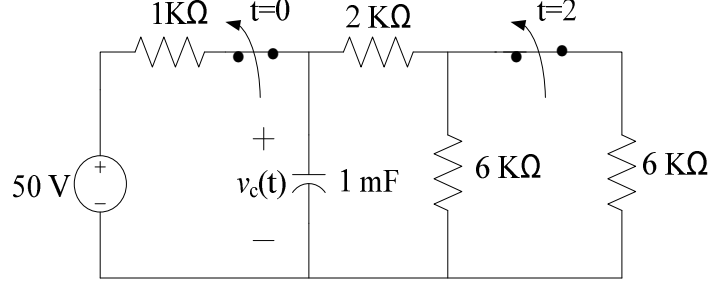


$$i_c(t) = C \frac{dv_c(t)}{dt}$$

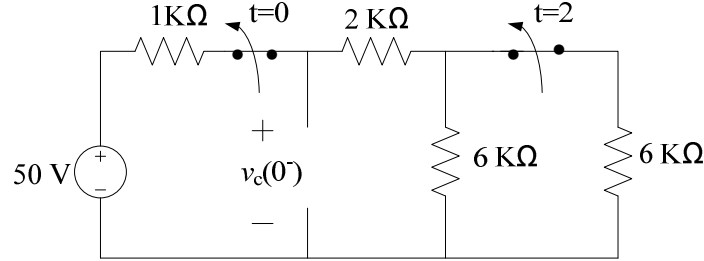


$$i_c(t) = -C \frac{dv_c(t)}{dt}$$

7.10. Şekilde görülen devrede S_1 anahtarı uzun süredir kapalı konumdadır. $t = 0$ anında S_1 anahtarı açılmaktadır. Bundan 2 saniye sonrada S_2 anahtarı açıldığına göre, $t \geq 0$ için kapasitör geriliminin zamana bağlı ifadesini ve $0 < t < 2$ aralığında başlangıçta sahip olduğu enerjinin ne kadarının harcadığını bulunuz.



$t = 0^-$ 'da kapasitör şarj olmuş ve açık devre davranmaktadır. Bu andaki eşdeğer devre,



olacağından, kapasitör şarj gerilimi düğüm nokta potansiyelleri kullanılarak bulunabilir:

$$\frac{v_c(0^-) - 50}{1000} + \frac{v_c(0^-)}{2000 + (6000 // 6000)} = 0; \quad \frac{v_c(0^-) - 50}{1000} + \frac{v_c(0^-)}{5000} = 0 \quad \text{ve}$$

$$5v_c(0^-) - 250 + v_c(0^-) = 0 \quad \Rightarrow \quad v_c(0^-) = \frac{250}{6} = 41.67 \text{ V.}$$

$$v_c(0^-) = v_c(0) = v_c(0^+) = 41.67 \text{ V.}$$

$t = 0^+$ 'da S_1 anahtarı açıldığında, kapasitör dirençler üzerinden deşarj olmaya başlayacaktır. Şayet S_2 anahtarının hiç açılmayacağı düşünülürse, devrenin zaman sabiti,

$$\tau = R_{eş} C = ((6000 // 6000) + 2000) \cdot (1 \times 10^{-3}) = 5000 \cdot (1 \times 10^{-3}) = 5 \text{ s}$$

ve kapasitör gerilimi

$$v_c(t) = 41.67 e^{-\frac{t}{5}} = 41.67 e^{-0.2t} \text{ V., } 0 \leq t \leq 2$$

olacaktır. Ancak $t = 2$ 'de S_2 anahtarı açıldığından bu andan sonra devrenin zaman sabiti değişecektir. Bu nedenle $t \geq 2$ için kapasitör gerilimin ifadesi değişecektir. Bu aralıkta gerilimin ifadesi,

$$v_c(t) = v_c(2)e^{-\frac{(t-2)}{\tau_1}}$$

şeklindedir. Burada $v_c(2)$, $t \geq 2$ için kapasitör gerilimin başlangıç gerilimi olup değeri, kapasitör geriliminin süreklilik şartı kullanılarak, $0 \leq t \leq 2$ aralığı için elde edilen ifadede $t = 2$ değeri kullanılarak bulunur.

$$v_c(2^-) = v_c(2) = v_c(2^+) = 41.67e^{-0.2(2)} = 41.67e^{-0.4} = 27.93 \text{ V}.$$

τ_1 ise S_2 anahtarının açılmasıyla $6 \text{ K}\Omega$ ' luk direnç devre dışı kalacağından, devrenin yeni eşdeğer direnci ile tayin edilen, $t > 2$ için geçerli zaman sabitidir. Değeri,

$$\tau_2 = R_{eş2}C = (6000 + 2000) \cdot (1 \times 10^{-3}) = 8 \text{ s},$$

ve kapasitör gerilimi de

$$v_c(t) = 27.93e^{-\frac{t-2}{8}} = 27.93e^{-0.125(t-2)} \text{ V}, \quad t \geq 2.$$

bulunur. Buna göre ifade aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$v_c(t) = \begin{cases} 41.67e^{-0.2t} \text{ V}, & 0 \leq t \leq 2 \\ 27.93e^{-0.125(t-2)} \text{ V}, & t \geq 2 \end{cases}.$$

$t = 0$ anında kapasitörde depolanan enerji miktarı:

$$w_c(0) = \frac{1}{2} C v_c^2(0) = \frac{1}{2} (1 \times 10^{-3}) (41.67)^2 = 0.8682 \text{ J}.$$

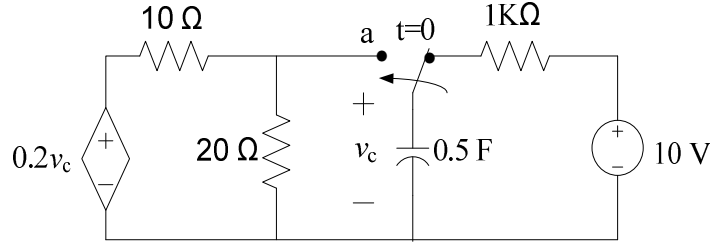
$t = 2$ anında kapasitörde depolanan enerji miktarı ise:

$$w_c(2) = \frac{1}{2} C v_c^2(2) = \frac{1}{2} (1 \times 10^{-3}) (27.93)^2 = 0.39 \text{ J}.$$

Buna göre $0 \leq t \leq 2$ aralığında, başlangıç enerjinin

$$\frac{0.39}{0.8682} \times 100 = 44.9 \% \text{ harcanmıştır.}$$

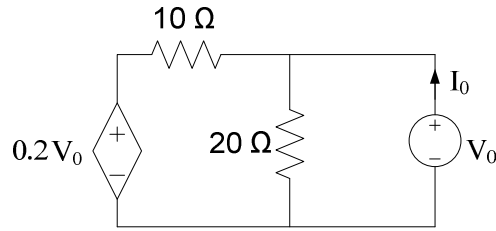
7.11. Şekilde görülen devre uzun süre bu konumda çalıştıktan sonra, $t = 0$ da S anahtarı, 'a' konumuna geçmektedir. $t > 0$ için bağımlı kaynağın gücünü bulunuz.



$t = 0^-$ anında kapasitör 10 V'luk gerilime şarj olmuştur. Kapasitör geriliminin süreklilik koşulundan,

$$v_c(0^-) = v_c(0) = v_c(0^+) = 10 \text{ V.}$$

olacaktır. $t = 0$ 'da anahtar konum değiştirdiğinden $t \geq 0$ için, kapasitör geriliminin ifadesi, bu aralıkta geçerli zaman sabitine bağlı olarak değişecektir. Zaman sabitini belirlemek için, kapasitör terminallerinden görülen eşdeğer direnç aşağıdaki devreden bulunur.



$$\frac{V_0 - 0.2V_0}{10} + \frac{V_0}{20} - I_0 = 0; \quad 2.6V_0 = 20I_0 \Rightarrow R_{es} = \frac{V_0}{I_0} = \frac{20}{2.6} = 7.69 \text{ } \Omega.$$

Zaman sabiti ise,

$$\tau = R_{es} C = (7.69) \cdot (0.5) = 3.845 \text{ s}$$

bulunur. Buna göre kapasitör gerilimi de,

$$v_c(t) = 10e^{-\frac{t}{3.845}} = 10e^{-0.26t} \text{ V., } t \geq 0$$

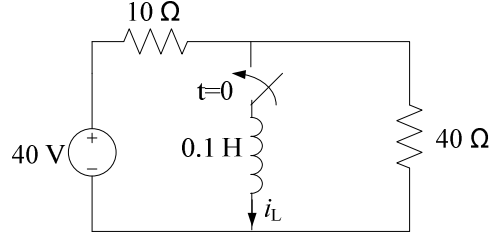
olacaktır. 10 Ω 'luk direnç üzerindeki akım, aynı zamanda bağımlı kaynak akımıdır.

$$i(t) = \frac{v_c(t) - 0.2v_c(t)}{10} = 0.08v_c(t)$$

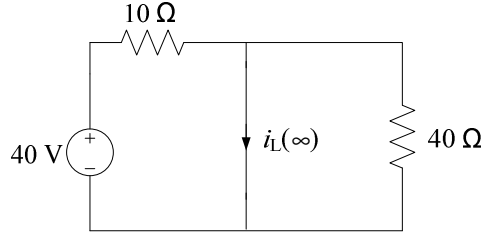
ve bağımlı kaynağı gücü de

$$p(t) = (0.2v_c(t))(0.08v_c(t)) = 0.016v_c^2(t) = 0.16e^{-0.52t} \text{ W. bulunur.}$$

7.12. Şekilde verilen devrede S anahtarı $t = 0$ 'da kapanmaktadır. Bobin başlangıç akımı 2 A. olduğuna göre, $t \geq 0$ için bobin akımının zamana bağlı ifadesini bulunuz.



Anahtar kapandıktan uzun süre sonra, bobin dc kaynağa uzun süre maruz kaldığından kısa kısa devre davranacaktır. $t \rightarrow \infty$ için aşağıda verilen eşdeğer devreden bu andaki bobin akımı bulunur.



$$i_L(\infty) = \frac{40}{10} = 4 \text{ A.}$$

$t \geq 0$ için bobin terminallerinden görülen eşdeğer direnç,

$$R_{eş} = 40 // 10 = 8 \text{ } \Omega$$

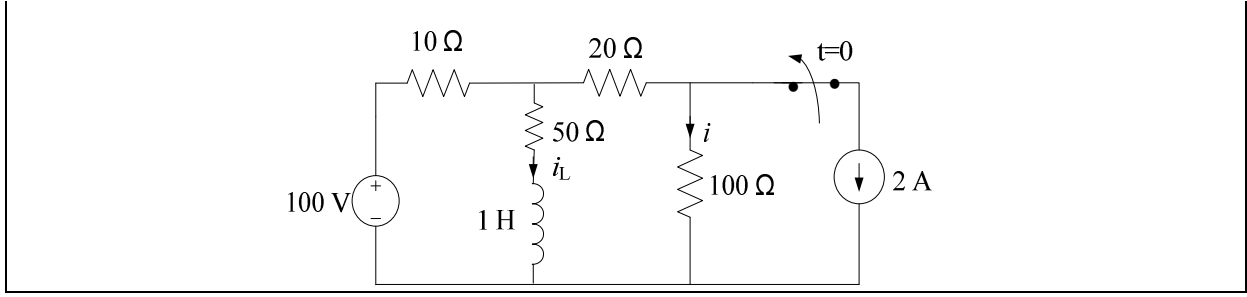
ve devrenin zaman sabiti

$$\tau = \frac{L}{R_{eş}} = \frac{0.1}{8} = 0.0125 \text{ s.}$$

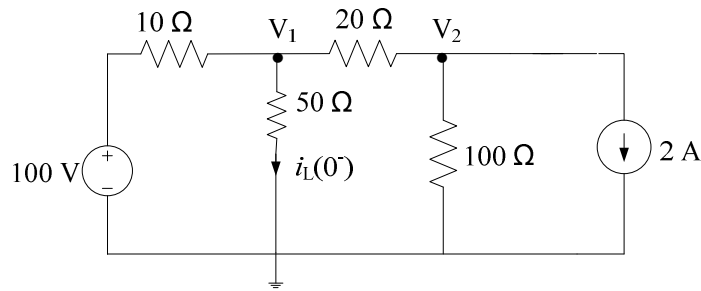
bulunur. Bobin akımının ifadesi (7.55) eşitliğinden,

$$i_L(t) = i_L(\infty) + (i_L(0) - i_L(\infty))e^{-\frac{t}{\tau}}; \quad i_L(t) = 4 + (2 - 4)e^{-\frac{t}{0.0125}} = 4 - 2e^{-80t} \text{ A., } t \geq 0 \text{ bulunur.}$$

7.13. Şekilde verilen devrede S anahtarı uzun süredir kapalı konumdadır ve $t = 0$ 'da açılmaktadır. $t \geq 0$ için bobin akımının ifadesini buluz. Aynı aralıkta, $i(t)$ akımının bulunuz



$t = 0^-$ anına kadar her iki kaynakta devrededir ve bu anda bu kaynaklara uzun süre maruz kalan bobin kısa devre davranmaktadır. Aşağıda, $t = 0^-$ için verilen eşdeğer devreden bobin akımının bu andaki değeri bulunur.



$$\frac{V_1 - 100}{10} + \frac{V_1}{50} + \frac{V_1 - V_2}{20} = 0 \quad \text{ve} \quad \frac{V_2 - V_1}{20} + \frac{V_2}{100} = -2,$$

$$17V_1 - 5V_2 = 1000; \quad 6V_2 - 5V_1 = -200$$

$$\begin{bmatrix} 17 & -5 \\ -5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 \\ -200 \end{bmatrix} \Rightarrow V_1 = \frac{\begin{bmatrix} 1000 & -5 \\ -200 & 6 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 17 & -5 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}} = \frac{5000}{77} = 64.93 \text{ V.},$$

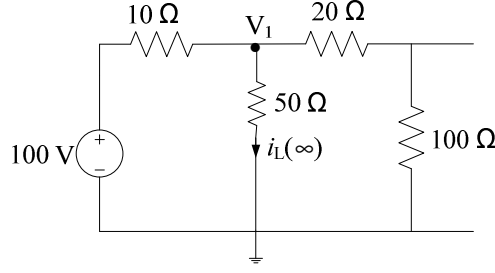
ve

$$i_L(0^-) = \frac{V_1}{50} = \frac{64.93}{50} = 1.3 \text{ A.}$$

$t = 0$ 'da anahtar açıldığında akım kaynağı devre dışı kalacaktır. Bu koşullarda devre uzun süre gerilim kaynağına maruz kaldığında, tekrar kısa devre davranacaktır. $t \rightarrow \infty$ için aşağıda verilen devreden de bobin akımının bu andaki değeri bulunur.

$$\frac{V_1 - 100}{10} + \frac{V_1}{50} + \frac{V_1}{100} = 0; \quad 13V_1 = 1000 \Rightarrow V_1 = \frac{1000}{13} = 76.92 \text{ V}$$

ve



$$i_L(\infty) = \frac{V_1}{50} = \frac{76.92}{50} = 1.538 \text{ A.}$$

bulunur. $t \geq 0$ için devrenin zaman sabiti, bu aralıkta bobin terminallerinden görülen eşdeğer direnç tarafından belirleneceğinden,

$$R_{eş} = ((100 + 20) // 10) + 50 = 59.23 \text{ } \Omega$$

$$\tau = \frac{L}{R_{eş}} = \frac{1}{59.23} = 0.0169 \text{ s.}$$

elde edilir. Bobin akımının ifadesi ise, (7.55) eşitliğinden,

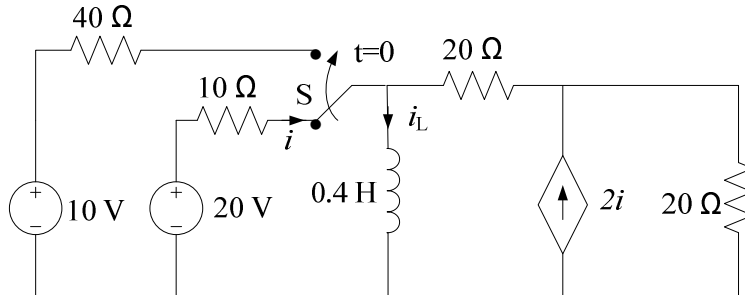
$$i_L(t) = 1.538 + (1.3 - 1.538)e^{-\frac{t}{0.0169}} = 1.538 - 0.238e^{-59.2t}$$

bulunur. Paralel kol gerilimlerinin eşitliğinden,

$$50i_L(t) + L \frac{di_L(t)}{dt} = 120i(t) \Rightarrow i(t) = \frac{1}{120} (76.9 - 11.9e^{-59.2t} + 704.48e^{-59.2t})$$

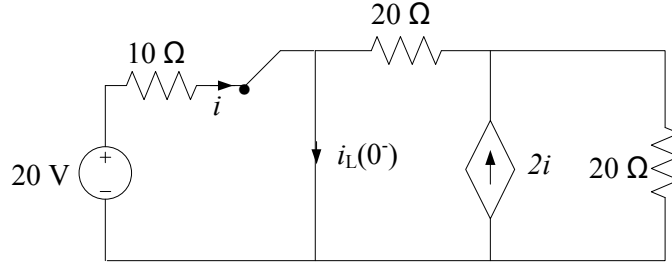
$$i(t) = 0.64 + 5.77e^{-59.2t} \text{ A., } t > 0 \text{ bulunur.}$$

7.14. Şekilde verilen devrede S anahtarı $t = 0$ 'da 'a' konumundan 'b' konumuna geçmektedir. $t \geq 0$ için bobin akımının ifadesini bulunuz.

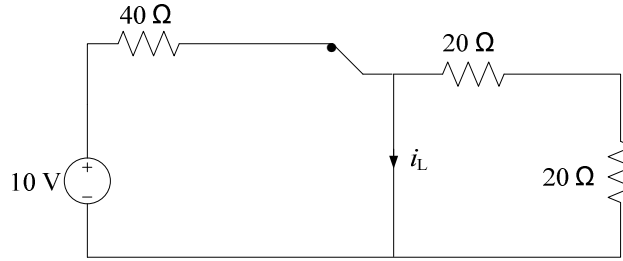


$t = 0^-$ için eşdeğer devresi aşağıda verilmiştir. Bu andaki bobin akımı,

$$i_L(0^-) = \frac{20}{10} + 2 \cdot \frac{20}{10} \cdot \left(\frac{20}{20+20} \right) = 4 \text{ A.}$$



$t = 0$ 'da 20 V'luk kaynak devre dışı kalırken, 10 V'luk kaynak devrededir. S anahtarı konum değiştirdiğinde i akımı sıfır olacağından, bağımlı kaynak $t \geq 0$ için açık devre olacaktır. $t \rightarrow \infty$ için eşdeğer devre aşağıdaki gibi olacağından,



$$i_L(\infty) = \frac{10}{40} = 0.25 \text{ A. olacaktır.}$$

$t \geq 0$ için, bobin terminallerinden görülen eşdeğer direnç,

$$R_{eş} = (20 + 20) // 40 = 40 // 40 = 20 \text{ } \Omega$$

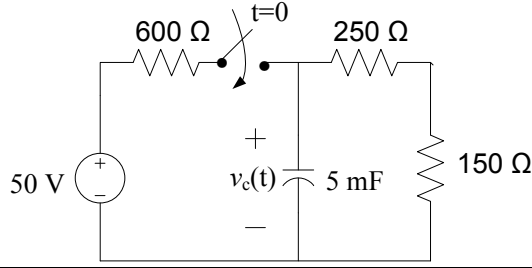
ve zaman sabiti de,

$$\tau = \frac{L}{R_{eş}} = \frac{0.4}{20} = 0.02 \text{ s}$$

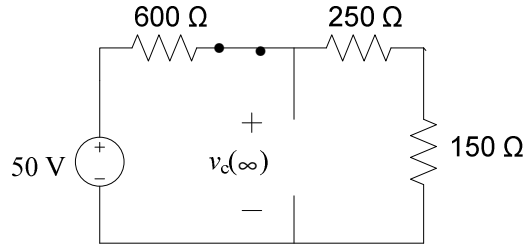
elde edilir. Bobin akımı ise,

$$i_L(t) = 0.25 + (4 - 0.25)e^{-\frac{t}{0.02}} = 0.25 + 3.75e^{-50t} \text{ A. bulunur.}$$

7.15. Şekil.7.50'deki devrede kapasitör başlangıç gerilimi 30 V'dur. $t \geq 0$ için kapasitör geriliminin ifadesini bulunuz.



Anahtar kapandıktan uzun bir süre sonra kapasitör şarj olacak ve açık devre davranacaktır. Bu andaki şarj gerilimi aşağıda $t \rightarrow \infty$ için verilen eşdeğer devreden bulunur.



$$v_c(\infty) = \frac{50}{600 + 250 + 150} \cdot (250 + 150) = 20 \text{ V.}$$

Kapasitör terminallerinden görülen eşdeğer direnç,

$$v_c(\infty) = \frac{50}{600 + 250 + 150} \cdot (250 + 150) = 240 \text{ } \Omega$$

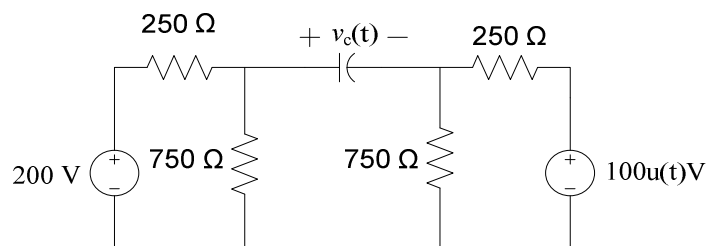
ve zaman sabiti de,

$$\tau = R_{eq}C = 240 \cdot (5 \times 10^{-3}) = 1.2 \text{ s}$$

bulunur. Kapasitör geriliminin ifadesi ise, (7.64) eşitliğinden,

$$v_c(t) = v_c(\infty) + (v_c(0) - v_c(\infty))e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow v_c(t) = 20 + (30 - 20)e^{-\frac{t}{1.2}} = 20 + 10e^{-0.833t} \text{ V., } t \geq 0$$

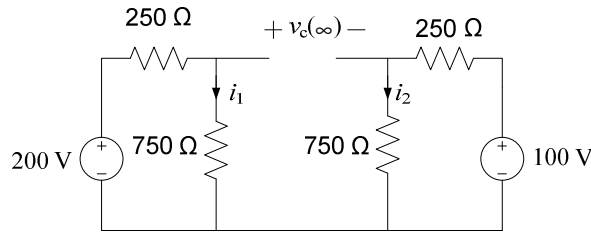
6.16. Şekil.7.51 de verilen devrede $t \geq 0$ için kapasitör geriliminin zamana bağlı ifadesini bulunuz. Kapasitör geriliminin ... V'a eriştiği süreyi saniye cinsinden bulunuz.



$t = 0$ 'a kadar 200 V'luk kaynak devrede olduğundan, $t = 0^-$ 'da kapasitör bu kaynak nedeniyle şarj olmuş ve açık devre davranmaktadır. Bu anda şarj olduğu gerilim 750 V'luk direnç üzerindeki gerilim değeridir.

$$v_c(0^-) = \frac{200}{750 + 250} \cdot 750 = 150 \text{ V. ve, } v_c(0^-) = v_c(0) = v_c(0^+) = 150 \text{ V. olacaktır.}$$

$t = 0$ 'da 100 V'luk kaynak da devreye girecek ve uzun bir süre sonra kapasitör yeni bir gerilim değerine şarj olacaktır. $t \rightarrow \infty$ için aşağıda verilen eşdeğer devreden bu gerilim değeri bulunur.



$$i_1 = \frac{200}{750 + 250} = 0.2 \text{ A, } i_2 = \frac{100}{750 + 250} = 0.1 \text{ A.}$$

Orta gözde KGY uygulanarak

$$-v_c(\infty) + 750i_1 - 750i_2 = 0 \Rightarrow v_c(\infty) = 750 \cdot (i_1 - i_2) = 750(0.2 - 0.1) = 75 \text{ V. bulunur.}$$

$t \geq 0$ için eşdeğer direnç,

$$R_{eş} = (250 // 750) + (250 // 750) = 375 \Omega$$

ve zaman sabiti,

$$\tau = R_{eş}C = 375 \cdot (0.002) = 0.75 \text{ s.}$$

bulunur. Kapasitör gerilimi ise,

$$v_c(t) = 75 + (150 - 75)e^{-\frac{t}{0.75}} = 75(1 + e^{-1.33t}) \text{ V., } t \geq 0$$

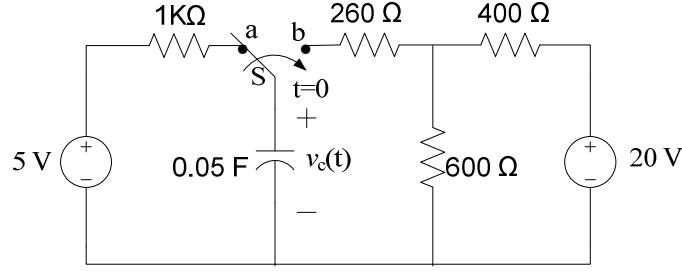
olacaktır. Bu ifadeden,

$$100 = 75(1 + e^{-1.33t}) \Rightarrow 0.333 = e^{-1.33t}; \quad -1.33t = \ln(0.333)$$

$$\text{ve } t = -\frac{\ln(0.333)}{1.33} = 0.824 \text{ s.}$$

elde edilir

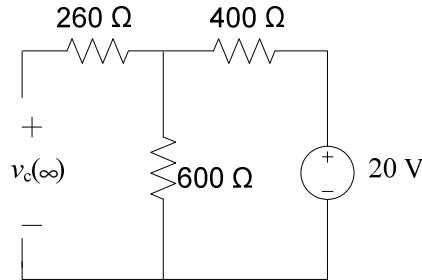
7.17. Şekilde verilen devrede S anahtarı, $t = 0$ 'da konum değiştirmekte ve 'b' konumuna gelmektedir. Anahtar konum değiştirmeden önce uzun süre 'b' konumunda kaldığına göre, $t \geq 0$ için kapasitör geriliminin zaman bağımlı ifadesini bulunuz.



$t = 0^-$ 'da Anahtar 'a' konumunda, kapasitör 5 V'luk kaynak gerilimine şarj olmuş ve bu anda açık devre davranmaktadır. Anahtar $t = 0$ 'da 'b' konumuna geçtiğinde üzerindeki gerilim korunur:

$$v_c(0^-) = v_c(0) = v_c(0^+) = 5 \text{ V.}$$

Anahtar konum değiştirdikten uzun süre sonra kapasitör yeni bir gerilim değerine şarj olacak ve bu anda yeniden açık devre davranacaktır. Bu şarj gerilimi, $t \rightarrow \infty$ için aşağıda verilen eşdeğer devreden bulunur:



$$v_c(\infty) = \frac{20}{600 + 400} \cdot 600 = 12 \text{ V.}$$

$t \geq 0$ için, kapasitör terminallerinden görülen eşdeğer direnç,

$$R_{eş} = (400 // 600) + 260 = 500 \text{ } \Omega.$$

ve devrenin zaman sabiti de,

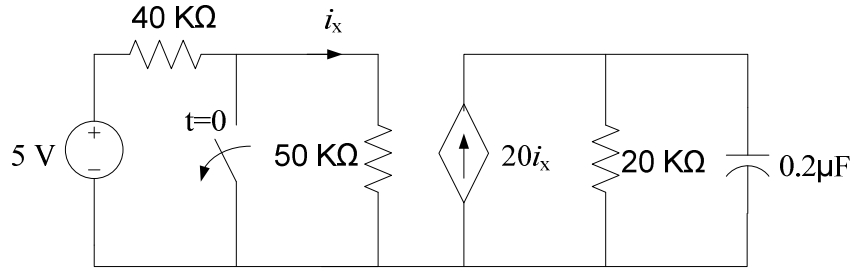
$$\tau = R_{eş} C = 500 \cdot (0.05) = 25 \text{ s.}$$

olduğundan, kapasitör geriliminin ifadesi (7.64) eşitliğinden,

$$v_c(t) = 12 + (5 - 12)e^{-\frac{t}{25}} = 12 - 7e^{-0.04t} \text{ V., } t \geq 0$$

bulunur.

7.18. Şekilde verilen devrede, $t = 0$ 'da anahtar açılmaktadır. $t \geq 0$ için kapasitör geriliminin ifadesini bulunuz.



$t = 0$ 'da anahtar açılana kadar, gerilim kaynağı devreye bir akım sağlayamamaktadır. Bu ana kadar i_x akımı sıfır olduğundan, kapasitör herhangi bir gerilime şarj olmamıştır:

$$v_c(0^-) = v_c(0) = v_c(0^+) = 0.$$

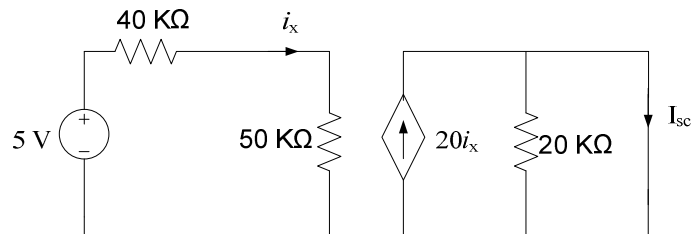
$t = 0$ 'da anahtar açıldığında

$$i_x = \frac{5}{90000} = 55.5 \mu\text{A}$$

olacaktır. Uzun bir süre sonra kapasitör şarj olacak ve açık devre davranacaktır. $t \rightarrow \infty$ için bu şarj gerilimi,

$$v_c(\infty) = 20i_x \cdot 20000 = 22.22 \text{ V.}$$

olur. $t \geq 0$ için kapasitör terminallerinden görülen direnç, aşağıdaki devrede kısa devre akımı bulunarak hesaplanabilir:



$$I_{sc} = 20i_x = 20 \cdot (55.5 \times 10^{-6}) = 1.11 \text{ mA.}$$

$$V_{oc} = v_c(\infty) = 22.22 \text{ V.,}$$

ve

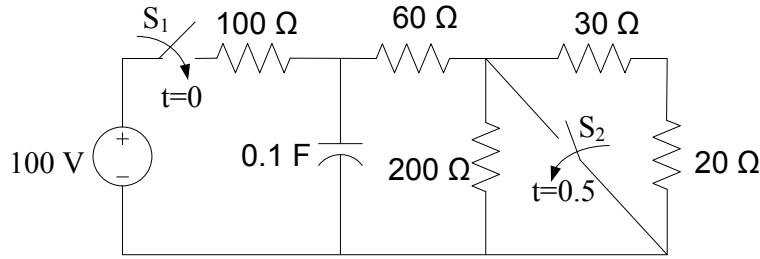
$$R_{eş} = \frac{V_{oc}}{I_{sc}} = \frac{22.22}{1.11 \times 10^{-3}} = 20020 \Omega$$

bulunur. Zaman sabiti ise,

$$\tau = R_{eş} C = 20020 \cdot (0.2 \times 10^{-6}) = 0.004 \text{ s olacağından, kapasitör gerilimi,}$$

$$v_c(t) = 22.22 + (0 - 22.22)e^{-\frac{t}{0.004}} = 22.22(1 - e^{-250t}) \text{ V, } t \geq 0 \text{ bulunur.}$$

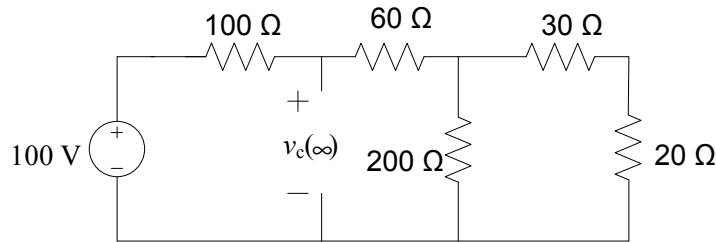
7.19. Şekildeki devrede kapasitör başlangıç gerilimi sıfırdır. $t = 0$ 'da S_1 anahtarı kapanmakta ve 0.5 saniye sonra da S_2 anahtarı kapanmaktadır. Kapasitör geriliminin, $t \geq 0$ için ifadesini bulunuz.



Kapasitör geriliminin süreklilik koşulundan,

$$v_c(0^-) = v_c(0) = v_c(0^+) = 0.$$

S_1 anahtarı $t = 0$ 'da kapandıktan sonra, S_2 'nin hiçbir zaman kapanmayacağını düşünüp, $0.5 \geq t \geq 0$ aralığında kapasitör geriliminin ifadesi bulunmalıdır. Buna göre $t \rightarrow \infty$ 'da kapasitör şarj olup açık devre davranacağından, bu andaki gerilimi aşağıda $t \rightarrow \infty$ için verilen eşdeğer devreden bulunur.



$$R_{eş1} = ((20 + 30) // 200) + 60 = 100 \Omega.$$

$$v_c(\infty) = \frac{100}{100 + R_{eş1}} \cdot R_{eş1} = \frac{100}{100 + 100} \cdot 100 = 50 \text{ V.},$$

bulunur. $0.5 \geq t \geq 0$ aralığı için devrenin zaman sabiti,

$$\tau = R_{eş} C$$

ve

$$R_{eş} = R_{eş1} // 100 = 100 // 100 = 50 \Omega$$

olduğundan,

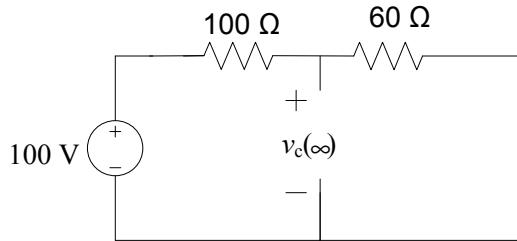
$$\tau = 50(0.1) = 5 \text{ s.}$$

elde edilir. $0.5 \geq t \geq 0$ aralığında kapasitör gerilimi ise,

$$v_c(t) = 50 + (0 - 50)e^{-\frac{t}{5}} = 50(1 - e^{-0.2t}) \text{ V.}, 0.5 \geq t \geq 0,$$

bulunur. Bu ifade, S_2 anahtarı kapanana kadar geçerli olan ifadedir. S_2 anahtarı kapandıktan sonra, artık kapasitör yeni bir gerilime şarj olacak ve ayrıca zaman sabiti de değişecektir. $t=0.5$ için kapasitör başlangıç gerilimi yukarıda bulunan kapasitör gerilimi ifadesinde $t=0.5$ koyarak bulunur. Yeni zaman sabiti ve $t \rightarrow \infty$ için kapasitörün şarj gerilimi ise aşağıda verilen eşdeğer devreden bulunur.

$$v_c(0.5) = 50(1 - e^{-0.2(0.5)}) = 4.758 \text{ V.}$$



$$v_c(\infty) = \frac{100}{100 + 60} \cdot 60 = 37.5 \text{ V.}$$

$$R_{eş} = 100 // 60 = 37.5$$

ve

$$\tau = R_{eş} C = (37.5) \cdot (0.1) = 3.75 \text{ s.},$$

bulunur. Kapasitör gerilimi ise,

$$v_c(t) = v_c(\infty) + (v_c(0.5) - v_c(\infty))e^{-\frac{(t-0.5)}{\tau}}$$

ifadesinden,

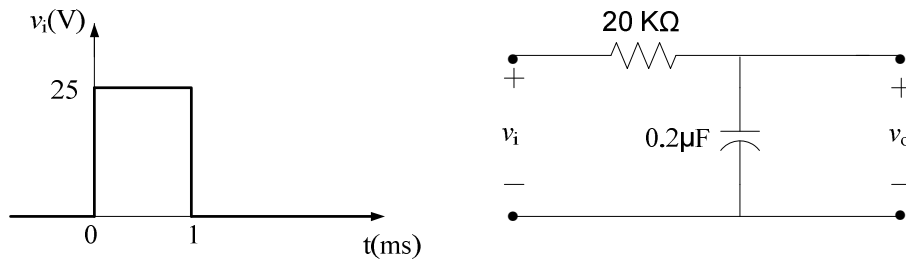
$$v_c(t) = 37.5 + (4.758 - 37.5)e^{-\frac{(t-0.5)}{3.75}} = 37.5 - 32.742e^{-0.2666(t-0.5)} \text{ V.}, \quad t \geq 0.5$$

elde edilir. Buna göre kapasitör gerilimi,

$$v_c(t) = \begin{cases} 50(1 - e^{-0.2t}) \text{ V}, & 0 \leq t \leq 0.5 \\ 37.5 - 32.742e^{-0.2666(t-0.5)} \text{ V}, & t \geq 0.5 \end{cases}$$

olacaktır.

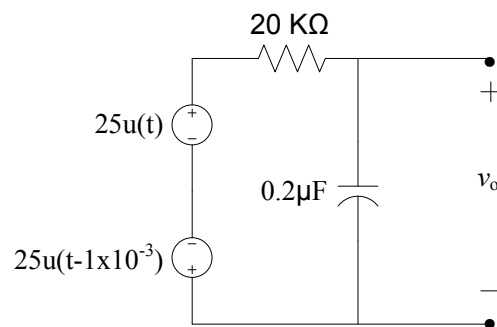
7.20. Şekildeki gerilim sinyali, devreye uygulanmıştır. Kapasitör başlangıç gerilimi sıfır olduğuna göre, çıkış terminallerindeki $v_o(t)$ gerilimini bulunuz.



Giriş sinyali, iki basamak fonksiyonunun toplamı olarak,

$$v_i(t) = 25(u(t) - u(t - 1 \times 10^{-3}))$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu kaynakların devreye bağlantısı aşağıda gösterilmiştir.



$t = 0^-$ 'da her iki kaynak da henüz devrede olmadığından,

$$v_c(0^-) = v_c(0) = v_c(0^+) = 0$$

olacaktır.

$t = 0$ 'da, $25u(t)$ kaynağı devreye girecektir. İkinci kaynağın devreye hiçbir zaman girmeyeceğini düşünerek,

$$v_c(\infty) = 25 \text{ V.},$$

ve zaman sabiti

$$\tau = RC = (20 \times 10^3) \cdot (0.2 \times 10^{-6}) = 4 \times 10^{-3} \text{ s},$$

elde edilir ki, $0 \leq t \leq 1$ aralığında kapasitör gerilimi ve dolayısıyla çıkış gerilimi,

$$v_o(t) = v_c(t) = 25(0 - 25)e^{-0.25 \times 10^3 t} = 25(1 - e^{-250t}) \text{ V.}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

bulunur.

$t = 1 \text{ ms}$ 'de ikinci kaynak devreye girdiğinde, toplam giriş sinyali sıfır olur. Kaynaklar, gerilim kaynakları olduğundan eşdeğerleri kısa devre olacaktır. Buna göre, $t \geq 1 \text{ ms}$ için kapasitör direnç üzerinden deşarj olacaktır.

$t = 1 \text{ ms}$ için kapasitör gerilimi,

$$v_o(1 \times 10^{-3}) = v_c(1 \times 10^{-3}) = 25(1 - e^{-250 \times (1 \times 10^{-3})}) = 5.53 \text{ V.}$$

ve

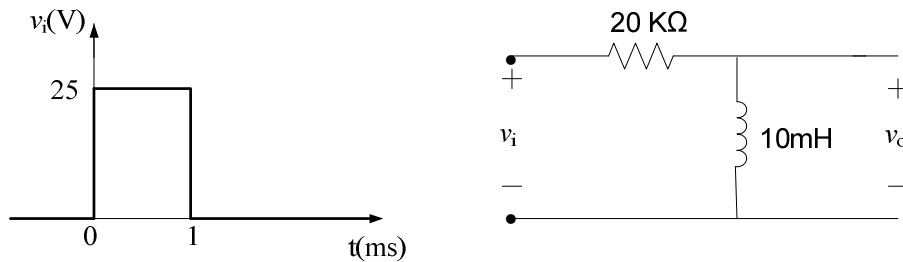
$$v_c(\infty) = 0$$

olacağından, kapasitör gerilimi ve çıkış geriliminin $t \geq 1 \text{ ms}$ için ifadeleri,

$$v_o(t) = v_c(t) = v_c(\infty) + (v_c(1 \times 10^{-3}) - v_c(\infty))e^{-250(t - 1 \times 10^{-3})} \quad \text{ve}$$

$$v_o(t) = v_c(t) = 5.53e^{-250(t - 1 \times 10^{-3})} \text{ V.}, \quad t \geq 1 \text{ ms} \text{ bulunur.}$$

7.21. Şekildeki gerilim sinyali devreye uygulanmıştır. Bobin başlangıç akımı sıfır olduğuna göre, çıkış terminallerindeki $v_o(t)$ gerilimini bulunuz.



8.1. Bir seri RLC devresinde, devre akımının bağlı ifadesi

$$i(t) = e^{-0.5t} (2t - 0.5) \text{ A}, t \geq 0$$

dır. $t = 0^+$ anında bobin üzerindeki gerilim 4.5 Volt olduğuna göre,

a) Devre elemanlarının değerlerini bulunuz.

b) Kapasitör geriliminin başlangıç değerini bulunuz.

a) Bobin terminal geriliminin $t = 0^+$ anındaki değeri bilindiğinden,

$$v_L(0^+) = L \frac{di(0^+)}{dt}$$

ifadesi kullanılarak bobin indüktans değeri bulunur. Burada akımın türevinin bu andaki değeri, verilen akımın türevinin $t = 0^+$ daki değeridir:

$$\frac{di(0^+)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(e^{-0.5t} (2t - 0.5) \right) \Big|_{t=0^+} = \left(-0.5e^{-0.5t} (2t - 0.5) + 2e^{-0.5t} \right) \Big|_{t=0^+} = -0.5(-0.5) + 2 = 2.25 \text{ A/s}$$

ve

$$4.5 = 2.25L \Rightarrow L = 2 \text{ H bulunur.}$$

Verilen akım ifadesi kritik sönüm formunda doğal cevap olduğundan, $\alpha = w_0 = 0.5$ dır.

$$\frac{R}{2L} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 0.5$$

eşitliğinden, $R = 2 \Omega$ ve $C = 2 \text{ F}$ bulunur.

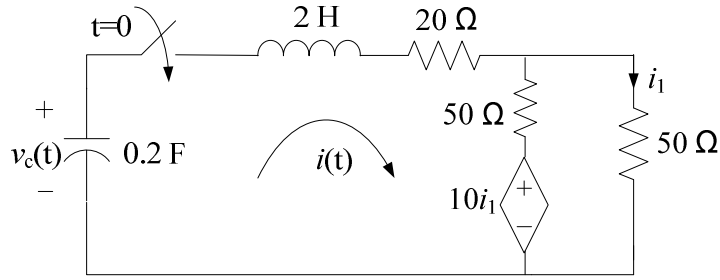
b) Seri devrede $t = 0^+$ anı için KGY uygulanırsa,

$$i(0^+)R + v_L(0^+) + v_C(0^+) = 0; \quad v_C(0^+) = -i(0^+)R - v_L(0^+)$$

elde edilir ki, bu ifadede akımın $t = 0^+$ daki değeri, verilen akım ifadesinde $t = 0$ koyularak -0.5 A bulunur. O halde,

$$v_C(0^+) = -(0.5) \cdot 2 - 4.5 = -3.5 \text{ V elde edilir.}$$

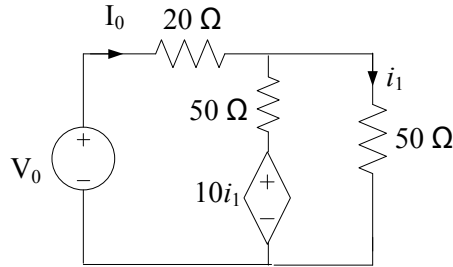
8.2. Şekilde verilen devrede kapasitör üzerinde gerilim 20 V dur. $t \geq 0$ için devre akımının zamana bağlı ifadesini bulunuz.



$t = 0^-$ 'da anahtar açık konumda olduğundan devre akımı (bobin akımı) bu anda sıfırdır. Kapasitör üzerinde ise 20 Volt gerilim mevcuttur.

$$v_c(0^-) = v_c(0) = v_c(0^+) = 20 \text{ V} \quad \text{ve} \quad i(0^-) = i(0) = i(0^+) = 0 \text{ A.}$$

Direçler ve bağımlı kaynağın oluşturduğu kısmın devreye bağlandığı terminallerden bir eşdeğeri sadece bir direnç (R_{Th}) şeklinde olacağından, $t \geq 0$ için devre bir seri RLC devresi ve devrede bağımsız kaynak bulunmadığından, sadece başlangıç enerjisi ile uyarıldığından da, cevap seri RLC devresinin doğal cevabı olacaktır. Bu eşdeğer direnç aşağıda görüldüğü gibi bulunur:

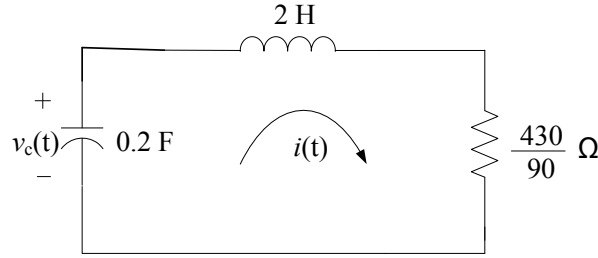


$$V_0 = 70I_0 + 10i_1 - 50i_1; \quad V_0 = 70I_0 - 40i_1,$$

$$0 = 100i_1 - 10i_1 - 50I_0; \quad 0 = 90i_1 - 50I_0 \Rightarrow i_1 = \frac{5}{9}I_0.$$

$$V_0 = 70I_0 - 40\left(\frac{5}{9}I_0\right) \Rightarrow R_{Th} = \frac{V_0}{I_0} = 70 - \frac{200}{9} = \frac{430}{9} \Omega.$$

Bu eşdeğer dirençle birlikte, $t = 0^+$ için devre aşağıda görüldüğü gibidir.



$t = 0^+$ için KGY uygulanırsa,

$$v_c(0^+) + 2 \frac{di(0^+)}{dt} + \frac{430}{90} i(0^+) = 0; \quad \frac{di(0^+)}{dt} = \frac{v_c(0^+)}{2} = \frac{20}{2} = 10 \text{ A/s}$$

elde edilir. Verilen devre için

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{430/90}{2 \cdot 2} = 1.194 \text{ Np/s} \text{ ve } w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{2(0.2)}} = 1.58 \text{ rad/s}$$

ve $\alpha > w_0$ olduğundan cevap salınımlı sönüm formunda olup sönüm frekansı da

$$w_d = \sqrt{w_0^2 - \alpha^2} = \sqrt{2.496 - 1.425} = 1.035 \text{ rad/s} \text{ dir.}$$

$$i(t) = e^{-\alpha t} (K_1 \cos w_d t + K_2 \sin w_d t); \quad i(t) = e^{-1.194t} (K_1 \cos 1.58t + K_2 \sin 1.58t).$$

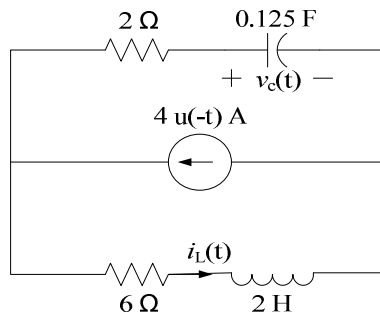
ifadesinde belirsiz katsayılar akımın başlangıç değerleri kullanılarak bulunur.

$$i(0) = K_1 = 0,$$

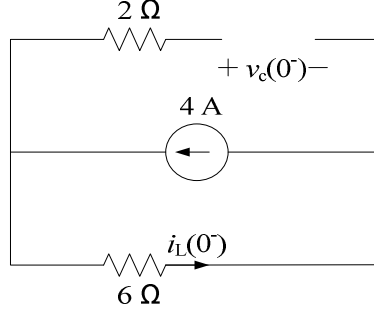
$$\frac{di(0^+)}{dt} = 10 = -1.194K_1 + 1.58K_2 \Rightarrow K_2 = \frac{10}{1.58} = 6.33. \text{ Böylece,}$$

$$i(t) = 6.33e^{-1.194t} \sin 1.58t \text{ A., } t \geq 0 \text{ sonucu elde edilir.}$$

8.3. Şekilde verilen devrede $t \geq 0$ için, kapasitör gerilimi ve bobin akımının zamana bağlı ifadelerini bulunuz.

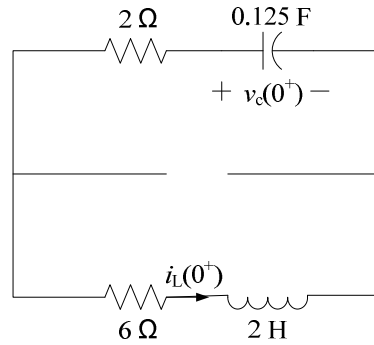


Akım kaynağı $t = 0$ anına kadar devrededir ve bu anda devre dışı kalacağından, $t > 0$ için açık devre davranacaktır. Kapasitör ve bobin, $t = 0^-$ 'a kadar dc kaynağa maruz kaldığından, bu anda kapasitör açık devre ve bobin kısa devre davranacaktır. $t = 0^-$ için aşağıda görülen eşdeğer devreden kapasitör başlangıç gerilimi ve bobin başlangıç akımı bulunur:



$$i_L(0^-) = i_L(0) = i_L(0^+) = 4 \text{ A}, \quad \text{ve} \quad v_c(0^-) = v_c(0) = v_c(0^+) = 6i_L(0^-) = 6 \cdot 4 = 24 \text{ V}.$$

$t = 0^+$ anında kaynak pasif durumda olup, açık devre davranmaktadır. Bu anda bobin akımı ve kapasitör geriliminin türevlerinin değerleri aşağıda, $t = 0^+$ için verilen eşdeğer devreden bulunur:



Bu eşdeğer devrede KGY uygulanırsa,

$$8i_L(0^+) + 2 \frac{di_L(0^+)}{dt} - v_c(0^+) = 0; \quad \frac{di_L(0^+)}{dt} = \frac{v_c(0^+) - 8i_L(0^+)}{2} = \frac{24 - 8 \cdot 4}{2} = -4 \text{ A/s}$$

ve kapasitör terminal eşitliğinden de,

$$i_L(0^+) = -C \frac{dv_c(0^+)}{dt}; \quad \frac{dv_c(0^+)}{dt} = -\frac{i_L(0^+)}{C} = -\frac{4}{0.125} = -32 \text{ V/s}$$

bulunur. $t > 0$ için devre bir seri RLC devresidir.

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{8}{2 \cdot 2} = 2 \text{ Np/s}, \quad w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot (0.125)}} = 2 \text{ rad/s}:$$

$\alpha = w_0$ olduğundan cevabın formu,

$$v_c(t) = e^{-\alpha t} (tK_1 + K_2) \quad \text{ve} \quad i_L(t) = e^{-\alpha t} (tK_3 + K_4)$$

olacaktır. Başlangıç değerleri kullanılarak

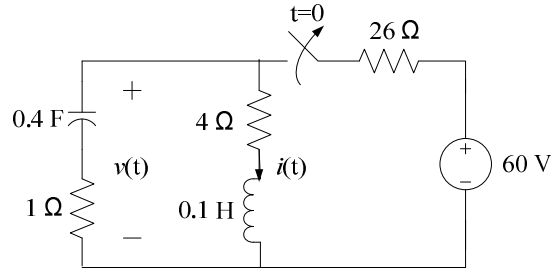
$$v_c(0) = K_2 = 24 \quad \text{ve} \quad \frac{dv_c(0^+)}{dt} = -2K_2 + K_1 = -32 \Rightarrow K_1 = 16,$$

$$i_L(0) = K_4 = 4 \quad \text{ve} \quad \frac{di_L(0^+)}{dt} = -2K_4 + K_3 = -4 \Rightarrow K_3 = 4$$

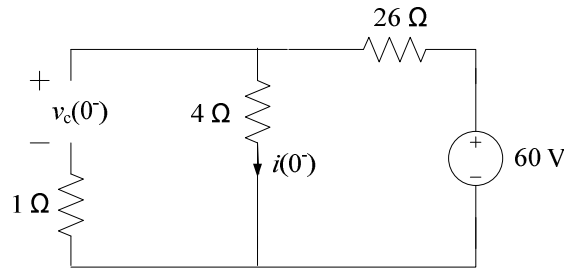
elde edilir. Böylece aranan cevaplar aşağıdaki gibi bulunur:

$$v_c(t) = e^{-2t} (16t + 24) \text{ V.}, t \geq 0 \quad \text{ve} \quad i_L(t) = 4e^{-2t} (t + 1) \text{ A.}, t \geq 0.$$

8.4. Şekilde görülen devrede anahtar uzun süredir kapalı konumda olup, $t = 0$ 'da aılmaktadır. $i(t)$ akımını ve $v(t)$ gerilimini $t \geq 0$ için bulunuz.



$t = 0^-$ da bobin kısa devre ve kapasitör açık devre davranmaktadır. Bu anda kapasitörün şarj olduğu gerilim ve bobinin kısa devre akım, aşağıda $t = 0^-$ için verilen eşdeğer devreden bulunur:

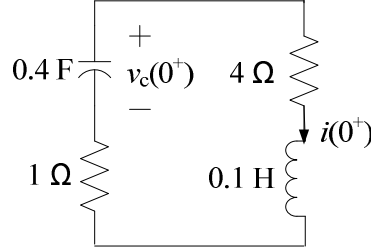


$$i(0^-) = \frac{60}{26 + 4} = 2 \text{ A} \quad \text{ve} \quad v_c(0^-) = 4i(0^-) = 4 \cdot 2 = 8 \text{ V.}$$

Süreklilik koşullarından

$$v_c(0^-) = v_c(0) = v_c(0^+) = 8 \quad \text{ve} \quad i(0^-) = i(0) = i(0^+) = 2 \text{ A olacaktır.}$$

$t = 0$ 'da kaynak devre dışı kalacak ve seri RLC devresi, kapasitör ve bobin üzerinde bu ana kadar depolanmış enerji ile uyarılacaktır. Yani cevap, seri RLC devrenin doğal cevabı formundadır. Bobin akımı ve kapasitör geriliminin türevlerinin $t = 0^+$ 'daki değerleri de aşağıda $t = 0^+$ anı için verilen eşdeğer devreden bulunur:



Kapasitör terminal eşitliğinden,

$$i(0^+) = -C \frac{dv_c(0^+)}{dt}; \quad \frac{dv_c(0^+)}{dt} = -\frac{i(0^+)}{C} = -\frac{2}{0.4} = -5 \text{ V/s}$$

ve KGY'nı uygulayarak da,

$$(4+1)i(0^+) - v_c(0^+) + (0.1)\frac{di(0^+)}{dt} = 0; \quad \frac{di(0^+)}{dt} = \frac{8-5 \cdot 2}{0.1} = -20 \text{ A/s}$$

elde edilir. Verilen devre için

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{5}{2 \cdot (0.1)} = 25 \text{ Np/s} \quad \text{ve} \quad w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{(0.1) \cdot (0.4)}} = 5 \text{ rad/s}$$

ve $\alpha > w_0$ olduğundan, çözüm, salınımsız sönüm formunda olacaktır:

$$i(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t}, \quad v_c(t) = K_3 e^{s_1 t} + K_4 e^{s_2 t}$$

burada

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - w_0^2} = -25 + \sqrt{625 - 25} = -0.5$$

$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - w_0^2} = -25 - \sqrt{625 - 25} = -49.5$$

ve

$$i(t) = K_1 e^{-0.5t} + K_2 e^{-49.5t}, \quad v_c(t) = K_3 e^{-0.5t} + K_4 e^{-49.5t} \text{ bulunur.}$$

Belirsiz katsayıları bulmak için başlangıç değerleri kullanılır.

$$i(0) = K_1 + K_2 = 2; \quad \frac{di(0^+)}{dt} = -0.5K_1 - 49.5K_2 = -20$$

$$v_c(0) = K_3 + K_4 = 8; \quad \frac{dv_c(0^+)}{dt} = -0.5K_3 - 49.5K_4 = -5$$

Bu eşitlikler bilinmeyen katsayılar için çözüldüğünde $K_1 = 1.612$, $K_2 = 0.387$, $K_3 = 7.98$ ve $K_4 = 0.02$ elde edilir. Böylece,

$$i(t) = 1.612e^{-0.5t} + 0.387e^{-49.5t} \text{ A.}, t \geq 0 \quad \text{ve} \quad v_c(t) = 7.98e^{-0.5t} + 0.02e^{-49.5t} \text{ V.}, t \geq 0$$

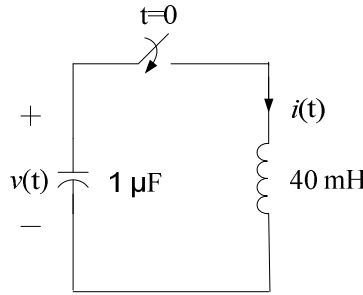
bulunur. Aranılan $v(t)$ gerilimi kapasitör ve 1Ω 'luk direnç üzerindeki toplam gerilimdir:

$$v(t) = v_c(t) - 1 \cdot i(t) = 7.98e^{-0.5t} + 0.02e^{-49.5t} - 1.612e^{-0.5t} - 0.387e^{-49.5t}$$

$$v(t) = 6.368e^{-0.5t} - 0.367e^{-49.5t} \text{ V.}, t > 0$$

elde edilir. Bu ifadenin, direnç üzerindeki gerilimi de içerdiğinden, $t > 0$ için geçerli olduğuna dikkat ediniz.

8.5. Şekil.8.29'da verilen devrede, anahtar kapanmadan önce kapasitör üzerinde ki gerilim 5 V'dur. Anahtar $t = 0$ anında kapanmaktadır. $t \geq 0$ için devre akımının ifadesini bulunuz.



Devrede $R = 0$ olup,

$$\alpha = \frac{R}{2L} = 0 \quad \text{ve} \quad w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{(1 \times 10^{-6}) \cdot (40 \times 10^{-3})}} = 0.5 \times 10^4 = 5 \text{ krad/s}$$

dir. $w_0 > \alpha$ olduğundan, cevap salınımlı sönüm formundadır.

$$i(t) = e^{-\alpha t} (K_1 \cos w_d t + K_2 \sin w_d t); \quad i(t) = K_1 \cos w_0 t + K_2 \sin w_0 t, \quad (w_d = w_0).$$

$t = 0^-$ 'da, $v(0^-) = 5 \text{ V}$ ve $i(0^-) = 0$ olup süreklilik koşulundan

$$v(0^-) = v(0) = v(0^+) = 5 \text{ V} \quad \text{ve} \quad i(0^-) = i(0) = i(0^+) = 0 \text{ bulunur.}$$

Anahtar $t = 0$ 'da kapandığında kapasitör gerilimi bobin terminallerinde görülecektir. Bobin terminal eşitliği $t = 0^+$ için kullanılırsa,

$$v(0^+) = L \frac{di(0^+)}{dt}; \quad \frac{di(0^+)}{dt} = \frac{v(0^+)}{L} = \frac{5}{40 \times 10^{-3}} = 125 \text{ A/s}$$

elde edilir. Devre akımının bu başlangıç değerleri akım ifadesinde kullanılırsa;

$$i(0) = K_1 = 0; \quad \frac{di(0^+)}{dt} = w_0 K_2 \Rightarrow 125 = 5 \times 10^3 K_2; \quad K_2 = 25 \times 10^{-3}$$

ve

$$i(t) = 0.025 \sin 5000t \text{ A.}, t \geq 0 \text{ sonucu elde edilir.}$$

8.6. Bir paralel RLC devrsinde, devre elemanları üzerindeki gerilimin zamana bağlı ifadesi

$$v(t) = 20e^{-400t} - 50e^{-1000t} \text{ V.}, t \geq 0$$

dir. Bobinin değeri 1 H olduğuna göre,

- a) Devrenin neper frekansı α ve rezonans frekansı w_0 değerlerini bulunuz.
- b) Kapasitör ve direnç değerlerini bulunuz.
- c) Kapasitör başlangıç gerilimi ve bobin başlangıç akım değerlerini bulunuz.

a) Cevap, salınımsız sönüm formundadır:

$$v(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{-s_2 t}; \quad s_1 = -400 \text{ Np/s} \text{ ve } s_2 = -1000 \text{ Np/s}$$

ve

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - w_0^2} = -400 \text{ ve } s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - w_0^2} = -1000$$

$$s_1 + s_2 = -2\alpha = -1400 \Rightarrow \alpha = \frac{1400}{2} = 700 \text{ Np/s}$$

ve

$$-400 = -700 + \sqrt{700^2 - w_0^2} \Rightarrow w_0 = 632.4 \text{ rad/s bulunur.}$$

$$\text{b) } w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow C = \frac{1}{w_0^2 L} = \frac{1}{(632.4)^2 \cdot 1} = 2.5 \text{ } \mu\text{F} \text{ ve}$$

$$\alpha = \frac{1}{2RC} \Rightarrow R = \frac{1}{2\alpha C} = \frac{1}{2 \cdot 700 \cdot 2.5 \times 10^{-6}} = 285.7 \text{ } \Omega.$$

$$\text{c) } v_c(0) = v(t)|_{t=0} = 20 - 50 = -30 \text{ V.}$$

$t = 0^+$ için KAY uygulanırsa,

$$i_L(0^+) + i_R(0^+) + i_C(0^+) = 0;$$

ve terminal eşitliklerinden,

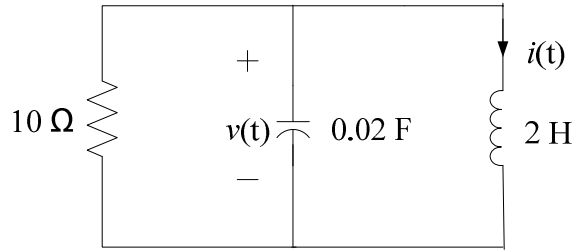
$$i_R(0^+) = \frac{v(0^+)}{R} = -\frac{30}{285.7} = -0.105 \text{ A},$$

$$i_C(0^+) = C \frac{dv(0^+)}{dt} = 2.5 \times 10^{-6} (-400 \cdot 20 - 50 \cdot (-1000)) = 0.105 \text{ A. elde edilir.}$$

Böylece,

$$i_L(0^+) = -i_R(0^+) - i_C(0^+) = -(-0.105) - 0.105 = 0 \text{ elde edilir.}$$

8.7. Şekil.8.30'da görülen devrede, $t = 0$ anında kapasitör gerilimi 70 V ve bobin akımı sıfırdır. $t \geq 0$ için kapasitör gerilimini ve bobin akımını bulunuz.



$$v(0^-) = v(0) = v(0^+) = 70 \text{ V} \text{ ve } i(0^-) = i(0) = i(0^+) = 0.$$

$t = 0^+$ için KAY uygulanarak,

$$\frac{v(0^+)}{10} + 0 + C \frac{dv(0^+)}{dt} = 0 \text{ ve } \frac{dv(0^+)}{dt} = -\frac{70}{0.02 \cdot 10} = -350 \text{ V/s}$$

Bobin terminal eşitliği ile de,

$$v(0^+) = L \frac{di(0^+)}{dt}; \quad \frac{di(0^+)}{dt} = \frac{70}{2} = 35 \text{ A/s}$$

elde edilir. Verilen paralel RLC devre için

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2 \cdot 10 \cdot 0.02} = 2.5 \text{ Np/s} \text{ ve } w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = w_0 = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 0.02}} = 5 \text{ rad/s}$$

$w_0 > \alpha$ olduğundan çözüm salınımlı sönüm formunda olup, sönüm frekansı da

$$w_d = \sqrt{w_0^2 - \alpha^2} = \sqrt{25 - 6.25} = 4.33 \text{ rad/s} \text{ dır.}$$

Kapasitör gerilimi ve bobin akımının ifadeleri

$$v(t) = e^{-\alpha t} (K_1 \cos w_d t + K_2 \sin w_d t) ; \quad v(t) = e^{-2.5t} (K_1 \cos 4.33t + K_2 \sin 4.33t)$$

$$i(t) = e^{-\alpha t} (K_3 \cos w_d t + K_4 \sin w_d t) ; \quad i(t) = e^{-2.5t} (K_3 \cos 4.33t + K_4 \sin 4.33t)$$

olarak bulunur. Başlangıç değerleri kullanılırsa,

$$v(0) = K_1 = 70, \quad \frac{dv(0^+)}{dt} = -2.5K_1 + 4.33K_2 = -350$$

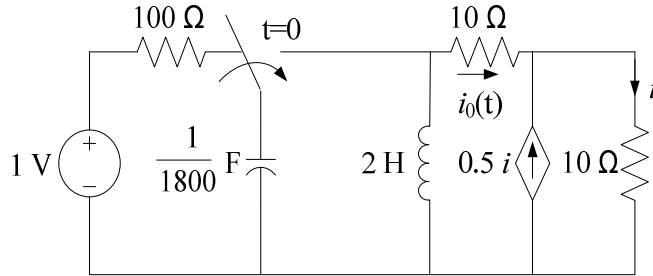
$$i(0) = K_3 = 0, \quad \frac{di(0^+)}{dt} = -2.5K_3 + 4.33K_4 = 35$$

ve bu eşitliklerin çözümünden $K_1 = 70$, $K_2 = -40.4$, $K_3 = 0$ ve $K_4 = 8.08$ ve

$$v(t) = e^{-2.5t} (70 \cos 4.33t - 40.4 \sin 4.33t) \text{ V.}, t \geq 0, \quad i(t) = 8.08 e^{-2.5t} \cos 4.33t \text{ A.}, t \geq 0$$

sonuçları elde edilir.

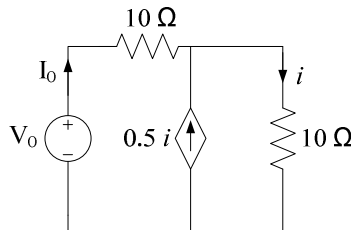
8.8. Şekil.8.31'de görülen devre uzun bir süredir çalışmaktadır. Anahtar $t = 0$ 'da konum değiştirdiğine göre, $t > 0$ için direnç üzerindeki i_0 akımının zamana bağlı ifadesini bulunuz.



$t = 0^-$ 'da kapasitör 1 V'luk gerilim değerine şarj olmuştur. Aynı anda bobin akımı sıfırdır.

$$v(0^-) = v(0) = v(0^+) = 1 \text{ V} \quad \text{ve} \quad i_L(0^-) = i_L(0) = i_L(0^+) = 0.$$

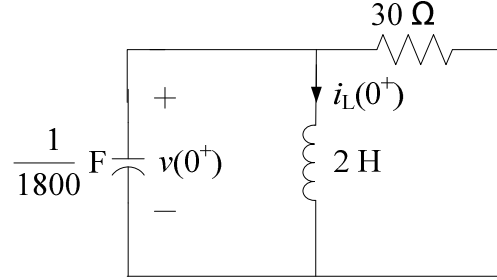
Bobinin sağında kalan kısım bir bağımsız kaynak içermediğinden eşdeğeri bir dirençtir. Bu eşdeğer direnç aşağıdaki gibi bulunur:



$$I_0 + 0.5i = i \Rightarrow i = 2I_0.$$

$$V_0 = 10I_0 + 10i; \quad V_0 = 10I_0 + 10(2I_0) \Rightarrow R_{es} = \frac{V_0}{I_0} = 30 \, \Omega.$$

$t = 0^+$ için devre aşağıda görüldüğü gibi olacaktır:



Bu an için KAY uygulanırsa,

$$i_L(0^+) + C \frac{dv(0^+)}{dt} + \frac{v(0^+)}{30} = 0; \quad \frac{dv(0^+)}{dt} = -\frac{v(0^+)}{30 \cdot C} = -\frac{1}{30 \cdot (1/1800)} = -60 \text{ V/s}$$

bulunur. Verilen devre için

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2 \cdot 30 \cdot (1/1800)} = 30 \text{ Np/s}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot (1/1800)}} = 30 \text{ rad/s}$$

ve $\alpha = \omega_0$ olduğundan, cevap kritik sönüm formundadır.

$$v(t) = e^{-\alpha t} (tK_1 + K_2); \quad v(t) = e^{-30t} (tK_1 + K_2)$$

Başlangıç değerleri kullanılarak,

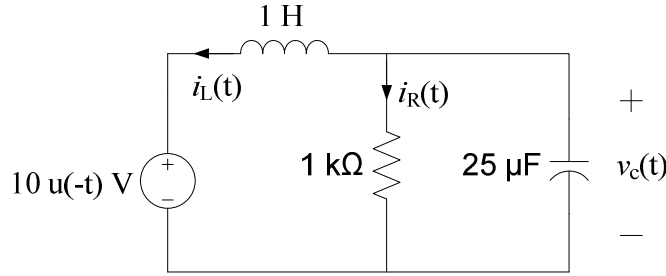
$$v(0) = K_2 = 1 \text{ ve } \frac{dv(0^+)}{dt} = -30K_2 + K_1 = -60 \Rightarrow K_1 = -30 \text{ bulunur.}$$

Böylece kapasitör geriliminin ifadesi,

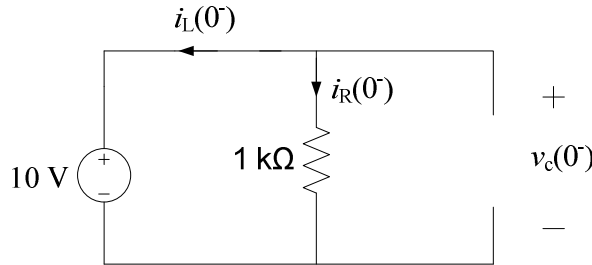
$$v(t) = e^{-30t} (-30t + 1) \text{ ve}$$

$$i_0(t) = \frac{v(t)}{30} = e^{-30t} (-t + 0.033) \text{ A., } t > 0 \text{ sonucu elde edilir.}$$

8.9. Şekil.8.32'deki devrede $t \geq 0$ için kapasitör geriliminin ve bobin akımının zamana bağlı ifadesini bulunuz. $t > 0$ için kapasitör akımı ve direnç üzerindeki akımın zamana bağlı ifadelerini bulunuz.



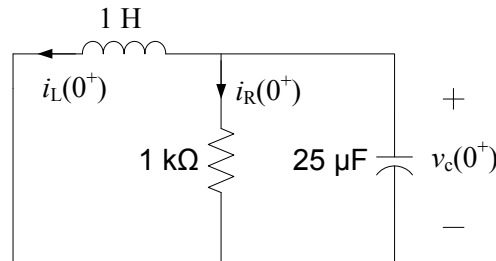
Kaynak, $t = 0$ anına kadar devrededir ve bu andan itibaren kısa devre olacaktır. $t = 0^-$ anında bobin ve kapasitör uzun süre dc kaynağa maruz kaldıklarından, bobin kısa devre ve kapasitör açık devredir. Bu andaki bobin akımı ve kapasitör gerilimi değerleri, $t = 0^-$ için aşağıda verilen eşdeğer devreden bulunur:



$$i_L(0^-) = -\frac{10}{1000} = -10 \text{ mA.}, \quad i_L(0^-) = i_L(0) = i_L(0^+) = -10 \text{ mA.} \quad (i_R(0^-) = -i_L(0^-) = 10 \text{ mA.})$$

$$v_c(0^-) = 10 \text{ V.}, \quad v_c(0^-) = v_c(0) = v_c(0^+) = 10 \text{ V.}$$

$t = 0^+$ 'da bobin akımı ve kapasitör gerilimlerinin türevlerinin değerleri de, $t = 0^+$ için aşağıda verilen eşdeğer devreden bulunur:



KAY uygulandığında,

$$i_R(0^+) + i_L(0^+) + i_c(0^+) = 0; \quad i_R(0^+) = \frac{v_c(0^+)}{1000}, \quad i_c(0^+) = C \frac{dv_c(0^+)}{dt}$$

ve

$$\frac{v_c(0^+)}{1000} + (-0.01) + 25 \times 10^{-6} \frac{dv_c(0^+)}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dv_c(0^+)}{dt} = \frac{1}{25 \times 10^{-6}} \left(0.01 - \frac{10}{1000} \right) = 0 \text{ V/s}$$

ve bobin terminal eşitliğinden de,

$$L \frac{di_L(0^+)}{dt} = v_c(0^+); \quad \frac{di_L(0^+)}{dt} = 10 \text{ A/s}$$

elde edilir. $t \geq 0$ için devre bir paralel RLC devresi olduğundan,

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2 \cdot 1000 \cdot 25 \times 10^{-6}} = 20 \text{ Np/s} \quad \text{ve} \quad w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{1 \cdot 25 \times 10^{-6}}} = 200 \text{ rad/s}$$

ve $w_0 > \alpha$ olduğundan, devre cevabının formu

$$w_d = \sqrt{w_0^2 - \alpha^2} = \sqrt{4 \times 10^4 - 400} = 199 \text{ rad/s olmak üzere}$$

$$v_c(t) = e^{-\alpha t} (K_1 \cos w_d t + K_2 \sin w_d t); \quad v_c(t) = e^{-20t} (K_1 \cos 199t + K_2 \sin 199t)$$

$$i_L(t) = e^{-\alpha t} (K_3 \cos w_d t + K_4 \sin w_d t) \quad i_L(t) = e^{-20t} (K_3 \cos 199t + K_4 \sin 199t)$$

bulunur. Başlangıç değerleri kullanılarak,

$$v_c(0) = K_1 = 10 \quad \text{ve} \quad \frac{dv_c(0^+)}{dt} = -20K_1 + 199K_2 = 0,$$

$$i_L(0) = K_3 = -0.01 \quad \text{ve} \quad \frac{di_L(0^+)}{dt} = -20K_3 + 199K_4 = 10$$

elde edilir. Bu eşitliklerin çözümünden: $K_1 = 10$, $K_2 = 1.005$, $K_3 = -0.01$ ve $K_4 = 0.049$ ve böylece,

$$v_c(t) = e^{-20t} (10 \cos 199t + 1.005 \sin 199t) \text{ V., } t \geq 0,$$

$$i_L(t) = e^{-20t} (-0.01 \cos 199t + 0.049 \sin 199t) \text{ A., } t \geq 0$$

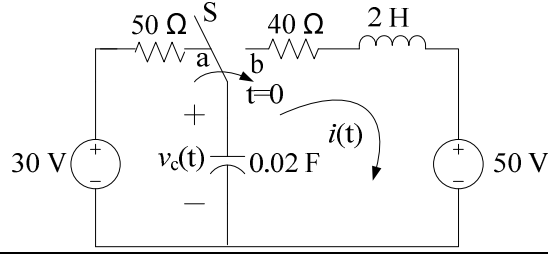
sonuçları bulunur. Direnç üzerindeki akım,

$$i_R(t) = \frac{v_c(t)}{1000} = e^{-20t} (0.01 \cos 199t + 1.005 \times 10^{-3} \sin 199t) \text{ A., } t > 0$$

ve kapasitör akımı da,

$$i_c(t) = -i_L(t) - i_R(t) = 0.046e^{-20t} \sin 199t \text{ A., } t > 0 \text{ elde edilir.}$$

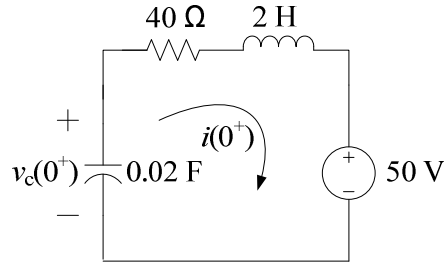
8.10. Şekilde verilen devrede S anahtarı uzun bir süredir 'a' konumundadır ve $t = 0$ 'da 'b' konumuna geçmektedir. $t \geq 0$ için devre akımının ifadesini bulunuz.



$t = 0^-$ 'da kapasitör 30 V'luk gerilim değerine şarj olmuştur ve bobin akımı sıfırdır. Bobin ve kapasitör için süreklilik koşulu da kullanılarak,

$$v_c(0^-) = v_c(0) = v_c(0^+) = 30 \text{ V. ve } i(0^-) = i(0) = i(0^+) = 0 \text{ A.}$$

elde edilir. $t = 0^+$ 'da 30 V'luk kaynak devre dışı kalmakta ancak 50 V'luk kaynak devreye girmektedir. Bu anda için eşdeğer devre aşağıda verilmiştir:



KGY ile,

$$-v_c(0^+) + 40i(0^+) + 2 \frac{di(0^+)}{dt} + 50 = 0; \quad \frac{di(0^+)}{dt} = \frac{1}{2}(30 - 50) = -10 \text{ A/s}$$

bulunur. $t \geq 0$ için devre, seri RLC devresi olup, aranan cevap da devrenin basamak cevabıdır. $t \rightarrow \infty$ için kapasitör 50 V'luk gerilime şarj olup, açık devre olacağından devre akımı sıfır olacaktır.

$$i(\infty) = 0.$$

Seri RLC devre için,

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{40}{2 \cdot 2} = 10 \text{ Np/s} \quad \text{ve} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 0.02}} = 5 \text{ rad/s}$$

ve $\alpha > \omega_0$ olduğundan, devre akımı salınımsız sönüm formundadır:

$$i(t) = i(\infty) + K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t}.$$

Devrenin doğal frekansları

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -10 + \sqrt{100 - 25} = -1.34 \text{ Np/s} \quad \text{ve}$$

$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -10 - \sqrt{100 - 25} = -18.66 \text{ Np/s}$$

dir. Böylece, devre akımının ifadesi belirsiz sabitlerle,

$$i(t) = K_1 e^{-1.34t} + K_2 e^{-18.66t}$$

olacaktır. Başlangıç koşulları kullanılarak, katsayıları belirlemede kullanılacak eşitlikler elde edilir:

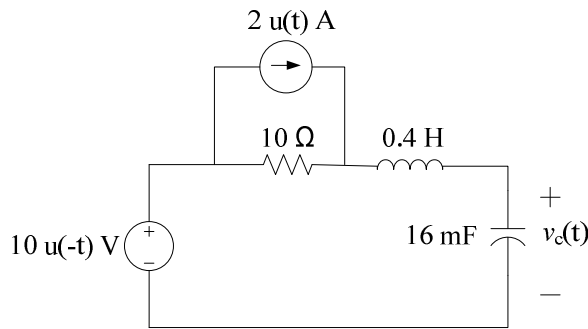
$$i(0) = K_1 + K_2 = 0; \quad \frac{di(0^+)}{dt} = -1.34K_1 - 18.66K_2 = -10$$

$$K_1 = -K_2, \quad K_2(1.35 - 18.66) = -10 \quad \Rightarrow \quad K_2 = 0.577.$$

Böylece devre akımının ifadesi

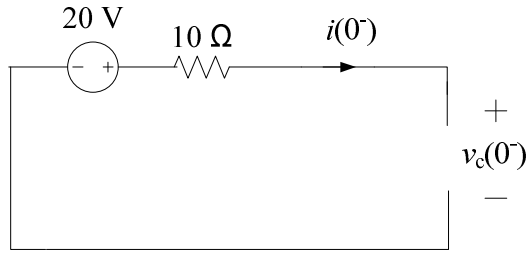
$$i(t) = 0.577(e^{-18.66t} - e^{-1.34t}) \text{ A}, \quad t \geq 0 \text{ elde edilir.}$$

8.11. Şekilde görülen devrede kapasitör terminal geriliminin zamana bağlı ifadesini bulunuz. Kapasitör geriliminin zamana göre değişim grafiğini çizerek, gerilimin 15 V'a erişmesi için gerekli olan süreyi bu grafikten bulunuz.

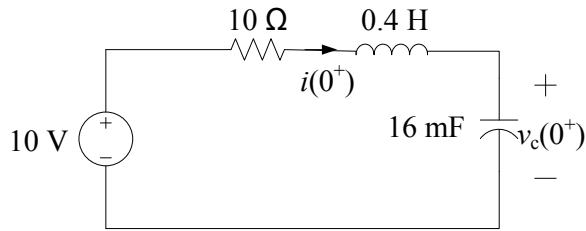


$t = 0$ anına kadar akım kaynağı aktif ve gerilim kaynağı kısa devredir. Bu anda gerilim kaynağı aktif olurken akım kaynağı devre dışı kalacak ve açık devre olacaktır. $t = 0^-$ için, akım kaynağına, kaynak dönüşümü uygulayarak elde edilmiş eşdeğer devre aşağıdaki gibidir. Bu devreden,

$$v_c(0^-) = 20 \text{ V} \quad \text{ve} \quad i(0^-) = 0 \text{ A bulunur.}$$



$t = 0^+$ için, aşağıda verilen eşdeğer devreden de kapasitör geriliminin türevinin bu andaki değeri bulunur:



Kapasitör terminal eşitliğinden,

$$i(0^+) = C \frac{dv_c(0^+)}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dv_c(0^+)}{dt} = 0$$

elde edilir. Kapasitör uzun süre gerilim kaynağına maruz kaldığında 10 V'luk gerilime şarf olacak ve açık devre gibi davranacaktır:

$$v_c(\infty) = 10 \text{ V.}$$

Verilen seri RLC devresi için,

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{10}{2 \cdot 0.4} = 12.5 \text{ Np/s}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0.4 \cdot 16 \times 10^{-3}}} = 12.5 \text{ rad/s}$$

ve $\alpha = \omega_0$ olduğundan cevap kriik sönüm formundadır:

$$v_c(t) = v_c(\infty) + e^{-\alpha t} (tK_1 + K_2); \quad v_c(t) = 10 + e^{-12.5t} (tK_1 + K_2).$$

Kapasitör gerilimine ilişkin başlangıç değerleri kullanılarak,

$$v_c(0) = 10 + K_2 = 20 \quad \text{ve} \quad \frac{dv_c(0^+)}{dt} = -12.5K_2 + K_1 = 0 \Rightarrow K_2 = 10 \quad \text{ve} \quad K_1 = 125$$

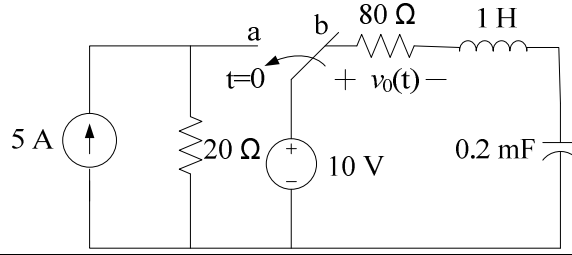
bulunur. Kapasitör gerilimi de,

$$v_c(t) = 10 + e^{-12.5t} (125t + 10) \text{ V.}, t \geq 0$$

olacaktır. Kapasitör geriliminin 40 V'a erişmesi için gerekli süre için bu ifadeyi kullanarak,

$$40 = 10 + e^{-12.5t} (125t + 10); \quad 30 = e^{-12.5t} (125t + 10)$$

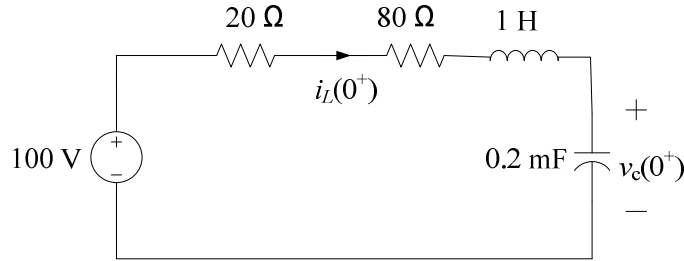
8.12. Şekildeki devrede S anahtarı uzun süredir 'b' konumunda olup, $t = 0$ 'da 'a' konumuna geçmektedir. $t > 0$ için direnç üzerindeki $v_0(t)$ gerilimini bulunuz.



$t = 0^-$ 'da kapasitör 10 Volt'a şarj olmuş ve açık devre davranmaktadır. Bu anda bobin akımı sıfırdır. Süreklilik koşulları da kullanılarak,

$$v_c(0^-) = v_c(0) = v_c(0^+) = 10 \text{ V.} \quad \text{ve} \quad i_L(0^-) = i_L(0) = i_L(0^+) = 0 \text{ A.}$$

elde edilir. $t = 0^-$ için, akım kaynağına kaynak dönüşümü uygulanarak elde edilen eşdeğer devre aşağıda görüldüğü gibidir:



KGY uygulanarak,

$$v_c(0^+) + 100i_L(0^+) + \frac{di_L(0^+)}{dt} - 100 = 0; \quad \frac{di_L(0^+)}{dt} = 100 - 10 = 90 \text{ A/s}$$

elde edilir. $t \rightarrow \infty$ için, kapasitör 100 V'a şarj olup açık devre davranacağından akım sıfır olacaktır:

$$i_L(\infty) = 0 \text{ A.}$$

Seri RLC devresi için

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{100}{2 \cdot 1} = 50 \text{ Np/s}, \quad w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{1 \cdot 0.2 \times 10^{-3}}} = 70.7 \text{ rad/s}$$

ve $w_0 > \alpha$ olduğundan, cevap salınımlı sönüm formundadır. Sönüm frekansı

$$w_d = \sqrt{w_0^2 - \alpha^2} = \sqrt{5000 - 2500} = 50 \text{ rad/s}$$

ve akım

$$i_L(t) = e^{-\alpha t} (K_1 \cos w_d t + K_2 \sin w_d t); \quad i_L(t) = e^{-50t} (K_1 \cos 70.7t + K_2 \sin 70.7t)$$

bulunur. Akım için başlangıç değerleri kullanıldığında

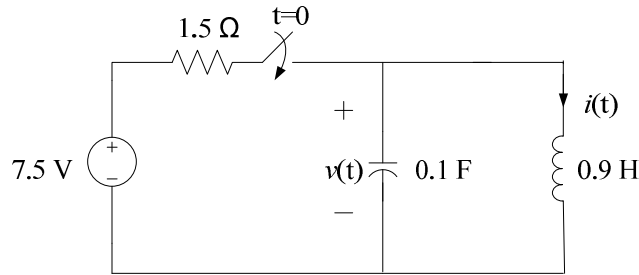
$$i_L(0) = K_1 = 0 \quad \text{ve} \quad \frac{di_L(0^+)}{dt} = -50K_1 + 70.7K_2 = 90 \Rightarrow K_2 = \frac{90}{70.7} = 1.27 \text{ ve}$$

$$i_L(t) = 1.27e^{-50t} \sin 70.7t \text{ A.}, \quad t \geq 0$$

sonucu elde edilir. Direnç üzerindeki gerilimde Ohm yasası ile kolayca elde edilir:

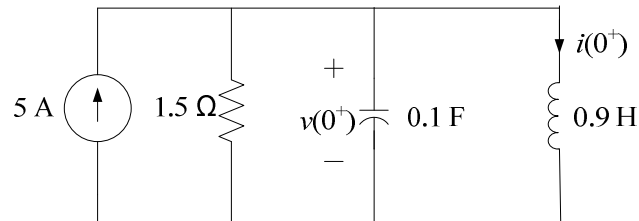
$$v_0(t) = 80i_L(t) = 101.83e^{-50t} \sin 70.7t \text{ V.}, \quad t > 0.$$

8.13. Şekilde görülen devrede kapasitör başlangıç gerilimi 50 V ve bobin başlangıç akımı sıfırdır. Anahtar $t = 0$ 'da kapandığına göre, $t \geq 0$ için kapasitör gerilimini ve bobin akımını bulunuz.



$$v(0^-) = v(0) = v(0^+) = 50 \text{ V} \quad \text{ve} \quad i(0^-) = i(0) = i(0^+) = 0 \text{ A.}$$

$t = 0^+$ için gerilim kaynağına kaynak dönüşümü uygulanırsa aşağıdaki eşdeğer devre elde edilir:



Bobin terminal eşitliğinden,

$$v(0^+) = L \frac{di(0^+)}{dt}; \quad \frac{di(0^+)}{dt} = \frac{v(0^+)}{L} = \frac{50}{0.9} = 55.55 \text{ A/s}$$

ve KAY uygulanarakta,

$$i(0^+) + \frac{v(0^+)}{1.5} + C \frac{dv(0^+)}{dt} = 5; \quad \frac{dv(0^+)}{dt} = \frac{1}{0.1} \left(5 - 0 - \frac{50}{1.5} \right) = -283.3 \text{ V/s}$$

$t \rightarrow \infty$ bobin kısa devre olacağından bobin akımı

$$i(\infty) = 5 \text{ A ve } v(\infty) = 0 \text{ V.}$$

olacaktır. Paralel RLC devre için,

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2 \cdot 1.5 \cdot 0.1} = 3.33 \text{ Np/s}, \quad w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0.9 \cdot 0.1}} = 3.33 \text{ rad/s}$$

ve $w_0 = \alpha$ olduğundan cevap,

$$v(t) = e^{-\alpha t} (K_1 t + K_2); \quad v(t) = e^{-3.33t} (K_1 t + K_2),$$

$$i(t) = e^{-\alpha t} (K_3 t + K_4) \quad i(t) = e^{-3.33t} (K_3 t + K_4)$$

olarak bulunur. Başlangıç koşullarıyla,

$$v(0) = K_2 = 50, \quad \frac{dv_c(0^+)}{dt} = -3.33K_2 + K_1 = -283.3 \Rightarrow K_2 = -116.7.$$

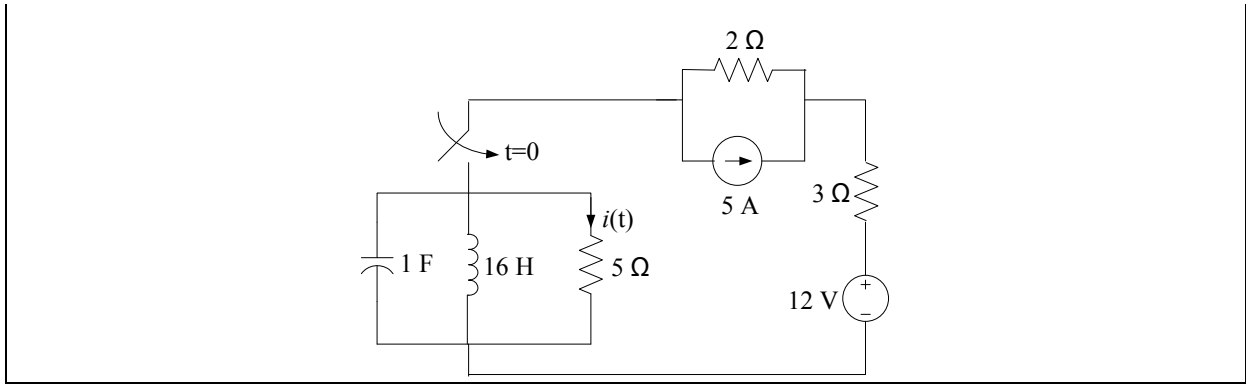
$$i(0) = K_4 = 0, \quad \frac{di(0^+)}{dt} = -3.33K_4 + K_3 = 55.55 \Rightarrow K_3 = 55.55$$

ve

$$v(t) = e^{-3.33t} (-116.7t + 50) \text{ V.}, \quad t \geq 0, \quad i(t) = 55.55te^{-3.33t} \text{ A.}, \quad t \geq 0$$

sonuçları elde edilir.

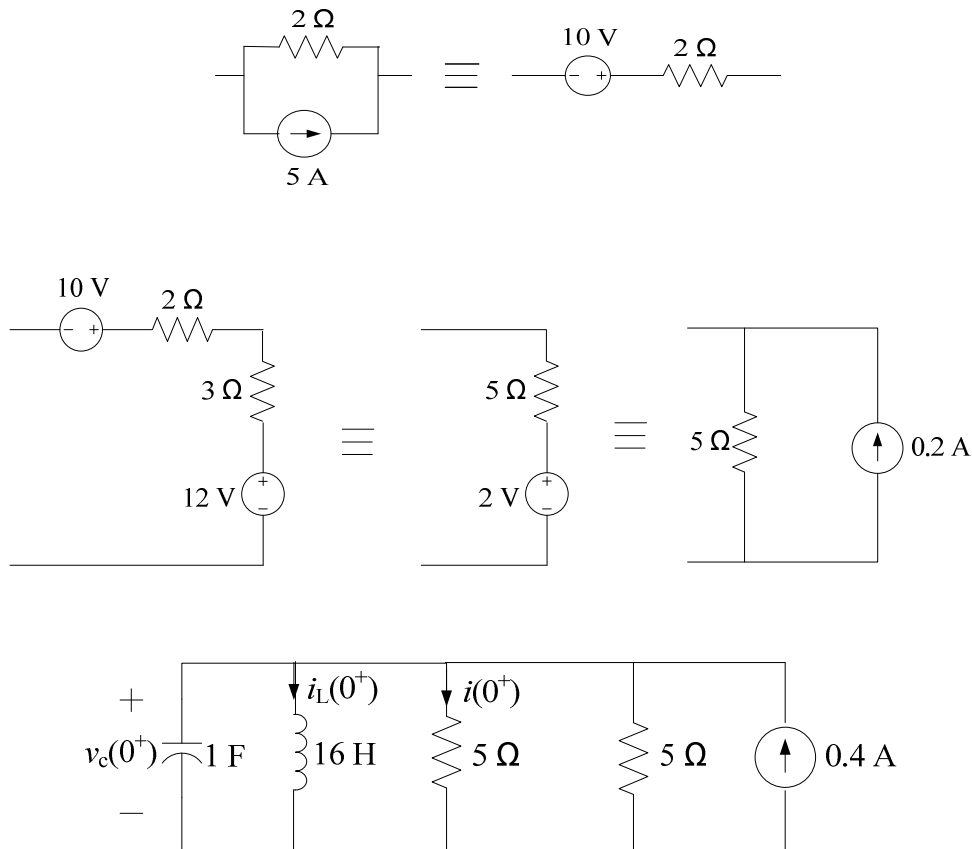
8.14. Şekilde verilen devrede anahtar uzun bir süredir açık konumda olup, $t = 0$ 'da kapanmaktadır. $t > 0$ için $i(t)$ akımını bulunuz.



$t < 0$ 'da kaynaklar devrede olmadığından, bobin akımı ve kapasitör geriliminin süreklilik koşullarını da kullanarak,

$$i_L(0^-) = i_L(0) = i_L(0^+) = 0 \quad \text{ve} \quad v_c(0^-) = v_c(0) = v_c(0^+) = 0$$

bulunur. $t = 0^+$ için aşağıda görüldüğü şekilde kaynak dönüşümleri uygulanarak, devre bir Paralel RLC devresine indirgenir:



KAY uygulanarak,

$$i_L(0^+) + \frac{v_c(0^+)}{5} + \frac{v_c(0^+)}{5} + C \frac{dv_c(0^+)}{dt} = 0; \quad \frac{dv_c(0^+)}{dt} = 0.4 \text{ V/s}$$

elde edilir. Paralel RLC devresi için

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2 \cdot (5//5) \cdot 1} = \frac{1}{2 \cdot 2.5} = \frac{1}{5} = 0.2 \text{ Np/s}, \quad w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{16}} = 0.25 \text{ rad/s}$$

ve $w_0 > \alpha$ olduğundan, cevap salınımlı sönüm biçimindedir.

$$v_c(t) = v_c(\infty) + e^{-\alpha t} (K_1 \cos w_d t + K_2 \sin w_d t).$$

$t \rightarrow \infty$ için bobin kısa devre olacağından, kapasitör gerilimi sıfırdır:

$$v_c(\infty) = 0.$$

Sönüm frekansı

$$w_d = \sqrt{w_0^2 - \alpha^2} = \sqrt{0.0625 - 0.04} = 0.15 \text{ rad/s} \text{ olacağından}$$

$$v_c(t) = e^{-0.2t} (K_1 \cos 0.15t + K_2 \sin 0.15t)$$

bulunur. Kapasitör gerilimi için başlangıç koşulları kullanıldığında:

$$v_c(0) = K_1 = 0, \quad \frac{dv_c(0^+)}{dt} = -0.2K_1 + 0.15K_2 = 0.4 \text{ ve } K_2 = 2.66$$

ve kapasitör gerilimi de

$$v_c(t) = 2.66e^{-0.2t} \sin 0.15t \text{ V.}, t \geq 0$$

elde edilir. Direnç üzerinden geçen akım, elemanlar paralel olduklarından

$$i(t) = \frac{v_c(t)}{5} = 0.533e^{-0.2t} \sin 0.15t \text{ A.}, t > 0 \text{ olacaktır.}$$

8.15. Problem 8.14 devresindeki 16 H'lik bobinin 36 H'lik bir bobinle değiştirilmesi durumunda, $t > 0$ için $i(t)$ akımını bulunuz.

Kapasitör ve bobin başlangıç değerleri değişmeyecek, ancak devrenin rezonans frekansı ve dolayısıyla da cevabın formu değişecektir.

$$w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{36}} = 0.166 \text{ rad/s}$$

ve $\alpha > w_0$ olduğundan, çözüm salınımsız sönüm formundadır. Devrenin doğal frekansları

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - w_0^2} = -0.2 + \sqrt{0.04 - 0.0277} = -0.0894 \text{ Np/s}$$

$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - w_0^2} = -0.2 - \sqrt{0.04 - 0.0277} = -0.31 \text{ Np/s}$$

olduğundan, kapasitör gerilimi

$$v_c(t) = v_c(\infty) + e^{-\alpha t} (K_1 \cos w_d t + K_2 \sin w_d t)$$

bulunur. $t \rightarrow \infty$ için bobin kısa devre olacağından, kapasitör gerilimi sıfırdır:

$$v_c(\infty) = 0.$$

Başlangıç koşulları uygulandığında

$$v_c(0) = K_1 + K_2 = 0 \quad \text{ve} \quad \frac{dv_c(0^+)}{dt} = -0.0894K_1 - 0.31K_2 = 2.66$$

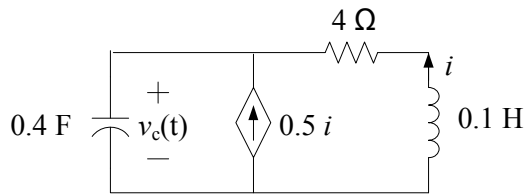
ve bu denklemlerin çözümü ile de $K_1 = 12.058$, $K_2 = -12.058$ ve kapasitör gerilimi

$$v_c(t) = 12.058(e^{-0.0894t} - e^{-0.31t}) \text{ V.}, t \geq 0$$

bulunur. Direnç üzerindeki, aranan akımın ifadesi de

$$i(t) = \frac{v_c(t)}{5} = 2.411(e^{-0.0894t} - e^{-0.31t}) \text{ A.}, t > 0 \text{ dır.}$$

8.16. Şekilde görülen devrede bobin üzerindeki akım $t = 0$ anında 4 A. ve kapasitör gerilimi de 8 V'dur. $t > 0$ için i akımının zamana bağlı ifadesini bulunuz.



Kapasitör gerilimi ve bobin akımının $t = 0^+$ 'daki değerleri süreklilik koşullarından,

$$v_c(0) = v_c(0^+) = 8 \text{ V} \quad \text{ve} \quad i(0) = i(0^+) = 4 \text{ A}$$

olarak bulunur. KAY kullanılarak,

$$C \frac{dv_c(t)}{dt} - 0.5i(t) - i(t) = 0; \quad C \frac{dv_c(t)}{dt} = 1.5i(t)$$

ve $t = 0^+$ için

$$C \frac{dv_c(0^+)}{dt} = 1.5i(0^+); \quad \frac{dv_c(0^+)}{dt} = 1.5 \frac{i(0^+)}{C} = 1.5 \frac{4}{0.4} = 15 \text{ V/s}$$

bulunur. Dış çevrimde KGY uygulandığında,

$$-v_c(t) - 4i(t) - 0.1 \frac{di(t)}{dt} = 0$$

elde edilir. KAY'ı uygulayarak bulduğumuz,

$$C \frac{dv_c(t)}{dt} = 1.5i(t);$$

eşitliğinden, akımın ve akımın türevinin değerini kapasitör gerilimi cinsinden aşağıdaki gibi elde etmek mümkündür.

$$i(t) = \frac{C}{1.5} \frac{dv_c(t)}{dt} = \frac{0.4}{1.5} \frac{dv_c(t)}{dt} \quad \text{ve} \quad \frac{di(t)}{dt} = \frac{0.4}{1.5} \frac{d^2v_c(t)}{dt^2}.$$

Akımın ve türevinin değerleri yukarıdaki diferansiyel denklemde kullanılarak,

$$-v_c(t) - 4 \cdot \frac{0.4}{1.5} \frac{dv_c(t)}{dt} - 0.1 \cdot \frac{0.4}{1.5} \frac{d^2v_c(t)}{dt^2} = 0$$

ve katsayılar düzenlenerek,

$$\frac{d^2v_c(t)}{dt^2} + 40 \frac{dv_c(t)}{dt} + 37.5v_c(t) = 0$$

ikinci derece diferansiyel denklemi elde edilir. Bu diferansiyel denkleme ait karakteristik eşitlik

$$s^2 + 40s + 37.5 = 0$$

ve karakteristik eşitliğin çözümündende

$$s_1 = -39.04, \quad s_2 = -0.96$$

bulunur. s_1 ve s_2 , verilen devrenin doğal frekanslarıdır. Doğal frekanslar reel ve birbirinden farklı olduğundan çözüm salınımsız sönüm formundadır:

$$v_c(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t}; \quad v_c(t) = K_1 e^{-39.04t} + K_2 e^{-0.96t}.$$

Kapasitör gerilimi için başlangıç değerleri kullanılarak,

$$v_c(0) = K_1 + K_2 = 8 \quad \text{ve} \quad \frac{dv_c(0^+)}{dt} = -39.04K_1 - 0.96K_2 = 15$$

ve bu eşiliklerin çözümünden de $K_1 = -0.587$, $K_2 = 8.587$ elde edilir. Böylece, kapasitör geriliminin ifadesi aşağıdaki gibi bulunur:

$$v_c(t) = -0.587e^{-39.04t} + 8.587e^{-0.96t} \text{ V.}, t \geq 0.$$

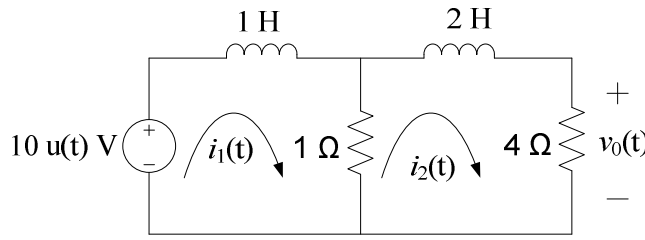
Yukarıda kapasitör gerilimi ve bobin akımı için elde edilen

$$C \frac{dv_c(t)}{dt} = 1.5i(t); \quad i(t) = 0.266 \frac{dv_c(t)}{dt}$$

eşitliğinde, kapasitör geriliminin türevi kullanılarak $i(t)$ akımı

$$i(t) = 6.11e^{-39.04t} - 2.198e^{-0.96t} \text{ A.}, t \geq 0 \text{ bulunur.}$$

8.17. Şekil.8.39’da verilen devrede, $t > 0$ için $v_0(t)$ gerilimini bulunuz.



$t < 0$ için kaynak pasif olduğundan her iki bobin üzerindeki akım sıfırdır. Bobin akımının süreklilik koşulundan,

$$i_1(0^-) = i_1(0) = i_1(0^+) = 0 \text{ A.}, \quad i_2(0^-) = i_2(0) = i_2(0^+) = 0 \text{ A.}$$

bulunur. $t \geq 0$ için, göz akımları metodu ile

$$\frac{di_1(t)}{dt} + (i_1(t) - i_2(t)) = 10 \quad (1) \quad \text{ve} \quad 2 \frac{di_2(t)}{dt} + 5i_2(t) - i_1(t) = 0 \quad (2)$$

diferansiyel denklemleri elde edilir. İkinci denklemden elde edilen

$$i_1(t) = 2 \frac{di_2(t)}{dt} + 5i_2(t)$$

ifadesi ve türevi

$$\frac{di_1(t)}{dt} = 2 \frac{d^2 i_2(t)}{dt^2} + 5 \frac{di_2(t)}{dt}$$

birinci denklemde yerlerine yazılırsa

$$2 \frac{d^2 i_2(t)}{dt^2} + 5 \frac{di_2(t)}{dt} + 2 \frac{di_2(t)}{dt} + 5i_2(t) - i_2(t) = 10; \quad 2 \frac{d^2 i_2(t)}{dt^2} + 7 \frac{di_2(t)}{dt} + 4i_2(t) = 10$$

veya

$$\frac{d^2 i_2(t)}{dt^2} + 3.5 \frac{di_2(t)}{dt} + 2i_2(t) = 10 \quad (3)$$

elde edilir. Bu diferansiyel denklemin çözümü ikinci göz akımının ifadesini verecektir. İkinci denklemi $t = 0^+$ için yazdığımızda,

$$2 \frac{di_2(0^+)}{dt} + 5i_2(0^+) - i_1(0^+) = 0; \quad \frac{di_2(0^+)}{dt} = \frac{1}{2}(-5i_2(0^+) + i_1(0^+)) \Rightarrow \frac{di_2(0^+)}{dt} = 0$$

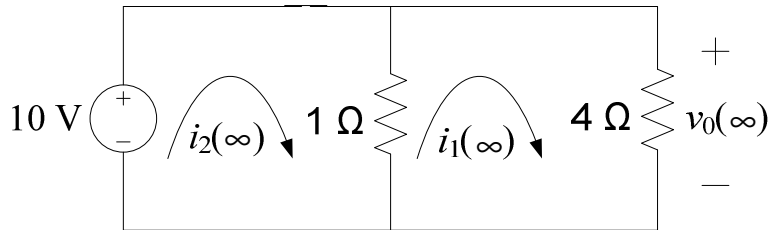
bulunur. Üçüncü denklemin homojen çözümü, devrenin doğal cevabını oluşturur:

$$\frac{d^2 i_2(t)}{dt^2} + 3.5 \frac{di_2(t)}{dt} + 2i_2(t) = 0; \quad s^2 + 3.5s + 2 = 0 \Rightarrow s_1 = -2.78 \text{ Np/s}, \quad s_2 = -0.72 \text{ Np/s}$$

ve

$$i_2(t) = i_2(\infty) + K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t}; \quad i_2(t) = i_2(\infty) + K_1 e^{-2.78t} + K_2 e^{-0.72t}.$$

Burada $i_2(\infty)$ devrenin zorlama cevabı olup, $t \rightarrow \infty$ için her iki bobinde kısa devre davranacağından bu an için aşağıda verilen eşdeğer devreden bulunur:



$$i_2(\infty) = \frac{10}{1//4} = \frac{10}{4/5} = 12.5 \text{ A.}$$

Böylece belirsiz katsayılarla birlikte akımın ifadesi

$$i_2(t) = 12.5 + K_1 e^{-2.78t} + K_2 e^{-0.72t}$$

olarak bulunur. İkinci göz akımı için başlangıç değerleri kullanıldığında aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$i_2(0) = 12.5 + K_1 + K_2 = 0 \quad \text{ve} \quad \frac{di_2(0^+)}{dt} = -2.78K_1 - 0.72K_2 = 0.$$

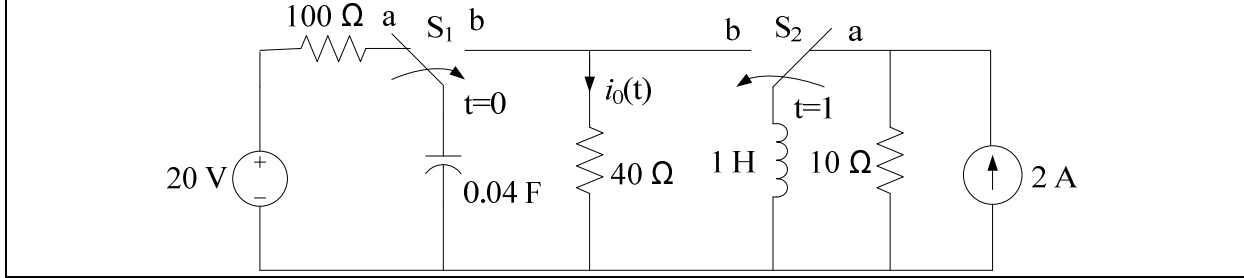
Bu eşitliklerin çözümüyle, $K_1 = 4.37$ ve $K_2 = -16.87$, ve akım ifadesi de

$$i_2(t) = 12.5 + 4.37e^{-2.78t} - 16.87e^{-0.72t} \text{ A}, \quad t \geq 0 \quad \text{bulunur.}$$

Aranan gerilim de, Ohm yasası ile aşağıdaki gibi elde edilir:

$$v_0(t) = 4i_2(t) = 50 + 17.48e^{-2.78t} - 67.48e^{-0.72t} \text{ V}, \quad t > 0.$$

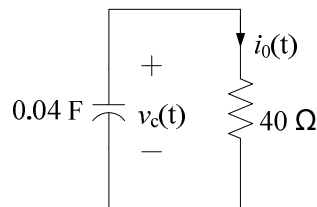
8.18. Şekilde verilen devrede, S_1 ve S_2 anahtarları uzun süredir ‘a’ konumlarındadır. S_1 anahtarı $t = 0$ ’da ‘b’ konumuna geçerken, S_2 anahtarı bundan 1 saniye sonra ‘b’ konumuna geçmektedir. $t > 0$ için $i_0(t)$ akımının ifadesini bulunuz.



$t = 0^-$ ’da kapasitör 20 V’luk gerilime şarj olmuş ve açık devredir. Süreklilik koşulu ile,

$$v_c(0^-) = v_c(0) = v_c(0^+) = 20 \text{ V}$$

olur. $0 \leq t \leq 1$ için S_2 anahtarı ‘a’ konumunda olduğundan, aranan akımı içeren devre, bir RC devrenin doğal cevabı formundadır. Bu zaman aralığı için aşağıda verilen RC devreyi ele alalım:



Bu devrede S_2 anahtarının hiç kapanmayacağı düşüncesiyle bulunacak cevap $0 \leq t \leq 1$ geçerli cevap olacaktır. Bu devre için kapasitör geriliminin ifadesi:

$$v_c(t) = v_c(0)e^{-\frac{t}{\tau}}; \quad \tau = RC = 40 \cdot 0.04 = 1.6 \text{ s}$$

$$v_c(t) = 20e^{-\frac{t}{1.6}} = 20e^{-0.625t} \text{ V}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

bulunur. $t = 1^-$ 'da kapasitör gerilimi yukarıdaki ifadeden

$$v_c(1^-) = 20e^{-0.625t} = 20e^{-0.625} = 10.7 \text{ V}$$

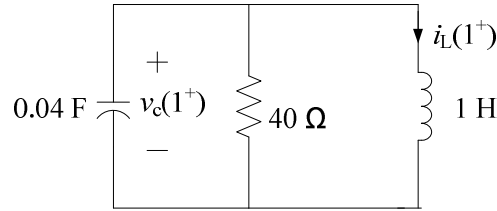
ve süreklilik koşulundan da,

$$v_c(1^-) = v_c(1) = v_c(1^+) = 10.7 \text{ V}$$

elde edilir. Yine $t = 1^-$ anında bobin uzun süredir dc akım kaynağına maruz kaldığından kısa devre davranmaktadır. Bobin kısa devre akımı için, süreklilik koşulu ile birlikte,

$$i_L(1^-) = i_L(1) = i_L(1^+) = 2 \text{ A}$$

bulunur. O halde $t \geq 1$ için, üzerindeki başlangıç akımı 2 A olan bir bobin, başlangıç gerilimi 10.7 V olan bir kapasitör ve bir dirençten oluşan paralel RLC devresinin doğal cevabı bulunmalıdır. Bu devrenin $t = 1^+$ için eşdeğeri aşağıda görülmektedir:



KAY uygulanarak,

$$i_L(1^+) + \frac{v_c(1^+)}{40} + 0.04 \frac{dv_c(1^+)}{dt} = 0;$$

$$\frac{dv_c(1^+)}{dt} = \frac{1}{0.04} \left(-i_L(1^+) - \frac{v_c(1^+)}{40} \right) = \frac{1}{0.04} \left(-2 - \frac{10.7}{40} \right) = -56.6857 \text{ V/s}$$

bulunur. Paralel devre için

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2 \cdot 40 \cdot 0.04} = 0.3125 \text{ Np/s}, \quad w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0.04}} = 5 \text{ rad/s}$$

ve $w_0 > \alpha$ olduğundan, $0 \leq t \leq 1$ için cevap

$$v_c(t) = e^{-\alpha(t-1)} (K_1 \cos w_d(t-1) + K_2 \sin w_d(t-1));$$

$$w_d = \sqrt{w_0^2 - \alpha^2} = \sqrt{25 - 0.09765} = 4.99 \text{ rad/s}$$

ve

$$v_c(t) = e^{-0.3125(t-1)} (K_1 \cos 4.99(t-1) + K_2 \sin 4.99(t-1))$$

elde edilir. Kapasitör gerilimi başlangıç değerleri kullanılarak

$$v_c(1) = K_1 = 10.7, \quad \frac{dv_c(1^+)}{dt} = -0.3125K_1 + 4.99K_2 = -56.6857$$

ve bu eşitliklerin çözümü ile de: $K_1 = 10.7$, $K_2 = -10.69$ bulunur. Böylece, kapasitör geriliminin $t \geq 1$ için ifadesi,

$$v_c(t) = e^{-0.3125(t-1)} (10.7 \cos 4.99(t-1) - 10.69 \sin 4.99(t-1)) \text{ V. bulunur.}$$

40 Ω 'luk direnç üzerindeki akım ise

$$i_0(t) = \frac{v_c(t)}{40}$$

ifadesinden:

$$i_0(t) = \begin{cases} 0.5e^{-0.625t} \text{ A}, & 0 < t < 1 \\ e^{-0.3125(t-1)} (0.2675 \cos 4.99(t-1) - 0.2672 \sin 4.99(t-1)) \text{ A}, & t > 1 \end{cases}$$

bulunur. Direnç üzerindeki akımın zamana göre değişimi aşağıda verilmiştir.

