Pemrograman Nonlinear
KKT condition

Selesaikan dan kemudian gambarkan soal berikut ini:

Minimize	$f(x,y) = x^2 + y^2 - 14x - 6y$
Dengan kendala	$g_1(x,y) = x + y - 2 \leq 0$;
	$g_2(x,y) = x + 2y - 3 \leq 0$

Penyelesaian:

Minimumkan $\boldsymbol{f(x,y) = x^2 + y^2 - 14x - 6y}$

Dengan kendala :
$\boldsymbol{g_1(x,y) = x + y - 2 \leq 0}$;
$\boldsymbol{g_2(x,y) = x + 2y - 3 \leq 0}$

Penyelesaian:

Ada beberapa penyelesaian diantaranya:

a. Asumsikan $g_1$dan g_2 merupakan kendala aktif (kedua-duanya)
b. Asumsikan g_1 kendala aktif dan g_2 kendala tidak aktif
c. Asumsikan g_1 kendala tidak aktif dan g_2 kendala aktif
d. Asumsikan $g_1$dan g_2 keduanya kendala tidak aktif

Asumsikan $\boldsymbol{g_1}$dan $\boldsymbol{g_2}$ merupakan kendala aktif (kedua-duanya)
Didefinisikan

$$L(x,y,\lambda_1,\lambda_2) = x^2 + y^2 - 14x - 6y + \lambda_1(x + y - 2) + \lambda_2(x + 2y - 3)$$

Mencari nilai L_x, L_y, L_{λ_1}, dan L_{λ_2}disamadengankan nol

(i) $L_x = 2x - 14 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0$
(ii) $L_y = 2y - 6 + \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0$
(iii) $L_{\lambda_1} = x + y - 2 = 0$
(iv) $L_{\lambda_2} = x + 2y - 3 = 0$

Dapat ditulis ke bentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_{\lambda_1} \\ L_{\lambda_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 6 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(i) Mencari nilai x

determinan dari $\begin{bmatrix} 14 & 0 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 14 & 0 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

$$x = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 14 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} - 0 + 1 \begin{vmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$x = 0 + 1(8-6) - 1(4-3) = 2 - 1 = 1$$

(ii) Mencari nilai y

$$\text{determinan dari} \begin{bmatrix} 2 & 14 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 14 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$y = \begin{vmatrix} 2 & 14 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} - 14 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$y = 2(0) - 14(0) + (6-4) - (3-2) = 2 - 1 = 1$$

(iii) Mencari nilai $\boldsymbol{\lambda_1}$

$$\text{determinan dari} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 14 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 14 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\lambda_1 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 14 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} + 14 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\boldsymbol{\lambda_1} = 2(6-8) + 14(4-2) - 1(4 = 12 - 6 - 6) = 2(-2) + 28 - 4 = -4 + 28 - 4 = 20$$

(iv) Mencari nilai $\boldsymbol{\lambda_2}$

$$\text{determinan dari} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 14 \\ 0 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 14 \\ 0 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\lambda_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 14 \\ 0 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} - 14 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\lambda_2 = 2(4-3) + (4 + 12 - 6 - 6) - 14(2-1) = 2 + 4 - 14 = -8$$

Sehingga diperoleh

$x = 1; y = 1, \lambda_1 = 20\ dan\ \lambda_2 = -8$

Dengan $f(x, y) = f(1,1) = -18;$

$g_1(x, y) = g_1(1,1) = 0$

$g_2(x, y) = g_2(1,1) = 0$

Asumsikan $g_1$dan g_2 keduanya kendala tidak aktif
Didefinisikan

$$L(x, y) = x^2 + y^2 - 14x - 6y$$

Mencari nilai L_x, L_y, disamadengankan nol

I. $L_x = 2x - 14 = 0$ diperoleh $x = 7$
II. $L_y = 2y - 6 = 0$ diperoleh $y = 3$

$x = 7; y = 3, \lambda_1 = 0\ dan\ \lambda_2 = 0$

Dengan $f(x, y) = f(7,3) = -58;$

$g_1(x, y) = g_1(7,3) = 8$

$g_2(x, y) = g_2(7,3) = 10$

Tidak memenuhi karena menurut syarat Kuhn-Tucker $\lambda_j \geq 0$ untuk $j = 1,2,3, \dots$ jadi λ haruslah tidak boleh bernilai negatif

Asumsikan g_1 kendala aktif dan g_2 kendala tidak aktif

Didefinisikan

$$L(x, y, \lambda_1) = x^2 + y^2 - 14x - 6y + \lambda_1(x + y - 2)$$

Mencari nilai L_x, L_y, L_{λ_1}, dan L_{λ_2}disamadengankan nol

(i) $L_x = 2x - 14 + \lambda_1 = 0$
(ii) $L_y = 2y - 6 + \lambda_1 = 0$
(iii) $L_{\lambda_1} = x + y - 2 = 0$

Dapat ditulis ke bentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_{\lambda_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Dengan metode eliminasi dan substitusi diperoleh $x = 3, y = -1\ dan\ \lambda_1 = 8$

Dengan demikian, $f(x, y) = f(3, -1) = -26;$

$g_1(x,y) = g_1(3,-1) = 0$

Asumsikan g_2 kendala aktif dan g_1 kendala tidak aktif

Didefinisikan

$$L(x,y,\lambda_2) = x^2 + y^2 - 14x - 6y + \lambda_2(x + 2y - 3)$$

Mencari nilai L_x, L_y, L_{λ_1}, dan L_{λ_2}disamadengankan nol

(i) $L_x = 2x - 14 + \lambda_2 = 0$
(ii) $L_y = 2y - 6 + 2\lambda_2 = 0$
(iii) $L_{\lambda_1} = x + 2y - 3 = 0$

Dapat ditulis ke bentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_{\lambda_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Dengan metode eliminasi dan substitusi diperoleh $x = 5, y = -1\ dan\ \lambda_1 = 4$

Dengan demikian, $f(x,y) = f(5,-1) = -38$;

$g_2(x,y) = g_1(5,-1) = 0$

Dapat disimpulkan dari 4 penyelesaian di atas bahwa nilai minimum adalah ketika $\boldsymbol{g_1}$ **merupakan kendala aktif sedangkan g_2 tidak**
diperoleh $x = 3, y = -1\ dan\ \lambda_1 = 8$

Dengan demikian, $f(x,y) = f(3,-1) = -26$;

$g_1(x,y) = g_1(3,-1) = 0$

Atau

Soal tersebut dapat dikerjakan dengan menggunakan prinsip/syarat **Kuhn-Tucker** yaitu:

Didefinisikan

$$L(x,y,\lambda_1,\lambda_2) = x^2 + y^2 - 14x - 6y + \lambda_1(x + y - 2) + \lambda_2(x + 2y - 3)$$

1. $\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} = 0$

   Dengan j=1,2,..,m (sebagai banyak kendala) dan i=1,2,3,...,n (sebagai banyak variabel bebas)

   Sehingga

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_i} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_i} = 0$$

   Diperoleh

i. $2x - 14 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0$
ii. $2y - 6 + \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0$
Pers (i) dikurangi pers (ii) diperoleh $\lambda_2 = 2x - 2y - 8$, dan
$\lambda_1 = -\lambda_2 + 14 - 2x = 22 - 4x + 2y$
Disubstitusikan ke syarat yang kedua

2. $\lambda_j . g_j = 0$, diperoleh:
$\lambda_1(x + y - 2) = 0$
$\lambda_2(x + 2y - 3) = 0$
Menjadi:
$(22 - 4x + 2y)(x + y - 2) = 0$
$(2x - 2y - 8)(x + 2y - 3) = 0$
3. $g_j \leq 0, j = 1,2, \ldots$
4. $\lambda_j \geq 0, j = 1,2, \ldots$

Uji Titik:

$$(22 - 4x + 2y) = 0, (2x - 2y - 8) = 0$$

Dieliminasi dan didapat $x = 7\ dan\ y = 3$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$ (M)
Uji kendala :

$g_1(7,3) = 7 + 3 - 2 > 0\ (TM)$

$g_2(7,3) = 7 + 6 - 3 > 0\ (TM)$

$$(22 - 4x + 2y) = 0, (x + 2y - 3) = 0$$

Dieliminasi dan didapat $x = 5\ dan\ y = -1$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 4$ (M)
Uji kendala :

$g_1(5,-1) = 5 - 1 - 2 > 0\ (TM)$

$g_2(5,-1) = 5 - 2 - 3 = 0\ (M)$

$$(x + y - 2) = 0, (x + 2y - 3) = 0$$

Dieliminasi dan didapat $x = 1\ dan\ y = 1$, $\lambda_1 = 20$, $\lambda_2 = -8$ (TM)
Uji kendala :

$g_1(1,1) = 1 + 1 - 2 = 0\ (M)$

$g_2(1,1) = 1 + 2 - 3 = 0\ (M)$

$$(x + y - 2) = 0, (2x - 2y - 8) = 0$$

Dieliminasi dan didapat $x = 3\ dan\ y = -1$, $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = 0$ (M)
Uji kendala :

$g_1(3,-1) = 3 - 1 - 2 = 0\ (M)$

$g_2(3,-1) = 3 - 2 - 3 = -2\ (M)$

$f(3,-1) = -26$ (minimal/optimum) karena memenuhi syarat **Kuhn Thucker**

$Sketsa\ Grafik$