

# Исследование модификаций метода VIKOR: интервальная и нечеткая версии

Ванчугов С.М., Гамов И.А.

СПбПУ, ИКНТ ВШ ПИ

2025

Выполнили студенты группы 5140903/40401:  
Ванчугов С. М, Гамов И. А.

Руководитель:  
Старший преподаватель В. А. Пархоменко

## Актуальность и цель

- В задачах многокритериального принятия решений часто требования конфликтуют, нужна компромиссная стратегия.
- Классический VIKOR выдаёт компромиссное ранжирование, но требует точных числовых оценок.
- Цель: описать VIKOR, интервальную и нечеткую модификации, показать реализацию и иллюстративный пример.

# Классический VIKOR – формула и логика

Даны альтернативы  $A = \{A_1, \dots, A_m\}$ , критерии  $C = \{c_1, \dots, c_n\}$ , оценки  $f_{ij}$ , веса  $w_j$ ,  $\sum_j w_j = 1$ .

Идеальные / надирные:

$$\text{выгодный: } f_j^* = \max_i f_{ij}, \quad f_j^- = \min_i f_{ij},$$

$$\text{затратный: } f_j^* = \min_i f_{ij}, \quad f_j^- = \max_i f_{ij}.$$

Меры:

$$S_i = \sum_{j=1}^n w_j \frac{f_j^* - f_{ij}}{f_j^* - f_j^-}, \quad R_i = \max_j \left\{ w_j \frac{f_j^* - f_{ij}}{f_j^* - f_j^-} \right\}.$$

Компромисс:

$$Q_i = \nu \frac{S_i - S^*}{S^- - S^*} + (1 - \nu) \frac{R_i - R^*}{R^- - R^*}.$$

# Области применимости и ограничения

- Подходит для инженерии, экологии, управления проектами, инвестиций.
- Ограничение: требует точечных оценок; чувствителен к неопределённости и заданию весов.
- Решение: расширения – интервальная и нечеткая (fuzzy) версии.

# Интервальная модификация – идея

- Оценки задаются интервалами  $f_{ij} = [\underline{f}_{ij}, \bar{f}_{ij}]$ .
- Идеальные/надирные точки – интервалы, построенные по компонентам (min/max нижних/верхних границ).
- Для каждого критерия формируют интервальный нормализованный разрыв  $D_{ij} = [D_{ij}^{\text{low}}, D_{ij}^{\text{high}}]$  (пессимистичный / оптимистичный сценарии).
- Получают  $S_i = [S_i^{\text{low}}, S_i^{\text{high}}]$ ,  $R_i = [R_i^{\text{low}}, R_i^{\text{high}}]$ , и интервальные  $Q_i$ .
- Ранжирование: часто по центрам интервалов или специальным правилам сравнения интервалов.

# Интервальная арифметика – принцип вычисления интервалов

- Интервал задаётся как  $x = [\underline{x}, \bar{x}]$  – множество значений между границами.
- Базовые операции:

$$[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d],$$

$$[a, b] - [c, d] = [a - d, b - c],$$

$$[a, b] \times [c, d] = [\min S, \max S], \quad S = \{ac, ad, bc, bd\}.$$

- Деление:  $[a, b]/[c, d]$  определена, если  $0 \notin [c, d]$ ; вычисляется как умножение на обратный интервал.

# Формулы по интервальной модификации

Для выгодного критерия:

$$f_j^* = [\max_i \underline{f}_{ij}, \max_i \bar{f}_{ij}], \quad f_j^- = [\min_i \underline{f}_{ij}, \min_i \bar{f}_{ij}].$$

Нормализация:

$$D_{ij} = \left[ \frac{f_j^{*(\text{low})} - \bar{f}_{ij}}{f_j^{*(\text{low})} - f_j^{-}(\text{high})}, \frac{f_j^{*(\text{high})} - \underline{f}_{ij}}{f_j^{*(\text{high})} - f_j^{-}(\text{low})} \right].$$

Агрегация:

$$S_i = [\sum_j w_j D_{ij}^{\text{low}}, \sum_j w_j D_{ij}^{\text{high}}], \quad R_i = [\max_j w_j D_{ij}^{\text{low}}, \max_j w_j D_{ij}^{\text{high}}].$$

# Иллюстративный пример (интервальный)

Данные: 4 альтернативы, 3 критерия, матрица интервалов.

Результат (сокращённо):

- Интервальные  $Q_i$  (пример):  
[0.000, 0.857], [0.243, 0.571], [1.000, 0.794], [0.000, 0.479].
- Ранжирование по центрам  $Q$ : A4 → A2 → A1 → A3.
- Интервальная форма показывает возможные пересечения и частичные порядки.

## Ключевые этапы реализации:

- ① Вход: матрица  $(m, n, 2)$  с парами  $[\underline{f}_{ij}, \bar{f}_{ij}]$ .
- ② Вычисление  $f_j^*$ ,  $f_j^-$  по нижним/верхним границам.
- ③ Для каждой пары вычисление  $D_{ij}^{\text{low}}$  и  $D_{ij}^{\text{high}}$  по формулам с соответствующими концами интервалов.
- ④ Агрегация – получаем интервальные  $S_i, R_i$ ; формируем интервальные  $Q_i$ .
- ⑤ Ранжирование – по центру интервала  $Q^{\text{center}}$  или правилам сравнения интервалов; применяем условия  $C_1, C_2$  – acceptable advantage / stability.

## Результат работы алгоритма:

- Интервальная версия делает неопределённость видимой –  $Q_i$  как интервалы.
- Частые пересечения интервалов → частичные порядки, требуется правило сравнения.
- Быстрая аппроксимация: ранжирование по центрам интервалов (если допустимо).
- Минусы: более сложная арифметика, возможная избыточная ширина интервалов.

## Нечеткая модификация – идея

- Оценки и/или веса задаются ТФН (треугольные нечеткие числа)  
 $\tilde{x} = (x^L, x^M, x^U)$ .
- Операции (максимум, сумма, умножение) выполняются покомпонентно.
- Получаем нечеткие  $\tilde{S}_i, \tilde{R}_i, \tilde{Q}_i$ ; затем дефаззификация в скаляры (обычно центроид  $(L + M + U)/3$ ).
- Особенno удобен при лингвистических оценках экспертов.

Для треугольных чисел выделяют следующие математические операции:

- Сумма треугольных чисел:

$$\sum_{i=1}^n \tilde{N}_i = (\sum_{i=1}^n l_i, \sum_{i=1}^n m_i, \sum_{i=1}^n h_i).$$

- Сумма треугольного числа и скаляра:

$$\tilde{N} \oplus K = (l + K, m + K, h + K).$$

- Вычитание:  $\tilde{N}_1 \ominus \tilde{N}_2 = (l_1 - r_2, m_1 - m_2, r_1 - l_2)$ .

- Вычитание скаляра:  $\tilde{N} - K = (l - K, m - K, h - K)$ .

- Умножение на скаляр:  $K \times \tilde{N} = (K \times l, K \times m, K \times h)$ , для  $K \geq 0$

- Умножение:  $\tilde{N}_1 \otimes \tilde{N}_2 = (l_1 \times l_2, m_1 \times m_2, h_1 \times h_2)$ .

- Деление на скаляр:  $\frac{\tilde{N}}{K} = (\frac{l}{K}, \frac{m}{K}, \frac{h}{K})$ .

- Оператор MAX:  $\max_i \tilde{N}_i = (\max_i l_i, \max_i m_i, \max_i h_i)$ .

- Оператор MIN:  $\min_i \tilde{N}_i = (\min_i l_i, \min_i m_i, \min_i h_i)$ .

# Формулы по неявной модификации

Идеальные/надирные TFN (выгодный):

$$\tilde{f}_j^* = (\max_i f_{ij}^L, \max_i f_{ij}^M, \max_i f_{ij}^U).$$

Нормализация (по Opricovic, пример):

$$\tilde{d}_{ij} = \left( \frac{f_j^{*L} - f_{ij}^U}{f_j^{*U} - f_j^{-L}}, \frac{f_j^{*M} - f_{ij}^M}{f_j^{*M} - f_j^{-M}}, \frac{f_j^{*U} - f_{ij}^L}{f_j^{*L} - f_j^{-U}} \right).$$

Агрегация:

$$\tilde{S}_i = \sum_j \tilde{w}_j \otimes \tilde{d}_{ij}, \quad \tilde{R}_i = \max_j (\tilde{w}_j \otimes \tilde{d}_{ij}).$$

Дефазификация:  $S_i = \text{Defuzz}(\tilde{S}_i)$ , аналогично для  $R_i$  и  $Q_i$ .

# Когда применять какую модификацию

- **Интервальная** – данные заданы диапазонами (measurement error, диапазон оценок).
- **Fuzzy** – экспертные лингвистические оценки, неоднозначные предпочтения, когда важна модель принадлежности.
- Практика: для быстрой оценки можно использовать центры интервалов / модальные значения TFN; для критичных решений – полные методы с дефазификацией и анализом пересечений.

# Чувствительность и trade-off

- Параметр  $v$  управляет компромиссом между  $S$  и  $R$ ; важно показать чувствительность ранжирования по  $v$ .
- Уступка (trade-off): пересчёт весов через тр-коэффициенты позволяет моделировать альтернативные приоритеты критериев.
- Рекомендация: включить график чувствительности  $Q$  vs  $v$  и анализ пересечений интервалов / рангов TFN в приложении.

# Сравнение версий и рекомендации

- Интервальная и fuzzy повышают устойчивость ранжирования в условиях неопределённости.
- Выбор метода зависит от природы неопределённости: интервалы vs лингвистические оценки.
- Практически: при ограниченных ресурсах – аппроксимация центрами; при ответственном принятии решений – использовать полные версии и анализ чувствительности.

# Выводы и дальнейшие шаги

- Описаны классический VIKOR, интервальная и нечеткая модификации; показана их реализация и пример.
- Интервальная версия даёт интервальные  $Q$  – наглядно демонстрирует неопределённость; fuzzy – удобна для лингвистических оценок.
- Дальше: расширить секцию сравнений (метрики устойчивости, APFD-подходы), дополнить графиками чувствительности и кодом в приложении.

# Список источников |

-  Sayadi M. K., Heydari M., Shahanaghi K. Extension of VIKOR method for decision making problem with interval numbers // Applied Mathematical Modelling. 2009. Vol.33, No.5. P.2257–2262. DOI:10.1016/j.apm.2008.06.002.
-  Chatterjee P., Chakraborty S. A comparative analysis of VIKOR method and its variants // Decision Science Letters. 2016. Vol.5, No.4. P.469–486. DOI:10.5267/j.dsl.2016.5.004.
-  Liu P., Qin X. An Extended VIKOR Method for Decision Making Problem with Interval-Valued Linguistic Intuitionistic Fuzzy Numbers Based on Entropy // Informatica. 2017. Vol.28, No.4. P.665–685. DOI:10.15388/Informatica.2017.151.

## Список источников II

-  Wan S.-P. The extended VIKOR method for multi-attribute group decision making with triangular intuitionistic fuzzy numbers // Knowledge-Based Systems. 2013. Vol.52. P.65–77.  
DOI:10.1016/j.knosys.2013.06.019.
-  Opricovic S. Fuzzy VIKOR with an application to water resources planning // Expert Systems with Applications. 2011. Vol.38, No.10. P.12983–12990. DOI:10.1016/j.eswa.2011.04.097.