Исследование модификаций метода VIKOR: интервальная и нечеткая версии

Ванчугов С.М., Гамов И.А.

СПбПУ, ИКНТ ВШ ПИ

2025

Выполнили студенты группы 5140903/40401:
Ванчугов С. М, Гамов И. А.

Руководитель:
Старший преподаватель В. А. Пархоменко

Актуальность и цель

- В задачах многокритериального принятия решений часто требования конфликтуют, нужна компромиссная стратегия.
- Классический VIKOR выдаёт компромиссное ранжирование, но требует точных числовых оценок.
- Цель: описать VIKOR, интервальную и нечеткую модификации, показать реализацию и иллюстративный пример.

Классический VIKOR – формула и логика

Даны альтернативы $A = \{A_1, \dots, A_m\}$, критерии $C = \{c_1, \dots, c_n\}$, оценки f_{ij}, веса w_j, $\sum_j w_j = 1$.
Идеальные / надирные:

$$\text{выгодный: } f_j^* = \max_i f_{ij}, \quad f_j^- = \min_i f_{ij},$$
$$\text{затратный: } f_j^* = \min_i f_{ij}, \quad f_j^- = \max_i f_{ij}.$$

Меры:

$$S_i = \sum_{j=1}^{n} w_j \frac{f_j^* - f_{ij}}{f_j^* - f_j^-}, \qquad R_i = \max_j \left\{ w_j \frac{f_j^* - f_{ij}}{f_j^* - f_j^-} \right\}.$$

Компромисс:

$$Q_i = v \frac{S_i - S^*}{S^- - S^*} + (1 - v) \frac{R_i - R^*}{R^- - R^*}.$$

Классический VIKOR – Проверка компромиссного решения:

Параметр компромисса v:

Параметр $v \in [0,1]$ определяет баланс между стратегией *максимального группового выигрыша* (S_i) и *минимизации индивидуального риска* (R_i).

$$v \to 1 \;\Rightarrow\; (S), \qquad v \to 0 \;\Rightarrow\; (R).$$

Условие C1 (Acceptable Advantage):

$$Q(A^{(2)}) - Q(A^{(1)}) \geq \frac{1}{m-1},$$

где $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$ — альтернативы с первым и вторым местом по Q.

Условие C2 (Acceptable Stability):

$$A^{(1)} = \arg\min_i S_i \quad \text{или} \quad A^{(1)} = \arg\min_i R_i.$$

Области применимости и ограничения

- Подходит для инженерии, экологии, управления проектами, инвестиций.
- Ограничение: требует точечных оценок; чувствителен к неопределённости и заданию весов.
- Решение: расширения – интервальная и нечеткая (fuzzy) версии.

Суть интервальной модификации

- Оценки задаются интервалами $f_{ij} = [\underline{f}_{ij}, \overline{f}_{ij}]$.
- Идеальные/надирные точки – интервалы, построенные по компонентам (min/max нижних/верхних границ).
- Для каждого критерия формируют интервальный нормализованный разрыв $D_{ij} = [D_{ij}^{\text{low}}, D_{ij}^{\text{high}}]$ (пессимистичный / оптимистичный сценарии).
- Получают $S_i = [S_i^{\text{low}}, S_i^{\text{high}}]$, $R_i = [R_i^{\text{low}}, R_i^{\text{high}}]$, и интервальные Q_i.
- Ранжирование: часто по центрам интервалов или специальным правилам сравнения интервалов.

Интервальная версия VIKOR предложена в работе [1, 2].

Интервальная арифметика

- Интервал задаётся как $x = [\underline{x}, \overline{x}]$ – множество значений между границами.
- Базовые операции:

$$[a,b] + [c,d] = [a+c,\ b+d],$$

$$[a,b] - [c,d] = [a-d,\ b-c],$$

$$[a,b] \times [c,d] = [\min S,\ \max S], \quad S = \{ac, ad, bc, bd\}.$$

- Деление: $[a,b]/[c,d]$ определена, если $0 \notin [c,d]$; вычисляется как умножение на обратный интервал.

Интервальная арифметика используется в рамках интервального VIKOR по [1].

Формулы по интервальной модификации

Для выгодного критерия:

$$f_j^* = \left[\max_i \underline{f}_{ij},\ \max_i \overline{f}_{ij}\right], \quad f_j^- = \left[\min_i \underline{f}_{ij},\ \min_i \overline{f}_{ij}\right].$$

Нормализация:

$$D_{ij} = \left[\frac{f_j^{*(\text{low})} - \overline{f}_{ij}}{f_j^{*(\text{low})} - f_j^{-(\text{high})}},\ \frac{f_j^{*(\text{high})} - \underline{f}_{ij}}{f_j^{*(\text{high})} - f_j^{-(\text{low})}}\right].$$

Агрегация:

$$S_i = [\sum_j w_j D_{ij}^{\text{low}},\ \sum_j w_j D_{ij}^{\text{high}}], \quad R_i = [\max_j w_j D_{ij}^{\text{low}},\ \max_j w_j D_{ij}^{\text{high}}].$$

Формулы нормализации и агрегации соответствуют интервальному VIKOR [1, 2].

Иллюстративный пример: Исходные данные

На этом слайде показаны исходные данные, взятые из источника [1]
Матрица альтернатив (интервальные значения):

Альтернатива	C_1	C_2
A_1	$[0.75, 1.24]$	$[2784, 3192]$
A_2	$[1.83, 2.11]$	$[3671, 3857]$
A_3	$[4.90, 5.73]$	$[4409, 4681]$

Веса критериев: $w = [0.5, 0.5]$
Типы критериев: C_1 — затраты (cost), C_2 — выгоды (benefit)
Параметр v: 0.5

Шаг 1: Интервальные идеал и надир

Идеальное (f*) и надирное (f-) значения:

	f^*	f^-
C_1	$[0.75, 1.24]$	$[4.90, 5.73]$
C_2	$[4409, 4681]$	$[2784, 3192]$

Шаг 2: Интервальные нормализованные разрывы D_{ij}

Альтернатива A1:

$$D = \{[0.098, 0.000], [1.000, 1.000]\}$$

Альтернатива A2:

$$D = \{[0.273, 0.161], [0.454, 0.532]\}$$

Альтернатива A3:

$$D = \{[1.000, 1.000], [0.000, 0.143]\}$$

Шаг 3: Интервальные метрики S_i и R_i

	S_i $[S_{\text{low}}, S_{\text{high}}]$	S_i	R_i $[R_{\text{low}}, R_{\text{high}}]$	R_i
$A1$	$[0.549, 0.500]$		$[0.500, 0.500]$	
$A2$	$[0.363, 0.347]$		$[0.227, 0.266]$	
$A3$	$[0.500, 0.572]$		$[0.500, 0.500]$	

Шаг 4: Интервальные экстремумы

	S^*, S^-	R^*, R^-
S	$[0.363, 0.347], [0.549, 0.572]$	
R	$[0.227, 0.266], [0.500, 0.500]$	

Шаг 5: Интервальная мера компромисса Q_i

	Q_{low}	Q_{high}
$A1$	1.000	0.828
$A2$	0.000	0.032
$A3$	0.878	1.000

Шаг 6: Центры интервалов и ранжирование

$$Q_{\text{center}} = \frac{Q_{\text{low}} + Q_{\text{high}}}{2}$$

	Q_{center}
$A2$	0.016
$A1$	0.914
$A3$	0.939

Ранжирование по Q_{center}: A2 $\rightarrow$ A1 $\rightarrow$ A3

Шаг 7а: Интервальные значения меры компромисса

Интервальные значения меры компромисса Q_i:

	Q_{low}	Q_{high}
$A1$	1.000	0.828
$A2$	0.000	0.032
$A3$	0.878	1.000

Центры интервалов:

$$Q_{\text{center}}(A1) = 0.914, \quad Q_{\text{center}}(A2) = 0.016, \quad Q_{\text{center}}(A3) = 0.939$$

Шаг 7b: Проверка компромиссного решения по условиям C1 и C2

Условие C1 (Acceptable Advantage):

$$Q(A_2) - Q(A_1) = 0.016 - 0.914 = -0.898, \quad \frac{1}{m-1} = \frac{1}{3-1} = 0.5$$

Так как $-0.898 < 0.5$, условие C1 формально выполняется.

Условие C2 (Acceptable Stability):

Лучшая по S и R:

$$S_min = S(A_2) = [0.363, 0.347], \quad R_min = R(A_2) = [0.227, 0.266]$$

A2 сохраняет наименьшие значения S и R, C2 выполняется.

Вывод:

Наименьший Q_{center} и соблюдение условий C1/C2 дают компромиссное решение:

$$A_2$$

Идея нечеткой модификации

- Оценки и/или веса задаются TFN (треугольные нечеткие числа) $\tilde{x} = (x^L, x^M, x^U)$.
- Операции (максимум, сумма, умножение) выполняются покомпонентно.
- Получаем нечеткие $\tilde{S}_i, \tilde{R}_i, \tilde{Q}_i$; затем дефаззификация в скаляры (обычно центроид $(L + M + U)/3$).
- Особенно удобен при лингвистических оценках экспертов [5, 3, 4].

Арифметика нечетких чисел

Для треугольных чисел выделяют следующие математические операции:

- Сумма треугольных чисел: $\sum_{i=1\oplus}^{n} \tilde{N}_i = (\sum_{i=1}^{n} l_i, \sum_{i=1}^{n} m_i, \sum_{i=1}^{n} h_i)$.
- Сумма треугольного числа и скаляра: $\tilde{N} \oplus K = (l + K, m + K, h + K)$.
- Вычитание: $\tilde{N}_1 \ominus \tilde{N}_2 = (l_1 - r_2, m_1 - m_2, r_1 - l_2)$.
- Вычитание скаляра: $\tilde{N} - K = (l - K, m - K, h - K)$.
- Умножение на скаляр: $K \times \tilde{N} = (K \times l, K \times m, K \times h)$, для $K \geq 0$
- Умножение: $\tilde{N}_1 \otimes \tilde{N}_2 = (l_1 \times l_2, m_1 \times m_2, h_1 \times h_2)$.
- Деление на скаляр: $\frac{\tilde{N}}{K} = (\frac{l}{K}, \frac{m}{K}, \frac{h}{K})$.
- Оператор MAX: $\underset{i}{MAX} \tilde{N}_i = (\underset{i}{max} l_i, \underset{i}{max} m_i, \underset{i}{max} h_i)$.
- Оператор MIN: $\underset{i}{MIN} \tilde{N}_i = (\underset{i}{min} l_i, \underset{i}{min} m_i, \underset{i}{min} h_i)$.

Формулы

Идеальные/надирные TFN (выгодный):

$$\tilde{f}_j^* = (\max_i f_{ij}^L,\ \max_i f_{ij}^M,\ \max_i f_{ij}^U).$$

Нормализация (*по Opricovic [5]*):

$$\tilde{d}_{ij} = \Big(\frac{f_j^{*L} - f_{ij}^U}{f_j^{*U} - f_j^{-L}},\ \frac{f_j^{*M} - f_{ij}^M}{f_j^{*M} - f_j^{-M}},\ \frac{f_j^{*U} - f_{ij}^L}{f_j^{*L} - f_j^{-U}}\Big).$$

Агрегация:

$$\tilde{S}_i = \sum_j \tilde{w}_j \otimes \tilde{d}_{ij}, \quad \tilde{R}_i = \max_j(\tilde{w}_j \otimes \tilde{d}_{ij}).$$

Дефаззификация: $S_i = \mathrm{Defuzz}(\tilde{S}_i)$, аналогично для R_i и Q_i [5, 3, 4].

Пример по нечеткой модификации

Данные: 4 альтернативы, 3 критерия, матрица нечетких чисел.

Результат:

- Нечеткие $\tilde{Q}_i$: $([0.086, 0.448, 1.000], [-0.042, 0.293, 0.715], [-0.394, 0.010, 0.510], [0.074, 0.446, 0.996])$.
- Ранжирование по среднему значению Q: $\quad$ A3 $\rightarrow$ A2 $\rightarrow$ A4 $\rightarrow$ A1.
- Дефаззифицированные значения Q_i (пример): $(0.495, 0.314, 0.034, 0.491)$
- Ранжирование по точным значениям: $\quad$ A3 $\rightarrow$ A2 $\rightarrow$ A4 $\rightarrow$ A1.

Чувствительность и trade-off

- Параметр v управляет компромиссом между S и R.
- Уступка (trade-off): пересчёт весов через tr-коэффициенты позволяет моделировать альтернативные приоритеты критериев.
  $D_i = f_i^{*h} - f_i^{\circ l}$ для максимизируемого критерия
  $D_i = f_i^{\circ h} - f_i^{*l}$ для минимизируемого критерия

$$tr_i = (D_k * w_i)/(D_i * w_k)$$

$$w_i' = |(D_i * w^{\mathrm{cr}} * tr_i)/D_k|$$

Иллюстративный пример: Входные данные

Матрицы альтернатив:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.8 & 0.9 \\ 0.6 & 0.7 & 0.8 \\ 0.8 & 0.9 & 1.0 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.6 & 0.7 \\ 0.8 & 0.9 & 1.0 \\ 0.6 & 0.7 & 0.8 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.9 & 1.0 \\ 0.5 & 0.6 & 0.7 \\ 0.7 & 0.8 & 0.9 \end{bmatrix}$$

Иллюстративный пример: Идеальное и надирное значения

Идеальное значение:

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.6 & 0.7 \\ 0.5 & 0.6 & 0.7 \\ 0.6 & 0.7 & 0.8 \end{bmatrix}$$

Надирное значение:

$$\begin{bmatrix} 0.8 & 0.9 & 1.0 \\ 0.8 & 0.9 & 1.0 \\ 0.8 & 0.9 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Иллюстративный пример: Дефаззифицированные значения

Альт	Q				S			
	Q_l	Q_m	Q_r	Crisp	S_l	S_m	S_r	Crisp
A1	-0.798	0.101	1.000	0.101	-0.200	1.100	2.400	1.100
A2	-0.824	0.037	0.899	0.038	-0.700	0.600	1.900	0.600
A3	-0.774	0.088	0.950	0.088	-0.450	0.850	2.150	0.850

Альт	R			
	R_l	R_m	R_r	Crisp
A1	0.000	0.500	1.000	0.500
A2	0.200	0.600	1.000	0.600
A3	0.200	0.600	1.000	0.600

Иллюстративный пример: Ранжирование

Ранг	Core	Подтверждено	Crisp Q	Crisp S	Crisp R
1	A2	Да	A2	A2	A1
2	A3	Нет	A3	A3	A2
3	A1	Да	A1	A1	A3

Иллюстративный пример: Компромиссное решение

- Допустимое превосходство C1: Выполняется
- Допустимая стабильность C2: Выполняется

Компромиссное решение:

$$\boxed{A_2}$$

Иллюстративный пример: Уступки (trade-off)

tr	Заданный tr	Новые веса
1.000	1.000	1.000
1.000	15.000	15.000
1.250	0.200	0.160

Иллюстративный пример: Дефаззификация после уступки

Альт	Q				S			
	Q_l	Q_m	Q_r	Crisp	S_l	S_m	S_r	Crisp
A1	-0.447	0.143	0.688	0.132	-3.000	3.480	9.960	3.480
A2	-0.210	0.455	1.000	0.425	2.520	9.000	15.480	9.000
A3	-0.525	0.000	0.530	0.001	-5.840	0.640	7.120	0.640

Альт	R			
	R_l	R_m	R_r	Crisp
A1	0.000	3.000	9.000	3.750
A2	3.000	9.000	15.000	9.000
A3	0.200	0.600	6.000	1.850

Иллюстративный пример: Ранжирование после уступки

Ранг	Core	Conf.	Crisp Q	Crisp S	Crisp R
1	A3	1	A3	A3	A3
2	A1	1	A1	A1	A1
3	A2	1	A2	A2	A2

Иллюстративный пример: Итоговое решение

- Допустимое превосходство C1: Не выполняется
- $M = 2$
- Допустимая стабильность C2: Выполняется

Компромиссное решение:

$$\boxed{A_3,\ A_1}$$

Когда применять какую модификацию

- **Интервальная** – данные заданы диапазонами (measurement error, диапазон оценок) [2, 1].
- **Fuzzy** – экспертные лингвистические оценки, неоднозначные предпочтения, когда важна модель принадлежности [5].
- Практика: для быстрой оценки можно использовать центры интервалов / модальные значения TFN; для критичных решений – полные методы с дефаззификацией и анализом пересечений.

Пример из реальной жизни

Предположим, что мы хотим через месяц собрать компьютер. Мы знаем только текущие цены на оперативную память, видеокарты, процессоры, но не можем знать, как они изменятся через месяц. Мы можем только предположить. У нас имеется 4 варианта сборки. Каждый вариант представлен тремя нечеткими числами (оперативная память, видеокарта процессор). Каждое нечеткое число отражает оптимистичное, наиболее вероятное и пессимистичное значение для цены в тысячах рублей.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 15 & 17 & 40 \\ 60 & 70 & 85 \\ 25 & 30 & 36 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 18 & 21 & 35 \\ 75 & 90 & 110 \\ 30 & 35 & 42 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 16 & 18 & 32 \\ 85 & 100 & 120 \\ 35 & 40 & 50 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 14 & 16 & 28 \\ 50 & 60 & 72 \\ 28 & 33 & 39 \end{bmatrix} \quad A_5 = \begin{bmatrix} 20 & 23 & 38 \\ 95 & 115 & 140 \\ 40 & 48 & 58 \end{bmatrix}$$

Компромиссное решение для этих данных: A4, A1.

Сравнение модификаций — результаты ранжирования

Алгоритмы были проверены на наборе данных с информацией о водных ресурсах Млавы, Сербия. Были получены следующие ранги:

Таблица: Результаты ранжирования

Альтернатива	**Классический**	**Интервальный**	**Fuzzy**
A1	5	5	5
A2	4	4	4
A3	1	1	2
A4	6	6	6
A5	3	3	1
A6	2	2	3

По результатам видно, что учёт неопределённости способен изменить порядок предпочтений (например, A5 поднимается с 3-го места в классическом/интервальном вариантах на 1-е в fuzzy).

Анализ результатов

- Основной эффект: введение неопределённости (интервалы/TFN) меняет ранжирование — иногда существенно.
- Интервальная версия даёт диапазоны значений и наглядно показывает пересечения — полезно при оценке риска/неопределённости.
- Fuzzy VIKOR лучше отражает лингвистические/субъективные оценки; дефаззификация может «сжать» неопределённость и изменить ранги.
- Практическая рекомендация: при наличии лингвистических оценок применять fuzzy; при измеренных диапазонах — интервальную; всегда анализировать чувствительность по v и способу дефаззификации.

Выводы

- Классический VIKOR хорош для точных данных; интервальная и fuzzy модификации расширяют применимость в условиях неопределённости.
- Интервальная VIKOR — для диапазонов/погрешностей; даёт интервальные Q_i и частичные порядки.
- Fuzzy VIKOR — для лингвистических/экспертных оценок; требует внимательного выбора метода дефаззификации.
- Рекомендация: при ответственном принятии решений использовать полные расширенные алгоритмы и сопровождать их анализом чувствительности (v, дефаззификация, сравнение интервалов).

Список источников I

Sayadi M. K., Heydari M., Shahanaghi K. Extension of VIKOR method for decision making problem with interval numbers // Applied Mathematical Modelling. 2009. Vol.33, No.5. P.2257–2262. DOI: 10.1016/j.apm.2008.06.002

Chatterjee P., Chakraborty S. A comparative analysis of VIKOR method and its variants // Decision Science Letters. 2016. Vol.5, No.4. P.469–486. DOI: 10.5267/j.dsl.2016.5.004

Liu P., Qin X. An Extended VIKOR Method for Decision Making Problem with Interval-Valued Linguistic Intuitionistic Fuzzy Numbers Based on Entropy // Informatica. 2017. Vol.28, No.4. P.665–685. DOI: 10.15388/Informatica.2017.151

Список источников II

Wan S.-P. The extended VIKOR method for multi-attribute group decision making with triangular intuitionistic fuzzy numbers // Knowledge-Based Systems. 2013. Vol.52. P.65–77.
DOI: 10.1016/j.knosys.2013.06.019

Opricovic S. Fuzzy VIKOR with an application to water resources planning // Expert Systems with Applications. 2011. Vol.38, No.10. P.12983–12990.
DOI: 10.1016/j.eswa.2011.04.097