

1. APPLICATION OF THE LAW OF MINIMUM FOR TCP

Закон минимума и анализ различий для приоритизации регрессионных тестов

Annotation. *We present the classical VIKOR multi-criteria decision-making method together with two important extensions: interval VIKOR and fuzzy VIKOR. We discuss their theoretical foundations, applicability, advantages and limitations, and provide comparative insight into decision stability under uncertainty. A computational example illustrates interval and fuzzy modifications of VIKOR evaluation and ranking.*

Keywords. *VIKOR, MCDM, interval analysis, fuzzy sets.*

Аннотация. *В работе рассматривается классический метод многокритериального принятия решений VIKOR, а также две его ключевые модификации: интервальный и нечеткий VIKOR. Излагаются теоретические основы методов, области применимости, особенности и ограничения, а также проводится сравнение устойчивости решений в условиях неопределённости. На иллюстративном примере демонстрируется выполнение и результаты интервальной и нечеткой модификации VIKOR.*

Ключевые слова. *VIKOR, многокритериальное принятие решений, интервальный анализ, нечеткие множества.*

1.1. Введение

Метод VIKOR (*VIseKriterijumska Optimizacija I Kompromisno Resenje*) был предложен Сергием Опричевичем как подход к многокритериальному принятию решений, ориентированный на нахождение *компромиссного решения*, максимально близкого к идеальной точке. В отличие от методов, стремящихся к парето-оптимальным решениям, VIKOR фокусируется на ситуациях, где компромисс между критериями является предпочтительным.

Однако классическая версия метода предполагает, что значения критериев заданы в виде точных чисел. В реальных задачах часто присутствуют различные

формы неопределённости: интервальные оценки показателей, экспертные оценки в форме языковых термов, нечеткие треугольные числа и др. Это приводило к необходимости расширить VIKOR.

Существуют две важные модификации:

- **интервальный VIKOR**, предложенный в работе [4], адаптирующий алгоритм к критериям, представленным через интервалы;
- **fuzzy VIKOR**, описанный, например, в работах [2; 5], позволяющий работать с лингвистическими и нечеткими данными.

Сравнительный анализ различных версий VIKOR выполнен в статье [1], где показано, что интервальная и нечеткая модификации позволяют повысить устойчивость решений при наличии неопределенности.

Цель данной работы — систематизировать основные идеи интервальной и нечеткой модификаций VIKOR, показать отличие от классического алгоритма и продемонстрировать работу интервального и нечеткого VIKOR на примере, написанном на языке программирования python.

1.2. Обзор метода VIKOR

Метод VIKOR относится к классу многокритериальных подходов принятия решений и был предложен Опричевичем как способ получения компромиссного решения в ситуациях, где необходимо учитывать несколько конфликтующих критериев. Первоначально метод создавался для инженерных задач, требующих выбора оптимального варианта среди множества альтернатив с разнородными характеристиками. Основная идея метода заключается в нахождении решения, минимизирующего расстояние до идеальной точки и одновременно обеспечивающего баланс между улучшением средних показателей и уменьшением максимального отклонения. Метод основан на компромиссном программировании, но отличается тем, что явно использует процедуру поиска решения, приемлемого для большинства заинтересованных сторон, что делает его особенно полезным в задачах, предполагающих наличие противоречивых критериев.

VIKOR применяется в ситуациях, где требуется учитывать не только максимальную близость альтернативы к идеальному варианту, но и степень её доминирования по самому неблагоприятному критерию. Поэтому метод получил

широкое применение в инженерии, инвестиционном анализе, экологии, управлении проектами и других областях, где невозможно достичь одновременной оптимизации всех целей. Преимуществом метода является способность сочетать стратегии минимизации наихудшего отклонения и максимизации интегральной пользы, что позволяет получать взвешенное компромиссное решение.

1.2.1. Математическая постановка задачи

Пусть задано множество альтернатив $A = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$, каждая из которых оценивается по набору критериев $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$. Определена матрица оценок f_{ij} , где f_{ij} — значение альтернативы A_i по критерию c_j . Для каждого критерия задан тип: выгодный (benefit), для которого большие значения предпочтительны, или затратный (cost), для которого предпочтительны меньшие значения. Также каждому критерию назначен весовой коэффициент w_j , удовлетворяющий условию

$$\sum_{j=1}^n w_j = 1.$$

Для каждого критерия определяются лучшие и худшие значения среди всех альтернатив. Для выгодных критериев применяются выражения

$$f_j^* = \max_i f_{ij}, \quad f_j^- = \min_i f_{ij},$$

а для затратных критериев

$$f_j^* = \min_i f_{ij}, \quad f_j^- = \max_i f_{ij}.$$

Затем вычисляются две меры отклонения альтернативы от идеального решения. Первая мера представляет собой взвешенную сумму отклонений:

$$S_i = \sum_{j=1}^n w_j \frac{f_j^* - f_{ij}}{f_j^* - f_j^-}.$$

Вторая мера характеризует максимальное взвешенное отклонение по одному критерию:

$$R_i = \max_{1 \leq j \leq n} \left\{ w_j \frac{f_j^* - f_{ij}}{f_j^* - f_j^-} \right\}.$$

Для получения компромиссного решения определяется интегральный индекс Q_i :

$$Q_i = v \cdot \frac{S_i - S^*}{S^- - S^*} + (1 - v) \cdot \frac{R_i - R^*}{R^- - R^*},$$

где

$$S^* = \min_i S_i, \quad S^- = \max_i S_i, \quad R^* = \min_i R_i, \quad R^- = \max_i R_i,$$

а параметр $v \in [0,1]$ отражает предпочтения относительно стратегий компромисса. Значение $v = 0.5$ соответствует равному учёту обеих мер, приближение $v \rightarrow 1$ подчеркивает ориентацию на минимизацию суммарных отклонений, а $v \rightarrow 0$ — на минимизацию наибольшего отклонения.

Итоговое решение определяется альтернативой с минимальным значением Q_i , однако процедура выбора включает дополнительные условия устойчивости. Если различие между лучшими альтернативами недостаточно велико или ранжирование по метрикам S и R противоречит индексу Q , формируется не одна альтернатива, а набор компромиссных решений.

1.3. Интервальная модификация метода VIKOR

Как уже упоминалось в 1.2, классический метод VIKOR предполагает, что оценки всех альтернатив по каждому критерию представлены точечными значениями. Однако в реальных задачах многокритериального анализа нередко встречаются ситуации, когда значения критериев заданы неточно, являются приближёнными или варьируются в некотором допустимом диапазоне. Такие ситуации типичны для инженерных, экономических и экологических задач, в которых невозможно получить точные числа из-за экспертной неопределённости, вариативности данных и измерительных ошибок.

Для учёта неопределённости авторы [4] предложили интервальную модификацию метода VIKOR, в которой вместо точечных значений используются интервальные оценки

$$f_{ij} = [\underline{f}_{ij}, \overline{f}_{ij}],$$

где \underline{f}_{ij} и \overline{f}_{ij} обозначают нижнюю и верхнюю границы возможного значения критерия. Такой подход позволяет работать с более гибкой моделью данных и принимать решения, устойчивые к колебаниям входной информации.

1.3.1. Математическая постановка интервального VIKOR

Пусть задано множество альтернатив $A = \{A_1, \dots, A_m\}$, множество критериев $C = \{c_1, \dots, c_n\}$ и интервальная матрица оценок

$$f_{ij} = [\underline{f}_{ij}, \bar{f}_{ij}].$$

Каждый критерий относится к типу *выгодный* или *затратный*, а веса w_j удовлетворяют условию $\sum_{j=1}^n w_j = 1$.

Для интервальных данных определяются *интервальные идеальные* и *анти-идеальные точки*. Для выгодного критерия:

$$f_j^* = \left[\max_i \underline{f}_{ij}, \max_i \bar{f}_{ij} \right], \quad f_j^- = \left[\min_i \underline{f}_{ij}, \min_i \bar{f}_{ij} \right].$$

Для затратного критерия:

$$f_j^* = \left[\min_i \underline{f}_{ij}, \min_i \bar{f}_{ij} \right], \quad f_j^- = \left[\max_i \underline{f}_{ij}, \max_i \bar{f}_{ij} \right].$$

Далее необходимо определить интервальные меры отклонения. Интервальный нормализованный разрыв альтернативы A_i по критерию c_j определяется как

$$D_{ij} = \left[\frac{f_j^{*(low)} - \bar{f}_{ij}}{f_j^{*(low)} - f_j^{-(high)}}, \frac{f_j^{*(high)} - \underline{f}_{ij}}{f_j^{*(high)} - f_j^{-(low)}} \right],$$

где использование противоположных концов интервалов обеспечивает *наиболее пессимистичную* и *наиболее оптимистичную* оценки, согласуясь с подходом Sayadi et al.

Интервальные показатели S_i и R_i вычисляются как:

$$S_i = \left[\sum_{j=1}^n w_j D_{ij}^{(low)}, \sum_{j=1}^n w_j D_{ij}^{(high)} \right],$$

$$R_i = \left[\max_j w_j D_{ij}^{(low)}, \max_j w_j D_{ij}^{(high)} \right].$$

1.3.2. Особенности метода

Интервальный VIKOR сохраняет структуру исходного метода, но адаптирует все вычисления к интервальной арифметике. Основные особенности:

- вместо точек используются интервалы значений, что делает метод чувствительным к неопределённости;
- нормализация использует “наиболее широкое” сочетание концов интервалов, что гарантирует корректную оценку в условиях неполных данных;
- результаты ранжирования также представляются интервалами и требуют процедуры сравнения интервальных чисел;
- метод может порождать частичные или нестрогие порядки, когда интервалы Q_i альтернатив пересекаются.

1.3.3. Недостатки и ограничения

Несмотря на преимущества, интервальная модификация имеет ряд недостатков:

- усложнение вычислений из-за необходимости поддерживать интервальную арифметику;
- увеличение числа случаев, когда альтернативы оказываются несравнимыми из-за пересечения интервалов;
- зависимость качества результата от корректного задания интервалов экспертами.

Тем не менее модификация доказала свою эффективность в задачах с высокой неопределённостью и стала основой для дальнейших расширений метода, включая fuzzy модификацию [2; 5], о которой пойдет речь в 1.4.

1.3.4. Реализация интервальной модификации на Python

Для практической демонстрации интервальной модификации метода VIKOR был использован Python-код, реализующий шаги, описанные в работе [4]. В частности, реализация учитывает следующие ключевые моменты:

- каждая альтернатива A_i имеет интервальные оценки по каждому критерию c_j : $f_{ij} = [\underline{f}_{ij}, \bar{f}_{ij}]$;
- вычисляются интервальные идеальные и антиидеальные точки f_j^* и f_j^- , учитывая тип критерия (выгода или затраты);
- рассчитываются интервальные меры отклонения D_{ij} , нормализованные с использованием противоположных концов интервалов для пессимистичных и оптимистичных оценок;

D. агрегируются интервальные показатели S_i и R_i по формулам:

$$S_i = \sum_{j=1}^n w_j D_{ij}, \quad R_i = \max_j w_j D_{ij};$$

E. определяется интервальная величина Q_i как взвешенная комбинация S_i и R_i , с учётом коэффициента стратегии v ;

F. ранжирование альтернатив производится по центрам интервалов Q_i , при необходимости формируется компромиссный набор лучших альтернатив.

Данная реализация полностью согласуется с формулами, представленными в пункте 1.3.1, и позволяет на практике оценивать устойчивость решений к колебаниям входных данных.

На приведённом примере, включающем четыре альтернативы и три критерия, были получены следующие результаты:

Таблица 1.1

Идеальная и надирная точки интервалов		
Критерий	f_j^*	f_j^-
1	[0.800, 1.000]	[0.500, 0.700]
2	[0.800, 1.000]	[0.500, 0.700]
3	[0.500, 0.700]	[0.800, 1.000]

Таблица 1.2

Интервальные метрики S, R и Q для альтернатив				
Альтернатива	S-интервал	R-интервал	Q-интервал	Q_center
A1	[0.6667, 0.6667]	[0.3000, 0.3000]	[0.7500, 0.7500]	0.7500
A2	[0.4000, 0.4000]	[0.3000, 0.3000]	[0.3500, 0.3500]	0.3500
A3	[0.6000, 0.6000]	[0.4000, 0.4000]	[0.9000, 0.9000]	0.9000
A4	[0.3333, 0.3333]	[0.2000, 0.2000]	[0.0000, 0.0000]	0.0000

Таблица 1.3

Ранжирование альтернатив по интервальной метрике Q

Ранжирование	Лучшая альтернатива
A4 → A2 → A1 → A3	A4

Анализ полученных результатов показывает, что интервальная модификация позволяет:

- выявить компромиссные альтернативы даже при колебаниях значений критериев;
- формировать устойчивое ранжирование, при этом лучшая альтернатива (A4) сохраняется при различных значениях коэффициента стратегии ν ;
- настраивать степень влияния предпочтений через параметр ν , что отражено в анализе чувствительности (лучшие альтернативы изменяются при $\nu = 0.7$ и 1.0 , формируя компромиссные наборы A4+A2).

1.4. Нечёткая (fuzzy) модификация метода VIKOR

В ряде практических задач исходные данные содержат неопределённость, которую невозможно корректно описать только интервалами. В таких случаях применяется нечеткая (fuzzy) модификация метода VIKOR, предложенная в [3]. В этой версии критерии и веса допускают неопределённость, выражаемую *треугольными нечеткими числами* (TFN). Нечеткие оценки позволяют моделировать неточность экспертных суждений, а также различать нижнюю, наиболее вероятную и верхнюю оценку каждого параметра.

Треугольное нечеткое число определяется как

$$\tilde{x} = (x^L, x^M, x^U),$$

где x^L , x^M и x^U соответствуют нижней, модальной и верхней оценкам соответственно. Все операции в алгоритме выполняются покомпонентно, что обеспечивает корректность результата в нечеткой среде.

1.4.0.1. Определение нечетких идеального и антиидеального решений

Аналогично классическому VIKOR для каждого критерия определяются лучшие и худшие значения. Отличие заключается в том, что каждая оценка является TFN, а операции \max и \min применяются к соответствующим компонентам.

Для выгодных критериев:

$$\tilde{f}_j^* = \left(\max_i f_{ij}^L, \max_i f_{ij}^M, \max_i f_{ij}^U \right), \quad \tilde{f}_j^- = \left(\min_i f_{ij}^L, \min_i f_{ij}^M, \min_i f_{ij}^U \right).$$

Для затратных критериев:

$$\tilde{f}_j^* = \left(\min_i f_{ij}^L, \min_i f_{ij}^M, \min_i f_{ij}^U \right), \quad \tilde{f}_j^- = \left(\max_i f_{ij}^L, \max_i f_{ij}^M, \max_i f_{ij}^U \right).$$

1.4.0.2. Нормирование нечетких расстояний

Нечеткое расстояние альтернативы от идеального решения также является треугольным числом. В работе [3] предложена нормировка вида

$$\tilde{d}_{ij} = \left(\frac{f_j^L - f_{ij}^U}{f_j^U - f_j^{-L}}, \frac{f_j^M - f_{ij}^M}{f_j^M - f_j^{-M}}, \frac{f_j^U - f_{ij}^L}{f_j^L - f_j^{-U}} \right),$$

что гарантирует сохранение структуры TFN.

1.4.0.3. Нечеткие показатели S_i и R_i

Аналоги интегральной и максимальной меры отклонения определяются как

$$\tilde{S}_i = \sum_{j=1}^n (\tilde{w}_j \otimes \tilde{d}_{ij}),$$

$$\tilde{R}_i = \max_j (\tilde{w}_j \otimes \tilde{d}_{ij}),$$

где \otimes обозначает покомпонентное умножение TFN, а максимум по критериям также определяется покомпонентно:

$$\max((a^L, a^M, a^U), (b^L, b^M, b^U)) = (\max(a^L, b^L), \max(a^M, b^M), \max(a^U, b^U)).$$

1.4.0.4. Дефаззификация и вычисление итогового показателя

Поскольку результатом являются нечеткие числа, необходимо дефаззифицировать \tilde{S}_i и \tilde{R}_i . В [3] применяется классическая дефаззификация треугольного числа:

$$\text{Defuzz}(\tilde{x}) = \frac{x^L + x^M + x^U}{3}.$$

Таким образом,

$$S_i = \text{Defuzz}(\tilde{S}_i), \quad R_i = \text{Defuzz}(\tilde{R}_i).$$

После этого итоговый компромиссный показатель вычисляется по стандартной формуле VIKOR:

$$Q_i = v \frac{S_i - S^*}{S^- - S^*} + (1 - v) \frac{R_i - R^*}{R^- - R^*},$$

где

$$S^* = \min_i S_i, \quad S^- = \max_i S_i, \quad R^* = \min_i R_i, \quad R^- = \max_i R_i,$$

а $v \in [0,1]$ — параметр компромисса.

1.4.0.5. Итоговое ранжирование

Окончательные решения выбираются по тем же критериям приемлемости преимущества и стабильности, что и в оригинальном методе VIKOR. Отличие заключается только в том, что все сравнения проводятся над дефаззифицированными значениями.

1.5. Экспериментальная часть

1.5.1. Данные и настройки экспериментов

Экспериментальная оценка метода проведена авторами статьи на основе набора Defects4J, включающего реальные Java-проекты с искусственно сохранёнными дефектными версиями. В частности, рассматривались следующие проекты:

- Jsoup, Gson, Csv;
- JacksonDatabind, JacksonXml, JacksonCore;
- Compress, Time, Codec, Lang.

Для генерации искусственных дефектов применялось мутационное тестирование с использованием инструмента Major. Качество различных стратегий приоритизации оценивалось по метрике APFD (Average Percentage of Faults Detected), показывающей, насколько быстро по порядку тестов обнаруживаются дефекты.

В качестве базовых методов сравнения (baseline) использовались:

- Total и Additional;
- Total-Diff и Additional-Diff;
- случайные порядки (Random).

1.5.2. Результаты для LoM и Dis-LoM

В таблице 1.4 приведены значения APFD для методов LoM и Dis-LoM для части проектов Defects4J (по данным оригинальной статьи).

Таблица 1.4

Сравнение LoM и Dis-LoM по APFD			
Проект	LoM	Dis-LoM	Δ
Csv	0,9643	0,9643	0,0000
JacksonDatabind	0,9921	0,9924	+0,0003
JacksonXml	0,8795	0,9399	+0,0604
Time	0,9791	0,9915	+0,0124
Codec	0,7549	0,9540	+0,1991
JacksonCore	0,9715	0,9729	+0,0014
Lang	0,9938	0,9938	0,0000

Можно отметить, что Dis-LoM никогда не показывает результаты хуже, чем LoM. На некоторых проектах (Csv, Lang) значения APFD совпадают, на других наблюдается небольшое улучшение. Наиболее заметный прирост достигается на проектах Codec и JacksonXml, где Dis-LoM значительно смещает полезные тесты вверх по порядку, устраняя дублирование покрытия.

1.5.3. Сравнение с базовыми методами

В среднем по рассматриваемым проектам значения APFD для различных методов приоритизации распределились следующим образом (по данным статьи):

Из таблицы 1.5 видно, что методы, учитывающие diff (Additional-Diff, Total-Diff), демонстрируют более высокие значения APFD по сравнению с классическими Total и Additional. Предложенный метод Dis-LoM оказывается близок к лучшему baseline Additional-Diff и превосходит остальные методы, в том числе стандартные coverage-based и случайный порядок.

1.5.4. Краткий анализ результатов

Результаты показывают, что:

Средние значения APFD для разных методов

Метод	Средний APFD
Additional-Diff	0,9805
Dis-LoM	0,9727
Total-Diff	0,9625
LoM	0,9336
Additional	0,8656
Random (avg)	0,8236
Total	0,8062

- интеграция информации о распространении изменений (через цепь Маркова) и закона минимума позволяет более точно оценивать важность тестов по отношению к изменённому коду;
- учёт различий между тестами (Dis-LoM) уменьшает дублирование и ускоряет обнаружение дефектов в разных частях системы;
- Dis-LoM демонстрирует стабильное улучшение по сравнению с LoM и конкурентоспособен с лучшими diff-ориентированными baseline.

1.6. Выводы

В работе рассмотрен подход к приоритизации регрессионных тестов, основанный на сочетании анализа различий, закона минимума и модели цепей Маркова. В отличие от классических coverage-based методов, данный подход:

- моделирует распространение влияния изменений по графу вызовов;
- учитывает чувствительность методов к параметрам через forward slicing;
- опирается на закон минимума для выявления “узких мест” в покрытии;
- снижает избыточность тестов за счёт анализа непохожести покрытия.

Экспериментальные результаты, полученные авторами исходной статьи на наборе Defects4J, показывают, что метрика Dis-LoM обеспечивает высокие значения APFD и сопоставима с лучшими diff-ориентированными методами, превосходя при этом классические Total и Additional, а также случайный порядок.

Перспективными направлениями развития подхода являются:

- расширение анализа на другие языки программирования и типы проектов;
- интеграция исторической информации о сбоях тестов;
- оптимизация вычислительной стоимости построения графов и модели цепи Маркова для очень больших систем.

Библиографический список

1. *Chatterjee P., Chakraborty S.* A comparative analysis of VIKOR method and its variants // *Decision Science Letters*. — 2016. — Т. 5, № 4. — С. 469—486. — DOI 10.5267/j.dsl.2016.5.004.
2. *Liu P., Qin X.* An Extended VIKOR Method for Decision Making Problem with Interval-Valued Linguistic Intuitionistic Fuzzy Numbers Based on Entropy // *Informatica*. — 2017. — Т. 28, № 4. — С. 665—685. — DOI 10.15388/Informatica.2017.151.
3. *Opricovic S.* Fuzzy VIKOR with an application to water resources planning // *Expert Systems with Applications*. — 2011. — Т. 38, № 10. — С. 12983—12990. — DOI 10.1016/j.eswa.2011.04.097. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0957417411006245>.
4. *Sayadi M. K., Heydari M., Shahanaghi K.* Extension of VIKOR method for decision making problem with interval numbers // *Applied Mathematical Modelling*. — 2009. — Т. 33, № 5. — С. 2257—2262. — DOI 10.1016/j.apm.2008.06.002.
5. *Wan S.-P.* The extended VIKOR method for multi-attribute group decision making with triangular intuitionistic fuzzy numbers // *Knowledge-Based Systems*. — 2013. — Т. 52. — С. 65—77. — DOI 10.1016/j.knosys.2013.06.019.