Исследование модификаций метода VIKOR: интервальная и нечеткая версии

Ванчугов С.М., Гамов И.А.

СПбПУ, ИКНТ ВШ ПИ

2025

Выполнили студенты группы 5140903/40401:
Ванчугов С. М, Гамов И. А.

Руководитель:
Старший преподаватель В. А. Пархоменко

Актуальность и цель

- В задачах многокритериального принятия решений часто требования конфликтуют, нужна компромиссная стратегия.
- Классический VIKOR выдаёт компромиссное ранжирование, но требует точных числовых оценок.
- Цель: описать VIKOR, интервальную и нечеткую модификации, показать реализацию и иллюстративный пример.

Классический VIKOR – формула и логика

Даны альтернативы $A = \{A_1, \dots, A_m\}$, критерии $C = \{c_1, \dots, c_n\}$, оценки f_{ij}, веса w_j, $\sum_j w_j = 1$.
Идеальные / надирные:

$$\text{выгодный: } f_j^* = \max_i f_{ij}, \quad f_j^- = \min_i f_{ij},$$
$$\text{затратный: } f_j^* = \min_i f_{ij}, \quad f_j^- = \max_i f_{ij}.$$

Меры:

$$S_i = \sum_{j=1}^{n} w_j \frac{f_j^* - f_{ij}}{f_j^* - f_j^-}, \qquad R_i = \max_j \left\{ w_j \frac{f_j^* - f_{ij}}{f_j^* - f_j^-} \right\}.$$

Компромисс:

$$Q_i = v \frac{S_i - S^*}{S^- - S^*} + (1 - v) \frac{R_i - R^*}{R^- - R^*}.$$

Области применимости и ограничения

- Подходит для инженерии, экологии, управления проектами, инвестиций.
- Ограничение: требует точечных оценок; чувствителен к неопределённости и заданию весов.
- Решение: расширения – интервальная и нечеткая (fuzzy) версии.

Суть интервальной модификации

- Оценки задаются интервалами $f_{ij} = [\underline{f}_{ij}, \overline{f}_{ij}]$.
- Идеальные/надирные точки – интервалы, построенные по компонентам (min/max нижних/верхних границ).
- Для каждого критерия формируют интервальный нормализованный разрыв $D_{ij} = [D_{ij}^{\text{low}}, D_{ij}^{\text{high}}]$ (пессимистичный / оптимистичный сценарии).
- Получают $S_i = [S_i^{\text{low}}, S_i^{\text{high}}]$, $R_i = [R_i^{\text{low}}, R_i^{\text{high}}]$, и интервальные Q_i.
- Ранжирование: часто по центрам интервалов или специальным правилам сравнения интервалов.

Интервальная арифметика

- Интервал задаётся как $x = [\underline{x}, \overline{x}]$ – множество значений между границами.
- Базовые операции:

$$[a, b] + [c, d] = [a + c,\ b + d],$$

$$[a, b] - [c, d] = [a - d,\ b - c],$$

$$[a, b] \times [c, d] = [\min S,\ \max S], \quad S = \{ac, ad, bc, bd\}.$$

- Деление: $[a, b]/[c, d]$ определена, если $0 \notin [c, d]$; вычисляется как умножение на обратный интервал.

Формулы по интервальной модификации

Для выгодного критерия:

$$f_j^* = \left[\max_i \underline{f}_{ij},\ \max_i \overline{f}_{ij}\right], \quad f_j^- = \left[\min_i \underline{f}_{ij},\ \min_i \overline{f}_{ij}\right].$$

Нормализация:

$$D_{ij} = \left[\frac{f_j^{*(\mathrm{low})} - \overline{f}_{ij}}{f_j^{*(\mathrm{low})} - f_j^{-(\mathrm{high})}},\ \frac{f_j^{*(\mathrm{high})} - \underline{f}_{ij}}{f_j^{*(\mathrm{high})} - f_j^{-(\mathrm{low})}}\right].$$

Агрегация:

$$S_i = [\sum_j w_j D_{ij}^{\mathrm{low}},\ \sum_j w_j D_{ij}^{\mathrm{high}}], \quad R_i = [\max_j w_j D_{ij}^{\mathrm{low}},\ \max_j w_j D_{ij}^{\mathrm{high}}].$$

Пример по интервальной модификации

Данные: 4 альтернативы, 3 критерия, матрица интервалов.

Результат:

- Интервальные Q_i (пример):
  $[0.000, 0.857], [0.243, 0.571], [1.000, 0.794], [0.000, 0.479]$.
- Ранжирование по центрам Q: A4 $\rightarrow$ A2 $\rightarrow$ A1 $\rightarrow$ A3.
- Интервальная форма показывает возможные пересечения и частичные порядки.

Ключевые этапы реализации:

1. Вход: матрица $(m, n, 2)$ с парами $[\underline{f}_{ij}, \overline{f}_{ij}]$.
2. Вычисление f_j^*, f_j^- по нижним/верхним границам.
3. Для каждой пары вычисление D_{ij}^{low} и D_{ij}^{high} по формулам с соответствующими концами интервалов.
4. Агрегация – получаем интервальные S_i, R_i; формируем интервальные Q_i.
5. Ранжирование – по центру интервала Q^{center} или правилам сравнения интервалов; применяем условия C_1, C_2 – acceptable advantage / stability.

Интервальная версия – реализация и выводы, ч.2

Результат работы алгоритма:

Таблица: Интервальные метрики S, R и Q для альтернатив

Альтернатива	S_i	R_i	Q_i	Q_i^{center}
A1	[0.300, 0.800]	[0.300, 0.320]	[0.000, 0.857]	0.429
A2	[0.480, 0.460]	[0.300, 0.300]	[0.243, 0.571]	0.407
A3	[0.640, 0.520]	[0.400, 0.400]	[1.000, 0.794]	0.897
A4	[0.120, 0.480]	[0.120, 0.240]	[0.000, 0.479]	0.239

Таблица: Ранжирование альтернатив по метрике Q

Ранжирование	Лучшая альтернатива
A4 $\rightarrow$ A2 $\rightarrow$ A1 $\rightarrow$ A3	A4

Идея нечеткой модификации

- Оценки и/или веса задаются TFN (треугольные нечеткие числа) $\tilde{x} = (x^L, x^M, x^U)$.
- Операции (максимум, сумма, умножение) выполняются покомпонентно.
- Получаем нечеткие $\tilde{S}_i, \tilde{R}_i, \tilde{Q}_i$; затем дефаззификация в скаляры (обычно центроид $(L + M + U)/3$).
- Особенно удобен при лингвистических оценках экспертов.

Арифметика неявных (нечетких) чисел

Для треугольных чисел выделяют следующие математические операции:

- Сумма треугольных чисел: $\sum_{i=1\oplus}^{n} \tilde{N}_i = (\sum_{i=1}^{n} l_i, \sum_{i=1}^{n} m_i, \sum_{i=1}^{n} h_i)$.
- Сумма треугольного числа и скаляра: $\tilde{N} \oplus K = (l + K, m + K, h + K)$.
- Вычитание: $\tilde{N}_1 \ominus \tilde{N}_2 = (l_1 - r_2, m_1 - m_2, r_1 - l_2)$.
- Вычитание скаляра: $\tilde{N} - K = (l - K, m - K, h - K)$.
- Умножение на скаляр: $K \times \tilde{N} = (K \times l, K \times m, K \times h)$, для $K \geq 0$
- Умножение: $\tilde{N}_1 \otimes \tilde{N}_2 = (l_1 \times l_2, m_1 \times m_2, h_1 \times h_2)$.
- Деление на скаляр: $\frac{\tilde{N}}{K} = (\frac{l}{K}, \frac{m}{K}, \frac{h}{K})$.
- Оператор MAX: $\underset{i}{MAX} \tilde{N}_i = (\underset{i}{max} l_i, \underset{i}{max} m_i, \underset{i}{max} h_i)$.
- Оператор MIN: $\underset{i}{MIN} \tilde{N}_i = (\underset{i}{min} l_i, \underset{i}{min} m_i, \underset{i}{min} h_i)$.

Формулы

Идеальные/надирные TFN (выгодный):

$$\tilde{f}_j^* = (\max_i f_{ij}^L,\ \max_i f_{ij}^M,\ \max_i f_{ij}^U).$$

Нормализация (по Opricovic, пример):

$$\tilde{d}_{ij} = \Big(\frac{f_j^{*L} - f_{ij}^U}{f_j^{*U} - f_j^{-L}},\ \frac{f_j^{*M} - f_{ij}^M}{f_j^{*M} - f_j^{-M}},\ \frac{f_j^{*U} - f_{ij}^L}{f_j^{*L} - f_j^{-U}}\Big).$$

Агрегация:

$$\tilde{S}_i = \sum_j \tilde{w}_j \otimes \tilde{d}_{ij}, \quad \tilde{R}_i = \max_j(\tilde{w}_j \otimes \tilde{d}_{ij}).$$

Дефаззификация: $S_i = \mathrm{Defuzz}(\tilde{S}_i)$, аналогично для R_i и Q_i.

Пример по нечеткой модификации

Данные: 4 альтернативы, 3 критерия, матрица нечетких чисел.

Результат:

- Нечеткие $\tilde{Q}_i$: $([0.086, 0.448, 1.000], [-0.042, 0.293, 0.715], [-0.394, 0.010, 0.510], [0.074, 0.446, 0.996])$.
- Ранжирование по среднему значению Q: A3 $\rightarrow$ A2 $\rightarrow$ A4 $\rightarrow$ A1.
- Дефаззифицированные значения Q_i (пример): $(0.495, 0.314, 0.034, 0.491)$
- Ранжирование по точным значениям: A3 $\rightarrow$ A2 $\rightarrow$ A4 $\rightarrow$ A1.

Ключевые этапы реализации:

1. Вход: матрица $(m, n, 3)$ с нечеткими числами $\tilde{f}_{ij} = (l, m, r)$.
2. Вычисление f_j^*, f_j^- по значениям l, m, r.
3. Для каждой пары вычисление $\tilde{D}_{ij}$.
4. Агрегация – получаем нечеткие $\tilde{S}_i, \tilde{R}_i$; формируем интервальные $\tilde{Q}_i$.
5. Ранжирование – по среднему значению Q^m;
6. Дефаззифицирование – сведение к скаляру: $Q = (l + 2m + r)/4$. Ранжируем и применяем условия C_1, C_2 – acceptable advantage / stability.

Результат работы алгоритма:

Таблица: Нечёткие метрики Q, S и R для альтернатив

Альтернатива	Q_i	S_i	R_i	Q_i^{crisp}
A1	[0.086, 0.448, 1.000]	[1.535, 2.184, 2.897]	[1.000, 1.000, 1.000]	0.495
A2	[-0.042, 0.293, 0.715]	[1.103, 1.661, 1.935]	[1.000, 1.000, 1.000]	0.314
A3	[-0.394, 0.010, 0.510]	[0.791, 1.420, 1.770]	[0.516, 0.607, 0.710]	0.034
A4	[0.074, 0.446, 0.996]	[1.727, 2.353, 2.885]	[0.871, 0.903, 1.000]	0.491

Нечеткая модификация – реализация и выводы, ч.3

Ранжирование:

Таблица: Ранжирование альтернатив по fuzzy

Ранг	Core	Conf.	Crisp Q	Crisp S / R
1	A3	0	A3	A3 / A3
2	A2	1	A2	A2 / A4
3	A4	1	A4	A1 / A1
4	A1	1	A1	A4 / A2

Когда применять какую модификацию

- **Интервальная** – данные заданы диапазонами (measurement error, диапазон оценок).
- **Fuzzy** – экспертные лингвистические оценки, неоднозначные предпочтения, когда важна модель принадлежности.
- Практика: для быстрой оценки можно использовать центры интервалов / модальные значения TFN; для критичных решений – полные методы с дефаззификацией и анализом пересечений.

Чувствительность и trade-off

- Параметр v управляет компромиссом между S и R; важно показать чувствительность ранжирования по v.
- Уступка (trade-off): пересчёт весов через тр-коэффициенты позволяет моделировать альтернативные приоритеты критериев.
- Рекомендация: включить график чувствительности Q vs v и анализ пересечений интервалов / рангов TFN в приложении.

Сравнение модификаций — результаты ранжирования

Таблица: Результаты ранжирования

Альтернатива	**Классический**	**Интервальный**	**Fuzzy**
A1	5	5	5
A2	4	4	4
A3	1	1	2
A4	6	6	6
A5	3	3	1
A6	2	2	3

По этим результатам видно, что учёт неопределённости способен изменить порядок предпочтений (например, A5 поднимается с 3-го места в классическом/интервальном вариантах на 1-е в fuzzy).

Анализ результатов

- Основной эффект: введение неопределённости (интервалы/TFN) меняет ранжирование — иногда существенно.
- Интервальная версия даёт диапазоны значений и наглядно показывает пересечения — полезно при оценке риска/неопределённости.
- Fuzzy VIKOR лучше отражает лингвистические/субъективные оценки; дефаззификация может «сжать» неопределённость и изменить ранги.
- Практическая рекомендация: при наличии лингвистических оценок применять fuzzy; при измеренных диапазонах — интервальную; всегда анализировать чувствительность по v и способу дефаззификации.

Выводы

- Классический VIKOR хорош для точных данных; интервальная и fuzzy модификации расширяют применимость в условиях неопределённости.
- Интервальная VIKOR — для диапазонов/погрешностей; даёт интервальные Q_i и частичные порядки.
- Fuzzy VIKOR — для лингвистических/экспертных оценок; требует внимательного выбора метода дефаззификации.
- Рекомендация: при ответственном принятии решений использовать полные расширенные алгоритмы и сопровождать их анализом чувствительности (v, дефаззификация, сравнение интервалов).

Список источников I

- Sayadi M. K., Heydari M., Shahanaghi K. Extension of VIKOR method for decision making problem with interval numbers // Applied Mathematical Modelling. 2009. Vol.33, No.5. P.2257–2262. DOI:10.1016/j.apm.2008.06.002.
- Chatterjee P., Chakraborty S. A comparative analysis of VIKOR method and its variants // Decision Science Letters. 2016. Vol.5, No.4. P.469–486. DOI:10.5267/j.dsl.2016.5.004.
- Liu P., Qin X. An Extended VIKOR Method for Decision Making Problem with Interval-Valued Linguistic Intuitionistic Fuzzy Numbers Based on Entropy // Informatica. 2017. Vol.28, No.4. P.665–685. DOI:10.15388/Informatica.2017.151.

Список источников II

Wan S.-P. The extended VIKOR method for multi-attribute group decision making with triangular intuitionistic fuzzy numbers // Knowledge-Based Systems. 2013. Vol.52. P.65–77. DOI:10.1016/j.knosys.2013.06.019.

Opricovic S. Fuzzy VIKOR with an application to water resources planning // Expert Systems with Applications. 2011. Vol.38, No.10. P.12983–12990. DOI:10.1016/j.eswa.2011.04.097.