

# Исследование модификаций метода VIKOR: интервальная и нечеткая версии

Ванчугов С.М., Гамов И.А.

СПбПУ, ИКНТ ВШ ПИ

2025

Выполнили студенты группы 5140903/40401:  
Ванчугов С. М, Гамов И. А.

Руководитель:  
Старший преподаватель В. А. Пархоменко

- В задачах многокритериального принятия решений часто требования конфликтуют, нужна компромиссная стратегия.
- Классический VIKOR выдаёт компромиссное ранжирование, но требует точных числовых оценок.
- Цель: описать VIKOR, интервальную и нечеткую модификации, показать реализацию и иллюстративный пример.

# Классический метод VIKOR — суть

Даны альтернативы  $A = \{A_1, \dots, A_m\}$  и критерии  $C = \{c_1, \dots, c_n\}$ , оценки  $f_{ij}$ . Веса  $w_j$ ,  $\sum_{j=1}^n w_j = 1$ .

Для каждого критерия определяем идеальное и антиидеальное значения:

$$\text{выгодный: } f_j^* = \max_i f_{ij}, \quad f_j^- = \min_i f_{ij},$$

$$\text{затратный: } f_j^* = \min_i f_{ij}, \quad f_j^- = \max_i f_{ij}.$$

Две меры отклонения:

$$S_i = \sum_{j=1}^n w_j \frac{f_j^* - f_{ij}}{f_j^* - f_j^-}, \quad R_i = \max_{1 \leq j \leq n} \left\{ w_j \frac{f_j^* - f_{ij}}{f_j^* - f_j^-} \right\}.$$

Компромиссный индекс:

$$Q_i = v \frac{S_i - S^*}{S^- - S^*} + (1 - v) \frac{R_i - R^*}{R^- - R^*},$$

где  $S^* = \min_i S_i$ ,  $S^- = \max_i S_i$ , аналогично для  $R$ .

- Инженерные и прикладные задачи с конфликтующими критериями.
- Сценарии, где важен компромисс между суммарной пользой ( $S$ ) и наихудшим отклонением ( $R$ ).
- Задачи с неопределёнными оценками — требуют расширений (интервалы, нечеткость).

# Интервальная модификация — идея

- Оценки даются интервально:  $f_{ij} = [\underline{f}_{ij}, \bar{f}_{ij}]$ .
- Цель — получить интервальные  $S_i$ ,  $R_i$ ,  $Q_i$  и корректные процедуры сравнения.
- Подходы: применять интервальную арифметику и выбирать комбинации концов интервалов для пессимистичных/оптимистичных оценок (см. Sayadi et al., 2009).

# Интервальные идеал/надир и $D_{ij}$

Для выгодного критерия:

$$f_j^* = [\max_i \underline{f}_{ij}, \max_i \bar{f}_{ij}], \quad f_j^- = [\min_i \underline{f}_{ij}, \min_i \bar{f}_{ij}].$$

Для затратного — аналогично через мин/макс.

Нормализованный интервальный разрыв (пессимистич./оптимистич.):

$$D_{ij} = \left[ \frac{f_j^{*(\text{low})} - \bar{f}_{ij}}{f_j^{*(\text{low})} - f_j^{-(\text{high})}}, \frac{f_j^{*(\text{high})} - \underline{f}_{ij}}{f_j^{*(\text{high})} - f_j^{-(\text{low})}} \right].$$

Агрегация:

$$S_i = \left[ \sum_j w_j D_{ij}^{(\text{low})}, \sum_j w_j D_{ij}^{(\text{high})} \right],$$

$$R_i = \left[ \max_j w_j D_{ij}^{(\text{low})}, \max_j w_j D_{ij}^{(\text{high})} \right].$$

# Реализация интервальной версии — как это связано с Python

Основные моменты реализации (соответствует предоставленному коду):

- Вход: тензор `matrix` размера  $(m, n, 2)$ : нижняя/верхняя границы.
- Вычисление  $f_j^*$  и  $f_j^-$  — по компонентам нижних/верхних границ.
- Нормализация: в строгой реализации используем дроби с соответствующими концами интервалов; в упрощённой — можно применять центры интервалов (быстрее).
- Получаем интервальные  $S_i$ ,  $R_i$ ; затем строим интервальные  $Q_i$  по границам (левая/правая).
- Ранжирование/выбор — часто по центрам интервалов или методом сравнения интервалов; применяются условия приемлемости (`advantage`, `stability`) как в классическом VIKOR.

# Иллюстративный пример — результаты (из ipynb)

## Идеальная и надирная точки:

Критерий 1:  $f^* = [0.800, 1.000]$ ,  $f^- = [0.500, 0.700]$ ,

Критерий 2:  $f^* = [0.800, 1.000]$ ,  $f^- = [0.500, 0.700]$ ,

Критерий 3:  $f^* = [0.500, 0.700]$ ,  $f^- = [0.800, 1.000]$ .

## Метрики (S-интервал, R-интервал, Q\_center):

Альтер	S	R	Q_center
A1	[0.6667,0.6667]	[0.3000,0.3000]	0.7500
A2	[0.4000,0.4000]	[0.3000,0.3000]	0.3500
A3	[0.6000,0.6000]	[0.4000,0.4000]	0.9000
A4	[0.3333,0.3333]	[0.2000,0.2000]	0.0000



Ранжирование (по центрам  $Q$ ):  $A4 \rightarrow A2 \rightarrow A1 \rightarrow A3$ .

Лучшая альтернатива: **A4**. Условия приемлемости: выполнены.

Анализ чувствительности по параметру  $v$ :

- При  $v = 0.3 / 0.5$  лучшая A4.
- При больших  $v$  (ориентация на  $S$ ) может формироваться компромиссный набор (A4+A2).

Краткий вывод: интервальная версия даёт устойчивое ранжирование и позволяет видеть неопределённость результатов (пересечения интервалов  $\rightarrow$  частичные порядки).

# Нечеткая (fuzzy) модификация — идея

- Оценки и/или веса задаются треугольными нечеткими числами (TFN):  $\tilde{x} = (x^L, x^M, x^U)$ .
- Операции (нормализация, суммирование, максимум) выполняются покомпонентно.
- Получаем нечеткие  $\tilde{S}_i, \tilde{R}_i$ , затем дефаззификация (например,  $(L + M + U)/3$ ) и классическое вычисление  $Q$ .
- Классический пример и формулировка: Opricovic (2011).

# Основные формулы для Fuzzy VIKOR (TFN)

Идеальные/надирные TFN (выгодный критерий):

$$\tilde{f}_j^* = (\max_i f_{ij}^L, \max_i f_{ij}^M, \max_i f_{ij}^U),$$

аналогично для  $\tilde{f}_j^-$  (по минимуму/максимуму соответственно).

Нормализованные расстояния (пример по Opricovic):

$$\tilde{d}_{ij} = \left( \frac{f_j^{*L} - f_{ij}^U}{f_j^{*U} - f_j^{-L}}, \frac{f_j^{*M} - f_{ij}^M}{f_j^{*M} - f_j^{-M}}, \frac{f_j^{*U} - f_{ij}^L}{f_j^{*L} - f_j^{-U}} \right).$$

Далее:  $\tilde{S}_i = \sum_j \tilde{w}_j \otimes \tilde{d}_{ij}$ ,  $\tilde{R}_i = \max_j (\tilde{w}_j \otimes \tilde{d}_{ij})$ , дефаззификация  $\rightarrow S_i, R_i, Q_i$ .

- Интервальная и нечеткая модификации повышают устойчивость ранжирования при неопределённости входных данных.
- Интервальная версия даёт наглядные интервалы для  $Q_i$  — удобно при экспертных диапазонах.
- Fuzzy версия удобна при лингвистических оценках и нечетких весах.
- Практически: если большая выборка/скорость важна — допускается аппроксимация центрами интервалов; при критичных решениях — использовать полную интервальную/нечеткую арифметику.





Sayadi M. K., Heydari M., Shahanaghi K. Extension of VIKOR method for decision making problem with interval numbers // Applied Mathematical Modelling. 2009. Vol.33, No.5. P.2257–2262. DOI:10.1016/j.apm.2008.06.002.



Chatterjee P., Chakraborty S. A comparative analysis of VIKOR method and its variants // Decision Science Letters. 2016. Vol.5, No.4. P.469–486. DOI:10.5267/j.dsl.2016.5.004.



Liu P., Qin X. An Extended VIKOR Method for Decision Making Problem with Interval-Valued Linguistic Intuitionistic Fuzzy Numbers Based on Entropy // Informatica. 2017. Vol.28, No.4. P.665–685. DOI:10.15388/Informatica.2017.151.

-  Wan S.-P. The extended VIKOR method for multi-attribute group decision making with triangular intuitionistic fuzzy numbers // Knowledge-Based Systems. 2013. Vol.52. P.65–77. DOI:10.1016/j.knosys.2013.06.019.
-  Opricovic S. Fuzzy VIKOR with an application to water resources planning // Expert Systems with Applications. 2011. Vol.38, No.10. P.12983–12990. DOI:10.1016/j.eswa.2011.04.097.