

Исследование модификаций метода VIKOR: интервальная и нечеткая версии

Ванчугов С.М., Гамов И.А.

СПбПУ, ИКНТ ВШ ПИ

2025

Выполнили студенты группы 5140903/40401:
Ванчугов С. М, Гамов И. А.

Руководитель:
Старший преподаватель В. А. Пархоменко

- В задачах многокритериального принятия решений часто требования конфликтуют, нужна компромиссная стратегия.
- Классический VIKOR выдаёт компромиссное ранжирование, но требует точных числовых оценок.
- Цель: описать VIKOR, интервальную и нечеткую модификации, показать реализацию и иллюстративный пример.

Классический VIKOR – формула и логика

Даны альтернативы $A = \{A_1, \dots, A_m\}$, критерии $C = \{c_1, \dots, c_n\}$, оценки f_{ij} , веса w_j , $\sum_j w_j = 1$.

Идеальные / надирные:

$$\text{выгодный: } f_j^* = \max_i f_{ij}, \quad f_j^- = \min_i f_{ij},$$

$$\text{затратный: } f_j^* = \min_i f_{ij}, \quad f_j^- = \max_i f_{ij}.$$

Меры:

$$S_i = \sum_{j=1}^n w_j \frac{f_j^* - f_{ij}}{f_j^* - f_j^-}, \quad R_i = \max_j \left\{ w_j \frac{f_j^* - f_{ij}}{f_j^* - f_j^-} \right\}.$$

Компромисс:

$$Q_i = v \frac{S_i - S^*}{S^- - S^*} + (1 - v) \frac{R_i - R^*}{R^- - R^*}.$$

Классический VIKOR – Проверка компромиссного решения:

Параметр компромисса v :

Параметр $v \in [0, 1]$ определяет баланс между стратегией *максимального группового выигрыша* (S_i) и *минимизации индивидуального риска* (R_i).

$$v \rightarrow 1 \Rightarrow (S), \quad v \rightarrow 0 \Rightarrow (R).$$

Условие C1 (Acceptable Advantage):

$$Q(A^{(2)}) - Q(A^{(1)}) \geq \frac{1}{m-1},$$

где $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$ — альтернативы с первым и вторым местом по Q .

Условие C2 (Acceptable Stability):

$$A^{(1)} = \arg \min_i S_i \quad \text{или} \quad A^{(1)} = \arg \min_i R_i.$$

- Подходит для инженерии, экологии, управления проектами, инвестиций.
- Ограничение: требует точечных оценок; чувствителен к неопределённости и заданию весов.
- Решение: расширения – интервальная и нечеткая (fuzzy) версии.

Суть интервальной модификации

- Оценки задаются интервалами $f_{ij} = [\underline{f}_{ij}, \bar{f}_{ij}]$.
- Идеальные/надирные точки – интервалы, построенные по компонентам (min/max нижних/верхних границ).
- Для каждого критерия формируют интервальный нормализованный разрыв $D_{ij} = [D_{ij}^{\text{low}}, D_{ij}^{\text{high}}]$ (пессимистичный / оптимистичный сценарии).
- Получают $S_i = [S_i^{\text{low}}, S_i^{\text{high}}]$, $R_i = [R_i^{\text{low}}, R_i^{\text{high}}]$, и интервальные Q_i .
- Ранжирование: часто по центрам интервалов или специальным правилам сравнения интервалов.

Интервальная версия VIKOR предложена в работе [1, 2].

Интервальная арифметика

- Интервал задаётся как $x = [\underline{x}, \overline{x}]$ – множество значений между границами.
- Базовые операции:

$$[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d],$$

$$[a, b] - [c, d] = [a - d, b - c],$$

$$[a, b] \times [c, d] = [\min S, \max S], \quad S = \{ac, ad, bc, bd\}.$$

- Деление: $[a, b]/[c, d]$ определена, если $0 \notin [c, d]$; вычисляется как умножение на обратный интервал.

Интервальная арифметика используется в рамках интервального VIKOR по [1].

Формулы по интервальной модификации

Для выгодного критерия:

$$f_j^* = [\max_i \underline{f}_{ij}, \max_i \bar{f}_{ij}], \quad f_j^- = [\min_i \underline{f}_{ij}, \min_i \bar{f}_{ij}].$$

Нормализация:

$$D_{ij} = \left[\frac{f_j^{*(\text{low})} - \bar{f}_{ij}}{f_j^{*(\text{low})} - f_j^{-(\text{high})}}, \frac{f_j^{*(\text{high})} - \underline{f}_{ij}}{f_j^{*(\text{high})} - f_j^{-(\text{low})}} \right].$$

Агрегация:

$$S_i = [\sum_j w_j D_{ij}^{\text{low}}, \sum_j w_j D_{ij}^{\text{high}}], \quad R_i = [\max_j w_j D_{ij}^{\text{low}}, \max_j w_j D_{ij}^{\text{high}}].$$

Формулы нормализации и агрегации соответствуют интервальному VIKOR [1, 2].

Иллюстративный пример: Исходные данные

На этом слайде показаны исходные данные, взятые из источника [1]

Матрица альтернатив (интервальные значения):

| Альтернатива | C_1 | C_2 |
|--------------|--------------|--------------|
| A_1 | [0.75, 1.24] | [2784, 3192] |
| A_2 | [1.83, 2.11] | [3671, 3857] |
| A_3 | [4.90, 5.73] | [4409, 4681] |

Веса критериев: $w = [0.5, 0.5]$

Типы критериев: C_1 — затраты (cost), C_2 — выгоды (benefit)

Параметр v : 0.5

Шаг 1: Интервальные идеал и надир

Идеальное (f^*) и надирное (f^-) значения:

| | f^* | f^- |
|-------|--------------|--------------|
| C_1 | [0.75, 1.24] | [4.90, 5.73] |
| C_2 | [4409, 4681] | [2784, 3192] |

Альтернатива A1:

$$D = \{[0.098, 0.000], [1.000, 1.000]\}$$

Альтернатива A2:

$$D = \{[0.273, 0.161], [0.454, 0.532]\}$$

Альтернатива A3:

$$D = \{[1.000, 1.000], [0.000, 0.143]\}$$

Шаг 3: Интервальные метрики S_i и R_i

| | S_i [$S_{\text{low}}, S_{\text{high}}$] | R_i [$R_{\text{low}}, R_{\text{high}}$] |
|----|--|--|
| A1 | [0.549, 0.500] | [0.500, 0.500] |
| A2 | [0.363, 0.347] | [0.227, 0.266] |
| A3 | [0.500, 0.572] | [0.500, 0.500] |

Шаг 4: Интервальные экстремумы

| | S^*, S^- | R^*, R^- |
|-----|----------------------------------|------------|
| S | $[0.363, 0.347], [0.549, 0.572]$ | |
| R | $[0.227, 0.266], [0.500, 0.500]$ | |

Шаг 5: Интервальная мера компромисса Q_i

| | Q_{low} | Q_{high} |
|----|------------------|-------------------|
| A1 | 1.000 | 0.828 |
| A2 | 0.000 | 0.032 |
| A3 | 0.878 | 1.000 |

Шаг 6: Центры интервалов и ранжирование

$$Q_{\text{center}} = \frac{Q_{\text{low}} + Q_{\text{high}}}{2}$$

| | Q_{center} |
|----|---------------------|
| A2 | 0.016 |
| A1 | 0.914 |
| A3 | 0.939 |

Шаг 7а: Интервальные значения меры компромисса

Интервальные значения меры компромисса Q_i :

| | Q_{low} | Q_{high} |
|----|------------------|-------------------|
| A1 | 1.000 | 0.828 |
| A2 | 0.000 | 0.032 |
| A3 | 0.878 | 1.000 |

Центры интервалов:

$$Q_{\text{center}}(A1) = 0.914, \quad Q_{\text{center}}(A2) = 0.016, \quad Q_{\text{center}}(A3) = 0.939$$

Шаг 7b: Проверка компромиссного решения по условиям C1 и C2

Условие C1 (Acceptable Advantage):

$$Q(A_2) - Q(A_1) = 0.016 - 0.914 = -0.898, \quad \frac{1}{m-1} = \frac{1}{3-1} = 0.5$$

Так как $-0.898 < 0.5$, условие C1 формально выполняется.

Условие C2 (Acceptable Stability):

Лучшая по S и R :

$$S_{min} = S(A_2) = [0.363, 0.347], \quad R_{min} = R(A_2) = [0.227, 0.266]$$

A_2 сохраняет наименьшие значения S и R , C2 выполняется.

Вывод:

Наименьший Q_{center} и соблюдение условий C1/C2 дают компромиссное решение:

$$A_2 \succ A_1 \succ A_3$$

- Оценки и/или веса задаются TFN (треугольные нечеткие числа) $\tilde{x} = (x^L, x^M, x^U)$.
- Операции (максимум, сумма, умножение) выполняются покомпонентно.
- Получаем нечеткие $\tilde{S}_i, \tilde{R}_i, \tilde{Q}_i$; затем дефаззификация в скаляры (обычно центроид $(L + M + U)/3$).
- Особенно удобен при лингвистических оценках экспертов [5, 3, 4].

Для треугольных чисел выделяют следующие математические операции:

- Сумма треугольных чисел:
$$\sum_{i=1}^n \oplus \tilde{N}_i = (\sum_{i=1}^n l_i, \sum_{i=1}^n m_i, \sum_{i=1}^n h_i).$$
- Сумма треугольного числа и скаляра:
$$\tilde{N} \oplus K = (l + K, m + K, h + K).$$
- Вычитание: $\tilde{N}_1 \ominus \tilde{N}_2 = (l_1 - r_2, m_1 - m_2, r_1 - l_2).$
- Вычитание скаляра: $\tilde{N} - K = (l - K, m - K, h - K).$
- Умножение на скаляр: $K \times \tilde{N} = (K \times l, K \times m, K \times h),$ для $K \geq 0$
- Умножение: $\tilde{N}_1 \otimes \tilde{N}_2 = (l_1 \times l_2, m_1 \times m_2, h_1 \times h_2).$
- Деление на скаляр: $\frac{\tilde{N}}{K} = (\frac{l}{K}, \frac{m}{K}, \frac{h}{K}).$
- Оператор MAX: $\underset{i}{MAX} \tilde{N}_i = (\underset{i}{max} l_i, \underset{i}{max} m_i, \underset{i}{max} h_i).$
- Оператор MIN: $\underset{i}{MIN} \tilde{N}_i = (\underset{i}{min} l_i, \underset{i}{min} m_i, \underset{i}{min} h_i).$

Идеальные/надирные TFN (выгодный):

$$\tilde{f}_j^* = (\max_i f_{ij}^L, \max_i f_{ij}^M, \max_i f_{ij}^U).$$

Нормализация (по Opricovic [5]):

$$\tilde{d}_{ij} = \left(\frac{f_j^{*L} - f_{ij}^U}{f_j^{*U} - f_j^{-L}}, \frac{f_j^{*M} - f_{ij}^M}{f_j^{*M} - f_j^{-M}}, \frac{f_j^{*U} - f_{ij}^L}{f_j^{*L} - f_j^{-U}} \right).$$

Агрегация:

$$\tilde{S}_i = \sum_j \tilde{w}_j \otimes \tilde{d}_{ij}, \quad \tilde{R}_i = \max_j (\tilde{w}_j \otimes \tilde{d}_{ij}).$$

Дефаззификация: $S_i = \text{Defuzz}(\tilde{S}_i)$, аналогично для R_i и Q_i [5, 3, 4].

Пример по нечеткой модификации

Данные: 4 альтернативы, 3 критерия, матрица нечетких чисел.

Результат:

- Нечеткие \tilde{Q}_i : $([0.086, 0.448, 1.000], [-0.042, 0.293, 0.715], [-0.394, 0.010, 0.510], [0.074, 0.446, 0.996])$.
- Ранжирование по среднему значению Q : $A3 \rightarrow A2 \rightarrow A4 \rightarrow A1$.
- Дефаззифицированные значения Q_i (пример):
(0.495, 0.314, 0.034, 0.491)
- Ранжирование по точным значениям: $A3 \rightarrow A2 \rightarrow A4 \rightarrow A1$.

- Параметр v управляет компромиссом между S и R .
- Уступка (trade-off): пересчёт весов через tr-коэффициенты позволяет моделировать альтернативные приоритеты критериев.

$D_i = f_i^{*h} - f_i^{\circ l}$ для максимизируемого критерия

$D_i = f_i^{\circ h} - f_i^{*l}$ для минимизируемого критерия

$$tr_i = (D_k * w_i) / (D_i * w_k)$$

$$w'_i = |(D_i * w^{cr} * tr_i) / D_k|$$

Иллюстративный пример: Входные данные

Матрицы альтернатив:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.8 & 0.9 \\ 0.6 & 0.7 & 0.8 \\ 0.8 & 0.9 & 1.0 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.6 & 0.7 \\ 0.8 & 0.9 & 1.0 \\ 0.6 & 0.7 & 0.8 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.9 & 1.0 \\ 0.5 & 0.6 & 0.7 \\ 0.7 & 0.8 & 0.9 \end{bmatrix}$$

Иллюстративный пример: Идеальное и надирное значения

Идеальное значение:

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.6 & 0.7 \\ 0.5 & 0.6 & 0.7 \\ 0.6 & 0.7 & 0.8 \end{bmatrix}$$

Надирное значение:

$$\begin{bmatrix} 0.8 & 0.9 & 1.0 \\ 0.8 & 0.9 & 1.0 \\ 0.8 & 0.9 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Иллюстративный пример: Дефаззифицированные значения

| Альт | Q | | | | S | | | |
|------|--------|-------|-------|-------|--------|-------|-------|-------|
| | Q_l | Q_m | Q_r | Crisp | S_l | S_m | S_r | Crisp |
| A1 | -0.798 | 0.101 | 1.000 | 0.101 | -0.200 | 1.100 | 2.400 | 1.100 |
| A2 | -0.824 | 0.037 | 0.899 | 0.038 | -0.700 | 0.600 | 1.900 | 0.600 |
| A3 | -0.774 | 0.088 | 0.950 | 0.088 | -0.450 | 0.850 | 2.150 | 0.850 |

| Альт | R | | | |
|------|-------|-------|-------|-------|
| | R_l | R_m | R_r | Crisp |
| A1 | 0.000 | 0.500 | 1.000 | 0.500 |
| A2 | 0.200 | 0.600 | 1.000 | 0.600 |
| A3 | 0.200 | 0.600 | 1.000 | 0.600 |

Иллюстративный пример: Ранжирование

| Ранг | Core | Подтверждено | Crisp Q | Crisp S | Crisp R |
|------|------|--------------|---------|---------|---------|
| 1 | A2 | Да | A2 | A2 | A1 |
| 2 | A3 | Нет | A3 | A3 | A2 |
| 3 | A1 | Да | A1 | A1 | A3 |

Иллюстративный пример: Компромиссное решение

- Допустимое превосходство C1: Выполняется
- Допустимая стабильность C2: Выполняется

Компромиссное решение:

$$A_2$$

Иллюстративный пример: Уступки (trade-off)

| tr | Заданный tr | Новые веса |
|-------|-------------|------------|
| 1.000 | 1.000 | 1.000 |
| 1.000 | 15.000 | 15.000 |
| 1.250 | 0.200 | 0.160 |

Иллюстративный пример: Дефаззификация после уступки

| Альт | Q | | | | S | | | |
|------|--------|-------|-------|-------|--------|-------|--------|-------|
| | Q_l | Q_m | Q_r | Crisp | S_l | S_m | S_r | Crisp |
| A1 | -0.447 | 0.143 | 0.688 | 0.132 | -3.000 | 3.480 | 9.960 | 3.480 |
| A2 | -0.210 | 0.455 | 1.000 | 0.425 | 2.520 | 9.000 | 15.480 | 9.000 |
| A3 | -0.525 | 0.000 | 0.530 | 0.001 | -5.840 | 0.640 | 7.120 | 0.640 |

| Альт | R | | | |
|------|-------|-------|--------|-------|
| | R_l | R_m | R_r | Crisp |
| A1 | 0.000 | 3.000 | 9.000 | 3.750 |
| A2 | 3.000 | 9.000 | 15.000 | 9.000 |
| A3 | 0.200 | 0.600 | 6.000 | 1.850 |

Иллюстративный пример: Ранжирование после уступки

| Ранг | Core | Conf. | Crisp Q | Crisp S | Crisp R |
|------|------|-------|---------|---------|---------|
| 1 | A3 | 1 | A3 | A3 | A3 |
| 2 | A1 | 1 | A1 | A1 | A1 |
| 3 | A2 | 1 | A2 | A2 | A2 |

Иллюстративный пример: Итоговое решение

- Допустимое превосходство C1: Не выполняется
- $M = 2$
- Допустимая стабильность C2: Выполняется

Компромиссное решение:

$$A_3, A_1$$

Когда применять какую модификацию

- **Интервальная** – данные заданы диапазонами (measurement error, диапазон оценок) [2, 1].
- **Fuzzy** – экспертные лингвистические оценки, неоднозначные предпочтения, когда важна модель принадлежности [5].
- **Практика:** для быстрой оценки можно использовать центры интервалов / модальные значения TFN; для критичных решений – полные методы с дефаззификацией и анализом пересечений.

Пример из реальной жизни

Предположим, что мы хотим через месяц собрать компьютер. Мы знаем только текущие цены на оперативную память, видеокарты, процессоры, но не можем знать, как они изменятся через месяц. Мы можем только предположить. У нас имеется 4 варианта сборки. Каждый вариант представлен тремя нечеткими числами (оперативная память, видеокарта процессор). Каждое нечеткое число отражает оптимистичное, наиболее вероятное и пессимистичное значение для цены в тысячах рублей.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 15 & 17 & 40 \\ 60 & 70 & 85 \\ 25 & 30 & 36 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 18 & 21 & 35 \\ 75 & 90 & 110 \\ 30 & 35 & 42 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 16 & 18 & 32 \\ 85 & 100 & 120 \\ 35 & 40 & 50 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 14 & 16 & 28 \\ 50 & 60 & 72 \\ 28 & 33 & 39 \end{bmatrix} \quad A_5 = \begin{bmatrix} 20 & 23 & 38 \\ 95 & 115 & 140 \\ 40 & 48 & 58 \end{bmatrix}$$

Компромиссное решение для этих данных: A4, A1.

Сравнение модификаций — результаты ранжирования

Алгоритмы были проверены на наборе данных с информацией о водных ресурсах Млавы, Сербия. Были получены следующие ранги:

Таблица: Результаты ранжирования

| Альтернатива | Классический | Интервальный | Fuzzy |
|--------------|--------------|--------------|-------|
| A1 | 5 | 5 | 5 |
| A2 | 4 | 4 | 4 |
| A3 | 1 | 1 | 2 |
| A4 | 6 | 6 | 6 |
| A5 | 3 | 3 | 1 |
| A6 | 2 | 2 | 3 |

По результатам видно, что учёт неопределённости способен изменить порядок предпочтений (например, A5 поднимается с 3-го места в классическом/интервальном вариантах на 1-е в fuzzy).

- Основной эффект: введение неопределённости (интервалы/TFN) меняет ранжирование — иногда существенно.
- Интервальная версия даёт диапазоны значений и наглядно показывает пересечения — полезно при оценке риска/неопределённости.
- Fuzzy VIKOR лучше отражает лингвистические/субъективные оценки; дефаззификация может «сжать» неопределённость и изменить ранги.
- Практическая рекомендация: при наличии лингвистических оценок применять fuzzy; при измеренных диапазонах — интервальную; всегда анализировать чувствительность по v и способу дефаззификации.

- Классический VIKOR хорош для точных данных; интервальная и fuzzy модификации расширяют применимость в условиях неопределённости.
- Интервальная VIKOR — для диапазонов/погрешностей; даёт интервальные Q_i и частичные порядки.
- Fuzzy VIKOR — для лингвистических/экспертных оценок; требует внимательного выбора метода дефаззификации.
- Рекомендация: при ответственном принятии решений использовать полные расширенные алгоритмы и сопровождать их анализом чувствительности (v , дефаззификация, сравнение интервалов).



Sayadi M. K., Heydari M., Shahanaghi K. Extension of VIKOR method for decision making problem with interval numbers // Applied Mathematical Modelling. 2009. Vol.33, No.5. P.2257–2262.
DOI: 10.1016/j.apm.2008.06.002



Chatterjee P., Chakraborty S. A comparative analysis of VIKOR method and its variants // Decision Science Letters. 2016. Vol.5, No.4. P.469–486.
DOI: 10.5267/j.dsl.2016.5.004



Liu P., Qin X. An Extended VIKOR Method for Decision Making Problem with Interval-Valued Linguistic Intuitionistic Fuzzy Numbers Based on Entropy // Informatica. 2017. Vol.28, No.4. P.665–685.
DOI: 10.15388/Informatica.2017.151



Wan S.-P. The extended VIKOR method for multi-attribute group decision making with triangular intuitionistic fuzzy numbers // Knowledge-Based Systems. 2013. Vol.52. P.65–77.
DOI: 10.1016/j.knosys.2013.06.019



Opricovic S. Fuzzy VIKOR with an application to water resources planning // Expert Systems with Applications. 2011. Vol.38, No.10. P.12983–12990.
DOI: 10.1016/j.eswa.2011.04.097