Исследование модификаций метода VIKOR: интервальная и нечеткая версии

Ванчугов С.М., Гамов И.А.

СПбПУ, ИКНТ ВШ ПИ

2025

Выполнили студенты группы 5140903/40401:
Ванчугов С. М, Гамов И. А.

Руководитель:
Старший преподаватель В. А. Пархоменко

Актуальность и цель

- В задачах многокритериального принятия решений часто требования конфликтуют, нужна компромиссная стратегия.
- Классический VIKOR выдаёт компромиссное ранжирование, но требует точных числовых оценок.
- Цель: описать VIKOR, интервальную и нечеткую модификации, показать реализацию и иллюстративный пример.

Классический VIKOR – формула и логика

Даны альтернативы $A = \{A_1, \ldots, A_m\}$, критерии $C = \{c_1, \ldots, c_n\}$, оценки f_{ij}, веса w_j, $\sum_j w_j = 1$.
Идеальные / надирные:

$$\text{выгодный: } f_j^* = \max_i f_{ij}, \quad f_j^- = \min_i f_{ij},$$
$$\text{затратный: } f_j^* = \min_i f_{ij}, \quad f_j^- = \max_i f_{ij}.$$

Меры:

$$S_i = \sum_{j=1}^{n} w_j \frac{f_j^* - f_{ij}}{f_j^* - f_j^-}, \qquad R_i = \max_j \left\{ w_j \frac{f_j^* - f_{ij}}{f_j^* - f_j^-} \right\}.$$

Компромисс:

$$Q_i = v \frac{S_i - S^*}{S^- - S^*} + (1 - v) \frac{R_i - R^*}{R^- - R^*}.$$

Области применимости и ограничения

- Подходит для инженерии, экологии, управления проектами, инвестиций.
- Ограничение: требует точечных оценок; чувствителен к неопределённости и заданию весов.
- Решение: расширения – интервальная и нечеткая (fuzzy) версии.

Суть интервальной модификации

- Оценки задаются интервалами $f_{ij} = [\underline{f}_{ij}, \overline{f}_{ij}]$.
- Идеальные/надирные точки – интервалы, построенные по компонентам (min/max нижних/верхних границ).
- Для каждого критерия формируют интервальный нормализованный разрыв $D_{ij} = [D_{ij}^{\mathrm{low}}, D_{ij}^{\mathrm{high}}]$ (пессимистичный / оптимистичный сценарии).
- Получают $S_i = [S_i^{\mathrm{low}}, S_i^{\mathrm{high}}]$, $R_i = [R_i^{\mathrm{low}}, R_i^{\mathrm{high}}]$, и интервальные Q_i.
- Ранжирование: часто по центрам интервалов или специальным правилам сравнения интервалов.

Интервальная версия VIKOR предложена в работе [1, 2].

Интервальная арифметика

- Интервал задаётся как $x = [\underline{x}, \overline{x}]$ – множество значений между границами.
- Базовые операции:

$$[a, b] + [c, d] = [a + c,\ b + d],$$

$$[a, b] - [c, d] = [a - d,\ b - c],$$

$$[a, b] \times [c, d] = [\min S,\ \max S], \quad S = \{ac, ad, bc, bd\}.$$

- Деление: $[a, b]/[c, d]$ определена, если $0 \notin [c, d]$; вычисляется как умножение на обратный интервал.

Интервальная арифметика используется в рамках интервального VIKOR по [1].

Формулы по интервальной модификации

Для выгодного критерия:

$$f_j^* = \left[\max_i \underline{f}_{ij},\ \max_i \overline{f}_{ij}\right], \quad f_j^- = \left[\min_i \underline{f}_{ij},\ \min_i \overline{f}_{ij}\right].$$

Нормализация:

$$D_{ij} = \left[\frac{f_j^{*(\mathrm{low})} - \overline{f}_{ij}}{f_j^{*(\mathrm{low})} - f_j^{-(\mathrm{high})}},\ \frac{f_j^{*(\mathrm{high})} - \underline{f}_{ij}}{f_j^{*(\mathrm{high})} - f_j^{-(\mathrm{low})}}\right].$$

Агрегация:

$$S_i = [\sum_j w_j D_{ij}^{\mathrm{low}},\ \sum_j w_j D_{ij}^{\mathrm{high}}], \quad R_i = [\max_j w_j D_{ij}^{\mathrm{low}},\ \max_j w_j D_{ij}^{\mathrm{high}}].$$

Формулы нормализации и агрегации соответствуют интервальному VIKOR [1, 2].

Иллюстративный пример: Исходные данные

Матрица альтернатив (интервальные значения):

Альтернатива	C_1	C_2
A_1	$[0.75, 1.24]$	$[2784, 3192]$
A_2	$[1.83, 2.11]$	$[3671, 3857]$
A_3	$[4.90, 5.73]$	$[4409, 4681]$

Веса критериев: $w = [0.5, 0.5]$
Типы критериев: C_1 — затраты (cost), C_2 — выгоды (benefit)
Параметр v: 0.5

Шаг 1: Интервальные идеал и надир

Идеальное (f*) и надирное (f-) значения:

	f^*	f^-
C_1	$[0.75, 1.24]$	$[4.90, 5.73]$
C_2	$[4409, 4681]$	$[2784, 3192]$

Шаг 2: Интервальные нормализованные разрывы D_{ij}

Альтернатива A1:

$$D = \{[0.098, 0.000], [1.000, 1.000]\}$$

Альтернатива A2:

$$D = \{[0.273, 0.161], [0.454, 0.532]\}$$

Альтернатива A3:

$$D = \{[1.000, 1.000], [0.000, 0.143]\}$$

Шаг 3: Интервальные метрики S_i и R_i

	S_i $[S_{\text{low}}, S_{\text{high}}]$	S_i	R_i $[R_{\text{low}}, R_{\text{high}}]$	R_i
$A1$	$[0.549, 0.500]$		$[0.500, 0.500]$	
$A2$	$[0.363, 0.347]$		$[0.227, 0.266]$	
$A3$	$[0.500, 0.572]$		$[0.500, 0.500]$	

Шаг 4: Интервальные экстремумы

	S^*, S^-	R^*, R^-
S	$[0.363, 0.347], [0.549, 0.572]$	
R	$[0.227, 0.266], [0.500, 0.500]$	

Шаг 5: Интервальная мера компромисса Q_i

	Q_{low}	Q_{high}
$A1$	1.000	0.828
$A2$	0.000	0.032
$A3$	0.878	1.000

Шаг 6: Центры интервалов и ранжирование

$$Q_{\text{center}} = \frac{Q_{\text{low}} + Q_{\text{high}}}{2}$$

	Q_{center}
$A2$	0.016
$A1$	0.914
$A3$	0.939

Ранжирование по Q_{center}: A2 $\rightarrow$ A1 $\rightarrow$ A3

Шаг 7a: Интервальные значения меры компромисса

Интервальные значения меры компромисса Q_i:

	Q_{low}	Q_{high}
$A1$	1.000	0.828
$A2$	0.000	0.032
$A3$	0.878	1.000

Центры интервалов:

$$Q_{\text{center}}(A1) = 0.914, \quad Q_{\text{center}}(A2) = 0.016, \quad Q_{\text{center}}(A3) = 0.939$$

Шаг 7b: Проверка компромиссного решения по условиям C1 и C2

Условие C1 (Acceptable Advantage):

$$Q(A_2) - Q(A_1) = 0.016 - 0.914 = -0.898, \quad \frac{1}{m-1} = \frac{1}{3-1} = 0.5$$

Так как $-0.898 < 0.5$, условие C1 формально выполняется.

Условие C2 (Acceptable Stability):

Лучшая по S и R:

$$S_min = S(A_2) = [0.363, 0.347], \quad R_min = R(A_2) = [0.227, 0.266]$$

A2 сохраняет наименьшие значения S и R, C2 выполняется.

Вывод:

Наименьший Q_{center} и соблюдение условий C1/C2 дают компромиссное решение:

$$A_2$$

Идея нечеткой модификации

- Оценки и/или веса задаются TFN (треугольные нечеткие числа) $\tilde{x} = (x^L, x^M, x^U)$.
- Операции (максимум, сумма, умножение) выполняются покомпонентно.
- Получаем нечеткие $\tilde{S}_i, \tilde{R}_i, \tilde{Q}_i$; затем дефаззификация в скаляры (обычно центроид $(L + M + U)/3$).
- Особенно удобен при лингвистических оценках экспертов [5, 3, 4].

Арифметика неявных (нечетких) чисел

Для треугольных чисел выделяют следующие математические операции:

- Сумма треугольных чисел: $\sum_{i=1\oplus}^{n} \tilde{N}_i = (\sum_{i=1}^{n} l_i, \sum_{i=1}^{n} m_i, \sum_{i=1}^{n} h_i)$.
- Сумма треугольного числа и скаляра: $\tilde{N} \oplus K = (l + K, m + K, h + K)$.
- Вычитание: $\tilde{N}_1 \ominus \tilde{N}_2 = (l_1 - r_2, m_1 - m_2, r_1 - l_2)$.
- Вычитание скаляра: $\tilde{N} - K = (l - K, m - K, h - K)$.
- Умножение на скаляр: $K \times \tilde{N} = (K \times l, K \times m, K \times h)$, для $K \geq 0$
- Умножение: $\tilde{N}_1 \otimes \tilde{N}_2 = (l_1 \times l_2, m_1 \times m_2, h_1 \times h_2)$.
- Деление на скаляр: $\frac{\tilde{N}}{K} = (\frac{l}{K}, \frac{m}{K}, \frac{h}{K})$.
- Оператор MAX: $\underset{i}{MAX} \tilde{N}_i = (\underset{i}{max} l_i, \underset{i}{max} m_i, \underset{i}{max} h_i)$.
- Оператор MIN: $\underset{i}{MIN} \tilde{N}_i = (\underset{i}{min} l_i, \underset{i}{min} m_i, \underset{i}{min} h_i)$.

Формулы

Идеальные/надирные TFN (выгодный):

$$\tilde{f}_j^* = (\max_i f_{ij}^L,\ \max_i f_{ij}^M,\ \max_i f_{ij}^U).$$

Нормализация (*по Opricovic [5]*):

$$\tilde{d}_{ij} = \Big(\frac{f_j^{*L} - f_{ij}^U}{f_j^{*U} - f_j^{-L}},\ \frac{f_j^{*M} - f_{ij}^M}{f_j^{*M} - f_j^{-M}},\ \frac{f_j^{*U} - f_{ij}^L}{f_j^{*L} - f_j^{-U}}\Big).$$

Агрегация:

$$\tilde{S}_i = \sum_j \tilde{w}_j \otimes \tilde{d}_{ij}, \quad \tilde{R}_i = \max_j(\tilde{w}_j \otimes \tilde{d}_{ij}).$$

Дефаззификация: $S_i = \mathrm{Defuzz}(\tilde{S}_i)$, аналогично для R_i и Q_i [5, 3, 4].

Пример по нечеткой модификации

Данные: 4 альтернативы, 3 критерия, матрица нечетких чисел.

Результат:

- Нечеткие $\tilde{Q}_i$: $([0.086, 0.448, 1.000], [-0.042, 0.293, 0.715], [-0.394, 0.010, 0.510], [0.074, 0.446, 0.996])$.
- Ранжирование по среднему значению Q: $A3 \to A2 \to A4 \to A1$.
- Дефаззифицированные значения Q_i (пример): $(0.495, 0.314, 0.034, 0.491)$
- Ранжирование по точным значениям: $A3 \to A2 \to A4 \to A1$.

Нечеткая модификация – реализация и выводы, ч.1

Ключевые этапы реализации:

1. Вход: матрица $(m, n, 3)$ с нечеткими числами $\tilde{f}_{ij} = (l, m, r)$.
2. Вычисление f_j^*, f_j^- по значениям l, m, r.
3. Для каждой пары вычисление $\tilde{D}_{ij}$.
4. Агрегация – получаем нечеткие $\tilde{S}_i, \tilde{R}_i$; формируем интервальные $\tilde{Q}_i$.
5. Ранжирование – по среднему значению Q^m;
6. Дефаззифицирование – сведение к скаляру: $Q = (l + 2m + r)/4$. Ранжируем и применяем условия C_1, C_2 – acceptable advantage / stability.

Результат работы алгоритма:

Таблица: Нечёткие метрики Q, S и R для альтернатив

Альтернатива	Q_i	S_i	R_i	Q_i^{crisp}
A1	[0.086, 0.448, 1.000]	[1.535, 2.184, 2.897]	[1.000, 1.000, 1.000]	0.495
A2	[-0.042, 0.293, 0.715]	[1.103, 1.661, 1.935]	[1.000, 1.000, 1.000]	0.314
A3	[-0.394, 0.010, 0.510]	[0.791, 1.420, 1.770]	[0.516, 0.607, 0.710]	0.034
A4	[0.074, 0.446, 0.996]	[1.727, 2.353, 2.885]	[0.871, 0.903, 1.000]	0.491

Нечеткая модификация – реализация и выводы, ч.3

Ранжирование:

Таблица: Ранжирование альтернатив по fuzzy

Ранг	Core	Conf.	Crisp Q	Crisp S / R
1	A3	0	A3	A3 / A3
2	A2	1	A2	A2 / A4
3	A4	1	A4	A1 / A1
4	A1	1	A1	A4 / A2

Когда применять какую модификацию

- **Интервальная** – данные заданы диапазонами (measurement error, диапазон оценок) [2, 1].
- **Fuzzy** – экспертные лингвистические оценки, неоднозначные предпочтения, когда важна модель принадлежности [5].
- Практика: для быстрой оценки можно использовать центры интервалов / модальные значения TFN; для критичных решений – полные методы с дефаззификацией и анализом пересечений.

Чувствительность и trade-off

- Параметр v управляет компромиссом между S и R.
- Уступка (trade-off): пересчёт весов через tr-коэффициенты позволяет моделировать альтернативные приоритеты критериев.
  $D_i = f_i^{*h} - f_i^{\circ l}$ для максимизируемого критерия
  $D_i = f_i^{\circ h} - f_i^{*l}$ для минимизируемого критерия

$$tr_i = (D_k * w_i)/(D_i * w_k)$$

$$w_i' = |(D_i * w^{\mathrm{cr}} * tr_i)/D_k|$$

Иллюстративный пример: Входные данные

Матрицы альтернатив:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.8 & 0.9 \\ 0.6 & 0.7 & 0.8 \\ 0.8 & 0.9 & 1.0 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.6 & 0.7 \\ 0.8 & 0.9 & 1.0 \\ 0.6 & 0.7 & 0.8 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.9 & 1.0 \\ 0.5 & 0.6 & 0.7 \\ 0.7 & 0.8 & 0.9 \end{bmatrix}$$

Иллюстративный пример: Идеальное и надирное значения

Идеальное значение:

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.6 & 0.7 \\ 0.5 & 0.6 & 0.7 \\ 0.6 & 0.7 & 0.8 \end{bmatrix}$$

Надирное значение:

$$\begin{bmatrix} 0.8 & 0.9 & 1.0 \\ 0.8 & 0.9 & 1.0 \\ 0.8 & 0.9 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Иллюстративный пример: Дефаззифицированные значения

Альт	Q				S			
	Q_l	Q_m	Q_r	Crisp	S_l	S_m	S_r	Crisp
A1	-0.798	0.101	1.000	0.101	-0.200	1.100	2.400	1.100
A2	-0.824	0.037	0.899	0.038	-0.700	0.600	1.900	0.600
A3	-0.774	0.088	0.950	0.088	-0.450	0.850	2.150	0.850

Альт	R			
	R_l	R_m	R_r	Crisp
A1	0.000	0.500	1.000	0.500
A2	0.200	0.600	1.000	0.600
A3	0.200	0.600	1.000	0.600

Иллюстративный пример: Ранжирование

Ранг	Core	Подтверждено	Crisp Q	Crisp S	Crisp R
1	A2	Да	A2	A2	A1
2	A3	Нет	A3	A3	A2
3	A1	Да	A1	A1	A3

Иллюстративный пример: Компромиссное решение

- Допустимое превосходство C1: Выполняется
- Допустимая стабильность C2: Выполняется

Компромиссное решение:

$$\boxed{A_2}$$

Иллюстративный пример: Уступки (trade-off)

tr	Заданный tr	Новые веса
1.000	1.000	1.000
1.000	15.000	15.000
1.250	0.200	0.160

Иллюстративный пример: Дефаззификация после уступки

Альт	Q				S			
	Q_l	Q_m	Q_r	Crisp	S_l	S_m	S_r	Crisp
A1	-0.447	0.143	0.688	0.132	-3.000	3.480	9.960	3.480
A2	-0.210	0.455	1.000	0.425	2.520	9.000	15.480	9.000
A3	-0.525	0.000	0.530	0.001	-5.840	0.640	7.120	0.640

Альт	R			
	R_l	R_m	R_r	Crisp
A1	0.000	3.000	9.000	3.750
A2	3.000	9.000	15.000	9.000
A3	0.200	0.600	6.000	1.850

Иллюстративный пример: Ранжирование после уступки

Ранг	Core	Conf.	Crisp Q	Crisp S	Crisp R
1	A3	1	A3	A3	A3
2	A1	1	A1	A1	A1
3	A2	1	A2	A2	A2

Иллюстративный пример: Итоговое решение

- Допустимое превосходство С1: Не выполняется
- $M = 2$
- Допустимая стабильность С2: Выполняется

Компромиссное решение:

$$\boxed{A_3,\ A_1}$$

Сравнение модификаций — результаты ранжирования

Таблица: Результаты ранжирования

Альтернатива	**Классический**	**Интервальный**	**Fuzzy**
A1	5	5	5
A2	4	4	4
A3	1	1	2
A4	6	6	6
A5	3	3	1
A6	2	2	3

По этим результатам видно, что учёт неопределённости способен изменить порядок предпочтений (например, A5 поднимается с 3-го места в классическом/интервальном вариантах на 1-е в fuzzy).

Анализ результатов

- Основной эффект: введение неопределённости (интервалы/TFN) меняет ранжирование — иногда существенно.
- Интервальная версия даёт диапазоны значений и наглядно показывает пересечения — полезно при оценке риска/неопределённости.
- Fuzzy VIKOR лучше отражает лингвистические/субъективные оценки; дефаззификация может «сжать» неопределённость и изменить ранги.
- Практическая рекомендация: при наличии лингвистических оценок применять fuzzy; при измеренных диапазонах — интервальную; всегда анализировать чувствительность по v и способу дефаззификации.

Выводы

- Классический VIKOR хорош для точных данных; интервальная и fuzzy модификации расширяют применимость в условиях неопределённости.
- Интервальная VIKOR — для диапазонов/погрешностей; даёт интервальные Q_i и частичные порядки.
- Fuzzy VIKOR — для лингвистических/экспертных оценок; требует внимательного выбора метода дефаззификации.
- Рекомендация: при ответственном принятии решений использовать полные расширенные алгоритмы и сопровождать их анализом чувствительности (v, дефаззификация, сравнение интервалов).

Список источников I

Sayadi M. K., Heydari M., Shahanaghi K. Extension of VIKOR method for decision making problem with interval numbers // Applied Mathematical Modelling. 2009. Vol.33, No.5. P.2257–2262. DOI: 10.1016/j.apm.2008.06.002

Chatterjee P., Chakraborty S. A comparative analysis of VIKOR method and its variants // Decision Science Letters. 2016. Vol.5, No.4. P.469–486. DOI: 10.5267/j.dsl.2016.5.004

Liu P., Qin X. An Extended VIKOR Method for Decision Making Problem with Interval-Valued Linguistic Intuitionistic Fuzzy Numbers Based on Entropy // Informatica. 2017. Vol.28, No.4. P.665–685. DOI: 10.15388/Informatica.2017.151

Список источников II

Wan S.-P. The extended VIKOR method for multi-attribute group decision making with triangular intuitionistic fuzzy numbers // Knowledge-Based Systems. 2013. Vol.52. P.65–77.
DOI: 10.1016/j.knosys.2013.06.019

Opricovic S. Fuzzy VIKOR with an application to water resources planning // Expert Systems with Applications. 2011. Vol.38, No.10. P.12983–12990.
DOI: 10.1016/j.eswa.2011.04.097