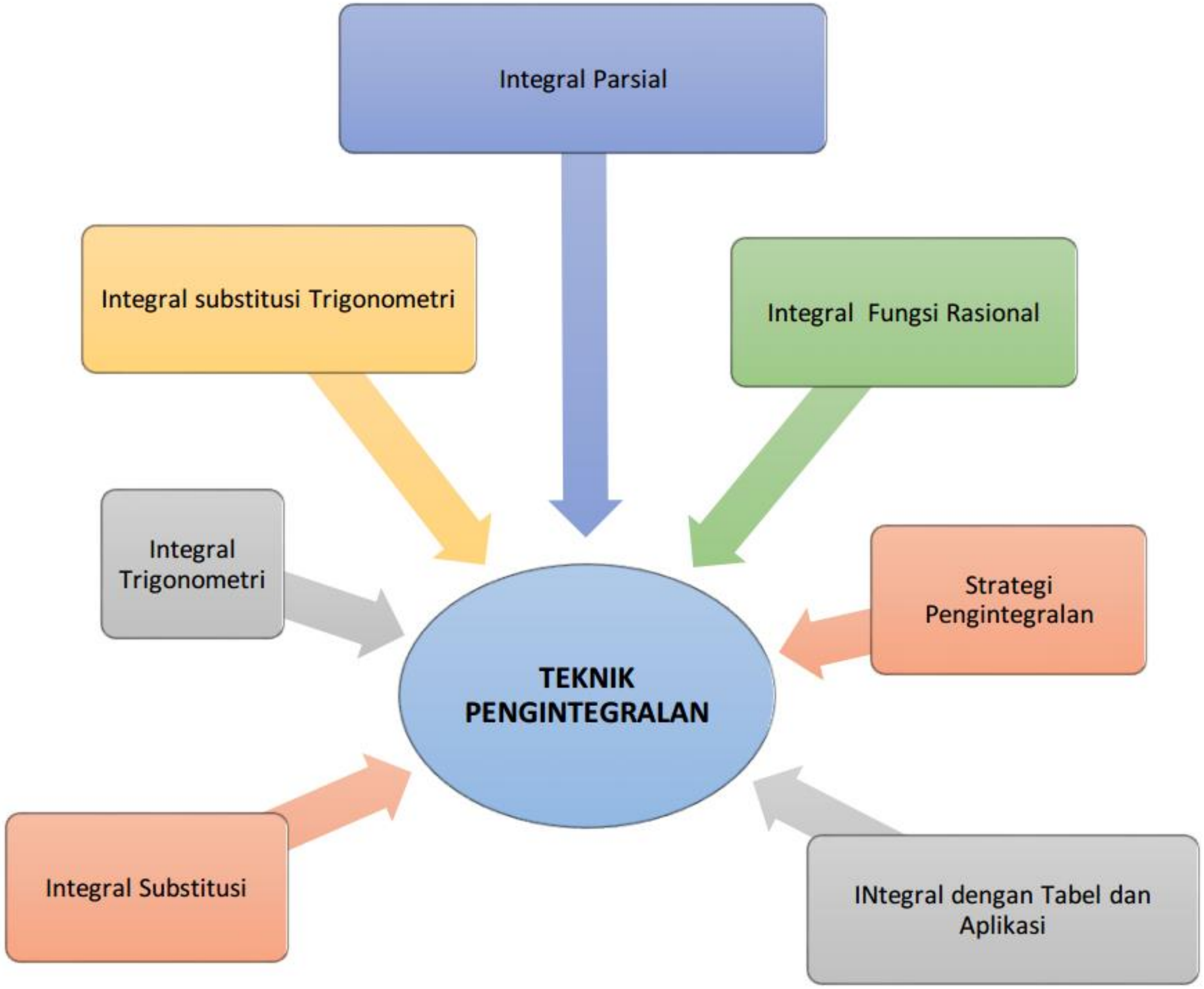
Teknik Pengintegralan

Teknik Pengintegralan



Integral Substitusi

Teorema A

(substitusi) untuk menentukan $\int f(x)\,dx$, kita dapat mensubstitusi $u = g(x)$, dengan g fungsi yang dapat di integralkan. Apabila subsitusi itu mengubah $f(x)\,dx$ menjadi $h(u)\,du$ dan apabila H sebuah anti turunan h, maka:

$$\int f(x)dx = \int h(u)du = H(u) + C = H\big(g(x)\big) + C$$

Integral Substitusi

Konstanta, Pangkat	
1. $\int k\,du = ku + C$	2. $\int u^r du = \begin{cases} \frac{u^{r+1}}{r+1} + C & r \neq -1 \\ \ln\|u\| + C & r = 1 \end{cases}$
Eksponen	
3. $\int e^u du = e^u + C$	4. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C, \quad a \neq 1, a > 0$
Fungsi trigonometri	
5. $\int \sin u\,du = -\cos u + C$	6. $\int \cos u\,du = \sin u + C$
7. $\int \sec^2 u\,du = \tan u + C$	8. $\int \csc^2 u\,du = -\cot u + C$
9. $\int \sec u \tan u\,du = \sec u + C$	10. $\int \csc u \cot u\,du = -\csc u + C$
11. $\int \tan u\,du = -\ln\|\cos u\| + C$	12. $\int \cot u\,du = \ln\|\sin u\| + C$
Fungsi Aljabar	
13. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$	14. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$
15. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left(\frac{\|u\|}{a}\right) + C = \frac{1}{a}\cos^{-1}\left(\frac{a}{\|u\|}\right)$	

Integral Substitusi

Tentukan hasil dari $\int x\sqrt{x^2+4x}\,dx$

Jawab:

Misalkan $u = x^2 + 4$

maka $du = 2x\,dx$

sehingga $x\,dx = \frac{du}{2}$

substitusikan permisalan ke integran pada soal,

$$\int x\sqrt{x^2+4x}\,dx = \int x(x^2+4)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= \int (x^2+4)^{\frac{1}{2}}\,x\,dx$$

$$= \int u^{\frac{1}{2}}\,\frac{du}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot u^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{1}{3}(x^2+4)^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{1}{3}(x^2+4)\sqrt{x^2+4x} + C$$

Integral Substitusi

Tentukan $\int \cos(3x+2)dx$

Jawab:

Misalkan $u = 3x + 2$

Maka $du = 3\ dx$

Sehingga

$$\int \cos(3x+2)dx = \int \cos u \frac{du}{3}$$

$$= \frac{1}{3}\int \cos u\ du$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \sin u + C$$

$$= \frac{1}{3}\sin(3x+2) + C$$

Integral Trigonometri

Pada bagian ini akan dibahas beberapa bentuk integral trigonometri yang sering muncul, yaitu sebagai berikut.

1. Bentuk $\int sin^n\, x\, dx$ dan $\int cos^n\, x\, dx$
2. Bentuk $\int sin^m\, x\;\; cos^n\, x\, dx$
3. Bentuk $\int tan^n x\, dx$ dan $\int cot^n x\, dx$
4. Bentuk $\int tan^m x\, sec^n x\, dx$ dan $\int cot^m\, x\, csc^n x\;\, dx$
5. Bentuk $\int sin\, mx\, cos\, nx\, dx$, $\int sin\, mx\, sin\, nx\, dx,$ dan $\int cos\, mx\, cos\, nx\, dx$

Integral Trigonometri

1. Bentuk $\int \boldsymbol{sin^n\, x\, dx}$ dan $\int \boldsymbol{cos^n\, x\, dx}$

Apabila n bilangan ganjil dan positif, maka langkah yang harus dilakukan adalah sebagai berikut.

- keluarkan satu faktor $\sin x$ atau $\cos x$
- gunakan kesamaan: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ untuk disubstitusikan ke $\sin^2 x$ atau $\cos^2 x$ sesuai soal.
- Lakukan pengintegralan

Apabila n genap, lakukan langkah sebagai berikut.

* keluarkan atau faktorkan bentuk $\sin^2 x$ atau $\cos^2 x$

* gunakan rumus setengah sudut: $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ atau $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

* lakukan pengintegralan.

Integral Trigonometri

Tentukan $\int \sin^5 x \, dx$

Jawab:

$$\int \sin^5 x \, dx = \int \sin^4 x \sin x \, dx$$

$$= \int (\sin^2 x)^2 \sin x \, dx$$

$$= \int (1 - \cos^2 x)^2 \sin x \, dx$$

$$= \int (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x) \sin x \, dx$$

$$= -\int (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x) \, d(\cos x)$$

$$= -\left(\cos x - \frac{2}{3}\cos^3 x + \frac{1}{5}\cos^5 x\right) + C$$

$$= -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C$$

Tentukan $\int \sin^2 x \, dx$

Jawab:

$$\int \sin^2 x \, dx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x \, dx$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\sin 2x + C$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

Integral Substitusi yang Merasionalkan

1. Integral yang Memuat $\sqrt[n]{ax+b}$

Jika di dalam integran terdapat bentuk $\sqrt[n]{ax+b}$, maka substitusikan bentuk $u = \sqrt[n]{ax+b}$ dapat merasionalkan integran.

Tentukan $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x}}$

Jawab:

Misalkan $u = \sqrt{x}$

maka $u^2 = x$

dan $2u\,du = dx$

Sehingga

$$\int \frac{dx}{x-\sqrt{x}} = \int \frac{2u\,du}{u^2-u}$$

$$= \int \frac{2u}{u^2-u}\,du$$

$$= \int \frac{2u}{u(u-1)}\,du$$

$$= \int \frac{2}{u-1}\,du$$

$$= 2\int \frac{1}{u-1}\,d(u-1) \qquad = 2\ln|u-1| + C \qquad = 2\ln\left|\sqrt{x}-1\right| + C$$

Integral Substitusi yang Merasionalkan

2. Integran yang Memuat $\sqrt{a^2 - x^2}, \sqrt{a^2 + x^2}, \sqrt{x^2 - a^2}$

Integral yang mengandung $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$, $\sqrt{x^2 - a^2}$ Untuk merasionalkan bentuk akar akar tersebut kita gunakan masing-masing substitusi berikut.

a) Bentuk pertama $x = a \sin t$

b) Bentuk kedua $x = a \tan t$

c) Bentuk ketiga $x = a \sec t$

Untuk melihat akibat substitusi tersebut, perhatikanlah bahwa:

a) $a^2 - x^2 = a^2 - a^2 \sin^2 t = a^2(1 - \sin^2 t) = a^2 \cos^2 t$

b) $a^2 + x^2 = a^2 + a^2 \tan^2 t = a^2(1 + \tan^2 t) = a \sec^2 t$

c) $x^2 - a^2 = a^2 \sec^2 t - a^2 = a^2(\sec^2 t - a^2) = a^2 \tan^2 t$

Apabila daerah asal dibatasi sedemikian rupa sehingga substitusi a), b), dan c) memiliki invers, maka:

a) $\sqrt{a^2 - x^2} = a|\cos t| = a \cos t$ (sebab $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$);

b) $\sqrt{a^2 + x^2} = a|\sec t| = a \sec t$ (sebab $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$);

c) $\sqrt{x^2 - a^2} = a|\tan t| = \pm a \tan t$ (sebab $0 \leq t \leq \pi, t \neq \frac{\pi}{2}$).

Integral Substitusi yang Merasionalkan

Tentukan $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\,dx$

Jawab:

Misalkan $x = 2\sin t$

maka $dx = 2\cos t\ dt$

dan $\sqrt{4-x^2} = 2\cos t$

Dengan batas $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$

Integral yang mengandung $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{a^2+x^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}$ Untuk merasionalkan bentuk akar akar tersebut kita gunakan masing-masing substitusi berikut.

a) Bentuk pertama $x = a\sin t$
b) Bentuk kedua $x = a\tan t$
c) Bentuk ketiga $x = a\sec t$

Sehingga

$$\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx = \int \frac{2\cos t}{(2\sin t)^2} 2\cos t\,dt$$

$$= \int \frac{4\cos^2 t}{4\sin^2 t}dt$$

$$= \int \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}dt$$

$$= \int \cot^2 t\ dt$$

$$= \int (\csc^2 t - 1)\,dt \qquad = -\cot t - t + C = -\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} - arc\sin\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

Latihan

1 $\int x^3\sqrt{x^4+11}\,dx$

2 $\int (2x-5)(x^2-5x+14)^6\,dx$

3 $\int \cos^4 x\;dx$

4 $\int x\sqrt[3]{x-4}\,dx$

5 $\int \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}}$