APLIKASI TURUNAN; TITIK STASIONER !

By : Damar W, M.Eng.

A. TEOREMA KEBERADAAN MAKS-MIN

Misalkan diberikan fungsi $f(x)$ dan daerah asal S. Maka akan timbul 3 pertanyaan:

(a) Apakah $f(x)$ memiliki suatu nilai maksimum atau minimum pada S?;

(b) Jika $f(x)$ mempunyai suatu nilai maksimum atau minimum, di manakah nilai-nilai tersebut dicapai?; dan

(c) Jika nilai-nilai itu ada, berapakah nilai-nilai maksimum dan minimum itu?.

DEFINISI

Misalkan S, daerah asal f, mengandung tiitk c. Kita katakan bahwa:

i. $f(c)$ adalah **nilai maksimum** f pada S jika $f(c) \geq f(x)$ untuk semua x di S;

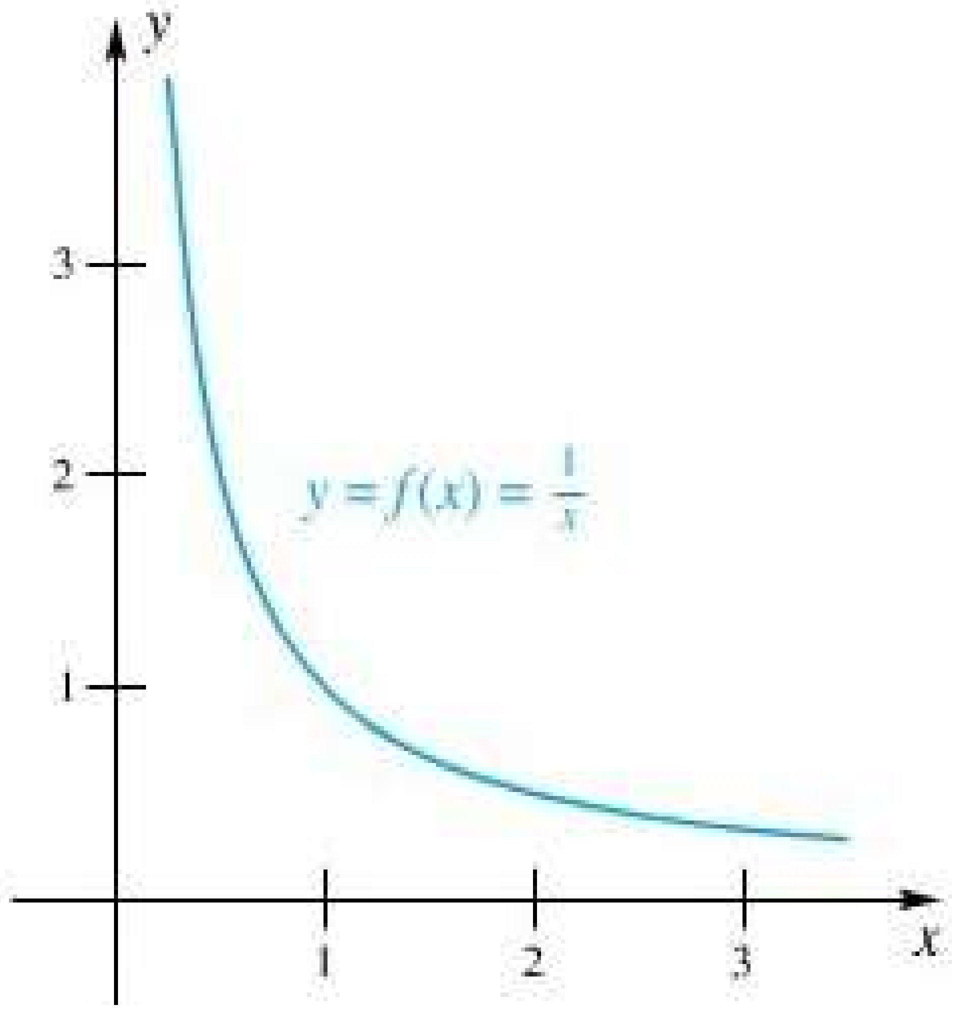
ii. $f(c)$ adalah **nilai minimum** f pada S jika $f(c) \leq f(x)$ untuk semua x di S;

iii. $f(c)$ adalah **nilai ekstrim** f pada S jika ia adalah nilai maksimum atau nilai minimum;

iv. Fungsi yang ingin kita maksimumkan atau minimumkan adalah **fungsi objektif**.

CONTOH

Perhatikan grafik berikut



Fungsi y = $f(x) = 1/(x)$

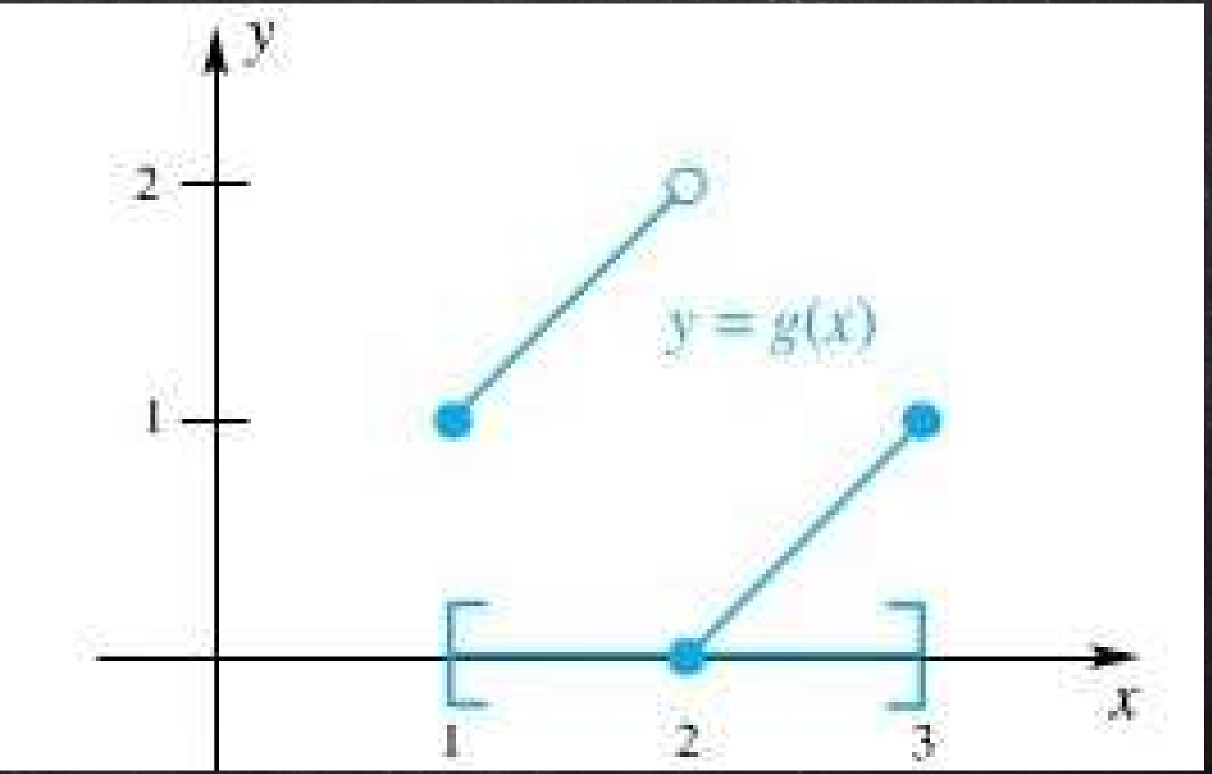
Maka, berdasarkan grafik fungsi di atas diperoleh;

- Pada $[0, \infty)$ tanpa maks atau min
- Pada $[1,3]$ maks = *1*, min = $\frac{1}{3}$
- Pada $(1, 3]$ tanpa maks, min = $\frac{1}{3}$

Jawaban juga tergantung pada jenis fungsi. Misalkan ada fungsi g yang didefinisikan oleh

$$g(x) = \begin{cases} x, & jika\ 1 \leq x < 2 \\ x - 2, & jika\ 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

Pada $S = [1,3]$, g tidak mempunyai nilai maksimum (cukup dekat ke 2 tetapi tidak pernah mencapainya). Namun g mempunyai nilai minimum $g(2) = 0$.

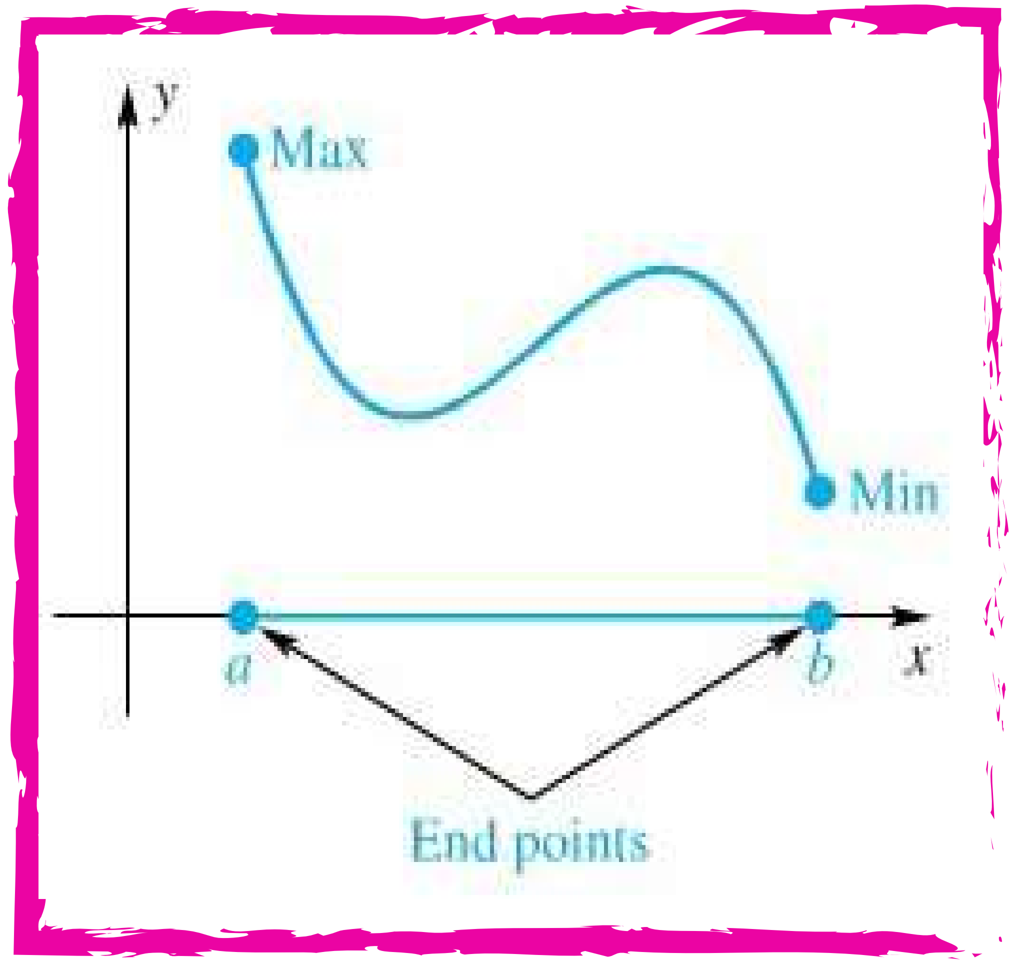


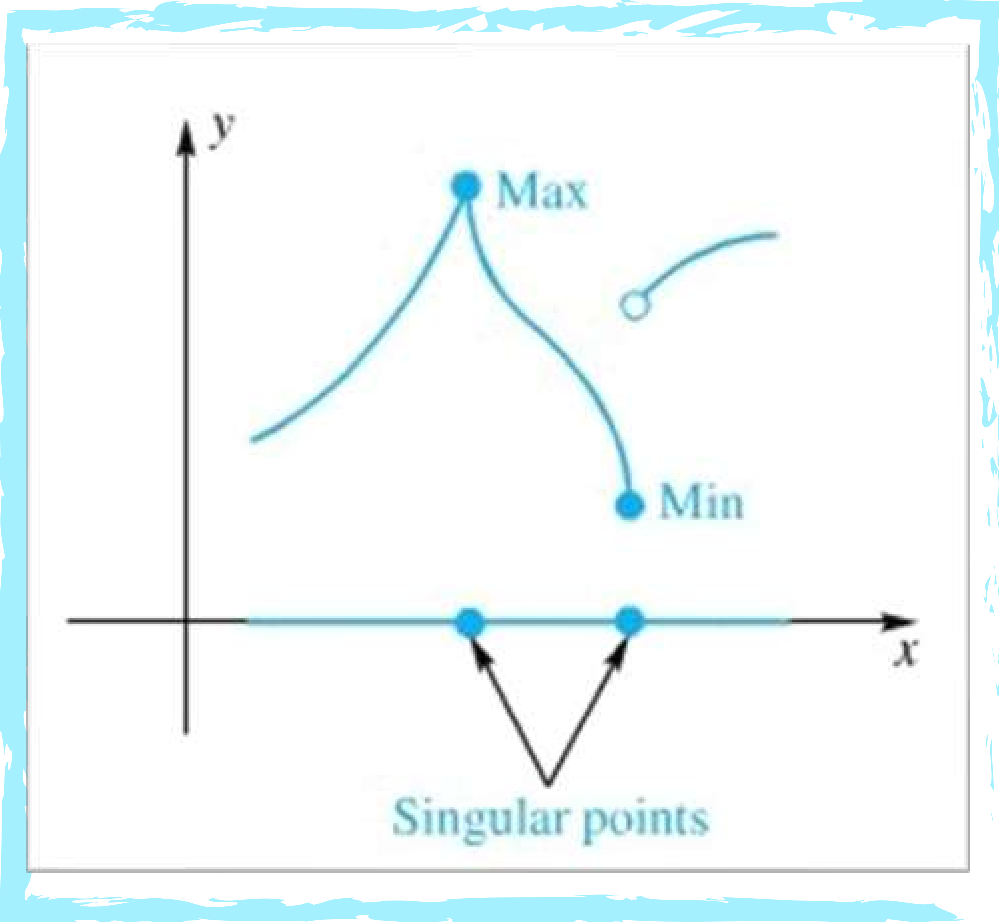
Teorema keberadaan Maks-Min

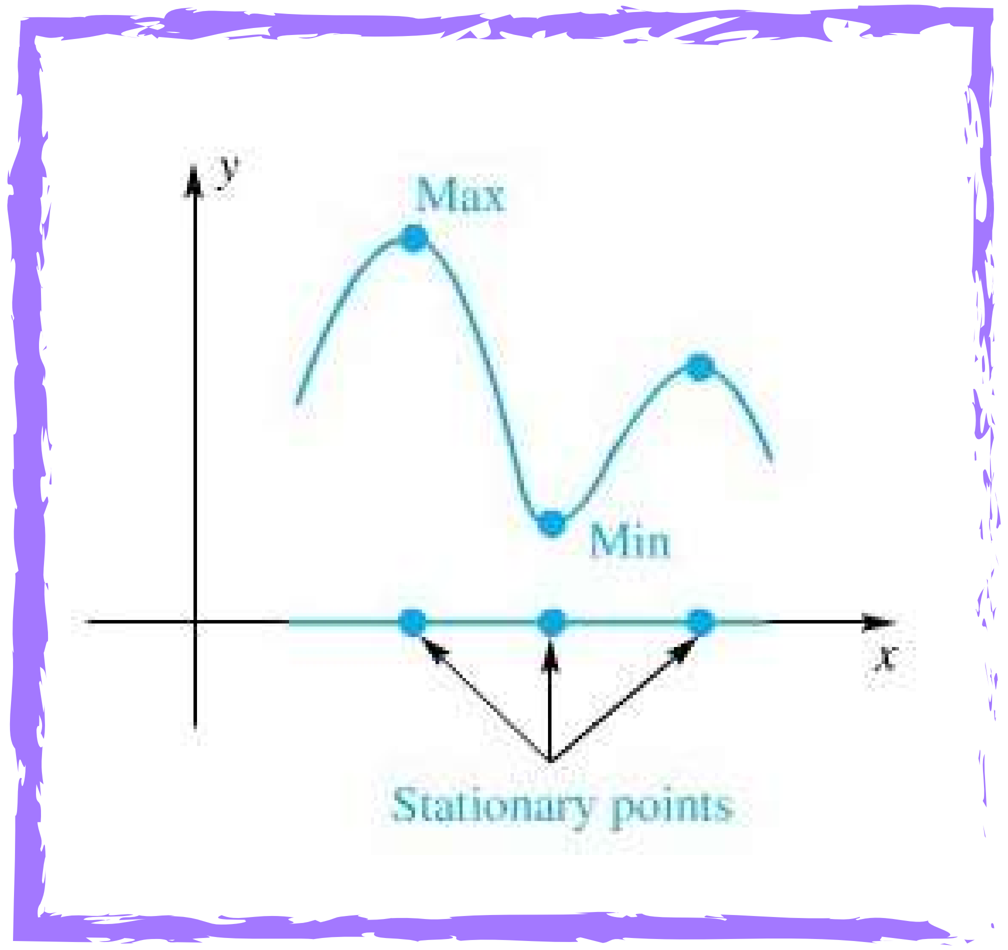
"Jika f kontinu pada interval tertutup $[a, b]$ maka f mencapai nilai maksimum dan nilai minimum disana".

Kata kunci:

f disyaratkan harus *kontinu* dan himpunan S disyaratkan harus berupa *interval tertutup*.







CONTOH SOAL

Diketahui $f(x) = -2x^3 + 3x^2$ carilah titik kritis pada $\left[-\frac{1}{2}, 2\right]$.

- Titik ujung yaitu $-\frac{1}{2}\ dan\ 2$.
- Untuk mencari titik stasioner kita pecahkan $f'(x) = -2x^3 + 3x^2$ untuk x diperoleh 0 dan 1.
- f tidak memiliki titik singular karena f memiliki turunan. Jadi, titik-titik kritisnya adalah $-\frac{1}{2},\ 0,\ 1,\ dan\ 2$.

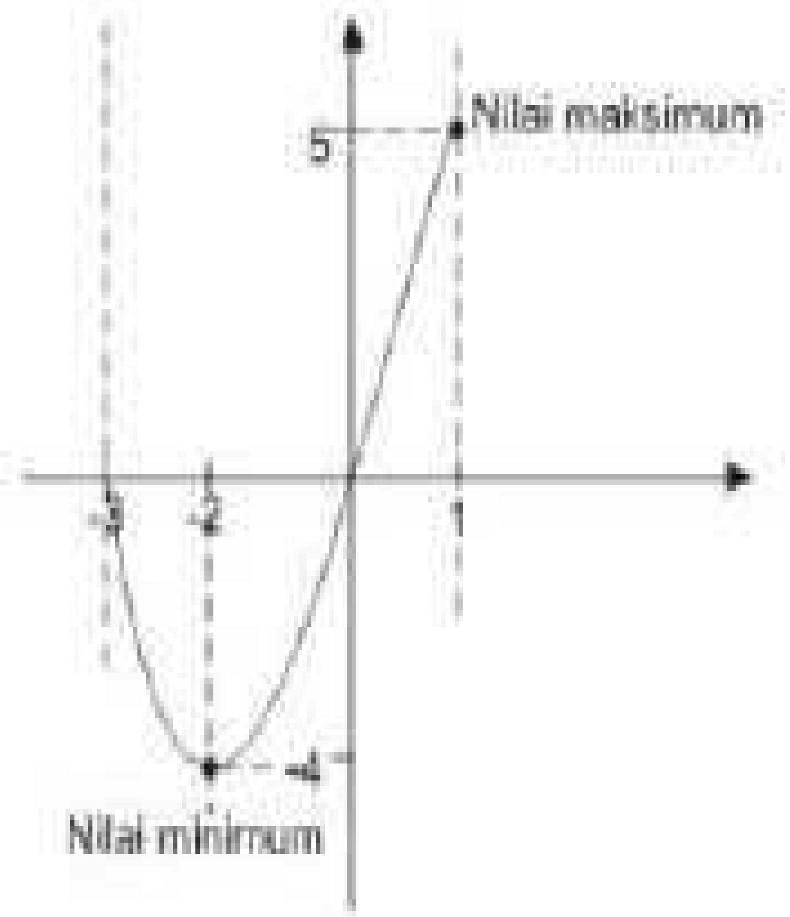
B. TEOREMA TITIK KRITIS

Misalkan f didefinisikan pada interval I yang memuat titik c. Jika $f(c)$ adalah nilai ekstrim, maka c haruslah berupa suatu titik kritis; dengan kata lain, c adalah salah satu dari;

I. Titik ujung dari I;
II. Titik stasioner dari f; yakni titik dimana $f'(c) = 0$; atau
III. Titik singular dari f; yakni titik dimana $f'(c)$ tidak ada.

CONTOH SOAL

1. Carilah nilai-nilai maksimum, minimum dan titik kritis dari $f(x) = x^2 + 4x\ pada\ [-3,1]$!.



Penyelesaian

- Mencari turunan dari, $f(x) = x^2 + 4x$, yaitu $f'(x) = 2x + 4$
- Mencari titik kritis $f'(x) = 0$, yaitu $2x + 4 = 0 \rightarrow\ x = -2$. Jadi titik-titik kritis yang diperoleh adalah -3, -2, 1.

$f(-3) = -3^2 + 4(-3) = -3$

$f(-2) = -2^2 + 4(-2) = -4$

$f(1) = 1^2 + 4(1) = 5$

Jadi, nilai maksimumnya 5 (dicapai pada 1), nilai minimumnya -4 (dicapai pada -2) dan titik-titik titik-titik kritisnya adalah -3, -2, 1.

2. Soal UN 2012

Suatu perusahaan memproduksi x unit barang dengan biaya $(5x^2 - 10x + 30)$ dalam ribuan rupiah untuk tiap unit. Jika barang tersebut terjual habis dengan harga Rp. 50.000,00 tiap unit, maka keuntungan maksimum yang diperoleh perusahaan tersebut adalah?

<u>Penyelesaian</u>

Biaya produksi x unit = $(5x^2 - 10x + 30)x$

Biaya penjualan x unit = 50

Keuntungan = biaya penjualan – biaya produksi

U(x) = $50x - (5x^2 - 10x + 30)x$

= $50x - 5x^3 + 10x^2 - 30x$

= $-5x^3 + 10x^2 + 20x$

- Keuntungan akan maksimum jika:

$U'(x) = 0$

$-15x^2 + 20x + 20 = 0$ (dibagi -5)

$3x^2 - 4x - 4 = 0$

$(3x + 2)(x - 2) = 0$

$x = \frac{-3}{2}\ atau\ x = 2$

Jadi keuntungan akan maksimum jika perusahaan memproduksi 2 unit barang, dengan keuntungan maksimum:

U(2) = $-5(2)^3 + 10(2)^2 + 20(2) \rightarrow 40\ (dalam\ ribuan\ rupiah)$.

Nilai maksimum dan minimum turunan fungsi

PR

Tentukanlah nilai kritis dan nilai maksimum dan minimum fungsi berikut ini:

1. $f(x) = 2x - x^2$ pada [-1,2]
2. $f(x) = -2x^3 - 3x^2 + 1$ pada [-1,2]
3. $f(x) = x^2 + 4x + 4$pada [-4,0]
4. $f(x) = x^2 + x$pada [-2,2]
5. $f(x) = x^2 + 3x$ pada [-2,1]

FIGHTING!