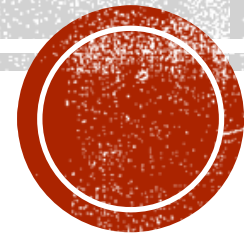


INTEGRAL LIPAT

Universitas tidar



INTEGRAL LIPAT

Definisi

Andaikan $f(x,y)$ suatu fungsi dua variable bebas yang terdefinisi pada suatu persegi panjang tertutup R jika :

$$\lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta A_k$$

Dapat dikatakan bahwa $f(x,y)$ dapat di integralkan pada R , atau bisa juga dituliskan dengan

$\iint_R f(x, y) dA$ yang biasa disebut dengan Integral Lipat Dua $f(x,y)$ pada R diberikan:

$$\iint_R f(x, y) dA = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta A_k$$



INTEGRAL LIPAT

Sifat-sifat Integral Lipat Dua

1. Integral lipat dua adalah linier

$$\iint_R kf(x, y)dA = k \iint_R f(x, y)dA \qquad \iint_R [f(x, y) + g(x, y)]dA = \iint_R f(x, y)dA + \iint_R g(x, y)dA$$

2. Integral lipat dua adalah aditif pada persegi Panjang yang saling melengkapi hanya pada suatu ruas garis

$$\iint_R f(x, y)dA = \iint_{R_1} f(x, y)dA + \iint_{R_2} f(x, y)dA$$

3. Sifat perbandingan berlaku, jika $f(x, y) \leq g(x, y)$ untuk semua (x, y) di R , maka

$$\iint_R f(x, y)dA \leq \iint_R g(x, y)dA$$

4. Jika $f(x, y) = 1$ pada R , maka integral lipat dua merupakan luas daerah R

$$\iint_R kdA = k \iint_R 1dA = kA(R)$$



INTEGRAL LIPAT

Contoh

Hitunglah $I = \int_1^2 \int_2^4 (x + 2y) dx dy$

Jawab:

$$I = \int_1^2 \int_2^4 (x + 2y) dx dy$$

$$= \int_1^2 \left[\frac{1}{2} x^2 + 2xy \right]_2^4 dy$$

$$= \int_1^2 \{ (8 + 8y) - (2 + 4y) \} dy$$

$$= \int_1^2 (6 + 4y) dy = \left[6y + 2y^2 \right]_1^2 = (12 + 8) - (6 + 2) = 20 - 8 = 12$$



INTEGRAL LIPAT

Contoh

Tentukan volume dari benda pejal yang dibatasi oleh $z = 4 - x^2 - y$ dan dibawah oleh persegi panjang $R = \{(x, y); 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 2\}$

$$\begin{aligned}\text{Jawab: } V &= \iint_R z dx dy = \int_0^2 \left[\int_0^1 (4 - x^2 - y) dx \right] dy \\ &= \int_0^2 \left[4x - \frac{1}{3}x^3 - xy \right]_0^1 dy \\ &= \int_0^2 \left[\left(4 - \frac{1}{3} - y \right) - 0 \right] dy = \int_0^2 \left(\frac{11}{3} - y \right) dy = \left[\frac{11}{3}y - \frac{1}{2}y^2 \right]_0^2 \\ &= \left(\frac{11}{3}(2) - \frac{1}{2}(2)^2 \right) - 0 = \frac{22}{3} - \frac{4}{2} = \frac{44 - 12}{6} = \frac{32}{6} = \frac{16}{3}\end{aligned}$$



INTEGRAL LIPAT

Latihan

Tentukan nilai dari

1. $\int_{-2}^2 \int_{-1}^1 (x + y) dx dy$
2. $\int_0^{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} (y \cos x) dx dy$
3. $\int_0^{\pi} \int_0^1 (x \sin y) dx dy$
4. $\int_0^1 \int_0^2 \frac{y}{1 + x^2} dy dx$

Latihan

Tentukan volume benda pejal dari

1. $z = x + y + 1$ atas $R = ((x, y); 0 \leq x \leq 1; 1 \leq y \leq 3)$
2. $z = 2x + 3y$ atas $R = ((x, y); 1 \leq x \leq 2; 0 \leq y \leq 4)$
3. $z = x^2 + y^2 + 2$ atas $R = ((x, y); -1 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1)$
4. $z = 4 - x^2$ atas $R = ((x, y); 0 \leq x \leq 2; 0 \leq y \leq 2)$



MATERI SELESAI

