

# Kombinatorial (part 2)

Pertemuan 11

# Permutasi dan Kombinasi Bentuk Umum

Misalkan: ada  $n$  buah bola yang tidak seluruhnya berbeda warna (jadi, ada beberapa bola yang warnanya sama - *indistinguishable*).

$n_1$  bola diantaranya berwarna 1,  
 $n_2$  bola diantaranya berwarna 2,  
 $\vdots$   
 $n_k$  bola diantaranya berwarna  $k$ ,

dan  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ .

Berapa jumlah cara pengaturan  $n$  buah bola ke dalam kotak-kotak tersebut (tiap kotak berisi satu buah bola)?

Jika  $n$  buah bola itu kita anggap berbeda semuanya, maka jumlah cara pengaturan  $n$  buah bola ke dalam  $n$  buah kotak adalah:

$$P(n, n) = n!.$$

Dari pengaturan  $n$  buah bola itu,

ada  $n_1!$  cara memasukkan bola berwarna 1

ada  $n_2!$  cara memasukkan bola berwarna 2

$\vdots$

ada  $n_k!$  cara memasukkan bola berwarna  $k$

Permutasi  $n$  buah bola yang mana  $n_1$  diantaranya berwarna 1,  $n_2$  bola berwarna 2, ...,  $n_k$  bola berwarna  $k$  adalah:

$$P(n; n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{P(n, n)}{n_1! n_2! \dots n_k!} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

Jumlah cara pengaturan seluruh bola kedalam kotak adalah:

$$\begin{aligned}
 C(n; n_1, n_2, \dots, n_k) &= C(n, n_1) C(n - n_1, n_2) C(n - n_1 - n_2, n_3) \\
 &\quad \dots C(n - n_1 - n_2 - \dots - n_{k-1}, n_k) \\
 &= \frac{n!}{n_1! (n - n_1)!} \frac{(n - n_1)!}{n_2! (n - n_1 - n_2)!} \\
 &\quad \frac{(n - n_1 - n_2)!}{n_3! (n - n_1 - n_2 - n_3)!} \\
 &\quad \dots \frac{(n - n_1 - n_2 - \dots - n_{k-1})!}{n_k! (n - n_1 - n_2 - \dots - n_{k-1} - n_k)!} \\
 &= \frac{n!}{n_1! n_2! n_3! \dots n_k!}
 \end{aligned}$$

Kesimpulan:

$$P(n; n_1, n_2, \dots, n_k) = C(n; n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

Jika  $n_1 = n_2 = \dots = n_k = 1$ , maka, bentuk rumus di atas menjadi permutasi  $n$  elemen yang berbeda, yaitu

$$P(n; 1, 1, \dots, 1) = C(n; 1, 1, \dots, 1) = \frac{n!}{1!1!\dots1!} = n!$$

Contoh 10. Berapa banyak “kata” yang dapat dibentuk dengan menggunakan huruf-huruf dari kata *MISSISSIPPI*?

Penyelesaian:

$$S = \{M, I, S, S, I, S, S, I, P, P, I\}$$

huruf  $M = 1$  buah ( $n_1$ )

huruf  $I = 4$  buah ( $n_2$ )

huruf  $S = 4$  buah ( $n_3$ )

huruf  $P = 2$  buah ( $n_4$ )

$$n = 1 + 4 + 4 + 2 = 11 \text{ buah} = |S|$$



Cara 1: Jumlah *string* =  $P(11; 1, 4, 4, 2)$

$$= \frac{11!}{(1!)(4!)(4!)(2!)} = 34650 \text{ buah.}$$

Cara 2: Jumlah *string* =  $C(11, 1)C(10, 4)C(6, 4)C(2, 2)$

$$= \frac{11!}{(1!)(10!)} \cdot \frac{10!}{(4!)(6!)} \cdot \frac{6!}{(4!)(2!)} \cdot \frac{2!}{(2!)(0!)}$$

$$= \frac{11!}{(1!)(4!)(4!)(2!)}$$

$$= 34650 \text{ buah}$$

**Contoh 11.** Berapa banyak cara membagikan delapan buah mangga kepada 3 orang anak, bila Billy mendapat empat buah mangga, dan Andi serta Toni masing-masing memperoleh 2 buah mangga.

Penyelesaian: Mangga Billy: **BBBB**, mangga Andi: **AA**, mangga Toni: **TT**

$$n = 8, n_1 = 4, n_2 = 2, n_3 = 2, \text{ dan } n_1 + n_2 + n_3 = 4 + 2 + 2 = 8$$

$$\text{Jumlah cara membagi seluruh mangga} = \frac{8!}{(4!)(2!)(2!)} = 420 \text{ cara}$$

**Contoh 12.** 12 buah lampu berwarna (4 merah, 3 putih, dan 5 biru) dipasang pada 18 buah soket dalam sebuah baris (sisanya 6 buah soket dibiarkan kosong). Berapa jumlah cara pengaturan lampu?

Penyelesaian:

$n = 18$ ;  $n_1 = 4$ ,  $n_2 = 3$ ,  $n_3 = 5$ , dan  $n_4 = 6$  (*socket* kosong)

Jumlah cara pengaturan lampu =  $\frac{18!}{(4!)(3!)(5!)(6!)}$  cara





# Kombinasi Dengan Pengulangan

Misalkan terdapat  $r$  buah bola yang semua berwarna sama dan tersedia  $n$  buah kotak.

Tinjau dua kasus berikut:

(i) Jika masing-masing kotak hanya boleh diisi *paling banyak satu* buah bola, maka jumlah cara memasukkan bola:  $C(n, r)$ .

(ii) Jika masing-masing kotak boleh *lebih dari satu* buah bola (tidak ada pembatasan jumlah bola), maka jumlah cara memasukkan bola adalah  $C(n + r - 1, r)$ . Perhatikan bahwa

$$C(n + r - 1, r) = C(n + r - 1, n - 1)$$

**Contoh 13.** Pada persamaan  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$ ,  $x_i$  adalah bilangan bulat  $\geq 0$ . Berapa jumlah kemungkinan solusinya?

Penyelesaian:                                                 
                          $x_1$      $x_2$      $x_3$      $x_4$

Analogi: 12 buah bola akan dimasukkan ke dalam 4 buah kotak (dalam hal ini,  $n = 4$  dan  $r = 12$ ).

Bagilah keduabelas bola itu ke dalam tiap kotak. Misalnya, salah satu cara pembagiannya adalah sbb:

Kotak 1 diisi 3 buah bola ( $x_1 = 3$ )

Kotak 2 diisi 5 buah bola ( $x_2 = 5$ )

Kotak 3 diisi 2 buah bola ( $x_3 = 2$ )

Kotak 4 diisi 2 buah bola ( $x_4 = 2$ )

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 + 5 + 2 + 2 = 12$$

Itu hanya salah satu solusinya. Semuanya ada sebanyak

$$C(n + r - 1, r) = C(4 + 12 - 1, 12) = C(15, 12) = 15! / (12! 3!) = 455$$

buah solusi.

**Contoh 14:** Berapa banyak solusi bilangan bulat  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$  jika  $x_1 \geq 2$  dan  $x_i$  lainnya  $\geq 0$ .

Penyelesaian:

Analogi: 12 buah bola akan dimasukkan ke dalam 4 buah kotak.

Namun karena  $x_1 \geq 2$ , maka masukkan 2 bola terlebih dahulu ke dalam kotak  $x_1$  agar  $x_1$  dijamin terisi minimal 2 buah bola.

Bola yang tersisa adalah  $12 - 2 = 10$ . Sepuluh bola ini dibagi lagi ke dalam 4 kotak (termasuk kotak  $x_1$ ).

Sekarang  $n = 4$  dan  $r = 10$ , sehingga jumlah seluruh solusinya adalah sebanyak

$$C(4 + 10 - 1, 10) = C(13, 10) = 13!/(10! 3!) = 286$$

buah solusi.

# Contoh

Berapa banyak solusi bilangan bulat dari  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 27$  jika  $1 < x_1 \leq 5$ , dan  $x_4 \geq 17$ ?

**Jawaban:**

Analogi, 27 buah bola dimasukkan ke dalam 5 buah kotak

Karena  $x_4 \geq 17$ , masukkan 17 bola dulu ke dalam kotak, sehingga persamaan menjadi:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 27 - 17 = 10, \text{ dengan } 1 < x_1 \leq 5$$

Tinjau untuk setiap kasus  $x_1$

(i) Kasus  $x_1 = 2$

Masukkan 2 bola ke dalam kotak, sehingga persamaan menjadi  $x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 8$

$$r = 8, n = 4$$

$$C(n + r - 1, r) = C(11, 8) = 165$$

(ii) Kasus  $x_1 = 3$

Masukkan 2 bola ke dalam kotak, sehingga persamaan menjadi  $x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7$

$$r = 7, n = 4$$

$$C(n + r - 1, r) = C(10, 7) = 120$$

(iii) Kasus  $x_1 = 4$

Masukkan 4 bola ke dalam kotak, sehingga persamaan menjadi  $x_1 + x_3 + x_4 + x_5 = 6$

$$r = 6, n = 4$$

$$C(n + r - 1, r) = C(9, 6) = 84$$

(iv) Kasus  $x_1 = 5$

Masukkan 5 bola ke dalam kotak, sehingga persamaan menjadi  $x_1 + x_3 + x_4 + x_5 = 5$

$$r = 5, n = 4$$

$$C(n + r - 1, r) = C(8, 5) = 56$$

Jadi, banyak solusi bilangan bulat  $165 + 120 + 84 + 56 = 425$  buah solusi.

**Contoh 15.** 20 buah apel dan 15 buah jeruk dibagin kepada 5 orang anak, tiap anak boleh mendapat lebih dari 1 buah apel dan jeruk, atau tidak sama sekali. Berapa jumlah cara pembagian yang dapat dilakukan?

Penyelesaian:

$n = 5$ ,  $r_1 = 20$  (apel) dan  $r_2 = 15$  (jeruk)

Membagi 20 apel kepada 5 anak:  $C(5 + 20 - 1, 20)$  cara,

Membagi 15 jeruk kepada 5 anak:  $C(5 + 15 - 1, 15)$  cara.

Jumlah cara pembagian kedua buah itu adalah

$$C(5 + 20 - 1, 20) \times C(5 + 15 - 1, 15) = C(24, 20) \times C(19, 15)$$

# Koefisien Binomial

$$(x + y)^0 = 1$$

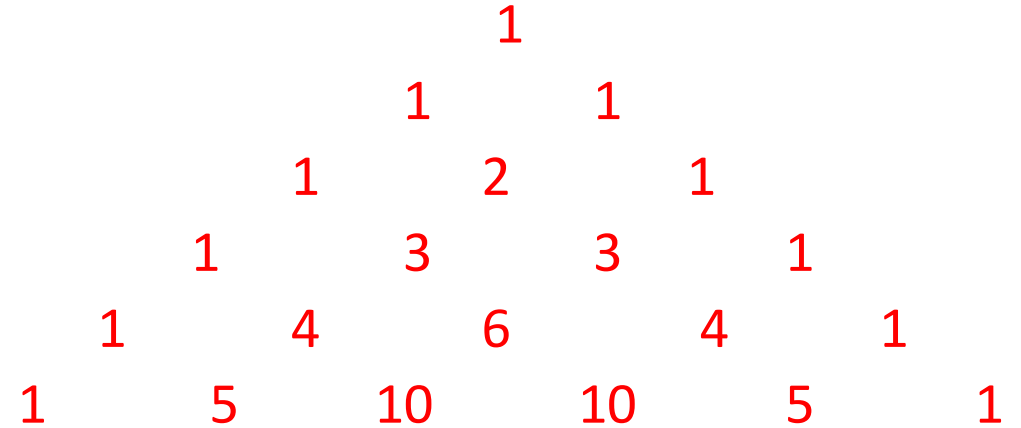
$$(x + y)^1 = x + y$$

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

$$(x + y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$$

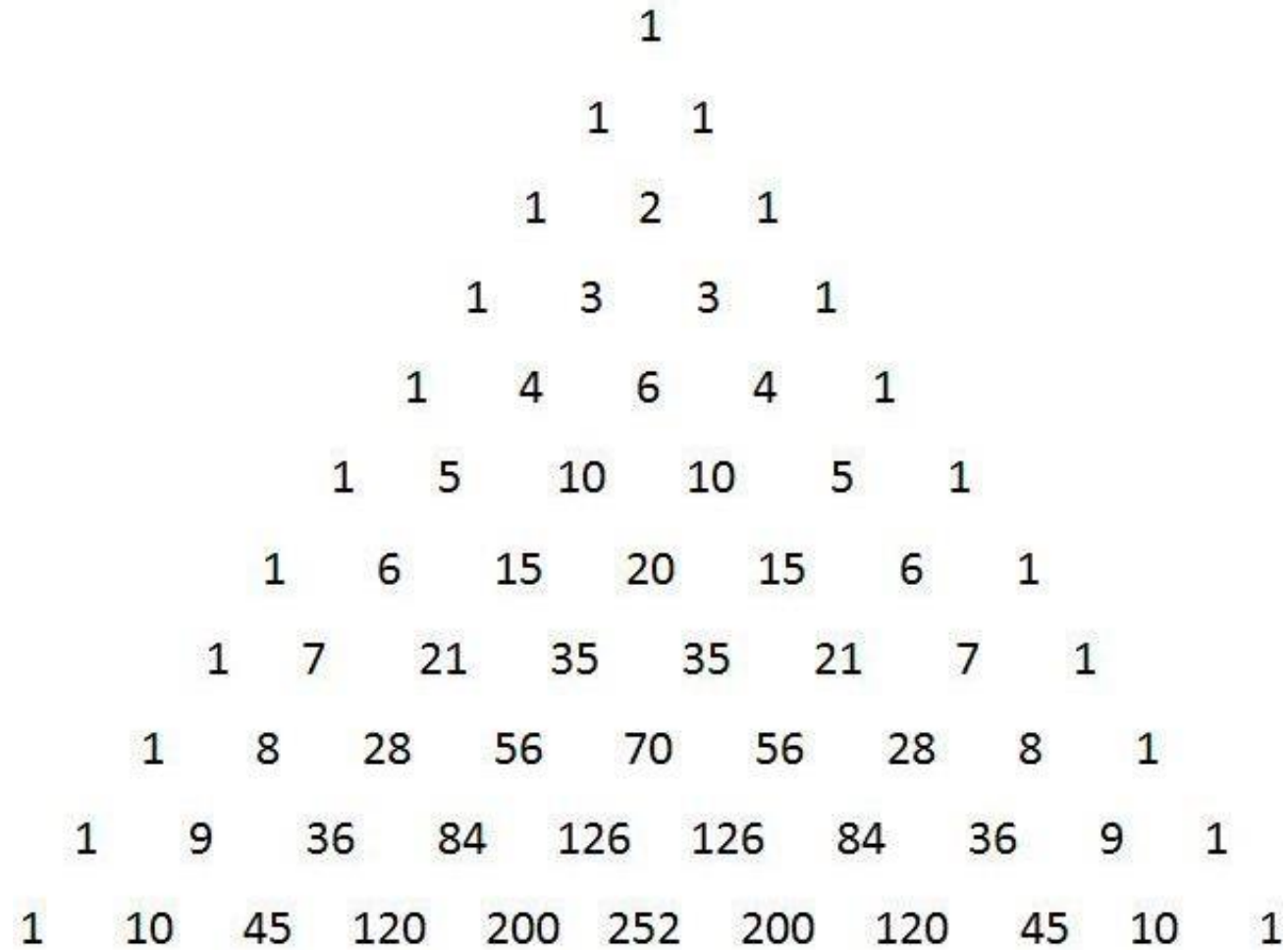


$$(x + y)^n = C(n, 0) x^n + C(n, 1) x^{n-1} y + C(n, 2) x^{n-2} y^2 \dots + C(n, k) x^{n-k} y^k + \dots + C(n, n) y^n$$

$$= \sum_{k=0}^n C(n, k) x^{n-k} y^k$$

Koefisien untuk  $x^{n-k} y^k$  adalah  $C(n, k)$ . Bilangan  $C(n, k)$  disebut **koefisien binomial**.

# Segitiga Pascal



A diagram of Pascal's Triangle, also known as Segitiga Pascal. It consists of 10 rows of numbers arranged in a triangular shape. Each row starts and ends with the number 1. The numbers in each row are the sum of the two numbers directly above them from the previous row. The triangle is centered on the page.

				1						
			1		1					
		1		2		1				
	1		3		3		1			
	1	4		6		4		1		
	1	5	10		10	5		1		
	1	6	15	20		15	6		1	
	1	7	21	35	35	21	7		1	
	1	8	28	56	70	56	28	8		1
	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1
1	10	45	120	200	252	200	120	45	10	1



### Pascal's Triangle - Symmetry (Mirror Image)

Central "spine" numbers (blue) are equal to the "binomial coefficient sum":  
 Central binomial coefficients:  $C(2^n, n) = (2^n)! / (n!)^2$

$$S_{n+1} = (2n)! / (n!)^2$$

Image Copyright 2011 World-Mysteries.com

$$S_{n+1} = (2n)! / (n!)^2$$

$$(x + y)^n = C(n, 0) x^n + C(n, 1) x^{n-1} y + C(n, 2) x^{n-2} y^2 \dots + C(n, k) x^{n-k} y^k + \dots + C(n, n) y^n$$

**Contoh 16.** Jabarkan  $(3x - 2)^3$ .

Penyelesaian:

Misalkan  $a = 3x$  dan  $b = -2$ ,

$$\begin{aligned}(a + b)^3 &= C(3, 0) a^3 + C(3, 1) a^2 b^1 + C(3, 2) a^1 b^2 + C(3, 3) b^3 \\&= 1 (3x)^3 + 3 (3x)^2 (-2) + 3 (3x) (-2)^2 + 1 (-2)^3 \\&= 27 x^3 - 54x^2 + 36x - 8\end{aligned}$$

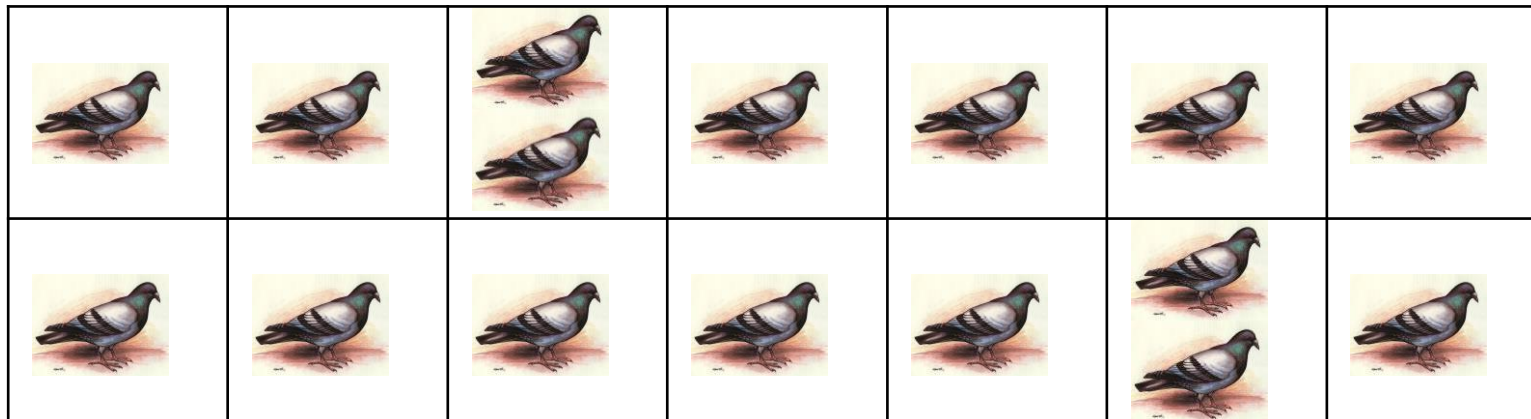
# *Pigeonhole Principle*

- *Pigeonhole principle* = prinsip sarang burung merpati



- **Prinsip Sarang Merpati.** Jika  $n + 1$  atau lebih objek ditempatkan di dalam  $n$  buah kotak, maka paling sedikit terdapat satu kotak yang berisi dua atau lebih objek.

*Bukti:* Misalkan tidak ada kotak yang berisi dua atau lebih objek. Maka, total jumlah objek paling banyak adalah  $n$ . Ini kontradiksi, karena jumlah objek paling sedikit  $n + 1$ .



Gambar Kandang merpati dengan 14 buah sarang (*pigeonhole*) dan 16 ekor merpati.

- Prinsip sarang merpati, jika diterapkan dengan baik, akan memberikan hanya objek-objek yang ada, dan bukan memberitahukan bagaimana mencari objek tersebut dan berapa banyak.
- Pada masalah sarang burung merpati, prinsip ini tidak memberitahukan di sarang merpati mana yang berisi lebih dari satu ekor merpati.

**Contoh 19.** Dari 27 orang mahasiswa, paling sedikit terdapat dua orang yang namanya diawali dengan huruf yang sama, karena hanya ada 26 huruf dalam alfabet.

Jika kita menganggap 27 huruf awal dari nama-nama mahasiswa sebagai merpati dan 26 huruf alfabet sebagai 26 buah sarang merpati, kita bisa menetapkan pemasangan 27 huruf awal nama ke 26 huruf alfabet seperti halnya pemasangan merpati ke sarang merpati.

Menurut prinsip sarang merpati, beberapa huruf awal alfabet dipasangkan dengan paling sedikit dua huruf awal nama mahasiswa.

**Contoh 20.** Misalkan terdapat banyak bola merah, bola putih, dan bola biru di dalam sebuah kotak. Berapa paling sedikit jumlah bola yang diambil dari kotak (tanpa melihat ke dalam kotak) untuk menjamin bahwa sepasang bola yang berwarna sama terambil?

Penyelesaian:

Jika setiap warna dianggap sebagai sarang merpati, maka  $n = 3$ . Karena itu, jika orang mengambil paling sedikit  $n + 1 = 4$  bola (merpati), maka dapat dipastikan sepasang bola yang berwarna sama ikut terambil. Jika hanya diambil 3 buah, maka ada kemungkinan ketiga bola itu berbeda warna satu sama lain. Jadi, 4 buah bola adalah jumlah minimum yang harus diambil dari dalam kotak untuk menjamin terambil sepasang bola yang berwarna sama.

**Prinsip Sarang Merpati yang Dirampatkan.** Jika  $M$  objek ditempatkan di dalam  $n$  buah kotak, maka paling sedikit terdapat satu kotak yang berisi minimal  $\lceil M/n \rceil$  objek.

- **Contoh 21.** Di antara 50 orang mahasiswa, terdapat paling sedikit  $\lceil 50/12 \rceil = 5$  orang yang lahir pada bulan yang sama.



# LATIHAN

1. Tentukan banyaknya cara mengacak kata SURABAYA jika harus diawali huruf mati (huruf konsonan).
2. 100 orang mahasiswa dikirim ke 5 negara, masing-masing negara 20 orang mahasiswa. Berapa banyak cara pengiriman mahasiswa?
3. Berapa banyak kata baru yang dapat dibentuk dari “HIGHLIGHT” jika:
  - a) semua huruf dipakai
  - b) tidak ada huruf ‘l’ yang berurutan
4. Tentukan suku keempat dari penjabaran perpangkatan  $(x - y)^5$ .
5. Seorang anak akan mengambil kaus kaki dari sebuah laci di malam hari saat mati lampu. Jika di laci tersebut tersimpan selusin kaus kaki dengan warna putih, dan selusin kaus kaki warna krem yang tercampur dan tidak berpasangan.
  - a. Berapa kaus kaki yang harus diambil agar memperoleh dua kaus kaki yang berwarna sama?
  - b. Berapa kaus kaki yang harus diambil agar yakin memperoleh dua kaus kaki berwarna putih?