Logika

Pertemuan 2

Logika Proposisi

- Logika proposisi sering juga disebut logika matematika ataupun logika deduktif.
- Logika proposisi berisi pernyataan-pernyataan (dapat tunggal maupun gabungan).
- Pernyataan adalah kalimat deklarasi yang dinyatakan dengan huruf-huruf kecil, misalnya:

p, q, r, s

- Pernyataan mempunyai sifat dasar yaitu dapat bernilai benar (pernyataan benar) atau bernilai salah (pernyataan salah), tetapi tidak mungkin memiliki sifat kedua-duanya.
- Kebenaran atau kesalahan sebuah pernyataan dinamakan nilai kebenaran dari pernyataan tersebut.

Logika Proposisi

Contoh:

1. Bilangan biner digunakan dalam sistem digital adalah pernyataan yang benar.
2. Sistem analog lebih akurat daripada sistem digital adalah pernyataan yang salah.
3. Astaga, mahal sekali harga notebook itu adalah kalimat keheranan, bukan pernyataan.
4. Siang tadi notebook Ira jatuh dari meja adalah bukan pernyataan karena dapat bernilai benar maupun bernilai salah.
5. Eorezdeo lebih bagus kinerjanya dan lebih mahal dari pentium IV generasi sebelumnya adalah pernyataan yang benar.

Pernyataan Gabungan

Konjungsi

Konjungsi adalah pernyataan gabungan dari dua pernyata- an dengan kata penghubung **dan** Notasi-notasi konjungsi:

$$p \wedge q \text{ , } p \times q, \; p.q, \; pq$$

Tabel Kebenaran Konjungsi

p	q	$p \wedge q$
+	+	+
+	–	–
–	+	–
–	–	–

atau

p	$\wedge$	q
+	+	+
+	–	–
–	–	+
–	–	–

dimana + berarti benar dan - berarti salah

Pernyataan Gabungan

Contoh:

- p = sistem analog adalah suatu sistem dimana tanda fisik/ kuantitas, dapat berbeda secara terus-menerus melebihi jarak tertentu adalah pernyataan benar
- q = sistem digital adalah suatu sistem dimana tanda fisik/ kuantitas, hanya dapat mengasumsikan nilai yang berlainan adalah pernyataan yang benar.
- r = sistem bilangan desimal adalah sistem bilangan yang di- gunakan dalam sistem digital adalah pernyataan yang salah
- s = aljabar linear adalah alat matematika dasar untuk disain logika adalah pernyataan salah

Maka:

1. $p \wedge q$ bernilai? p benar dan q benar maka konjungsi benar
2. $q \wedge r$ bernilai? q benar dan r salah maka konjungsi salah
3. $r \wedge s$ bernilai? r salah dan s salah maka konjungsi salah

Pernyataan Gabungan

Disjungsi

- Disjungsi adalah pernyataan gabungan dari dua per- nyataan dengan kata penghubung **atau**. Notasi-notasi disjungsi:

$$p \vee q,\ p + q$$

Tabel Kebenaran Disjungsi

p	q	$p \vee q$
+	+	+
+	–	+
–	+	+
–	–	–

atau

p	$\vee$	q
+	+	+
+	+	–
–	+	+
–	–	–

Pernyataan Gabungan

Contoh:

- p = keyboard adalah alat yang dapat digunakan untuk input data kedalam komputer adalah pernyataan benar.
- q = Harddisk adalah alat yang menentukan kecepatan kerja komputer adalah pernyataan salah.
- r = Procesor alat yang berfungsi sebagai otak dari sebuah komputer adalah pernyataan benar.
- s = Windows XP adalah sistematika menulis buku adalah pernyataan salah.

Maka:

1. p V q bernilai? p benar dan q salah maka disjungsi benar
2. p V r bernilai? p benar dan r benar maka disjungsi salah
3. q V s bernilai? q salah dan s salah maka disjungsi salah

Pernyataan Gabungan

Negasi

- Negasi adalah sebuah pernyataan yang meniadakan pernyataan yang ada, dapat di bentuk dengan menulis “adalah salah bahwa…” atau dengan menyisipkan kata “ tidak” dalam sebuah pernyataan.
- Notasi-notasi negasi:

~p, -p, p’

Tabel kebenaran negasi:

p	~p
+	–
–	+

Pernyataan Gabungan

Contoh:

- p = Harddisk adalah alat yang menentukan kecepatan kerja komputer adalah pernyataan salah

Maka:

~p = Adalah salah bahwa harddisk adalah alat yang menentukan kecepatan kerja komputer adalah pernyataan benar.

Pernyataan Gabungan

Jointdential (Not OR/ NOR)

- Jointdenial adalah pernyataan gabungan yang dihasilkan dari menegasikan disjungsi.
- Notasi NOR:

$$p \downarrow q,\ p \text{ nor } q,\ \sim(p \vee q)$$

Karena jointdenial adalah negasi dari or, maka tabel kebenaran NOR adalah sebagai berikut:

p	q	$p \vee q$	$p \downarrow q$
+	+	+	–
+	–	+	–
–	+	+	–
–	–	–	+

atau

$\sim$	(p	$\vee$	q)
–	+	+	+
–	+	+	–
–	–	+	+
+	–	–	–

Pernyataan Gabungan

Not And (NAND)

- NAND adalah pernyataan gabungan yang dihasilkan dari menegasikan konjungsi.
- Notasi NAND:

$$\sim(p \wedge q), (p \wedge q)'$$

Karena NAND negasi dari konjungsi, maka tabel kebenaran NAND adalah sebagai berikut:

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$
+	+	+	–
+	–	–	+
–	+	–	+
–	–	–	+

atau

$\sim$	(p	$\wedge$	q)
–	+	+	+
+	+	–	–
+	–	–	+
+	–	–	–

Pernyataan Gabungan

Exclusive or (exor)

- Exor adalah pernyataan gabungan dimana salah satu p atau q (tidak kedua-duanya) adalah benar
- Notasi exor: $p \veebar q$

dengan demikian tabel kebenaran exor dapat ditulis sebagai berikut:

p	q	$p \veebar q$
+	+	–
+	–	+
–	+	+
–	–	–

atau

p	$\veebar$	q
+	–	+
+	+	–
–	+	+
–	–	–

Pernyataan Gabungan

Contoh:

- p = sistem analog adalah suatu sistem dimana tanda fisik/ kuantitas, dapat berbeda secara terus-menerus melebihi jarak tertentu. adalah pernyataan benar
- q = sistem digital adalah suatu sistem dimana tanda fisik/ kuantitas, hanya dapat mengasumsikan nilai yang berlainan adalah pernyataan yang benar.
- r = sistem bilangan desimal adalah sistem bilangan yang digunakan dalam system digital adalah pernyataan yang salah.
- s = aljabar linear adalah alat matematika dasar untuk disain logika adalah pernyataan salah.

Maka:

1.	p $\underline{V}$ q bernilai?	p benar dan q benar maka exor salah
2.	p $\underline{V}$ r bernilai?	p benar dan r benar maka exor benar
3.	s $\underline{V}$ q bernilai?	s salah dan q benar maka exor benar
4.	r $\underline{V}$ s bernilai?	r salah dan s salah maka exor salah

Pernyataan Gabungan

Exclusive NOR (exNOR)

- EXNOR adalah pernyataan gabungan **ingkaran** dari EXOR di mana nilai kebenarannya benar bila kedua pernyataannya benar atau salah.
- Notasi EXNOR: $\sim (p \veebar q)$

Dengan demikian tabel kebenaran EXNOR:

p	q	$\sim (p \veebar q)$
+	+	+
+	–	–
–	+	–
–	–	+

Pernyataan Gabungan

Contoh:

- p = sistem analog adalah suatu sistem dimana tanda fisik/ kuantitas, dapat berbeda secara terus-menerus melebihi jarak tertentu. adalah pernyataan benar
- q = sistem digital adalah suatu sistem dimana tanda fisik/ kuantitas, hanya dapat mengasumsikan nilai yang berlainan adalah pernyataan yang benar.
- r = sistem bilangan desimal adalah sistem bilangan yang digunakan dalam sistem digital adalah pernyataan yang salah
- s = aljabar linear adalah alat matematika dasar untuk disain logika adalah pernyataan salah.

Maka:

1. $\sim(p \underline{\vee} q)$ bernilai? p benar dan q benar maka exNOR benar
2. $\sim(p \underline{\vee} r)$ bernilai? p benar dan r benar maka exNOR salah
3. $\sim(s \underline{\vee} q)$ bernilai? s salah dan q benar maka exNOR salah
4. $\sim(r \underline{\vee} s)$ bernilai? r salah dan s salah maka exNOR benar

Implikasi dan Biimplikasi

Implikasi

- Perhatikan pernyataan berikut: **jika memakai Microsoft Word maka Windows adalah sistem operasinya.**

Microsoft Word merupakan syarat cukup bagi Windows, sedangkan Windows merupakan syarat perlu bagi Microsoft Word, artinya Microsoft Word tidak dapat digunakan tanpa win-dows tetapi Windows dapat digunakan tanpa Microsoft Word.

Contoh pernyataan di atas disebut pernyataan bersyarat atau conditional statement.

- Notasi implikasi:

$$p \rightarrow q$$

dibaca: jika p maka q

Implikasi dan Biimplikasi

Kebenaran Implikasi

- Jika Microsoft Word maka Windows sistem operasinya adalah implikasi benar, karena keduanya buatan Microsoft.

Mengacu pada implikasi di atas maka:

- Jika Microsoft Word maka bukan Windows sistem operasinya adalah pernyataan salah, karena sistem operasi Microsoft Word adalah Windows
- Jika bukan Microsoft Word maka Windows sistem operasinya adalah pernyataan benar karena aplikasi under Windows tidak hanya Microsoft Word
- Jika bukan Microsoft word maka bukan windows sistem operasi-nya adalah pernyataan benar, karena aplikasi selain Microsoft Word, sistem operasinya bisa jadi bukan Windows.

Tabel kebenaran implikasi sebagai berikut:

p	q	$p \to q$
+	+	+
+	–	–
–	+	+
–	–	+

Implikasi dan Biimplikasi

Contoh:

Misalkan pernyataan p adalah benar, q adalah salah dan r adalah benar, tentukan kebenaran proposisi berikut:

$$(p \vee q) \rightarrow \sim r$$

Jawab:

Proposisi diatas dapat di ubah menjadi

$$(t \vee f) \rightarrow f$$

$$t \rightarrow f$$

$$f$$

Implikasi dan Biimplikasi

Biimplikasi

Perhatikan pernyataan berikut:

Microsoft Word jika dan hanya jika ingin membuat dokumen dengan sistem operasi Windows

Pernyataan tersebut disebut biimplikasi atau biconditional statement.

Notasi biimplikasi : $p \leftrightarrow q$

dibaca: p jika dan hanya jika q

Implikasi dan Biimplikasi

Kebenaran biimplikasi

Microsoft Word jika dan hanya jika ingin membuat dokumen dengan sistem operasi Windows adalah pernyataan benar

Berdasarkan biimplikasi diatas, maka:

- Microsoft Word jika dan hanya jika tidak membuat dokumen dengan sistem operasi Windows adalah pernyataan salah
- Bukan Microsoft Word jika dan hanya jika membuat dokumen dengan sistem operasi Windows adalah pernyataan salah
- Bukan Microsoft Word jika dan hanya jika tidak membuat dokumen dengan sistem operasi Windows adalah pernyataan benar

Tabel kebenaran biimplikasi:

p	q	$p \leftrightarrow q$
+	+	+
+	–	–
–	+	–
–	–	+

Tautologi dan Kontradiksi

Tautologi

- Tautologi adalah proposisi yang selalu benar apapun pernyataannya.
- Notasi tautologi:

$$p \vee \sim p$$

Tabel kebenaran tautologi:

p	$\sim q$	$p \vee \sim p$
+	–	+
–	+	+

atau

p	$\vee$	$\sim p$
+	+	–
–	+	+

Tautologi dan Kontradiksi

Contoh:

- p = Harddisk adalah alat yang menentukan kecepatan kerja komputer adalah pernyataan salah
- ~p = adalah salah bahwa harddisk adalah alat yang menentukan kecepatan kerja komputer adalah pernyataan benar.

Maka:

1. p V ~p bernilai? maka proposisi benar

Tautologi dan Kontradiksi

Kontradiksi

- Kontradiksi adalah proposisi yang selalu salah apapun pernyataannya
- Notasi kontradiksi:

$$p \wedge \sim p$$

Tabel kebenaran kontradiksi:

p	~ p	p∧ ~ p
+	–	–
–	+	–

Tautologi dan Kontradiksi

Contoh:

- p = Harddisk adalah alat yang menentukan kecepatan kerja komputer adalah pernyataan salah
- ~p = adalah salah bahwa harddisk adalah alat yang menentukan kecepatan kerja komputer adalah pernyataan benar.

Maka:

1. p Λ ~p bernilai? maka proposisi salah

Kesetaraan Logis

Dua buah pernyataan yang berbeda dikatakan setara bila nilai kebenarannya sama

Contoh:

1. Tidak benar, bahwa aljabar linear adalah alat matematika dasar untuk disain logika adalah pernyataan benar.
2. Aljabar Boole adalah alat matematika dasar untuk disain logika adalah pernyataan benar.

Kedua pernyataan di atas mempunyai nilai kebenaran yang sama. Jadi kedua pernyataan di atas setara/ekivalen.
Akibatnya dua proposisi P(p, q, r, ...) dan Q(p, q, r, ...) dapat dikatakan setara jika memiliki tabel kebenaran yang sama. Dua buah proposisi yang setara dapat dinyatakan dengan P(p, q, r, ...)Ξ Q(p, q, r, ...).

Kesetaraan Logis

Contoh:

Selidiki apakah kedua proposisi di bawah setara:

1. Tidak benar, bahwa sistem bilangan biner digunakan dalam sistem digital atau sistem digital hanya dapat mengasum- sikan nilai yang berlainan.
2. Sistem bilangan biner tidak digunakan dalam sistem digital dan tidak benar bahwa sistem digital hanya dapat meng- asumsikan nilai yang berlainan.

Kedua proposisi di atas dapat dituliskan dengan notasi sbb:

1. $\sim (p \vee q)$
2. $\sim p \wedge \sim q$

Sehingga tabel kebenarannya adalah

p	q	~p	~q	$(p \vee q)$	$\sim (p \vee q)$	$\sim p \vee \sim q$
+	+	–	–	+	–	–
+	–	–	+	+	–	–
–	+	+	–	+	–	–
–	–	+	+	–	+	+

Aljabar Proposisi

Aljabar proposisi merupakan penerapan hukum-hukum aljabar dalam logika proposisi. Salah satu manfaat hukum-hukum aljabar proposisi adalah untuk menyederhanakan pernyataan gabungan.

Hukum-hukum tersebut adalah:

1. Idempoten

$$p \vee p \equiv p$$
$$p \wedge p \equiv p$$

2. Asosiatif

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$
$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$

3. Komutatif

$$p \vee q \equiv q \vee p$$
$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$

4. Distribusi

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$
$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

5. Identitas

$$p \vee f \equiv p \qquad p \wedge f \equiv f$$
$$p \vee t \equiv t \qquad p \wedge t \equiv p$$

6. Komplemen

$$p \vee \sim p = t \qquad \sim t = f$$
$$p \wedge \sim p = f \qquad \sim f = t$$

Aljabar Proposisi

Aljabar proposisi merupakan penerapan hukum-hukum aljabar dalam logika proposisi. Salah satu manfaat hukum-hukum aljabar proposisi adalah untuk menyederhanakan pernyataan gabungan.

Hukum-hukum tersebut adalah:

7. Involution

$$\sim p(\sim p) \equiv p$$

8. De Morgan's

$$\sim (p \wedge q) = \sim p \vee q$$

$$\sim (p \vee q) = \sim p \wedge \sim q$$

9. Absorbsi

$$p \vee (p \wedge q) \equiv p$$

$$p \wedge (p \vee q) \equiv p$$

10. Implikasi

$$p \to q = \sim p \vee q$$

11. Biimplikasi

$$p \leftrightarrow q = (p \to q) \wedge (q \to p)$$

12. Kontraposisi

$$p \to q = \sim q \to \sim p$$

Contoh Soal

- Sederhanakan proposisi di bawah (buktikan hukum Absorbsi):

$$p \wedge (p \vee q) \equiv p$$

Jawab

$p \wedge (p \vee q) \equiv (p \vee f) \wedge (p \vee q)$	Hukum Identitas
$\equiv p \vee (f \wedge q)$	Hukum Distributif
$\equiv p \vee f$	Hukum Identitas/ Hukum null
$\equiv p$	Hukum Identitas

Contoh Soal

- Sederhanakan proposisi di bawah (buktikan hukum Absorbsi):

$$p \lor \sim(p \lor q) \equiv p \lor \sim q$$

Jawab

$p \lor \sim(p \lor q) \leftrightarrow p \lor (\sim p \land \sim q)$	Hukum de morgan
$\leftrightarrow (p \lor \sim p) \land (p \lor \sim q)$	Hukum Distributif
$\leftrightarrow T \land (p \lor \sim q)$	Hukum negasi
$\leftrightarrow p \lor \sim q$	Hukum Identitas

Contoh Soal

Tentukan kebenaran dari proposisi-proposisi berikut:

- $(p \vee q) \rightarrow p$
- $(p \wedge (p \vee q)) \leftrightarrow p$

Jawab

Tabel Kebenaran $(p \vee q) \rightarrow p$

p	q	$p \vee q$	$(p \vee q) \rightarrow p$
F	F	F	T
F	T	T	F
T	F	T	T
T	T	T	T

Contoh Soal

Tentukan kebenaran dari proposisi-proposisi berikut:

- $(p \vee q) \rightarrow p$
- $(p \wedge (p \vee q)) \leftrightarrow p$

Jawab

- Tabel Kebenaran $(p \wedge (p \vee q)) \leftrightarrow p$

p	q	$p \vee q$	$p \wedge (p \vee q)$	$(p \wedge (p \vee q)) \leftrightarrow p$
F	F	F	F	T
F	T	T	F	T
T	F	T	T	T
T	T	T	T	T

Soal Latihan

Buktikan proposisi dibawah ini:

1. $(p \rightarrow q) \land \sim q \leftrightarrow \sim(p \lor q)$
2. $((\sim p \lor \sim q) \rightarrow (p \land q \land r)) \leftrightarrow (p \land q)$

Tentukan kebenaran dari proposisi-proposisi berikut:

3. $\sim(p \rightarrow (p \lor q)$
4. $\sim(p \lor q) \leftrightarrow (\sim p \land \sim q)$
5. $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \lor q)$