

Himpunan

Pertemuan 4

Definisi

- Himpunan (*set*) adalah sekumpulan objek yang *berbeda*.
- Objek di dalam himpunan disebut **elemen**, **unsur**, atau **anggota**.
- Contoh: HMTIF adalah contoh sebuah himpunan, di dalamnya berisi anggota berupa mahasiswa IF dan SI. Tiap mahasiswa berbeda satu sama lain.
- Contoh: Satu set komputer desktop terdiri dari CPU, monitor, dan keyboard



- Himpunan mahasiswa



- Satu set mainan huruf (huruf besar dan kecil)



- Perhatikan bedanya:

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow$ Himpunan (*set*)

$\{1, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 5, 6\} \rightarrow$ Himpunan-ganda (*multi-set*) \rightarrow perluasan konsep *set*
 \rightarrow Ada elemen yang berulang (ganda)
 \rightarrow Dibahas dalam sub-bab tersendiri

- Urutan elemen di dalam himpunan tidak penting

$\{a, b, c, d\} = \{d, b, a, c\} = \{c, a, d, b\}$

- Perulangan elemen hanya dihitung satu kali, kecuali jika disebut sebagai *multiset*

$\{1, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 5, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- Setiap elemen di dalam himpunan tidak harus berkorelasi satu sama lain, yang penting BERBEDA satu sama lain

$\{56, \text{Rp3000}, \text{Amir}, \text{cacing}, \text{Silver Queen}, -45^\circ \text{C}, \text{paku}\}$

Cara Penyajian Himpunan

1. Enumerasi

Setiap anggota himpunan didaftarkan secara rinci.

Contoh.

- Himpunan empat bilangan asli pertama: $A = \{1, 2, 3, 4\}$.
- Himpunan lima bilangan genap positif pertama: $B = \{4, 6, 8, 10\}$.
- $C = \{\text{kucing}, a, \text{Amir}, 10, \text{paku}\}$
- $R = \{a, b, \{a, b, c\}, \{a, c\}\}$
- $C = \{a, \{a\}, \{\{a\}\}\}$
- $K = \{\{\}\}$
- Himpunan 100 buah bilangan asli pertama: $\{1, 2, \dots, 100\}$
- Himpunan bilangan bulat ditulis sebagai $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.

Keanggotaan

$x \in A$: x merupakan anggota himpunan A ;

$x \notin A$: x bukan merupakan anggota himpunan A .

- **Contoh.** Misalkan:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, \quad R = \{a, b, \{a, b, c\}, \{a, c\}\}$$

$$K = \{\{\}\}$$

maka

$$3 \in A$$

$$\{a, b, c\} \in R$$

$$c \notin R$$

$$\{\} \in K$$

$$\{\} \notin R$$

Contoh . Jika

$$P_1 = \{a, b\},$$

$$P_2 = \{ \{a, b\} \},$$

$$P_3 = \{ \{ \{a, b\} \} \},$$

maka

$$a \in P_1$$

$$a \notin P_2$$

$$P_1 \in P_2$$

$$P_1 \notin P_3$$

$$P_2 \in P_3$$

2. Simbol-simbol Baku

P = himpunan bilangan bulat positif = $\{1, 2, 3, \dots\}$

N = himpunan bilangan alami (natural) = $\{1, 2, \dots\}$

\mathbf{Z} = himpunan bilangan bulat = $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

\mathbf{Z}^+ = himpunan bilangan bulat positif = $\{1, 2, 3, \dots\}$

\mathbf{Q} = himpunan bilangan rasional = $\{a/b \mid a, b \in \mathbf{Z} \text{ dan } b \neq 0\}$
= $\{\dots, -3/4, -4/5, 2/3, 1/2, \dots\} = \{\dots, -0.6, -0.8, 0.666\dots, 0.5, \dots\}$

\mathbf{R} = himpunan bilangan riil

\mathbf{R}^+ = himpunan bilangan riil positif

\mathbf{C} = himpunan bilangan kompleks = $\{a + bi \mid a, b \in \mathbf{R}\}$

Himpunan yang universal: **semesta pembicaraan**, disimbolkan dengan U atau S .

Contoh: Misalkan $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dan A adalah himpunan bagian dari U , dengan
 $A = \{1, 3, 5\}$.

3. Notasi Pembentuk Himpunan

- Notasi: $\{ x \mid \text{syarat yang harus dipenuhi oleh } x \}$

Contoh.

(i) A adalah himpunan bilangan bulat positif kecil dari 5 ditulis sebagai

$$A = \{ x \mid x \text{ adalah bilangan bulat positif lebih kecil dari } 5 \}$$

$$\text{atau } A = \{ x \mid x \in \mathbf{P}, x < 5 \} = \{1, 2, 3, 4\}$$

(ii) $M = \{ x \mid x \text{ adalah mahasiswa yang mengambil mata kuliah Matematika Diskret} \}$

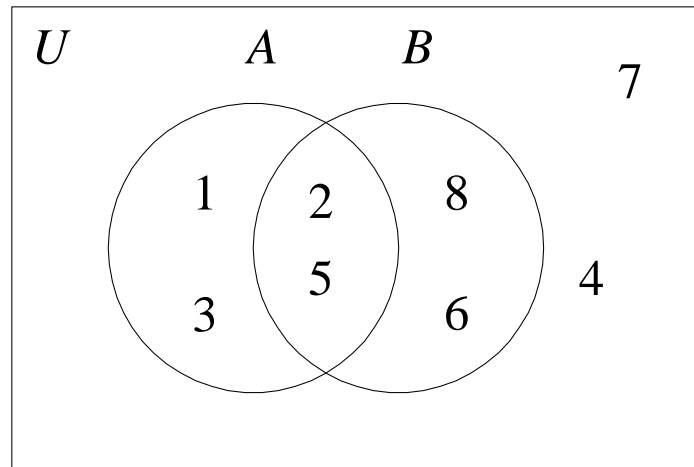
4. Diagram Venn

Contoh.

Misalkan $U = \{1, 2, \dots, 7, 8\}$,

$A = \{1, 2, 3, 5\}$ dan $B = \{2, 5, 6, 8\}$.

Diagram Venn:



Kardinalitas

Jumlah elemen di dalam A disebut **kardinal** dari himpunan A .

Notasi: $n(A)$ atau $|A|$

Contoh .

(i) $B = \{x \mid x \text{ merupakan bilangan prima lebih kecil dari } 20\}$,

atau $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$ maka $|B| = n(B) = 8$

(ii) $T = \{\text{kucing}, a, \text{Amir}, 10, \text{paku}, \text{laptop}\}$, maka $|T| = 6$

(iii) $A = \{2, \{2, 3\}, \{4\}, 6, \{\{7\}\}\}$, maka $|A| = 5$

(iv) $C = \emptyset$, maka $n(C) = 0$

(v) $D = \{x \in \mathbf{N} \mid x < 5000\}$, maka $n(D) = 4999$

(vi) $D = \{x \in \mathbf{N} \mid x \geq 5000\}$, maka $n(D)$ tak berhingga

Himpunan kosong (*null set*)

- Himpunan dengan kardinal = 0 disebut himpunan kosong (*null set*).
- Notasi : \emptyset atau $\{\}$

Contoh.

(i) $E = \{ x \mid x < x \}$, maka $n(E) = 0$

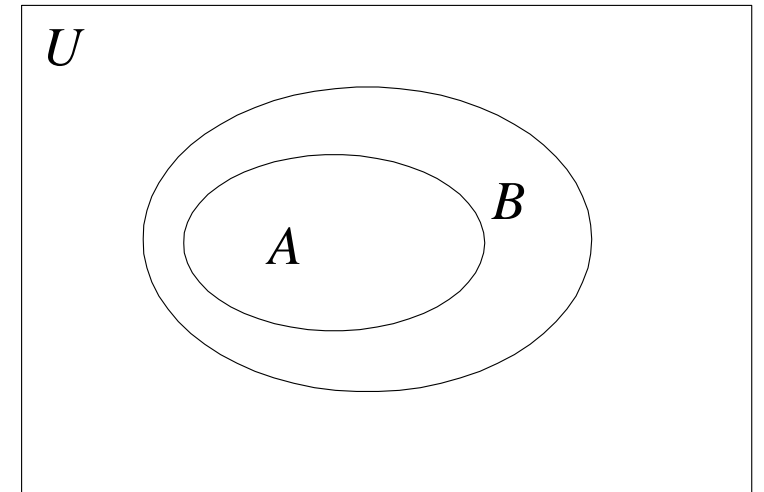
(ii) $P = \{ \text{orang Indonesia yang pernah ke bulan} \}$, maka $n(P) = 0$

(iii) $A = \{ x \mid x \text{ adalah akar riil persamaan kuadrat } x^2 + 1 = 0 \}$, $n(A) = 0$

- himpunan $\{\{\}\}$ dapat juga ditulis sebagai $\{\emptyset\}$
- himpunan $\{\{\}, \{\{\}\}\}$ dapat juga ditulis sebagai $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
- $\{\emptyset\}$ bukan himpunan kosong karena ia memuat satu elemen yaitu \emptyset .

Himpunan Bagian (*Subset*)

- Notasi: $A \subseteq B$
- **Defenisi:** Himpunan A dikatakan himpunan bagian dari himpunan B jika dan hanya jika setiap elemen A merupakan elemen dari B .
- Secara formal: $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \rightarrow x \in B)$
- A adalah *subset* dari B .
Dalam hal ini, B dikatakan *superset* dari A ,
 $B \supseteq A$



Contoh.

(i) $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$

(ii) $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\}$

(iii) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

(iv) Jika $A = \{ (x, y) \mid x + y < 4, x \geq 0, y \geq 0 \}$ dan

$B = \{ (x, y) \mid 2x + y < 4, x \geq 0 \text{ dan } y \geq 0 \}$, maka $B \subseteq A$.

(v) $A = \{3, 9\}$, $B = \{5, 9, 1, 3\}$, $A \subseteq B$? Benar

(vi) $A = \{3, 3, 3, 9\}$, $B = \{5, 9, 1, 3\}$, $A \subseteq B$? Benar

(vii) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $A \subseteq B$? salah

- Perhatikan bahwa:
 $\emptyset \subseteq A$ untuk sembarang himpunan A
 $A \subseteq A$ untuk sembarang himpunan A
- $\emptyset \subseteq A$ dan $A \subseteq A$, maka \emptyset dan A disebut himpunan bagian tak-sebenarnya (*improper subset*) dari himpunan A .

Contoh: $A = \{1, 2, 3\}$, maka

$\{1, 2, 3\}$ dan \emptyset adalah *improper subset* dari A .

$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$ adalah *proper subset* dari A

- A dikatakan himpunan bagian sejati (*proper subset*) dari B jika:
 - (i) setiap elemen dari A juga elemen dari B , dan
 - (ii) sekurang-kurangnya ada satu elemen di B yang tidak ada di A

- Perhatikan bahwa penulisan $A \subseteq B$ berbeda dengan $A \subset B$

(i) $A \subset B$: digunakan untuk menekankan bahwa A adalah himpunan bagian dari B tetapi $A \neq B$.

- A disebut himpunan bagian sejati (*proper subset*) dari B .
- Contoh: $\{1\}$ dan $\{2, 3\}$ adalah *proper subset* dari $\{1, 2, 3\}$

Jadi, $\{1\} \subset \{1, 2, 3\}$, $\{2, 3\} \subset \{1, 2, 3\}$

(ii) $A \subseteq B$: digunakan untuk menekankan bahwa A adalah himpunan bagian dari B yang memungkinkan $A = B$.

- Contoh: $\{1, 2, 3\} \subseteq \{\text{himpunan bilangan asli} < 4\}$
 $\{1, 2, 3\}$ adalah *improper subset* dari $\{\text{himpunan bilangan asli} < 4\}$

- Latihan

Misalkan $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Tentukan semua kemungkinan himpunan C sedemikian sehingga $A \subset C$ dan $C \subset B$, yaitu A adalah *proper subset* dari C dan C adalah *proper subset* dari B .

Jawaban:

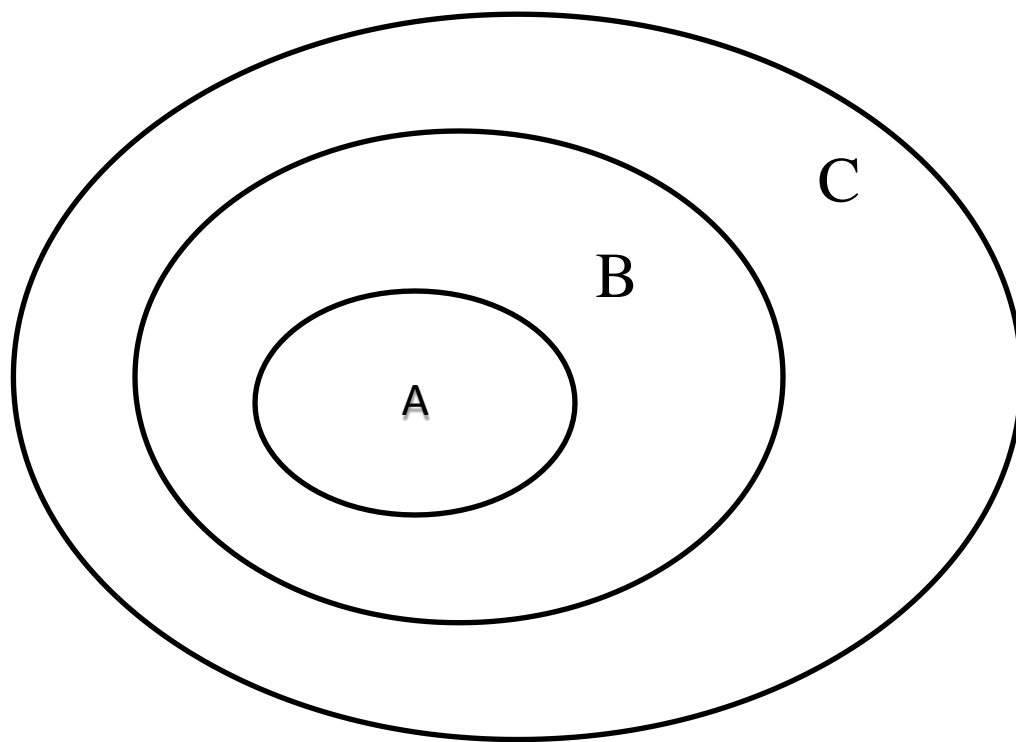
Data: $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, lalu $A \subset C$ dan $C \subset B$

C harus mengandung semua elemen $A = \{1, 2, 3\}$ dan sekurang-kurangnya satu elemen dari B .

Dengan demikian, $C = \{1, 2, 3, 4\}$ atau $C = \{1, 2, 3, 5\}$.

C tidak boleh memuat 4 dan 5 sekaligus karena C adalah *proper subset* dari B .

- Jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq C$ maka $A \subseteq C$



Latihan

1. Misalkan $A = \{5\}$ dan $B = \{5, \{5\}\}$.
 - (a) Apakah $A \subseteq B$? Jelaskan!
 - (b) Apakah $A \in B$? Jelaskan!
 - (c) Apakah A adalah himpunan bagian sebenarnya (*proper subset*) dari B ?
2. Tentukan apakah pernyataan di bawah ini benar atau salah:
 - (a) $\{\emptyset\} \subseteq \{\emptyset\}$
 - (b) $\emptyset \in \{\emptyset\}$
 - (c) $\{\emptyset\} \in \{\emptyset\}$
 - (d) $\{a, b\} \subseteq \{a, b, \{\{a, b\}\}\}$
 - (e) Jika $A \subseteq B$ dan $B \in C$, maka $A \in C$
 - (f) Jika $A \in B$ dan $B \subseteq C$, maka $A \in C$.
 - (g) Jika $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, maka $\emptyset \in 2^A$
 - (h) Jika $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, maka $\{\{\emptyset\}\} \subseteq 2^A$

Himpunan yang Sama

- **Defenisi:** $A = B$ jika dan hanya jika setiap elemen A merupakan elemen B dan sebaliknya setiap elemen B merupakan elemen A .
- $A = B$ jika A adalah himpunan bagian dari B dan B adalah himpunan bagian dari A . Jika tidak demikian, maka $A \neq B$.
- Notasi : $A = B \iff A \subseteq B \text{ dan } B \subseteq A$

Contoh.

- (i) Jika $A = \{ 0, 1 \}$ dan $B = \{ x \mid x(x - 1) = 0 \}$, maka $A = B$
 - (ii) Jika $A = \{ 3, 5, 8 \}$ dan $B = \{ 5, 3, 8 \}$, maka $A = B$
 - (iii) Jika $A = \{ 3, 5, 5, 5, 8, 8 \}$ dan $B = \{ 5, 3, 8 \}$, maka $A = B$
 - (iv) Jika $A = \{ 3, 5, 8, 5 \}$ dan $B = \{ 3, 8 \}$, maka $A \neq B$
 - (iv) $A = \{ \text{anjing, kucing, kuda} \}$, $B = \{ \text{kucing, kuda, tupai, anjing} \}$, maka $A \neq B$
- Untuk tiga buah himpunan, A , B , dan C berlaku aksioma berikut:
 - (a) $A = A$, $B = B$, dan $C = C$
 - (b) jika $A = B$, maka $B = A$
 - (c) jika $A = B$ dan $B = C$, maka $A = C$

Himpunan yang Ekuivalen

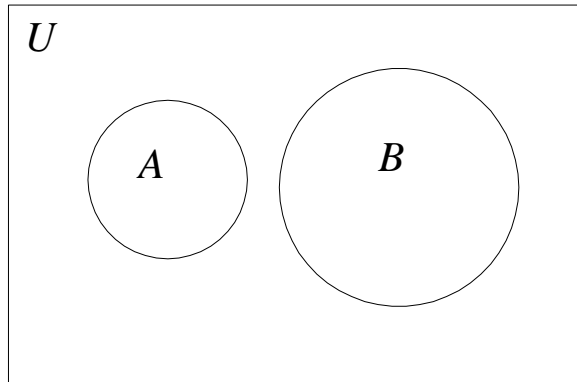
- **Defenisi:** Himpunan A dikatakan ekuivalen dengan himpunan B jika dan hanya jika kardinal dari kedua himpunan tersebut sama.
- Notasi : $A \sim B \leftrightarrow |A| = |B|$

Contoh. Misalkan $A = \{ 1, 3, 5, 7 \}$ dan $B = \{ a, b, c, d \}$, maka $A \sim B$ sebab $|A| = |B| = 4$

Himpunan Saling Lepas

- **Defenisi:** Dua himpunan A dan B dikatakan saling lepas (*disjoint*) jika keduanya tidak memiliki elemen yang sama.
- Notasi : $A // B$

- Diagram Venn:



Contoh. Jika $A = \{ x \mid x \in \mathbf{P}, x < 8 \}$ dan $B = \{ 10, 20, 30, \dots \}$, maka $A // B$.

Himpunan Kuasa

- **Defenisi:** Himpunan kuasa (*power set*) dari himpunan A adalah suatu himpunan yang elemennya merupakan semua himpunan bagian dari A .
- Notasi: $P(A)$ atau 2^A
- Jika $|A| = m$, maka $|P(A)| = 2^m$.

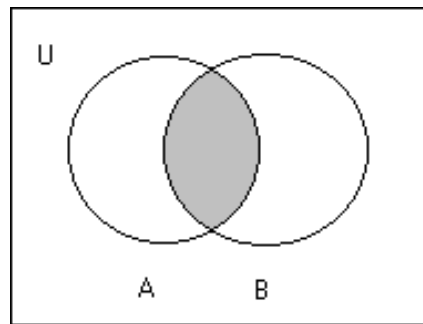
Contoh. Jika $A = \{ 1, 2 \}$, maka $P(A) = 2^A = \{ \emptyset, \{ 1 \}, \{ 2 \}, \{ 1, 2 \} \}$, dan $|P(A)| = 2^2 = 4$

Contoh. Himpunan kuasa dari himpunan kosong adalah $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$, dan himpunan kuasa dari himpunan $\{\emptyset\}$ adalah $P(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Operasi Terhadap Himpunan

1. Irisan (*intersection*)

- Notasi : $A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ dan } x \in B \}$

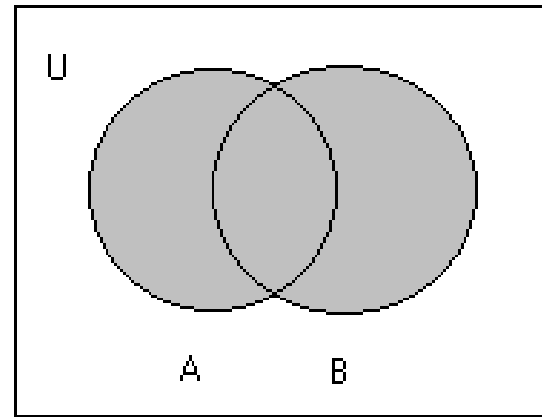


Contoh.

- (i) Jika $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ dan $B = \{4, 10, 14, 18\}$, maka $A \cap B = \{4, 10\}$
- (ii) Jika $A = \{3, 5, 9\}$ dan $B = \{-2, 6\}$, maka $A \cap B = \emptyset$. Artinya: $A \cap B$

2. Gabungan (*union*)

- Notasi : $A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ atau } x \in B \}$

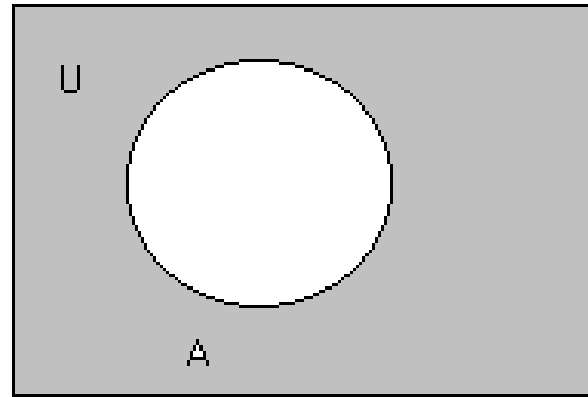


Contoh.

- (i) Jika $A = \{ 2, 5, 8 \}$ dan $B = \{ 7, 5, 22 \}$, maka $A \cup B = \{ 2, 5, 7, 8, 22 \}$
- (ii) $A \cup \emptyset = A$

3. Komplemen (*complement*)

- Notasi : $\bar{A} = \{ x \mid x \in U, x \notin A \}$



(Keterangan: \bar{A} sering ditulis juga dengan notasi A^C atau A')

Contoh.

Misalkan $U = \{ 1, 2, 3, \dots, 9 \}$,

- (i) jika $A = \{ 1, 3, 7, 9 \}$, maka $\bar{A} = \{ 2, 4, 6, 8 \}$
- (ii) jika $A = \{ x \mid x/2 \in P, x < 9 \}$, maka $\bar{A} = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$

Contoh. Misalkan:

A = himpunan semua mobil buatan dalam negeri

B = himpunan semua mobil impor

C = himpunan semua mobil yang dibuat sebelum tahun 1990

D = himpunan semua mobil yang nilai jualnya kurang dari Rp 100 juta

E = himpunan semua mobil milik mahasiswa universitas tertentu

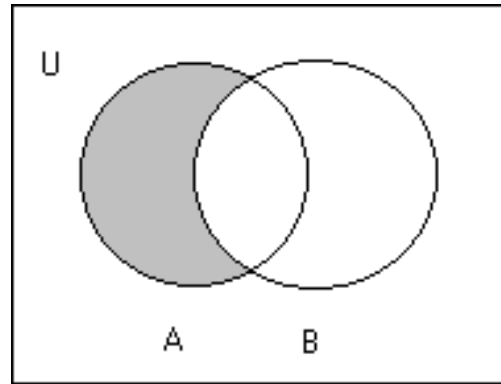
(i) “mobil mahasiswa di universitas ini produksi dalam negeri atau diimpor dari luar negeri” $\rightarrow (E \cap A) \cup (E \cap B)$ atau $E \cap (A \cup B)$

(ii) “semua mobil produksi dalam negeri yang dibuat sebelum tahun 1990 yang nilai jualnya kurang dari Rp 100 juta” $\rightarrow A \cap C \cap D$

(iii) “semua mobil impor buatan setelah tahun 1990 mempunyai nilai jual lebih dari Rp 100 juta” $\rightarrow \overline{C} \cap \overline{D} \cap B$

4. Selisih (*difference*)

- Notasi : $A - B = \{ x \mid x \in A \text{ dan } x \notin B \} = A \cap \bar{B}$

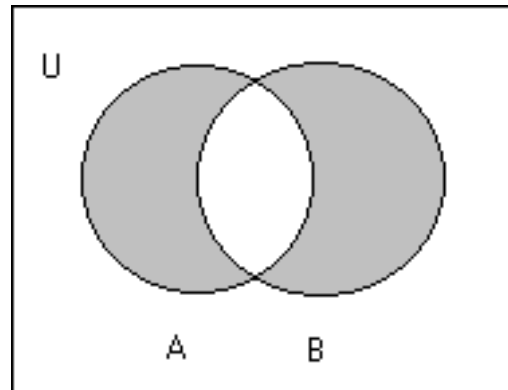


Contoh.

- (i) Jika $A = \{ 1, 2, 3, \dots, 10 \}$ dan $B = \{ 2, 4, 6, 8, 10 \}$, maka $A - B = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$ dan $B - A = \emptyset$
- (ii) $\{ 1, 3, 5 \} - \{ 1, 2, 3 \} = \{ 5 \}$, tetapi $\{ 1, 2, 3 \} - \{ 1, 3, 5 \} = \{ 2 \}$

5. Beda Setangkup (*Symmetric Difference*)

- Notasi: $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$



Contoh.

Jika $A = \{ 2, 4, 6 \}$ dan $B = \{ 2, 3, 5 \}$, maka $A \oplus B = \{ 3, 4, 5, 6 \}$

Contoh. Misalkan

U = himpunan mahasiswa

P = himpunan mahasiswa yang nilai ujian UTS di atas 80

Q = himpunan mahasiswa yang nilai ujian UAS di atas 80

Seorang mahasiswa mendapat nilai A jika nilai UTS dan nilai UAS keduanya di atas 80, mendapat nilai B jika salah satu ujian di atas 80, dan mendapat nilai C jika kedua ujian di bawah 80.

- (i) “Semua mahasiswa yang mendapat nilai A” : $P \cap Q$
- (ii) “Semua mahasiswa yang mendapat nilai B” : $P \oplus Q$
- (iii) “Semua mahasiswa yang mendapat nilai C” : $U - (P \cup Q)$

TEOREMA 2. Beda setangkup memenuhi sifat-sifat berikut:

$$(a) A \oplus B = B \oplus A \quad (\text{hukum komutatif})$$

$$(b) (A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C) \quad (\text{hukum asosiatif})$$

Latihan

Misalkan X adalah himpunan mahasiswa IF, Y adalah mahasiswa yang mengambil kuliah Matematika Diskrit (Matdis), dan Z adalah mahasiswa yang menyukai mata kuliah Matdis. Buatlah ekspresi matematika himpunan dari pernyataan berikut dalam istilah X , Y , dan Z .

- a. Himpunan mahasiswa IF yang tidak menyukai kuliah Matdis
- b. Himpunan mahasiswa IF yang tidak mengambil kuliah Matdis tetapi menyukainya
- c. Himpunan mahasiswa ITB bukan IF yang mengambil kuliah Matdis atau menyukai kuliah Matdis
- d. Himpunan mahasiswa ITB yang bukan merupakan mahasiswa IF atau yang tidak mengambil kuliah Matdis atau yang tidak menyukai kuliah Matdis