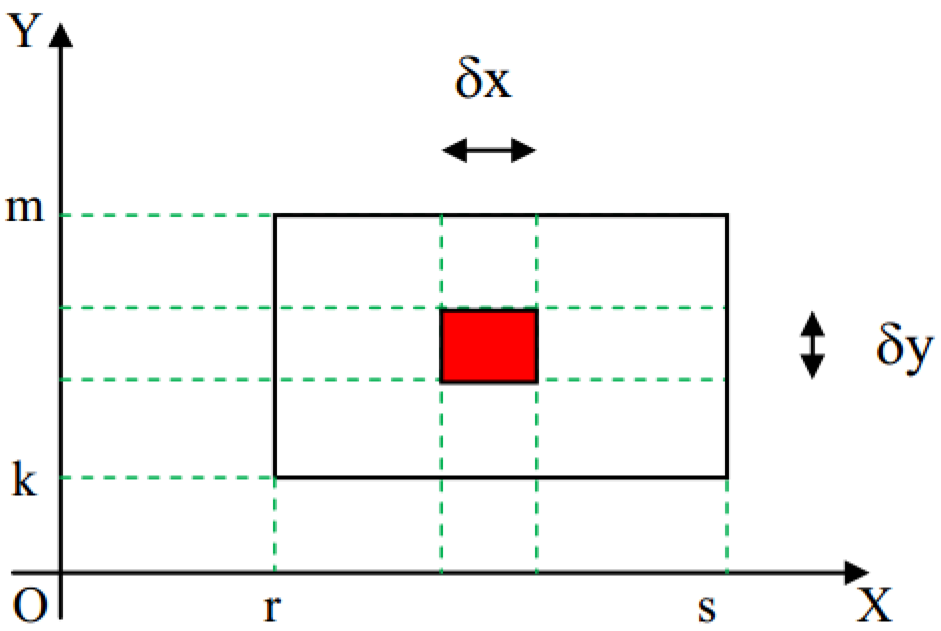
Aplikasi Pengintegralan

Luas Daerah



Luas daerah yang diarsir (merah) → δa : δy . δx

Apabila δy → 0 ; δx → 0 maka luas bidang tersebut menjadi integral yang ditulis sebagai berikut :

$$A = \int_{x=r}^{x=s} \int_{y=k}^{y=m} dy \, . \, dx$$

$$A = \int_{x=r}^{x=s} \boxed{\int_{y=k}^{y=m} dy} \, . \, dx$$

$$= \int_{x=r}^{x=s} [y]_{y=k}^{y=m} \, dx$$

$$= \int_{x=r}^{x=s} (m-k) dx = [(m-k)x]_{x=r}^{x=s}$$

$$\boxed{A = (m-k).(s-r)}$$

Sifat-sifat Integral Lipat Dua

Misalkan $f(x,y)$dan $g(x,y)$adalah fungsi-fungsi pada derah D dan c adalah kontanta bilangan Real .(Mathematics, n.d.)

Sifat penting yang dipenuhi oleh integral lipat dua adalah sebagai berikut:

1. $\iint_D c\, f(x,y)dA = c \iint_D f(x,y)dA$, untuk setiap $c \in R$
2. $\iint_D [f(x,y) + g(x,y)]dA = \iint_D f(x,y)dA + \iint_D g(x,y)dA$
3. Untuk D_1 dan D_2 yang memenuhi $D = D_1 \cap D_2$, dimana $D_1 \cap D_2$ berbentuk segmen garis , maka $\iint_D f(x,y)dA = \iint_{D_1} f(x,y)dA + \iint_{D_2} g(x,y)dA$
4. Jika $f(x,y) \leq g(x,y)$ untuk setiap (x,y) anggota daerah D, maka $\iint_D f(x,y)dA \leq \iint_D g(x,y)dA$

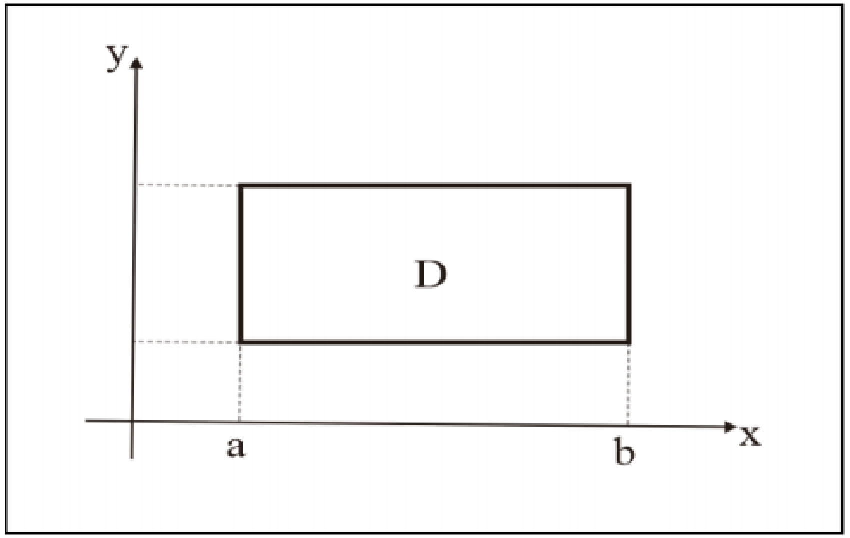
Integral Lipat Dua Koordinat Cartesian

Ada beberapa tafsiran integral lipat dua dalam Koordinat Cartesian yang dipengaruhi oleh fungsi-fungsi yang membangun D.

1. Jika D daerah yang dibatasi oleh $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$, maka integral lipat dua dapat dinyatakan

$$\iint_D f(x,y)dA = \int_{x=a}^{b} \int_{y=c}^{d} f(x,y)dy\ dx$$

Integral ruas kanan disebut juga integral berulang f terhadap y dahulu kemudian diintegralkan terhadap x.

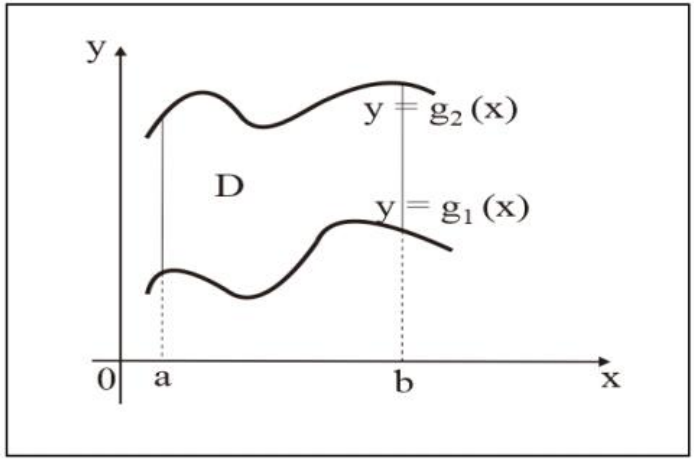


Integral lipat dua di atas juga dapat ditulis dalam bentuk integral berulang f terhadap x dahulu kemudian diintegralkan terhadap y, dan dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\iint_D f(x,y)dA = \int_{y=c}^{d} \int_{x=a}^{b} f((x,y)dx\ )\ dy$$

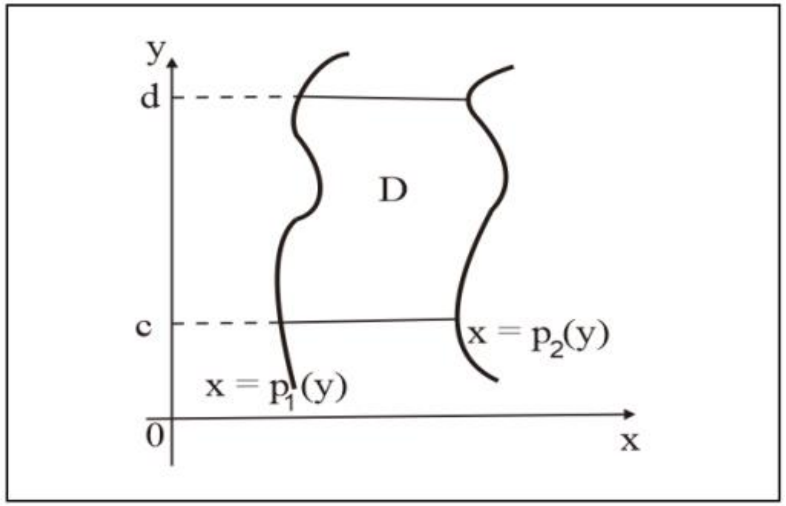
Integral Lipat Dua Koordinat Cartesian

Ada beberapa tafsiran integral lipat dua dalam Koordinat Cartesian yang dipengaruhi oleh fungsi-fungsi yang membangun D.



2. Jika D daerah yang dibatasi $a \leq x \leq b,\ g_1(x) \leq y \leq\ g_2(x)$, maka

$$\iint_D f(x,y)dA = \int_{x=a}^{b} \int_{y=\,g_1(x)}^{g_2(x)} f((x,y)dy\,)\,dx$$



3. Jika D daerah yang dibatasi $p_1(y) \leq x \leq\ p_2(y),\ \ c \leq y \leq d$, maka

$$\iint_D f(x,y)dA = \int_{c}^{d} \int_{p_1(y)}^{p_2(y)} f((x,y)dx\,)\,dy$$

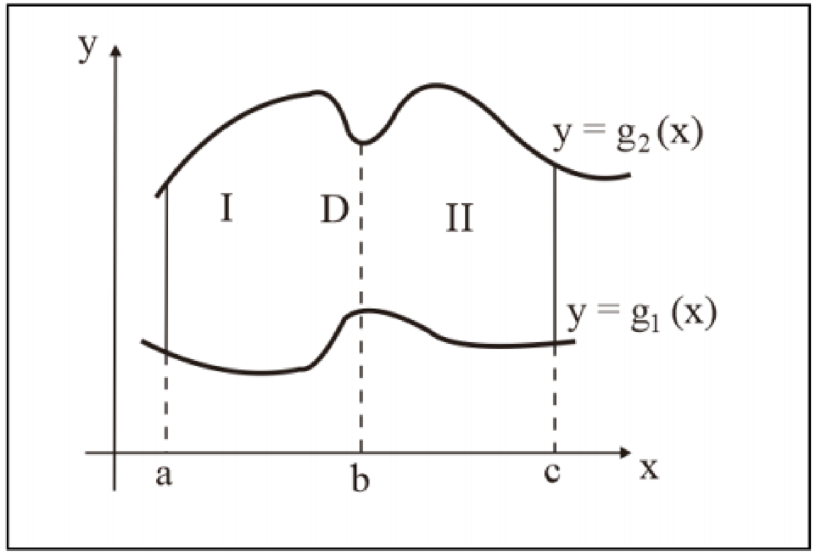
Integral Lipat Dua Koordinat Cartesian

Ada beberapa tafsiran integral lipat dua dalam Koordinat Cartesian yang dipengaruhi oleh fungsi-fungsi yang membangun D.

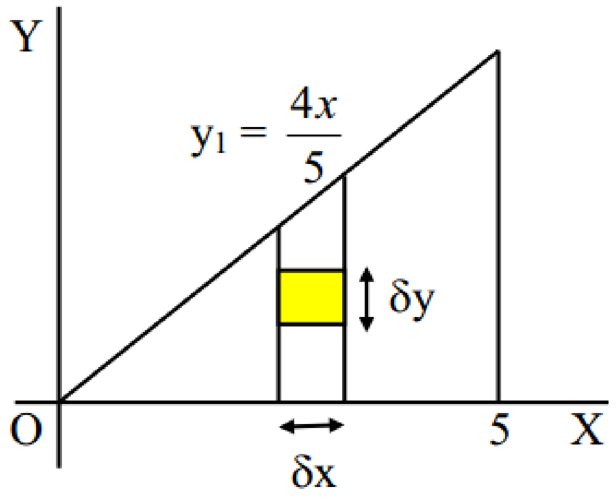
4. Jika $D = D_1 \cup D_2$, dimana D_1 dibatasi $a \leq x \leq b$ & $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$ dan D_2 dibatasi oleh $b \leq x \leq c$ & $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$. Misalkan $f(x, y)$ fungsi yang bekerja pada D maka penafsirannya

$$\iint_D f(x,y)dA = \iint_{D_1} f(x,y)dA + \iint_{D_2} f(x,y)dA$$

$$= \int_{x=a}^{b} \int_{y=g_1(x)}^{g_2(x)} f((x,y)dy\,)\,dx + \int_{x=b}^{c} \int_{y=g_1(x)}^{g_2(x)} f((x,y)dy\,)\,dx$$



Integral Lipat Dua Koordinat Cartesian



Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh $y = \frac{4x}{5}$ sumbu x, dan ordinat pada x = 5.

Luas elemen yang diarsir = δy . δx

Jika δy → 0 dan δx → 0, maka :

$$A = \int_0^5 \int_0^{y_1} dy\, dx$$

$$= \int_0^5 [y]_0^{y_1} dx = \int_0^5 y_1 \; dx$$

Tetapi $y_1 = \frac{4x}{5}$, maka :

$$A = \int_0^5 \frac{4x}{5} dx = \left[\frac{2x^2}{5}\right]_0^5 = 10$$ satuan luas.

Integral Lipat Dua Koordinat Cartesian

Hitunglah $$I = \int_1^2 \int_2^4 (x + 2y)\, dx\, dy$$

Jawab : $$I = \int_1^2 \boxed{\int_2^4 (x + 2y)\, dx}\, dy$$

$$= \int_1^2 \left[\frac{1}{2} x^2 + 2xy \right]_2^4 dy$$

$$= \int_1^2 \{(8 + 8y) - (2 + 4y)\} dy$$

$$= \int_1^2 (6 + 4y)\, dy = \left[6y + 2y^2 \right]_1^2$$

$= (12+8) - (6+2) = 20\text{-}8 = 12$

Integral Lipat Dua Titik Pusat Masa

1. Jika D daerah pada bidang XY maka luas D adalah (Mauch, 2002):

$$\boldsymbol{L = \iint_D \ dA \ , \ f(x,y) = 1}$$

2. Titik Pusat Massa

   Jika D daerah pada bidang XY dan $\rho(x,y)$ rapat massa disetiap titik pada D, maka :

   - Massa D = $m = \iint_D \ \rho \, dA$
   - Momen massa (jarak linier dari titik pusat massa ke sumbu).
     - Momen massa terhadap sumbu x ditulis $M_x = \iint_D \ y \, \rho \, dA$
     - Momen massa terhadap sumbu y ditulis $M_y = \iint_D \ x \, \rho \, dA$
   - Titik pusat massa = $(\bar{x}, \bar{y}\,) = \left(\frac{M_y}{m}, \frac{M_x}{m}\right)$

     Note: Jika rapat massa konstan maka titik pusat massa disebut sentroid (titik berat)

Integral Lipat Dua Titik Pusat Masa

3. Momen Inersia adalah jarak kuadrat dari titik pusat massa ke sumbu

- Momen Inersia terhadap sumbu x ditulis $I_x = \iint_D y^2 \rho \, dA$
- Momen Inersia terhadap sumbu y ditulis $I_y = \iint_D x^2 \rho \, dA$
- Momen Inersia terhadap sumbu z ditulis $I_z = \iint_D (x^2 + y^2)\rho \, dA$

  $= I_x + I_y$

Integral Lipat Dua Titik Pusat Masa

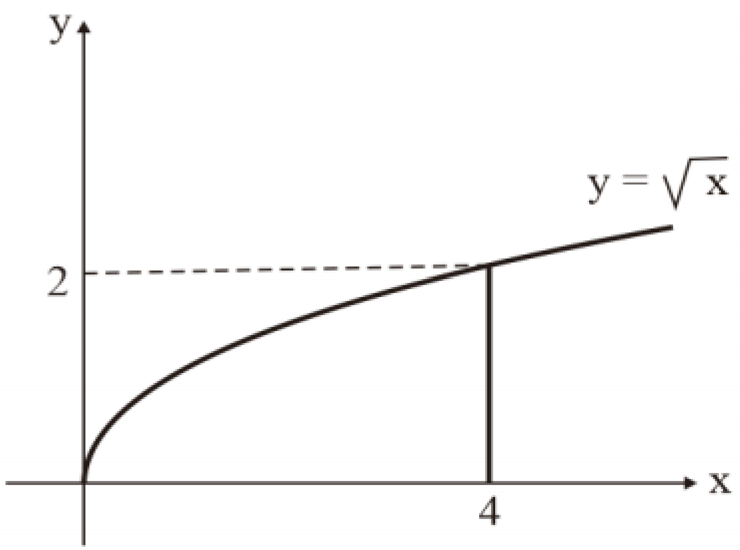
Jika D daerah yang berbentuk lamina yang dibatasi oleh $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ dan $x = 4$

Misalkan diketahui rapat massa $\rho(x, y) = xy$, tentukan :

a. Massa lamina

b. Titik pusat massa

c. Momen Inersia I_x , I_y dan I_z



a. Massa lamina = $m = \iint_D \rho(x,y)\ dA = \int_{x=0}^{4} \int_{y=0}^{\sqrt{x}} xy\ dy\ dx$

$= \int_{x=0}^{4} x[\frac{1}{2}y^2]_0^{\sqrt{x}}\ dx$

$= \int_{x=0}^{4} x\ (\frac{1}{2}\ x)\ dx$

$= \int_{x=0}^{4} \frac{1}{2}x^2\ dx$

$= [\frac{1}{6}x^3]_0^4$

$= \frac{32}{3}$

Integral Lipat Dua Titik Pusat Masa

Jika D daerah yang berbentuk lamina yang dibatasi oleh $y = \sqrt{x}$,$y = 0$ dan $x = 4$

Misalkan diketahui rapat massa $\rho(x,y) = xy$, tentukan :

a. Massa lamina

b. Titik pusat massa

c. Momen Inersia I_x , I_y dan I_z

b. $M_y = \iint_D x\,\rho(x,y)\ dA$

$$= \int_{x=0}^{4}\int_{y=0}^{\sqrt{x}} x\,(xy)\,dy\,dx$$

$$= \int_{x=0}^{4}\int_{y=0}^{\sqrt{x}} x^2 y\,dy\,dx$$

$$= \int_{x=0}^{4} x^2 [\tfrac{1}{2}y^2]_0^{\sqrt{x}}\,dx$$

$$= \int_{x=0}^{4} \tfrac{1}{2}x^2 x\ \ dx$$

$$= \int_{x=0}^{4} \tfrac{1}{2}x^3\,dx$$

$$= [\tfrac{1}{8}x^4]_0^4 = 32$$

$M_x = \iint_D y\,\rho(x,y)\ dA$

$$= \int_{x=0}^{4}\int_{y=0}^{\sqrt{x}} y\,(xy)\,dy\,dx$$

$$= \int_{x=0}^{4}\int_{y=0}^{\sqrt{x}} x\,y^2\,dy\,dx$$

$$= \int_{x=0}^{4} x\,[\tfrac{1}{3}y^3]_0^{\sqrt{x}}\,dx$$

$$= \int_{x=0}^{4} \tfrac{1}{3}x^{5/2}\,dx$$

$$= [\tfrac{2}{21}x^{7/2}]_0^4$$

$$= \frac{256}{21}$$

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{32}{(\frac{32}{3})} = 3$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{256}{21}\ /(\frac{32}{3}) = \frac{8}{7}$$

Titik pusat massa $(\bar{x}\ ,\bar{y}) = (3\ ,\frac{8}{7})$

Integral Lipat Dua Titik Pusat Masa

Jika D daerah yang berbentuk lamina yang dibatasi oleh $y = \sqrt{x}$,$y = 0$ dan $x = 4$

Misalkan diketahui rapat massa $\rho(x, y) = xy$, tentukan :

c. Momen Inersia I_x , I_y dan I_z

- $I_x = \iint_D y^2 \rho(x,y)\ dA$

$$= \int_{x=0}^{4} \int_{y=0}^{\sqrt{x}} y^2\ (xy)\ dy\, dx$$

$$= \int_{x=0}^{4} \int_{y=0}^{\sqrt{x}} x\, y^3\ dy\, dx$$

$$= \int_{x=0}^{4} x\, [\tfrac{1}{4} y^4]_0^{\sqrt{x}}\ dx$$

$$= [\tfrac{1}{16} x^4]_0^4$$

$$= 16$$

- $I_y = \iint_D x^2 \rho(x,y)\ dA$

$$= \int_{x=0}^{4} \int_{y=0}^{\sqrt{x}} x^2\ (xy)\ dy\, dx$$

$$= \int_{x=0}^{4} \int_{y=0}^{\sqrt{x}} x^3\, y\ dy\, dx$$

$$= \int_{x=0}^{4} x^3\ [\tfrac{1}{2} y^2]_0^{\sqrt{x}}\ dx$$

$$= \int_{x=0}^{4} \frac{1}{2} x^4\ dx$$

$$= [\tfrac{1}{10} x^5]_0^4$$

$$= \frac{512}{5}$$

- $I_z = I_x + I_y$

$$= 16 + \frac{512}{5} = \frac{592}{5}$$

Latihan

1. $$\int_{0}^{1}\int_{1}^{3} x + y + 1\; dx\; dy$$

2. $$\int_{1}^{2}\int_{0}^{4} 2x + 3y\; dx\; dy$$

3. $$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1} x^2 + y^2 + 2\; dx\; dy$$

4. $$\int_{0}^{2}\int_{0}^{2} 4 - x^2 dx\; dy$$

5 . Jika D daerah yang berbentuk lamina yang dibatasi oleh $y = x^2$, $\mathrm{y} = 0$, dan $x = 4$, misalkan diketahui rapat massa $\rho(x, y) = xy$, Tentukanlah :

a. Massa lamina
b. Titik Pusat Massa
c. Momen Inersia I_x, I_y, I_z