Integral Lipat Tiga

Integral Lipat Tiga

Definisi Integral Lipat Tiga

Jika $\lim\limits_{\substack{|P| \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{k=1}^{n} f\ (x_k, y_k, z_k)\ \Delta V_k$ ada dan definisikan

$\iiint_B\ f(x,y,z)dV = \lim\limits_{\substack{|P| \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{k=1}^{n} f\ (x_k, y_k, z_k)\ \Delta V_k$. Maka f dikatakan terintegralkan pada B

Integral Lipat Tiga

Beberapa sifat penting yang dipenuhi integral lipat tiga yaitu:

1. $\iiint_B [f(x,y,z) + g(x,y,z)] \quad dV = \iiint_B f(x,y,z)\ dV + \iiint_B g(x,y,z)\ dV$
2. $\iiint_B \alpha f(x,y,z)\ dV = \alpha \iiint_B f(x,y,z)\ dV$
3. Untuk B_1 dan B_2 yang memenuhi $B = B_1 \cup B_2$, $B_1 \cap B_2$ permukaan , maka

$$\iiint_B f(x,y,z)\ dV = \iiint_{B_1} f(x,y,z)\ dV + \iiint_{B_2} f(x,y,z)\ dV$$

4. Jika $f(x,y,z) \leq g(x,y,z)$ untuk setiap (x,y,z) anggota B, maka

$$\iiint_B f(x,y,z)\ dV \leq \iiint_B g(x,y,z)\ dV$$

Integral Lipat Tiga

Selesaikan integral berulang $\int_{-2}^{5}\int_{y=0}^{y=3x}\int_{z=y}^{z=x+2} f(x,y,z)dz\,dy\,dx$

Penyelesaian:

$$\int_{-2}^{5}\int_{y=0}^{y=3x}\int_{z=y}^{z=x+2} 4\,dz\,dy\,dx \quad = \int_{-2}^{5}\int_{y=0}^{y=3x}\left(\int_{z=y}^{z=x+2} 4\,dz\right) dy\,dx$$

$$= \int_{-2}^{5}\int_{y=0}^{y=3x} [4\,z]_{z=y}^{z=x+2} dy\,dx$$

$$= \int_{-2}^{5}\int_{y=0}^{y=3x} [4x - 4y + 8)\,dy\,dx$$

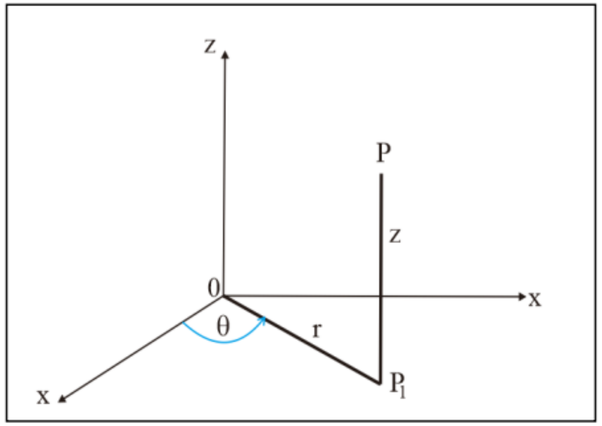
$$= \int_{-2}^{5} [4xy - 2y^2 + 8y]_{y=0}^{3x}\,dx$$

$$= \int_{-2}^{5} [4x(3x) - 2(3x)^2 + 8(3x)]\,dx$$

$$= \int_{-2}^{5} [-6x^2 + 24x]\,dx = -14$$

Integral Lipat Tiga Pada Koordinat Silinder/Tabung

Ketika sebuah benda B dalam ruang berdimensi tiga mempunyai sebuah sumbu simetri, maka perhitungan integral lipat tiga atas B sering dipermudah dengan menggunakan koordinat silinder.(Kreyszig, 2013)



Jika P suatu titik di ruang dan P_1 proyeksi P pada bidang XY .

Sebut $\overline{OP_1} = r$ adalah jari-jari dan θ adalah sudut yang dibentuk $\overline{OP_1}$ dengan sumbu x positif.

Maka koordinat silinder dari P adalah $P(r,\theta,z)$

Hubungan antara kordinat Kartesian dengan koordinat silinder

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = arc\ tg\frac{y}{x} \\ z = z \end{cases}$$

Dalam koordinat silinder $dV = r\ dz\ dr\ d\theta$

Integral Lipat Tiga Pada Koordinat Silinder/Tabung

Determinan Matriks Jacobi: $|J| = \left|\frac{d(x,y,z)}{d(r,\theta,z)}\right|$

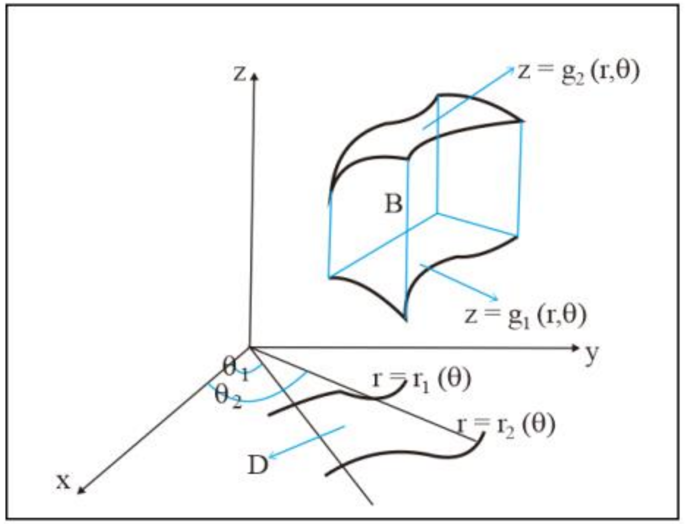
$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = r$$

Sehingga $\iiint_B f(x,y,z)\ dV = \iiint_B f(r,\theta,z)\,|J|\,dz\,dr\,d\theta$

$$= \iiint_B f(r,\theta,z)\,r\ dz\,dr\,d\theta$$

Bila B daerah yang dibatasi di bawah oleh permukaan $z = g_1(r,\theta)$, di atas oleh permukaan $z = g_2(r,\theta)$, silinder-silinder $r = r_1(\theta)$, $r = r_2(\theta)$ dan bidang-bidang

$\theta = \theta_1$ dan $\theta = \theta_2$.



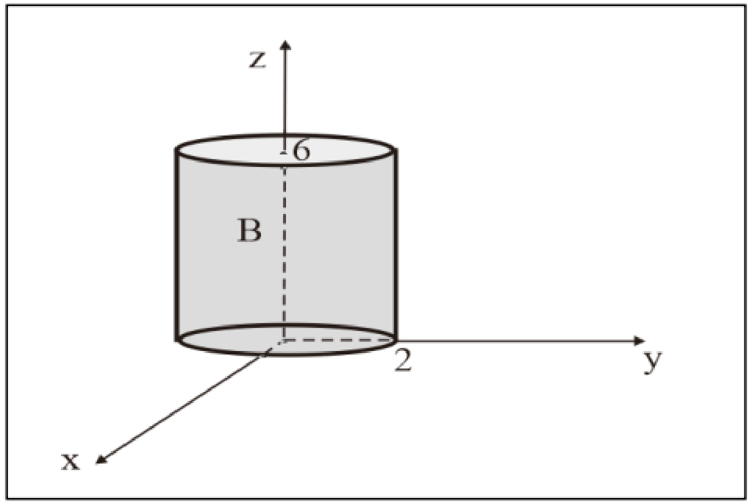
Tafsiran Integral Lipat tiga Koordinat Silinder

Maka

$$\iiint_B f(x,y,z)\ dV = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r=r_1(\theta)}^{r=r_2(\theta)} \int_{z=g_1(r,\theta)}^{z=g_2(r,\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\, r\ dz\,dr\,d\theta$$

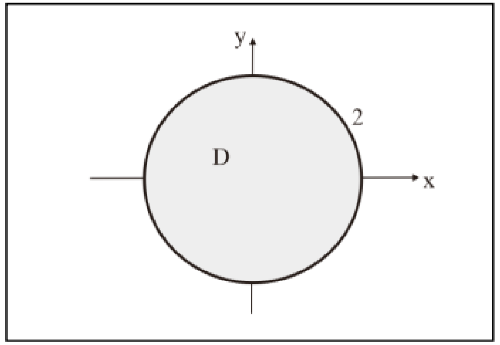
Integral Lipat Tiga Pada Koordinat Silinder/Tabung

Tentukan $\iiint_B \; dV$ jika B benda yang dibatasi oleh $x^2 + y^2 = 4$ bidang $z = 0, z = 6$



B dibatasi $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$ dan $z = 6$.

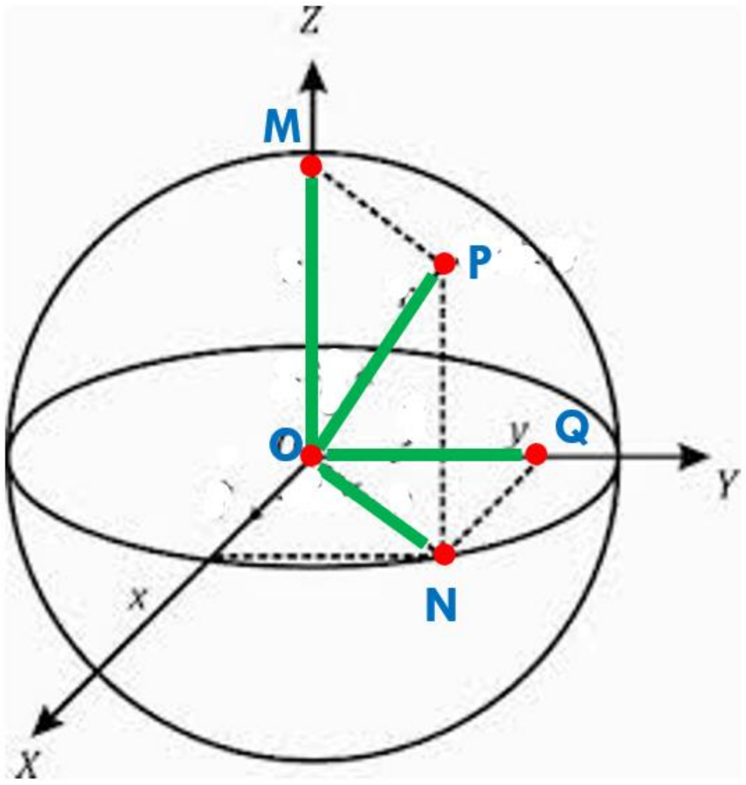
Proyeksi B terhadap bidang XY adalah daerah D yang diberikan pada gambar di bawah



D dibatasi $x^2 + y^2 = 4$

$$
\begin{aligned}
\iiint_B \; dV &= \int_0^{2\pi} \int_{r=0}^{2} \int_{z=0}^{6} r \, dz \, dr \, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_{r=0}^{2} [rz]_{z=0}^{6} \; dr \, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_{r=0}^{2} 6r \, dr \, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} [3r^2]_{r=0}^{2} \; d\theta \quad = 12\,(2\pi) \quad = 24\pi
\end{aligned}
$$

Integral Lipat Tiga Pada Koordinat Bola



Ingat bahwa jari-jari bola dari sudut manapun memiliki panjang yang sama.

Misal kita ambil 4 jari-jari, yakni garis OM, garis OP, garis ON dan OQ.

Ilustrasi jari-jari OM, garis OP, dan garis ON membentuk segi empat ONPM dimana NP sejajar dan sama panjang dengan OM. Serta ON sejajar dan sama panjang dengan MP.

Sedangkan jari-jari OQ dan ON membentuk segitiga siku-siku ONQ.

Sehingga ada dua sudut yang harus kita perhatikan dalam menghitung volume, yakni sudut pada bidang ONPM sebagai bidang yang berdiri tegak dan sudut pada bidang ONQ sebagai alas.

Maka, rumus integral rangkap 3 koordinat bola adalah sebagai berikut:

$$\iiint_S f(\underbrace{r \sin\varphi \cos\theta}_{x}, \underbrace{r \sin\varphi \sin\theta}_{y}, \underbrace{r \cos\varphi}_{z})\, r^2 \sin\varphi \;\; dr\, d\varphi\, d\theta$$

Integral Lipat Tiga Pada Koordinat Bola

Tentukan volume bola dengan fungsi sebagai berikut

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r^2 \sin\varphi \; dr\, d\varphi\, d\theta$$

Jawaban:

$$\underbrace{\int_0^{2\pi}\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\underbrace{\int_0^1 r^2 \sin\varphi \; dr}_{1}\, d\varphi}_{2}\, d\theta}_{3}$$

Integral pertama

$$\int_0^1 r^2 \sin\varphi \; dr = \left.\frac{1}{3} r^3 \sin\varphi\right|_0^1 = \frac{1}{3}(1)\sin\varphi = \frac{1}{3}\sin\varphi$$

Integral Kedua

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3}\sin\varphi\, d\varphi = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\, d\varphi = \left.\frac{1}{3}(-\cos\varphi)\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}\left(-\cos\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{3}(-\cos 0) =$$

$$= \frac{1}{3}(-\cos 90^0) - \frac{1}{3}(-\cos 0) = \frac{1}{3}(-0) - \frac{1}{3}(-1) = 0 - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

Integral Ketiga

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{3}\, d\theta = \left.\frac{1}{3}\theta\right|_0^{2\pi} = \frac{1}{3}(2\pi) - \frac{1}{3}(0) = \boldsymbol{\frac{2\pi}{3}}$$

Integral Lipat Tiga Pada Koordinat Bola

Ubah integral koordinat kartesius berikut ke dalam integral koordinat bola

$$\int_{y=0}^{y=3}\int_{x=0}^{x=\sqrt{9-y^2}}\int_{z=\sqrt{x^2+y^2}}^{z=\sqrt{18-x^2-y^2}}\left(x^2+y^2+z^2\right)dz\,dx\,dy.$$

Jawab:

$$0 \le y \le 3$$
$$0 \le x \le \sqrt{9-y^2}$$
$$\sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{18-x^2-y^2}.$$

$$z=\sqrt{x^2+y^2}$$

Mencari z:

$$\sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{18-x^2-y^2}$$
$$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{18-x^2-y^2}$$
$$x^2+y^2 = 18-x^2-y^2$$
$$x^2+y^2+x^2+y^2 = 18$$
$$2(x^2+y^2) = 18$$
$$2(z^2) = 18$$
$$z^2 = 9$$
$$z = 3$$

Jika $z = 0$, maka

$$0 = \sqrt{18-x^2-y^2}$$
$$0 = 18-x^2-y^2$$
$$x^2+y^2 = 18$$
$$r^2 = 18$$
$$r = 3\sqrt{2}$$

$$z = 3$$
$$r\cos\varphi = 3$$
$$3\sqrt{2}\cos\varphi = 3$$
$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} * \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$
$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

Integral Lipat Tiga Pada Koordinat Bola

Ubah integral berikut ke dalam integral koordinat bola

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{2} \qquad maka\ \varphi = \frac{\pi}{4}$$

α	I				
	0°	30°	45°	60°	90°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	td
$\csc\alpha$	td	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	1
$\sec\alpha$	1	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	2	td
$\cot\alpha$	td	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

$\theta = \frac{\pi}{2}$ karena berada di kuadran 1

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ maka r = z

$$\sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{18 - x^2 - y^2}$$

Jika $x = 0$ dan $y = 0$, maka

$$\sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{18 - x^2 - y^2}$$

$$\sqrt{0+0} \le z \le \sqrt{18 - 0 - 0}$$

$$\sqrt{0} \le z \le \sqrt{18}$$

$$0 \le z \le 3\sqrt{2} \qquad maka \qquad 0 \le r \le 3\sqrt{2}$$

$Sehingga, integral\ koordinat\ bola\ menjadi$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{3\sqrt{2}} r^2 \sin\varphi \ dr\, d\varphi\, d\theta$$

LATIHAN

1 Hitunglah integral dalam koordinat bola berikut $$\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r^2 \sin\varphi \; dr\, d\varphi\, d\theta$$

2 Hitunglah integral dalam koordinat bola berikut $$\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^3 r^2 \sin\varphi \; dr\, d\varphi\, d\theta$$

3 Ubah integral berikut ke dalam integral koordinat bola $$\int_0^4 \int_0^{\sqrt{16-x^2}} \int_{-\sqrt{16-x^2-y^2}}^{\sqrt{16-x^2-y^2}} (x^2+y^2+z^2)^2 \, dz\, dy\, dx$$

4 Ubah integral berikut ke dalam integral koordinat bola $$\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{16-x^2-y^2}} dz\, dy\, dx$$

5 Tentukan hasil dari integral berikut: $\int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2}\int_{r=0}^{r=2}\int_{z=0}^{z=4}(z\, r \sin\theta) r\, dz\, dr\, d\theta$

6 Tentukan hasil dari integral berikut: $\int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2}\int_{r=0}^{r=1}\int_{z=0}^{z=4}(rz \sin\theta) r\, dz\, dr\, d\theta$