UNIVERSITAS TIDAR
Unggul dalam Kewirausahaan

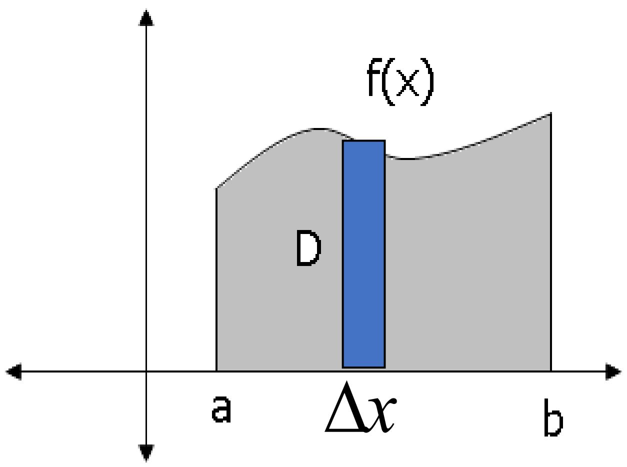
Kampus Merdeka
INDONESIA JAYA

APLIKASI INTEGRAL

Damar W.
Teknologi Informasi

1 Menghitung Luas Daerah

a. Misalkan daerah $D = \{(x,y) \mid a \le x \le b, 0 \le y \le f(x)\}$



Luas D = ?

Langkah :

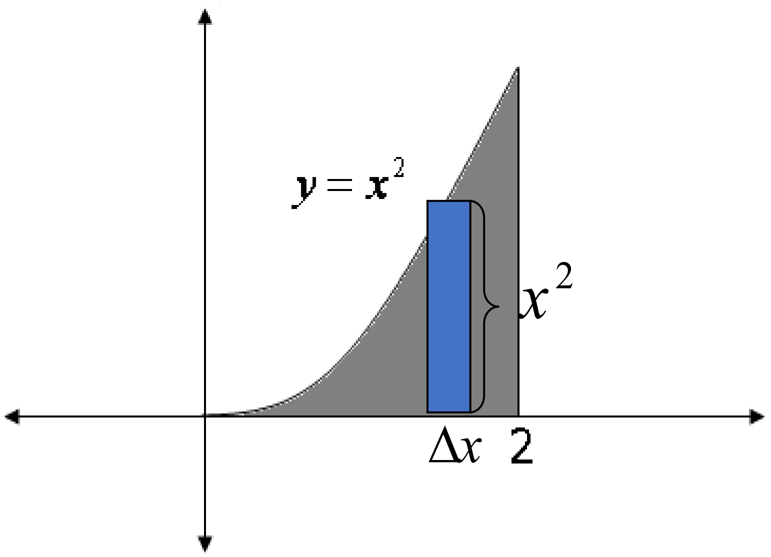
1. Iris D menjadi n bagian dan luas satu buah irisan dihampiri oleh luas persegi panjang dengan tinggi f(x) dan alas (lebar) Δx

$$\Delta A \approx f(x)\Delta x$$

2. Luas D dihampiri oleh jumlah luas persegi panjang. Dengan mengambil limitnya diperoleh:

Luas D = A = $\int_a^b f(x)dx$

Contoh 1 : Hitung luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$ sumbu *x*, dan *x* = 2.



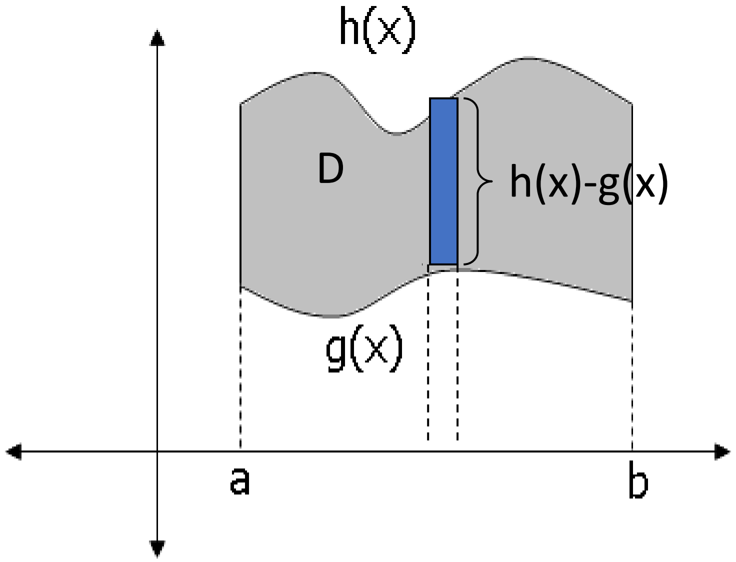
Luas irisan

$$\Delta A \approx x^2 \Delta x$$

Luas daerah

$$A = \int_0^2 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 \Big]_0^2 = \frac{8}{3}$$

b) Misalkan daerah $D = \{(x, y) \mid a \le x \le b, g(x) \le y \le h(x)\}$



Luas D = ?

Langkah :

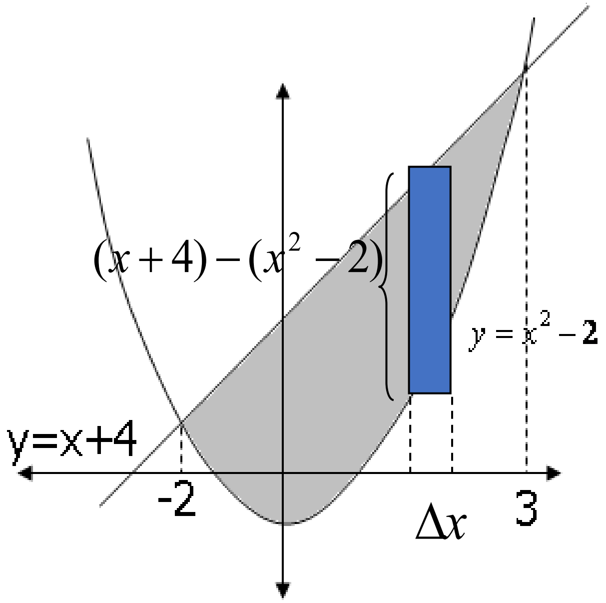
1. Iris D menjadi n bagian dan luas satu buah irisan dihampiri oleh luas persegi panjang dengan tinggi h(x)-g(x) dan alas(lebar) Δx.

$$\Delta A \approx (h(x) - g(x))\Delta x$$

2. Luas D dihampiri oleh jumlah luas persegi panjang.
Dengan mengambil limitnya diperoleh:

$$\text{Luas D = A = } \int_a^b (h(x) - g(x))dx$$

Contoh 2: Hitung luas daerah yang dibatasi oleh garis $y = x + 4$ dan parabola $y = x^2 - 2$



Titik potong antara garis dan parabola

$$x + 4 = x^2 - 2$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$(x-3)(x+2) = 0$$

x = -2, x = 3

Luas irisan

$$\Delta A \approx ((x+4)-(x^2-2))\Delta x$$

Sehingga luas daerah :

$$A = \int_{-2}^{3} ((x+4) - (x^2 - 2))dx = \int_{-2}^{3} (-x^2 + x + 6)dx$$

$$= -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 6x\Big]_{-2}^{3} = \frac{125}{6}$$

Catatan :

- Jika irisan dibuat tegak lurus terhadap sumbu x, maka tinggi irisan adalah kurva yang terletak disebelah atas dikurangi kurva yang berada disebelah bawah.
- Jika batas atas dan bawah irisan berubah untuk sembarang irisan di D, maka daerah D harus dibagi dua atau lebih.

Contoh 3: Hitung luas daerah yang dibatasi oleh sumbu x,

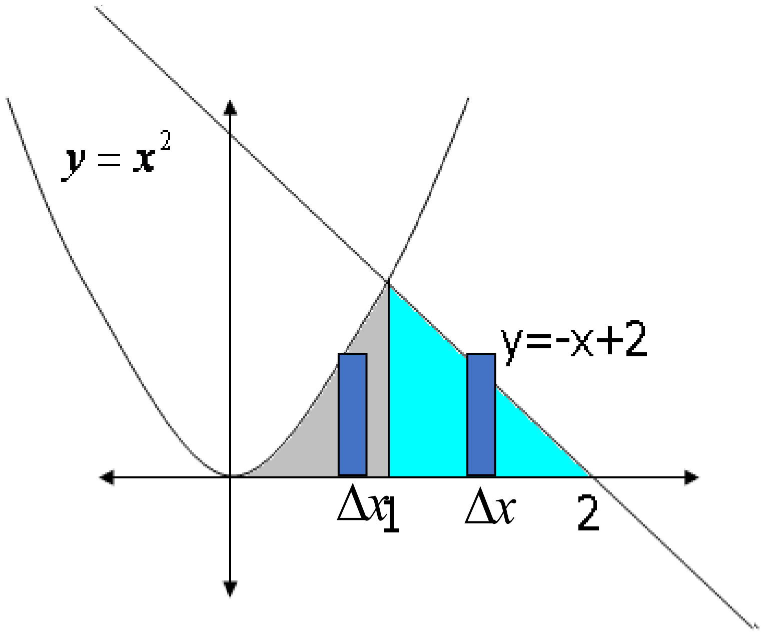
$y = x^2$ dan y = -x + 2

Jawab :

Titik potong

$$x^2 = -x + 2 \longrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \longrightarrow (x+2)(x-1) = 0$$

$\longrightarrow$ x = -2, x = 1



Jika dibuat irisan tegak, maka daerah harus dibagi menjadi dua bagian

Luas irisan I

$$\Delta A_1 \approx x^2 \Delta x$$

Luas irisan II

$$\Delta A_2 \approx (-x+2)\Delta x$$

Luas daerah I

$$A_1 = \int_0^1 x^2 dx = \tfrac{1}{3}x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

Luas daerah II

$$A_2 = \int_1^2 -x+2 \ dx = -\tfrac{1}{2}x^2 + 2x \Big|_1^2$$

$$= (-2+4) - (-\tfrac{1}{2}+2) = \frac{1}{2}$$

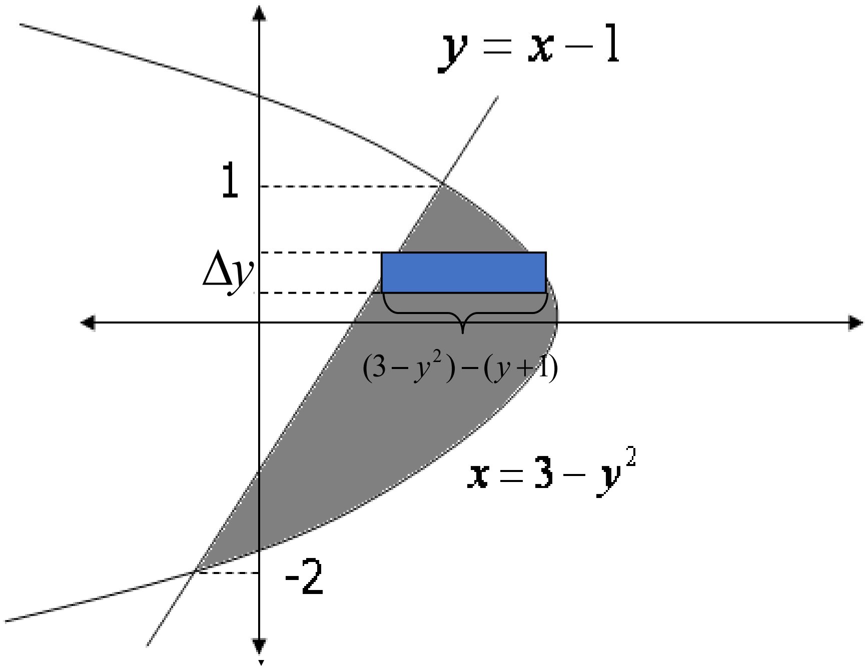
Sehingga luas daerah

$$A = A_1 + A_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

Contoh 4: Hitung luas daerah yang dibatasi oleh

$$x = 3 - y^2 \quad \text{dan} \quad y = x - 1$$

Jawab :



Titik potong antara garis dan parabola

$$y + 1 = 3 - y^2$$

$$y^2 + y - 2 = 0$$

$$(y+2)(y-1) = 0$$

y = -2 dan **y = 1**

Luas irisan

$$\Delta A \approx ((3 - y^2) - (y+1))\,\Delta y$$

Sehingga luas daerah :

$$L = \int_{-2}^{1} ((3 - y^2) - (y + 1))dy = \int_{-2}^{1} (-y^2 - y + 2)dy$$

$$= -\frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{2}y^2 + 2y\Big]_{-2}^{1} = \frac{9}{2}.$$

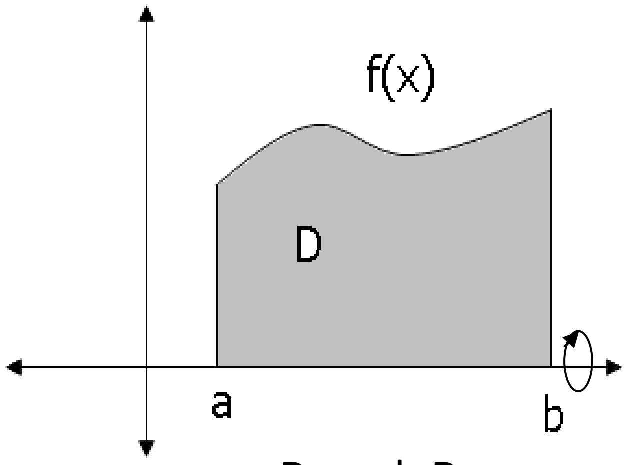
Catatan :

- Jika irisan sejajar dengan sumbu x, maka tinggi irisan adalah kurva yang terletak disebelah kanan dikurangi kurva yang berada disebelah kiri.
- Jika batas kanan dan kiri irisan berubah untuk sembarang irisan di D, maka daerah D harus dibagi dua atau lebih

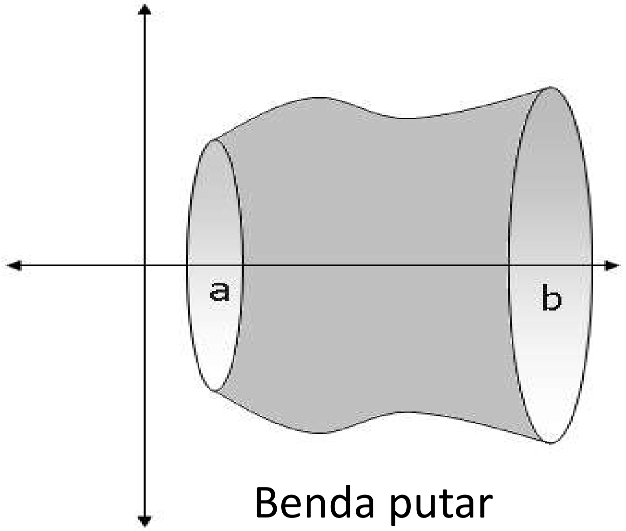
2 Menghitung volume benda putar

2.1 Metoda Cakram

a. Daerah $D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b\ ,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$
diputar terhadap sumbu x



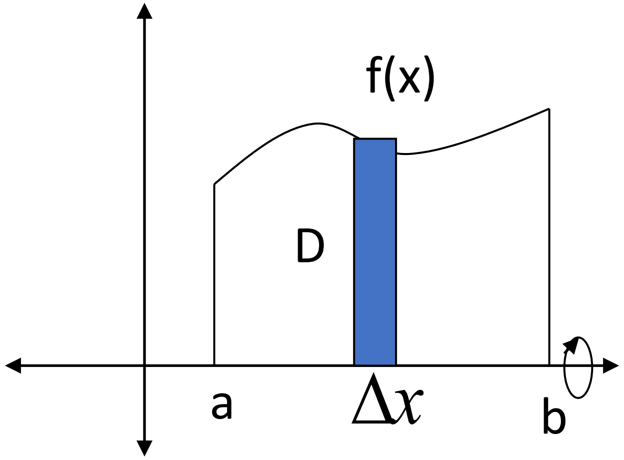
Daerah D



Benda putar

? Volume benda putar

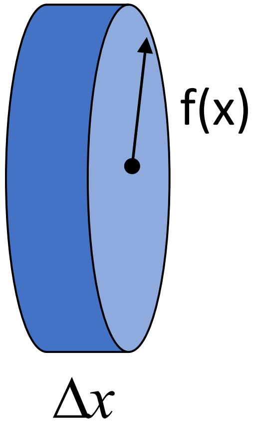
Untuk menghitung volume benda putar gunakan pendekatan iris, hampiri, jumlahkan dan ambil limitnya.



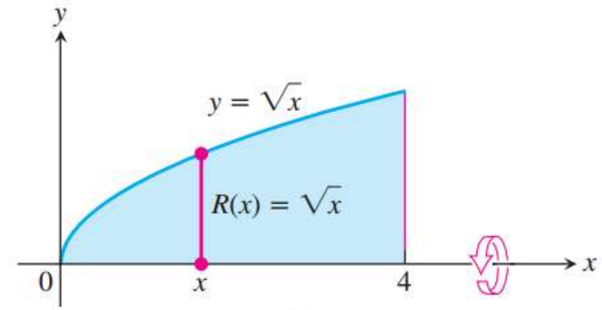
Jika irisan berbentuk persegi panjang dengan tinggi $f(x)$ dan alas Δx diputar terhadap sumbu x akan diperoleh suatu cakram lingkaran dengan tebal Δx dan jari-jari $f(x)$,

sehingga $$\Delta V \approx \pi f^2(x)\Delta x$$

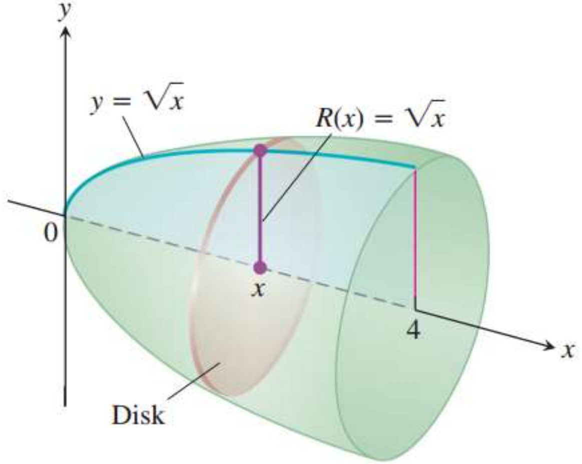
$$V = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx$$

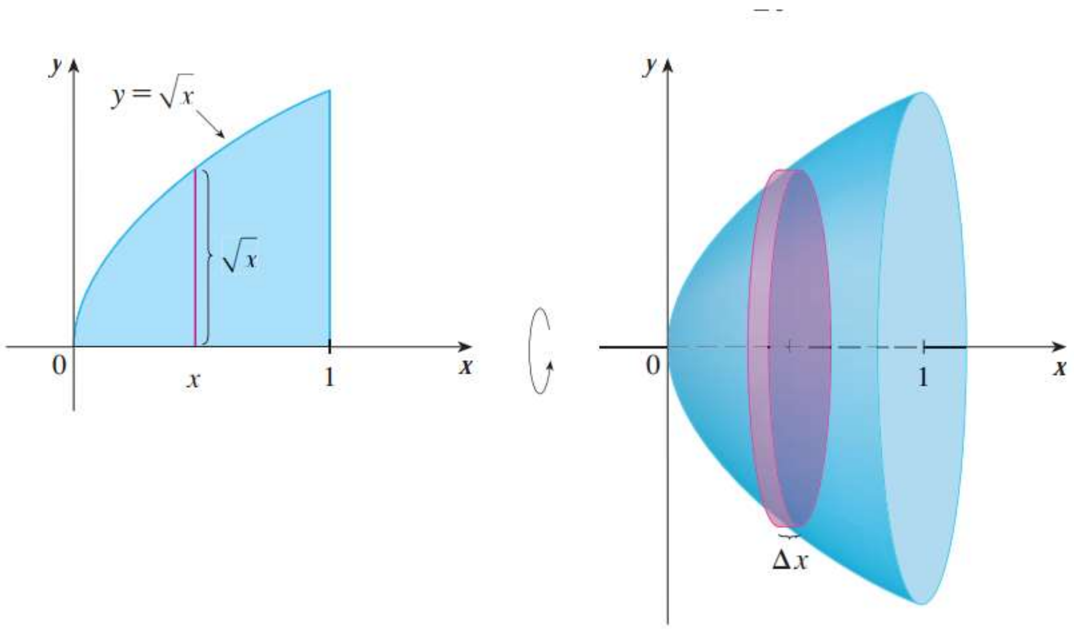


Catatan:
jari-jari = jarak dari sumbu putar ke batas daerah

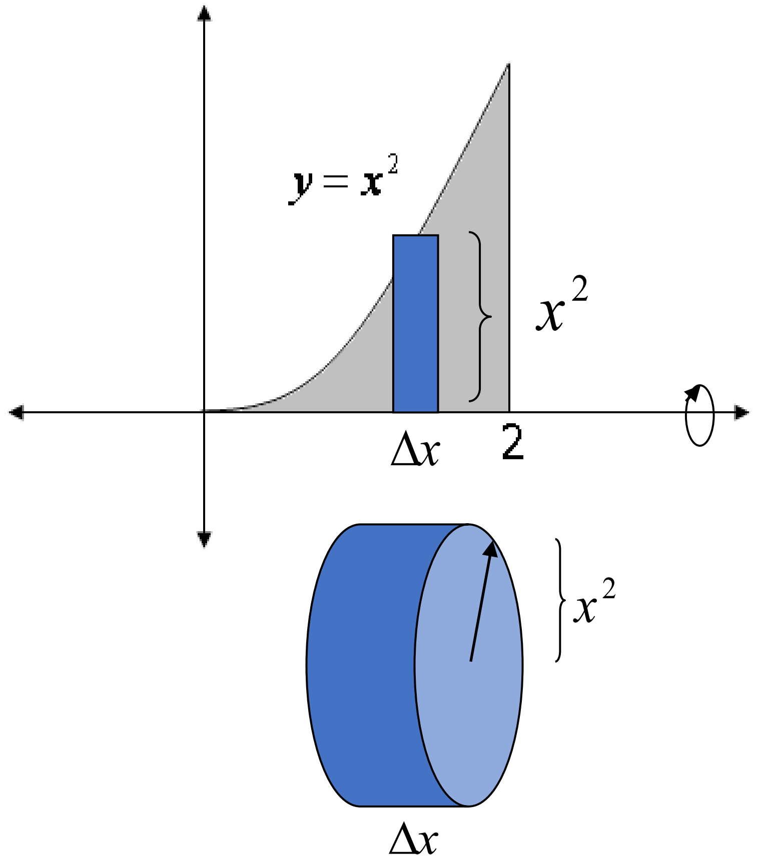

y
$y = \sqrt{x}$
$R(x) = \sqrt{x}$
0
x
4
x

(a)


y
$y = \sqrt{x}$
$R(x) = \sqrt{x}$
0
x
4
x
Disk


y
$y = \sqrt{x}$
$\sqrt{x}$
0
x
1
x
y
0
1
x
Δx

Contoh: Tentukan volume benda putar yang terjadi jika daerah D yang dibatasi oleh $y = x^2$, sumbu x, dan garis x = 2 diputar terhadap sumbu *x*



Jika irisan diputar terhadap sumbu x akan diperoleh cakram dengan jari-jari x^2 dan tebal Δx

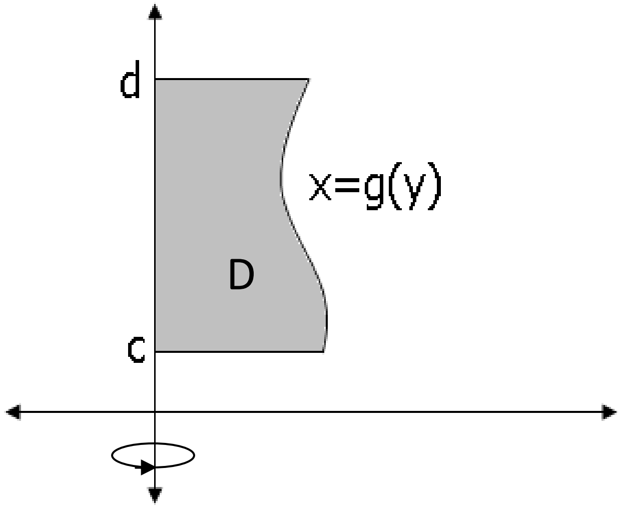
Sehingga

$$\Delta V \approx \pi (x^2)^2 \Delta x = \pi x^4 \Delta x$$

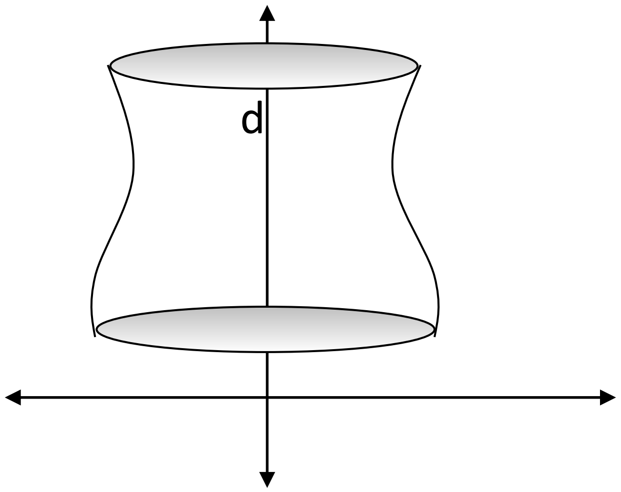
Volume benda putar

$$V = \pi \int_0^2 x^4 dx = \frac{\pi}{5} x^5 \Big|_0^2 = \frac{32}{5}\pi$$

b. Daerah $D=\{(x,y)\,|\,c\le y\le d\ ,\ 0\le x\le g(y)\}$
diputar terhadap sumbu y



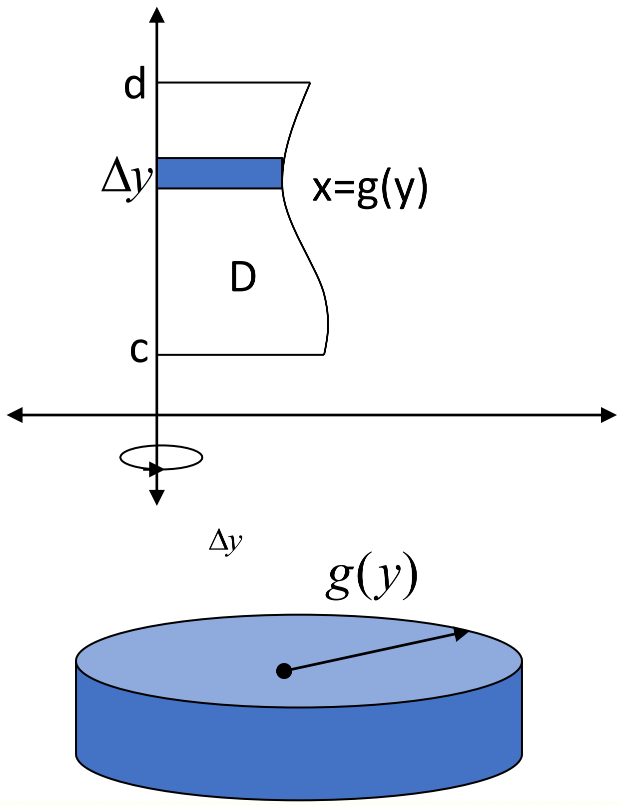
Daerah D



Benda putar

? Volume benda putar

Untuk menghitung volume benda putar gunakan pendekatan iris, hampiri, jumlahkan dan ambil limitnya.



Jika irisan berbentuk persegi panjang dengan tinggi g(y) dan alas Δy diputar terhadap sumbu y akan diperoleh suatu cakram lingkaran dengan tebal Δy dan jari-jari g(y).

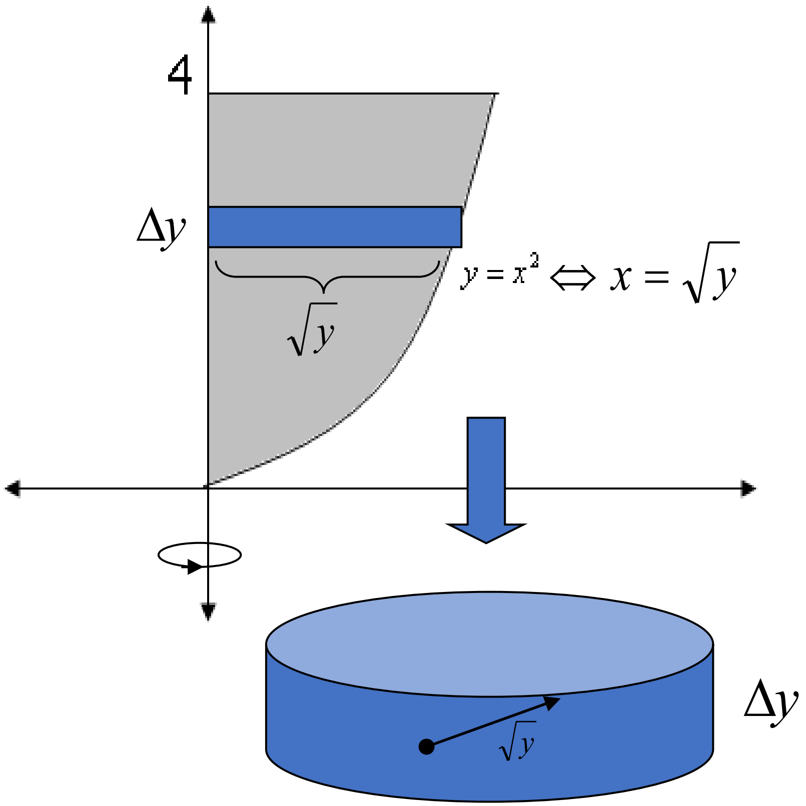
sehingga

$$\Delta V \approx \pi g^2(y)\,\Delta y$$

$$\Downarrow$$

$$V = \pi \int_c^d g^2(y)\,dy$$

Contoh : Tentukan volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi oleh $y = x^2$, garis y = 4, dan sumbu y jika diputar terhadap sumbu y



Jika irisan dengan tinggi $\sqrt{y}$ dan tebal Δy diputar terhadap sumbu y akan diperoleh cakram dengan jari-jari $\sqrt{y}$ dan tebal Δy

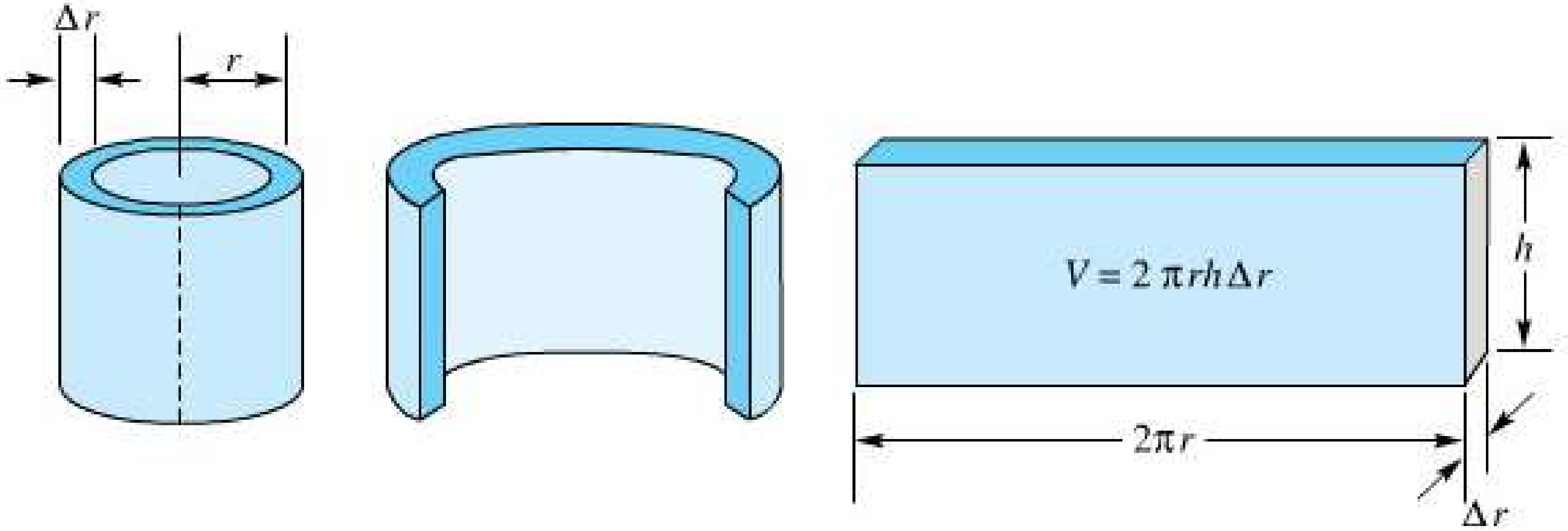
Sehingga

$$\Delta V = \pi(\sqrt{y})^2 \Delta y = \pi\, y\, \Delta y$$

Volume benda putar

$$V = \pi \int_0^4 y\,dy = \frac{\pi}{2} y^2 \Big|_0^4 = 8\pi$$

Aplikasi
Ilustrasi metode kulit tabung



Analisis Partisipatif dan/ atau Hasil Proyek
FINAL PROJECT (PENILAIAN 50%)

Buatlah analisis tentang studi kasus disekitar Anda dalam bentuk makalah sederhana yang diselesaikan dengan materi yang telah kita pelajari

Kelompok 1: Turunan, Aturan pencarian turunan atau Turunan trigonometri
Kelompok 2: Aturan rantai atau Notasi Leibniz
Kelompok 3: Turunan tingkat tinggi
Kelompok 4: Maksimum dan minimum fungsi atau Kemonotonan dan cekungan
Kelompok 5: Maksimum dan minimum local atau Limit berhingga, limit tak hingga
Kelompok 6: Integral tak tentu
Kelompok 7: Aplikasi Integral dalam Luas Daerah dan Volume

Dikumpulkan sebelum UAS

PEMBAGIAN KELOMPOK KALKULUS

NPM	KELOMPOK
2310506002	1
2310506004	
2310506005	
2310506006	
2310506007	
2310506008	2
2310506009	
2310506010	
2310506011	
2310506012	
2310506013	3
2310506014	
2310506015	
2310506016	
2320506017	
2320506018	4
2320506020	
2320506021	
2320506022	
2320506024	
2320506025	5
2320506026	
2320506027	
2320506028	
2320506029	
2320506030	6
2320506031	
2320506032	
2320506034	
2320506035	
2320506037	
2320506038	7
2320506039	
2320506046	
2330506052	
2330506054	
2330506058	
2330506068	

SELESAI

THANKS