Pertemuan - 10

Transformasi Linear

Mokhammad Nurkholis Abdillah, S.T., M.Eng

UNIVERSITAS TIDAR

Jurusan Teknik Elektro

Kampus Merdeka INDONESIA JAYA

Semester Ganjil 2022/2023

Learning Objective

Mahasiswa mampu menentukan apakah ruang vektor tersebut merupakan transformasi linier atau bukan

Mahasiswa mampu membentuk matrik transformasi.

Mahasiswa mampu menentukan kernel dan jangkauan dari ruang vektor

Course Material

Sifat Transformasi Linear	Matriks Transformasi	Kernel dan Jangkauan

BAB MATERI

Sifat Umum Transformasi Linear

Membahas konsep dasar sifat-sifat umum transformasi linear pada ruang vektor

Mokhammad Nurkholis Abdillah, S.T., M.Eng

#TRANSFORMASILINIER

01 Definisi "Transformasi Linier"

- Jika V dan W adalah suatu **ruang vektor**, dimana V adalah **domain** dan W adalah **kodomain** (**daerah hasil**) maka $T: V \rightarrow W$ dinamakan **transformasi linier** jika dan hanya jika untuk setiap an $\vec{a}, \vec{b} \in V$ dan $k \in Riil$ berlaku:

  1. $\mathrm{T}(\vec{a} + \vec{b}) = T\vec{a} + T\vec{b}$
  2. $\mathrm{T}(k\vec{a}) = kT(\vec{a})$

- Jika $V = W$ maka T dinamakan "**operator linier**"

$contoh\ T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

02

Contoh 1

Tunjukkan bahwa $T: R^2 \rightarrow R^3$, dimana

$$T\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ -x \\ y \end{pmatrix}\right]$$

Merupakan transformasi linier!

(Solusi contoh 1) Pembuktian Transformasi Linier

Diketahui $T\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ -x \\ y \end{pmatrix}\right]$

Ditanya: Buktikan $T: R^2 \to R^3$ adalah transformasi linier

Dijawab:

- Ambil sembarang $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$ dan $k \in R$.
- **Misalkan** $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

Aksioma 1: $\mathrm{T}(\vec{a} + \vec{b}) = T\vec{a} + T\vec{b}$

$$T(\vec{a}) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - a_2 \\ -a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$T(\vec{b}) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - b_2 \\ -b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$T(\vec{a} + \vec{b}) = \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_1 + b_1) - (a_2 + b_2) \\ -(a_1 + b_1) \\ (a_2 + b_2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 - a_2 + b_1 - b_2 \\ -a_1 - b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 - a_2 \\ -a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 - b_2 \\ -b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$= T\vec{a} + T\vec{b}$$

Kesimpulan:
aksioma 1 terbukti

(Solusi contoh 1) Pembuktian Transformasi Linier

Aksioma 2: $T(k\vec{a}) = kT(\vec{a})$

$$T(\alpha\vec{a}) = T\left(k\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\right)$$

$$= T\left(\begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} (ka_1) - (ka_2) \\ -(ka_1) \\ (ka_2) \end{pmatrix}$$

$$= k\begin{pmatrix} (a_1) - (a_2) \\ -(a_1) \\ (a_2) \end{pmatrix}$$

$$= kT(\vec{a})$$

Kesimpulan:
aksioma 2 terbukti

Jadi $T\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ -x \\ y \end{pmatrix}\right]$

Merupakan transformasi linier

Latihan 1. Pembukitan Transformasi linier

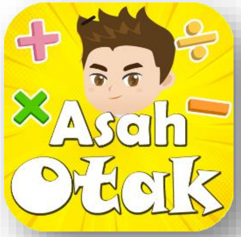
1. Misalkan T merupakan transformasi dari $M_{2\times2}$ ke $Riil$ yang didefinisikan oleh $T(A) = det(A)$, untuk setiap $A \in M_{2\times2}$. Apakah T merupakan transformasi linear?

2. Diketahui $T: P_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dengan (P_2 adalah polinom orde 2), dimana

$$T(a + bx + cx^2) = \begin{pmatrix} a - b \\ a - c \end{pmatrix}$$

   a. Apakah T merupakan transformasi linear?

   b. Tentukan $T(4 + 2x + 6x^2)$



BAB MATERI

Menentukan Matriks Transformasi

Membahas cara menentukan matriks transformasi

01 Matriks Transformasi

Catatan: Persamaan di bawah untuk **mencari matriks transformasi** jika **memiliki rumus transformasi**

- Suatu transformasi linier $\boldsymbol{T}: \boldsymbol{V} \rightarrow \boldsymbol{W}$ dapat direpresentasikan dalam bentuk:

  $T(\vec{u}) = \boldsymbol{A}\vec{u}$, untuk setiap $\vec{u} \in \boldsymbol{V}$

- ***A*** dinamakan **matriks transformasi** dari ***T***.

- Jika $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ merupakan transformasi linear, maka ukuran matriks transformasi adalah $m \times n$

Contoh 2

Misalkan $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ didefinisikan oleh:

$$T\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} x - y \\ -x \\ y \end{pmatrix}$$

Tentukan matriks transformasi ***A*** untuk **T**!

(Solusi contoh 2) Matriks Transformasi

Diketahui $T\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} x-y \\ -x \\ y \end{pmatrix}$

Ditanya: tentukan matriks transformasi **T** untuk $T: R^2 \rightarrow R^3$

Dijawab:

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ -x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Jadi matriks transformasi **T** untuk $T: R^2 \rightarrow R^3$ adalah:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Jika $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ merupakan transformasi linear, maka ukuran matriks transformasi adalah $m \times n$

02 Mencari Matriks Transformasi

Catatan: Persamaan di bawah untuk **mencari matriks transformasi** jika **tidak memiliki rumus transformasi**

- Jika $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ adalah basis ruang vektor dari V dan $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ merupakan transformasi linear dimana

$$T(\vec{v}_i) = \vec{u}_1 \text{ untuk setiap } i = 1,2$$

- Maka transformasinya dapat ditentukan dengan cara:

$$T(\vec{v}_1) = A\vec{v}_1 = \vec{u}_1$$

$$T(\vec{v}_2) = A\vec{v}_2 = \vec{u}_2$$

- Sehingga $A_{3\times 2}\,[\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2]_{2\times 2} = [\vec{u}_1 \quad \vec{u}_2]_{2\times 2}$

- Akan diperoleh $A = [\vec{u}_1 \quad \vec{u}_2][\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2]^{-1}$

Contoh 3

Diketahui $\left\{\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}\right\}$ adalah basis untuk $\mathbb{R}^2$.
$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ adalah transformasi linear, sehingga:

$$T(\vec{v}_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad T(\vec{v}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

a. Tentukan matriks transformasi ***A*** untuk **T**!
b. Tentukan rumus transformasi linear!
c. Tentukan $T\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

(solusi Contoh 3) Mencari Matriks Transformasi

Diketahui

$$\left\{\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}\right\}$$

$$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

$$T(\vec{v}_1) = \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix} \qquad T(\vec{v}_2) = \begin{pmatrix}0\\-3\\5\end{pmatrix}$$

Sehingga

$$T(\vec{v}_1) = T\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$$

$$T(\vec{v}_2) = T\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-3\\5\end{pmatrix}$$

Ditanya : a. Matriks transformasi A

Dijawab $A_{3\times 2}\,[\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2]_{2\times 2} = [\vec{u}_1 \quad \vec{u}_2]_{2\times 2}$

$$A\begin{bmatrix}-2 & 4\\1 & -3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 0\\2 & -3\\0 & 5\end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix}-1 & 0\\2 & -3\\0 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 4\\1 & -3\end{bmatrix}^{-1}$$

$$A = \begin{bmatrix}-1 & 0\\2 & -3\\0 & 5\end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3 & -4\\-1 & 2\end{bmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix}3/2 & 2\\-3/2 & -1\\-5/2 & -5\end{pmatrix}$$

(solusi Contoh 3) Mencari Matriks Transformasi

Ditanya : b. Rumus Transformasi linier

Dijawab

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & -2 \\ -3/2 & -1 \\ -5/2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}x + 2y \\ -\frac{3}{2}x - y \\ -\frac{5}{2}x - 5y \end{pmatrix}$$

Ditanya : c. Tentukan $T\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Dijawab

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}x + 2y \\ -\frac{3}{2}x - y \\ -\frac{5}{2}x - 5y \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}(2) + 2(-3) \\ -\frac{3}{2}(2) - (-3) \\ -\frac{5}{2}(2) - 5(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Latihan 2. Matriks Transformasi

3. Diberikan $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ adalah basis untuk $\mathbb{R}^3$, dan

$$\vec{v}_1 = (1,1,1)$$
$$\vec{v}_2 = (1,1,0)$$
$$\vec{v}_3 = (1,0,0)$$

$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ adalah transformasi linear sehingga:

$T(\vec{v}_1) = (1,0)$
$T(\vec{v}_2) = (2,-1)$
$T(\vec{v}_3) = (4,3)$

Tentukan $T(2,-3,5)$

4. Misalkan

$$\left\{\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

adalah basis untuk $\mathbb{R}^3$.
$T: \mathbb{R}^3 \to P_1$ (P_1 polinomial orde 1)
adalah transformasi linear dinyatakan :
$T(\vec{v}_i) = A\vec{v}_i = P_i$ untuk setiap $i = 1,2,3$.
Jika
$P_1 = 1 - x;\ P_2 = x;\ P_3 = 2x$

Tentukan $T\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

BAB MATERI

Kernel dan Jangkauan

Membahas konsep kernel dan jangkauan pada transformasi linier

Mokhammad Nurkholis Abdillah, S.T., M.Eng

#TRANSFORMASILINIER

01 Kernel dan Jangkauan

- Misalkan $T: V \rightarrow W$ merupakan transformasi linear.
- Semua unsur di V yang dipetakan ke vektor nol di W dinamakan kernel (dari) T
- Notasi $Ker(T)$
- atau $Ker(T) = \{\vec{u} \in V | T(\vec{u}) = \vec{0}\}$

Contoh 4

Misalkan $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dinyatakan oleh rumus:

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ -8x + 4y \end{pmatrix}$$

Manakah dari vektor berikut yang merupakan $Ker(T)$?

a. $\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(Solusi Contoh 4) Kernel dan Jangkauan

Diketahui $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ -8x + 4y \end{pmatrix}$ $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

Ditanya: a. apakah $\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$ **termasuk** $Ker(T)$**...?**

Dijawab

$$T\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(5) - (10) \\ -8(5) + 4(10) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 - 10 \\ -40 + 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Karena $\boldsymbol{T\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} = 0}$**, maka termasuk kernel**

Ditanya: b. apakah $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ **termasuk** $Ker(T)$**...?**

Dijawab

$$T\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(3) - (2) \\ -8(3) + 4(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 2 \\ -24 + 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -16 \end{pmatrix}$$

Karena $\boldsymbol{T\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \neq 0}$**, maka bukan kernel**

Ditanya: b. apakah $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ **termasuk** $Ker(T)$**...?**

Dijawab

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(1) - (1) \\ -8(1) + 4(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 1 \\ -8 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Karena $\boldsymbol{T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0}$**, maka bukan kernel**

Latihan 3 – Kernel dan Jangkauan

5. Misalkan $T: P_2 \to \mathbb{R}^2$ dinyatakan oleh rumus:

$$T(a + bx + cx^2) = \begin{pmatrix} a - b \\ a - c \end{pmatrix}$$

Manakah yang merupakan $Ker(T)$?

a. $s_1 = 1 + x + x^2$

b. $s_2 = 1 + 2x + x^2$

6. Diberikan transformasi Linier $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ yang dinyatakan oleh:

$$T\left[\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} a + b \\ c - 2d \\ -a - b + c - 2d \end{pmatrix}$$

Tentukan basis kernel dan basis jangkauan dari T

Kampus Merdeka
INDONESIA JAYA

UNIVERSITAS TIDAR

TERIMA KASIH

ALJABAR LINEAR

#TRANSFORMASILINIER