

Himpunan

Part 2

Pertemuan 5

Prinsip Dualitas

Prinsip dualitas → dua konsep yang berbeda dapat saling dipertukarkan namun tetap memberikan jawaban yang benar.

Contoh: Di AS → kemudi mobil di kiri depan

Di Inggris (juga Indonesia) → kemudi mobil di kanan depan

Peraturan:

(a) di Amerika Serikat,

- mobil harus berjalan di bagian *kanan* jalan,
- pada jalan yang berlajur banyak, lajur *kiri* untuk mendahului,
- bila lampu merah menyala, mobil belok *kanan* boleh langsung

(b) di Inggris,

- mobil harus berjalan di bagian *kiri* jalan,
- pada jalur yang berlajur banyak, lajur *kanan* untuk mendahului,
- bila lampu merah menyala, mobil belok *kiri* boleh langsung

Prinsip **dualitas**: Konsep kiri dan kanan dapat dipertukarkan pada kedua negara tersebut sehingga peraturan yang berlaku di Amerika Serikat menjadi berlaku pula di Inggris



Setir mobil di Amerika



Mobil berjalan di jalur kanan di AS



Setir mobil di Inggris/Indonesia



Mobil berjalan di jalur kiri di Indonesia

(Prinsip Dualitas pada Himpunan). Misalkan S adalah suatu kesamaan (*identity*) yang melibatkan himpunan dan operasi-operasi seperti \cup , \cap , dan komplemen. Jika S^* diperoleh dari S dengan mengganti

$$\cup \rightarrow \cap,$$

$$\cap \rightarrow \cup,$$

$$\emptyset \rightarrow U,$$

$$U \rightarrow \emptyset,$$

sedangkan komplemen dibiarkan seperti semula, maka kesamaan S^* juga benar dan disebut dual dari kesamaan S .

1. Hukum identitas: $A \cup \emptyset = A$	Dualnya: $A \cap U = A$
2. Hukum <i>null</i> /dominasi: $A \cap \emptyset = \emptyset$	Dualnya: $A \cup U = U$
3. Hukum komplemen: $A \cup \bar{A} = U$	Dualnya: $A \cap \bar{A} = \emptyset$
4. Hukum idempoten: $A \cup A = A$	Dualnya: $A \cap A = A$

5. Hukum penyerapan: $A \cup (A \cap B) = A$	Dualnya: $A \cap (A \cup B) = A$
6. Hukum komutatif: $A \cup B = B \cup A$	Dualnya: $A \cap B = B \cap A$
7. Hukum asosiatif: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	Dualnya: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
8. Hukum distributif: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	Dualnya: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
9. Hukum De Morgan: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	Dualnya: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
10. Hukum 0/1 $\overline{\emptyset} = U$	Dualnya: $\overline{U} = \emptyset$

Contoh. Dual dari $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = A$ adalah
 $(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) = A.$

Tetapi, dual dari

$$(A - B) \cap (A - C) = A - (B \cup C)$$

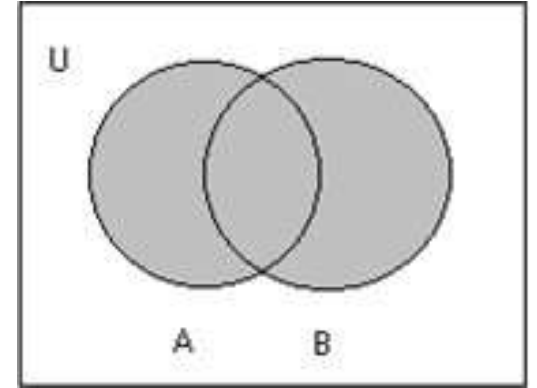
tidak ada karena mengandung operasi selisih

Prinsip Inklusi-Eksklusi

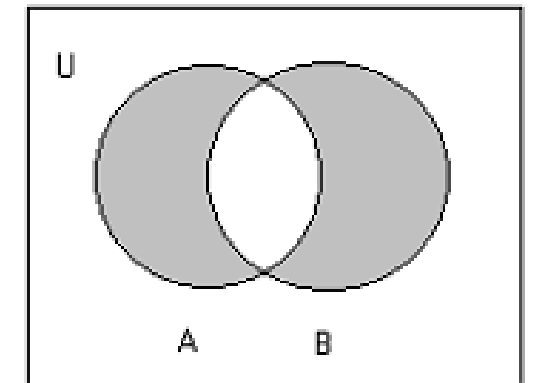
Untuk dua himpunan A dan B :

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \oplus B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$$



$$A \cup B$$



$$A \oplus B$$

Contoh. Berapa banyaknya bilangan bulat antara 1 dan 100 yang habis dibagi 3 atau 5?

Penyelesaian:

A = himpunan bilangan bulat yang habis dibagi 3,

B = himpunan bilangan bulat yang habis dibagi 5,

$A \cap B$ = himpunan bilangan bulat yang habis dibagi 3 dan 5 (yaitu himpunan bilangan bulat yang habis dibagi oleh KPK – Kelipatan Persekutuan Terkecil – dari 3 dan 5, yaitu 15),

Yang ditanyakan adalah $|A \cup B|$.

$$|A| = \lfloor 100/3 \rfloor = 33,$$

$$|B| = \lfloor 100/5 \rfloor = 20,$$

$$|A \cap B| = \lfloor 100/15 \rfloor = 6$$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 33 + 20 - 6 = 47$$

Jadi, ada 47 buah bilangan yang habis dibagi 3 atau 5.

Untuk tiga buah himpunan A , B , dan C , berlaku

- $$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| = & |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - \\ & |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \end{aligned}$$

- Untuk himpunan A_1, A_2, \dots, A_r , berlaku:

- $$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_r| = & \sum_i |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq r} |A_i \cap A_j| + \\ & \sum_{1 \leq i < j < k \leq r} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots + \\ & (-1)^{r-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_r| \end{aligned}$$

Contoh. Di antara bilangan bulat antara 101 – 600 (termasuk 101 dan 600 itu sendiri), berapa banyak bilangan yang tidak habis dibagi oleh 4 atau 5 namun tidak keduanya?

Penyelesaian:

Diketahui:

$$|U| = 500$$

$$|A| = \lfloor 600/4 \rfloor - \lfloor 100/4 \rfloor = 150 - 25 = 125$$

$$|B| = \lfloor 600/5 \rfloor - \lfloor 100/5 \rfloor = 120 - 20 = 100$$

$$|A \cap B| = \lfloor 600/20 \rfloor - \lfloor 100/20 \rfloor = 30 - 5 = 25$$

yang ditanyakan $|\overline{A \oplus B}| = ?$

Hitung terlebih dahulu

$$|A \oplus B| = |A| + |B| - 2|A \cap B| = 125 + 100 - 50 = 175$$

untuk mendapatkan

$$|\overline{A \oplus B}| = U - |A \oplus B| = 500 - 175 = 325$$

Latihan

- Berapakah banyak bilangan bulat di antara 1-500 (inklusif, termasuk 1 dan 500) yang dapat dibagi 7 atau 5, tetapi tidak dapat dibagi 3?