

Полагая

$$y = g(x)$$

и принимая во внимание теорему 296, имеем для  $0 < |h| < \varepsilon$  с надлежаще выбранным  $\varepsilon > 0$  :

$$\begin{aligned} 0 &= 0 - 0 = f(x+h, g(x+h)) - f(x, g(x)) = \\ &= f(x+h, y+k) - f(x, y) = \\ &= hf_1(x, g(x)) + kf_2(x, g(x)) + h\varphi(h) + k\psi(h) \end{aligned}$$

, где

$$\lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0, \lim_{h \rightarrow 0} \psi(h) = 0.$$

Но

$$f_2(x, g(x)) + \psi(h) \neq 0$$

для  $0 < |h| < \varepsilon_1$  с надлежаще выбранным  $\varepsilon_1$ ,  $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$ . Поэтому

$$\frac{k}{h} = -\frac{f_1(x, g(x)) + \psi(h)}{f_2(x, g(x)) + \psi(h)}$$

и, следовательно,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{k}{h} = -\frac{f_1(x, g(x))}{f_2(x, g(x))}.$$

**Пример** (снова умышленно старый):

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 1, \quad |x| < 1, \quad y > 0.$$

Здесь

$$\begin{aligned} f_2(x, y) &= 2y > 0, \\ f_1(x, y) &= 2x, \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$g'(x) = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{g(x)}.$$

(И действительно, как мы давно уже знаем,

$$\begin{aligned} y &= g(x) = \sqrt{1 - x^2}, \\ g'(x) &= -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}.) \end{aligned}$$

## КРУГОВЫЕ ФУНКЦИИ

Речь будет идти о функциях, обратных к тригонометрическим.

**Теорема 316.** Для  $|x| \leq 1$  существует точно одно  $y$  такое, что

$$\sin y = x, \quad |y| \leq \frac{\pi}{2}$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Согласно теореме 278,  $\sin y$  монотонно возрастает в  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . Так как

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1, \quad \sin\frac{\pi}{2} = 1,$$

то, следовательно в силу теоремы 148, требуемое  $y$  существует и однозначно определено.

**Определение 73.**  $\arcsin x$  для  $|x| \leq 1$  есть  $y$  из теоремы 316.

$\arcsin$  читается: арксинус (или аркус синус).

**Теорема 317.**  $\frac{d \arcsin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  при  $|x| < 1$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Положим

$$y = \arcsin x,$$

тогда

$$\begin{aligned} |y| &< \frac{\pi}{2}, \\ x &= \sin y, \\ \frac{dx}{dy} &= \cos y > 0. \end{aligned}$$

и, следовательно, по теореме 313

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$