Полагая
$$y = g(x)$$
и принимая во внимание теорему 296, имеем для $0 < |h| < \varepsilon$ с надлежаще выбранным $\varepsilon > 0$ :
$$\begin{gathered}0 = 0 - 0 = f(x+h, g(x+h)) - f(x, g(x)) = \\ = f(x+h, y+k) - f(x, y) = \\ = hf_1(x, g(x)) + kf_2(x, g(x)) + h\varphi(h) + k\psi(h)\end{gathered}$$
, где
$$\lim_{h=0} \varphi(h) = 0, \lim_{h=0} \psi(h) = 0.$$
Но
$$f_2(x, g(x)) + \psi(h) \neq 0$$
для $0 < |h| < \varepsilon_1$ с надлежаще выбранным $\varepsilon_1$, $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$. Поэтому
$$\frac{k}{h} = -\frac{f_1(x, g) + \psi(h)}{f_2(x, g(x)) + \psi(h)}$$
и, следовательно,
$$\lim_{h=0} = -\frac{f_1(x, g(x))}{f_2(x, g(x))}.$$

**Пример** (снова умышленно старый):
$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 1, \quad |x| < 1, \quad y > 0.$$
Здесь
$$\begin{aligned}f_2(x, y) &= 2y > 0, \\ f_1(x, y) &= 2x,\end{aligned}$$
и, следовательно,
$$g'(x) = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{g(x)}.$$
(И действитвельно, как мы давно уже знаем,
$$\begin{aligned}y = g(x) &= \sqrt{1 - x^2}, \\ g'(x) &= -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}.)\end{aligned}$$

*Глава 19*

# КРУГОВЫЕ ФУНКЦИИ

Речь будет итти о функциях, обратных к тригонометрическим.

**Теорема 316.** *Для* $|x| \leqslant 1$ *существует точно одно* $y$ *такое, что*

$$\sin y = x, \quad |y| \leqslant \frac{\pi}{2}$$

Д о к а з а т е л ь с в о. Согласно теореме 278, $\sin y$ монотонно возрастает в $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Так как

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1, \quad \sin\frac{\pi}{2} = 1,$$

то, следовательно в силу теоремы 148, требуемое y существует и однозначно определено.

**Определение 73.** $\mathrm{arc\ sin}\ x$ *для* $|x| \leqslant 1$ *есть* $y$ *из теоремы 316.*

arc sin читается: арксинус (или аркус синус).

**Теорема 317.** $\frac{d\ \mathrm{arc\ sin}\ x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *при* $|x| < 1$.

Д о к а з а т е л ь с в о. Положим

$$y = \mathrm{arc\ sin}\ x,$$

тогда

$$|y| < \frac{\pi}{2},$$
$$x = \sin y,$$
$$\frac{dx}{dy} = \cos y > 0.$$

и, следовательно, по теореме 313

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$