Séance 3 : Circuits linéaires et permanents soumis à une sollicitation sinusoïdale
Corrigé

1 Pré-requis

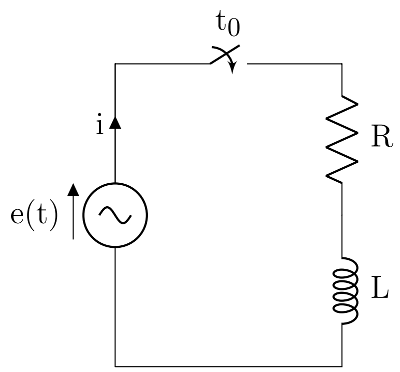
Avant la séance, vous aurez lu attentivement l'énoncé de la manipulation. Vous aurez par ailleurs relu les chapitres et sections suivants :

- Chapitre 5 - Résoudre un circuit : procédure de base et accélérateur
  - Section 5.1 - Vocabulaire lié aux circuits
    - 5.1.2 Connexions série et parallèle
    - 5.1.3 Branche
    - 5.1.4 Maille
  - Section 5.2 - Lois de Kirchhoff
- Chapitre 6 - Résoudre un circuit réactif dans le domaine temporel
  - Section 6.5 - Analyse temporelle du circuit RL (source sinusoïdale)
  - Section 6.6 - Analyse temporelle du circuit RLC
- Chapitre 7 - Résoudre un circuit réactif dans le domaine fréquentiel
  - Section 7.3 - Phaseur
  - Section 7.4 - Impédances et admittances
    - 7.4.2 Impédance d'une capacité pure
    - 7.4.3 Impédance d'une résistance pure

2 Exercices

2.1 RL

La tension $e(t) = V_m \cos(\omega t + \alpha)$ est appliquée à l'instant $t = t_0 = 0$ au circuit RL.



Question 1. *Déterminer l'expression du courant* $i(t)$ *pour tout temps* t *et discuter la valeur de* α *pour que :*

1. *le régime permanent s'établisse immédiatement*
2. *la valeur instantanée du courant soit maximale*

Réponse :
La solution générale est (cfr cours) :

$$i(t) = i'(t) + i''(t) = I_m \cos(\omega t + \alpha - \theta) - I_m \cos(\alpha - \theta) e^{-t/\tau}$$

Où $i'(t)$ est le terme de régime et $i''(t)$ le terme transitoire.

$$I_m = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$

$$\tan(\theta) = \frac{\omega L}{R}$$

$$\tau = \frac{L}{R}$$

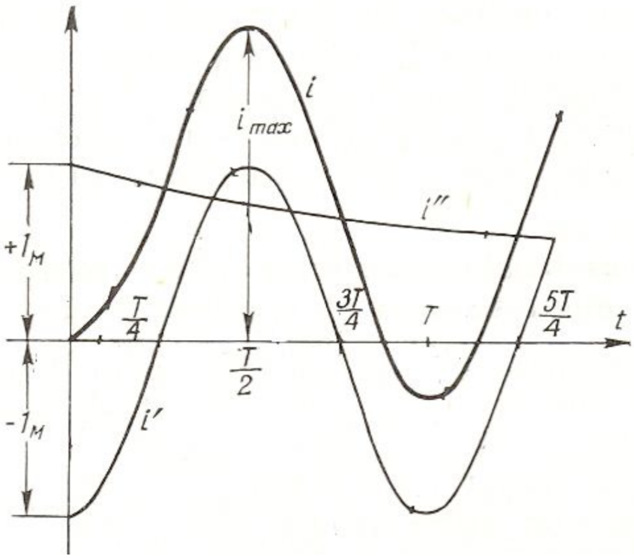
Le transitoire est nul si $\cos(\alpha - \theta) = 0 \Leftrightarrow \alpha - \theta = \pm\pi/2$.
Cela correspond à un enclenchement du circuit ($t = 0$) au moment où le terme de régime passe par zéro. Dans ce cas, le régime permanent s'établit immédiatement.

Le terme transitoire sera maximum lorsque le circuit est enclenché au moment où le terme de régime passe par son maximum positif ou négatif ($\pm I_m$).

$$\alpha - \theta = 0 \text{ ou } \pi \Leftrightarrow i(t) = \pm I_m(\cos(\omega t) - e^{-\frac{R}{L}t})$$

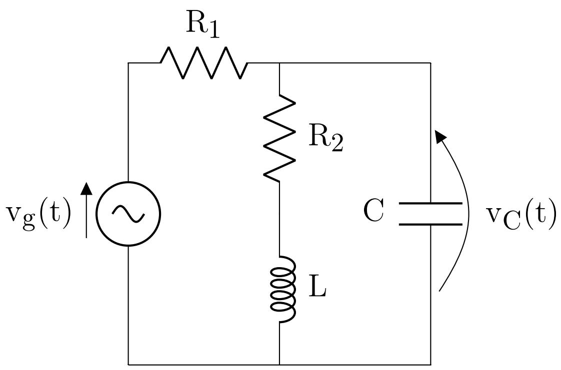
Si $\omega L >> R$, le terme transitoire garde une valeur appréciable pendant plusieurs périodes. Dans ce cas, le courant total atteint sa valeur maximale i_{max} environ une demi-période après le branchement, lorsque le terme de régime s'approche de sa valeur maximale, mais a le même signe que le terme transitoire :

$$i_{max} = i(T/2) \simeq I_m(1 + e^{-\frac{R}{L}\frac{T}{2}}) = I_m(1 + e^{-\pi\frac{R}{\omega L}}) \simeq 2I_m \text{ (si} \frac{R}{\omega L} \text{ est petit)}$$



2.2 Résoudre le circuit

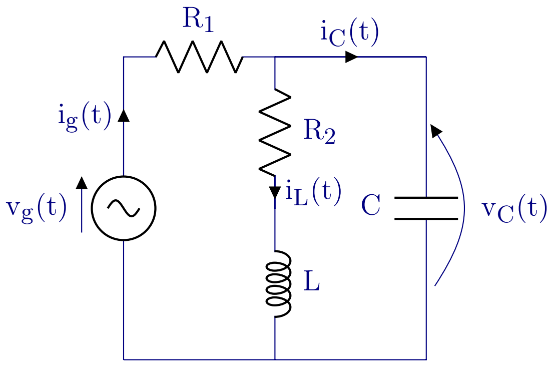
Pour le circuit suivant



Où $v_g(t) = \sin(4t + 45^o)$, $R_1 = 4\Omega$, $R_2 = 1\Omega$, $L = 1H$ et $C = \frac{1}{4}F$.

Question 2. *Déterminer la tension aux bornes de la capacité en régime.*

Réponse :



Ayant défini les grandeurs dans le schéma, les lois des mailles, des noeuds et des composants permettent d'écrire :
$\underline{V}_g = R_1\underline{I} + \underline{V}_C = R_1(\underline{I}_L + \underline{I}_C) + \underline{V}_C$
$(R_2 + j\omega L)\underline{I}_L = \underline{V}_C$
$\underline{V}_C = \frac{\underline{I}_C}{j\omega C}$

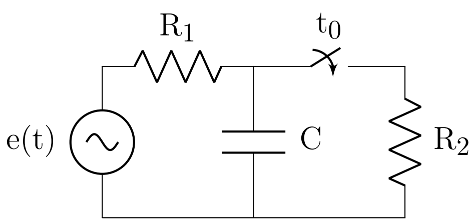
$\Rightarrow \underline{V}_C = \underline{V}_g \frac{R_2+j\omega L}{R_1(1-\omega^2 LC)+R_2+j(\omega L+\omega CR_1R_2)}$

$\underline{V}_g = e^{j45^o}$ (avec des phaseurs en sinus comme dans l'énoncé, sinon déphaser de 90°)
$\Rightarrow \underline{V}_C = e^{j45^o}\frac{1+j4}{-11+j8} = e^{j45^o}\frac{4{,}12e^{j75{,}96^o}}{13{,}6e^{j143{,}97^o}} = 0,303e^{-j23^o}$

L'expression finale en temporel est donc :
$v_C(t) = 0,303\sin(4t - 23^o)$

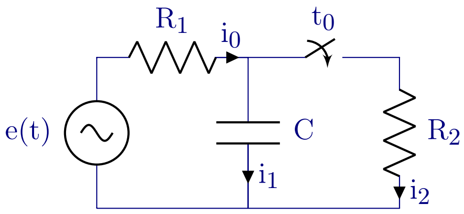
2.3 Résoudre le circuit 2

Le circuit suivant se trouve en régime avant l'instant $t = t_0 = 0$ de fermeture de l'interrupteur.



Question 3. *Déterminer les courants pour toute valeur de* t, *avec* $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$.

Réponse :



— **Pour** $t < 0$ **(état de régime)**
$i_1(t) = i_0(t)$ et $i_2(t) = 0$
$\underline{I}_0 = \frac{E_0}{R_1 + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega C E_0}{1 + j\omega C R_1}$
$\Rightarrow i_0(t) = \frac{\omega C E_0}{\sqrt{1+\omega^2 C^2 R_1^2}} \cos(\omega t + \phi)$ avec $\tan(\phi) = \frac{1}{\omega C R_1}$
$\underline{V}_C = \frac{\underline{I}_0}{j\omega C} = \frac{E_0}{1 + j\omega C R_1}$
$\Rightarrow v_C(t) = \frac{E_0}{\sqrt{1+\omega^2 C^2 R_1^2}} \cos(\omega t - \alpha)$ et $\tan(\alpha) = \omega C R_1$

— **Pour** $t > 0$
$E_0 \cos(\omega t) = R_1(i_1 + i_2) + R_2 i_2 \qquad (1)$
$v_C(0) + \frac{1}{C}\int_0^t i_1(\xi) d\xi = R_2 i_2 \Rightarrow i_1 = C R_2 \frac{di_2}{dt} \qquad (2)$
(1) et (2) $\Rightarrow E_0 \cos(\omega t) = (R_1 + R_2) i_2 + C R_1 R_2 \frac{di_2}{dt}$
$\Rightarrow i_2(t) = A e^{-t\frac{R_1+R_2}{CR_1R_2}} +$ sol. partic.

Pour chercher la solution particulière en $t > 0$, $i_{2_p}(t)$, on va utiliser la méthode des phaseurs :
$\frac{1}{j\omega C}\underline{I}_1 = R_2 \underline{I}_2$
$\underline{E}_0 = R_1(\underline{I}_1 + \underline{I}_2) + R_2 \underline{I}_2$

$\Rightarrow \underline{I}_2 = \frac{E_0}{R_1 + R_2 + j\omega C R_1 R_2}$
$\underline{I}_1 = \frac{j\omega C R_2 E_0}{R_1 + R_2 + j\omega C R_1 R_2}$

La solution particulière est donc :

$$i_{2_p}(t) = K \cos(\omega t - \beta)$$

où $K = \frac{E_0}{\sqrt{(R_1+R_2)^2 + (\omega C R_1 R_2)^2}}$, $\tan(\beta) = \omega\tau$ et $\tau = \frac{R_1 R_2 C}{R_1 + R_2}$

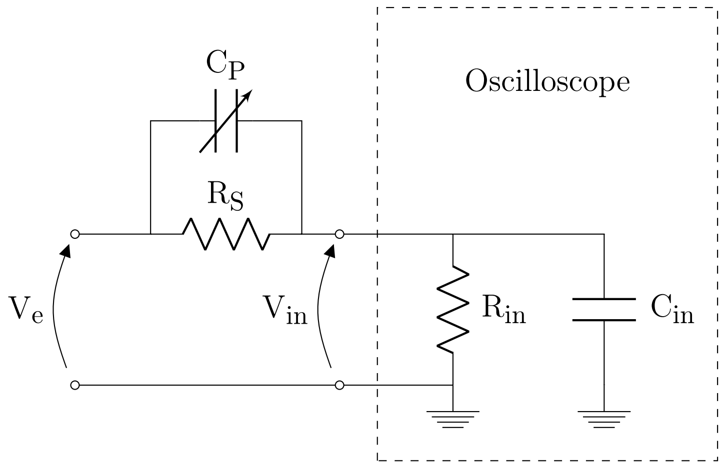
La solution générale pour $t > 0$ est alors :
$i_2(t) = A e^{-t/\tau} + K \cos(\omega t - \beta)$
et il faut identifier A à partir de la condition initiale.

- **Condition initiale** ($t = 0^+$)
  $i_2(0^+) = \frac{v_C(0^+)}{R_2} = \frac{v_C(0^-)}{R_2} = \frac{E_0 \cos(\alpha)}{R_2\sqrt{1+\omega^2C^2R_1^2}}$
  $A = \frac{E_0 \cos(\alpha)}{R_2\sqrt{1+\omega^2C^2R_1^2}} - K\cos(\beta)$

  On a $i_2(t)$ pour $t > 0$ (ouf !) :
  $i_2(t) = Ae^{-t/\tau} + K\cos(\omega t - \beta)$
  $i_2(t) = \frac{E_0 \cos(\alpha)}{R_2\sqrt{1+\omega^2C^2R_1^2}} - K\cos(\beta)e^{-t\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}} + \frac{E_0}{\sqrt{(R_1+R_2)^2+(\omega CR_1R_2)^2}}\cos(\omega t - \beta)$
- **Pour les autres courants en** $t > 0$
  $i_1(t) = CR_2\frac{di_2}{dt} = -\frac{CR_2}{\tau}Ae^{-t/\tau} - KCR_2\omega\sin(\omega t - \beta)$
  $i_0(t) = i_1(t) + i_2(t)$

2.4 Oscilloscope

Le signal V_e à mesurer est connecté à un oscilloscope au moyen d'une sonde externe. La sonde est constituée d'une résistance R_S et d'une capacité C_P (réglable) en parallèle. L'impédance d'entrée de l'oscilloscope est modélisée par la mise en parallèle de $R_{in} = 1M\Omega$ et $C_{in} = 20pF$.



Question 4. *Déterminer les éléments de la sonde pour réaliser un facteur de division de* k *(par exemple* $k = 10$*) sans déformer le signal mesuré.*
Dans ces conditions, déterminer la nouvelle impédance d'entrée équivalente.

Réponse :
La sonde (externe) à haute impédance permet de connecter le signal à étudier à l'oscilloscope tout en réalisant un facteur de division (par exemple 10 ou 100) indépendant de la fréquence.
La sonde est constituée d'une résistance R_S fixe et d'un condensateur C_P réglable.

Le rapport de division est :

$$\frac{\underline{V}_{in}}{\underline{V}_e} = \frac{Z_{in}}{Z_S + Z_{in}} = \frac{1}{1 + \frac{R_S}{R_{in}} \frac{1+j\omega R_{in} C_{in}}{1+j\omega R_S C_P}}$$

Pour que le signal à l'entrée de l'oscilloscope ne soit pas déformé, il faut que ce rapport soit indépendant de la fréquence (la sonde sera alors dite adaptée) :

$$R_S C_P = R_{in} C_{in} \qquad (1)$$

Le rapport $\frac{1}{k} = \frac{\underline{V}_{in}}{\underline{V}_e} = \frac{R_{in}}{R_S + R_{in}}$ sera réel et indépendant de ω. On aura donc :

$$R_S = (k-1) R_{in} \text{ et } C_P = \frac{C_{in}}{k-1}$$

où k est le rapport d'atténuation de la sonde.

Exemple : $R_{in} = 1\mathrm{M}\Omega$, $C_{in} = 20\mathrm{pF}$, $k = 10 \Rightarrow R_S = 9\mathrm{M}\Omega$ et $C_P = 2,2\mathrm{pF}$

Si la condition d'adaptation (1) de la sonde est réalisée, l'impédance d'entrée de l'oscilloscope muni de la sonde est :

$$Z_e = Z_{in} + Z_S = \frac{R_{in}}{1 + j\omega R_{in} C_{in}} + \frac{R_S}{1 + j\omega R_S C_P} = \frac{R_{in} + R_S}{1 + j\omega (R_{in} + R_S) \frac{C_{in} C_P}{C_{in} + C_P}}$$

La résistance d'entrée et la capacité d'entrée sont devenues :

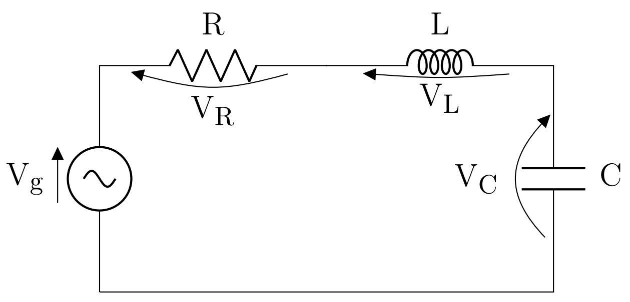
$$R_e = R_{in} + R_S = kR_{in}$$
$$C_e = \frac{C_{in} C_P}{C_{in} + C_P} = \frac{C_{in}}{k}$$

La sonde permet donc d'augmenter la résistance d'entrée et de diminuer la capacité d'entrée.

Pour l'exemple : $R_e = 10\mathrm{M}\Omega$ et $C_e = 2\mathrm{pF}$.

2.5 RLC

Pour le circuit RLC série en régime sinusoïdal permanent suivant :

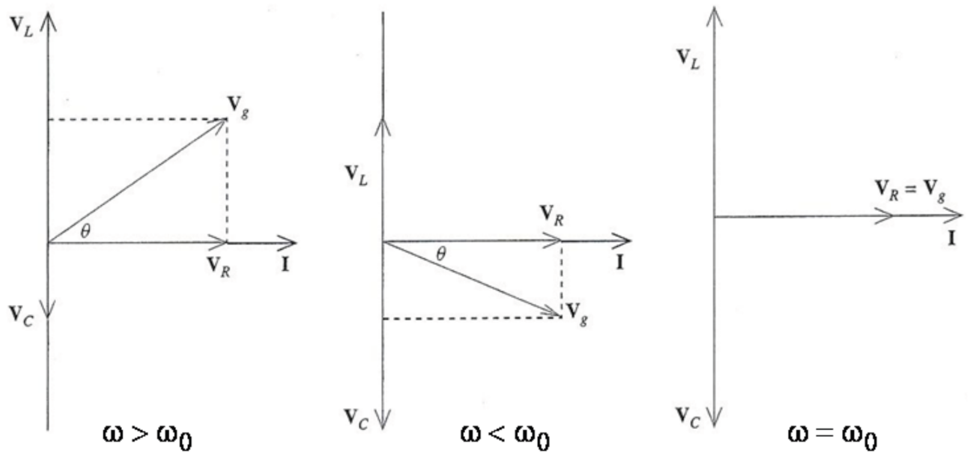


Question 5. *Représenter les phaseurs des différentes tensions dans le plan complexe (diagramme des phaseurs), en prenant le courant comme origine des phases. On se placera successivement dans le cas $\omega > \omega_0$, $\omega < \omega_0$, $\omega = \omega_0$, avec $\omega = \frac{1}{LC}$.*

Réponse :
$\underline{V}_g = \underline{V}_R + \underline{V}_L + \underline{V}_C$
$\underline{V}_R = R\underline{I}$
$\underline{V}_L = j\omega L\underline{I}$
$\underline{V}_C = -j\frac{1}{\omega C}\underline{I}$

$$\Rightarrow \underline{I} = \frac{\underline{V}_g}{Z} = \frac{\underline{V}_g}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})}$$

- $\omega > \omega_0 \Rightarrow |\underline{V}_L| > |\underline{V}_C|$
  Le circuit est globalement inductif et le courant est en retard (de θ) sur la tension.
- $\omega < \omega_0 \Rightarrow |\underline{V}_L| < |\underline{V}_C|$
  Le circuit est globalement capacitif et le courant est en avance sur la tension.
- $\omega = \omega_0 \Rightarrow |\underline{V}_L| = |\underline{V}_C|$
  Les réactances inductive et capacitive se compensent exactement. Le courant et la tension sont en phase.



Question 6. *La tension V_C peut-elle devenir supérieure à la tension d'alimentation ?*

Réponse :
Affirmatif, c'est le principe de la résonance.
V_C (et V_L) peuvent devenir supérieures à V_g. Par contre, V_R ne peut pas dépasser V_g.