

# **Relatório 2**

# **O Pêndulo Físico**

Autores:

Arthur Augusto Cândido Luércio (251818)

Marcos Ferreira Semolini (204339)

Pedro Henrique Segnini Ortolan (258610)

Renato Moraes Ferreira Sene (238248)

Gustavo Guimarães de Carvalho (258492)

Setembro, 2023

## Resumo

## Introdução

Em nosso experimento, construiremos um pêndulo caseiro para analisar e comparar dois modelos de sistemas: o pêndulo físico e o pêndulo simples. No nosso pêndulo caseiro, representado na Figura 1, temos uma massa, um tubo de papelão, conectada a um eixo de rotação, um arame, que atravessa o tubo em furos paralelos a diferentes distâncias do centro de massa. O tubo é deslocado do ponto de equilíbrio e, quando liberado do repouso, inicia oscilações. A cada ciclo de oscilação, o período diminui gradualmente até a parada.

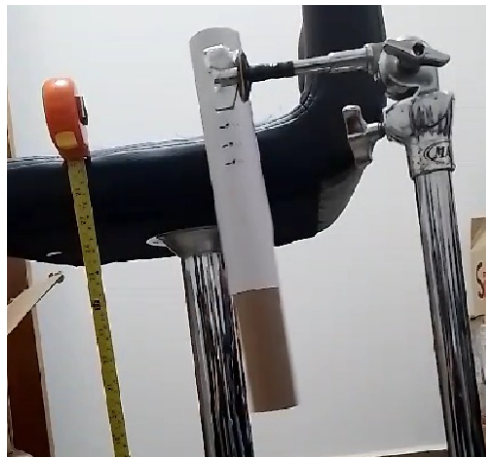


Figura 1: Foto da construção do pêndulo caseiro.

## Objetivo

Os objetivos deste experimento incluem a obtenção dos valores da gravidade local ( $g$ ) e do raio de giração do pêndulo ( $k$ ) por meio da análise dos dados experimentais. Com base nos resultados, determinaremos qual modelo, o pêndulo simples ou o pêndulo físico, descreve melhor nosso experimento. Além disso, buscaremos identificar possíveis erros sistemáticos no experimento.

## Modelo

Tomando o ponto de centro de massa como referência, podemos escrever uma lei equivalente a segunda lei de Newton, só que para Torques. Assim, podemos escrever que:

$$\sum \tau_i = I \cdot \alpha \quad (1)$$

De onde, para o nosso sistema, segue que:

$$I \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \cdot \sin(\theta) \quad (2)$$

Realizando a *suposição* de que a oscilação se dá para pequenos ângulos ( $\theta \leq 10^\circ$ ), podemos aproximar  $\sin(\theta)$  para  $\theta$  em radianos. O que resulta na equação (3):

$$I \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgD \cdot \theta \quad (3)$$

(E.D.O. de 2º ordem, Linear e Homogênea)

Supondo que a solução é do tipo  $\theta = e^{\lambda t}$ , desenvolvendo a equação, encontrando as raízes complexas. Obtemos que:

$$\theta(t) = \theta_0 \cdot \cos(\phi_0 + \omega \cdot t), \text{ com } \omega = \sqrt{\frac{mgD}{I}} \quad (4)$$

Por fim, como  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ . Obtemos que:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgD}} \quad (5)$$

Note que a equação (5) é uma generalização para qualquer tipo de pêndulo, entretanto trabalharemos com duas hipóteses:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{D + \frac{K^2}{D}}{g}}, \quad \text{Pêndulo Físico} \quad (6)$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{D}{g}}, \quad \text{Pêndulo Simples} \quad (7)$$

## Suposições

- No modelo, consideramos que o ângulo é pequeno o bastante para considerar a aproximação:  $\text{sen}(x) = x$ ;
- O movimento está contido em um único plano;
- As forças dissipativas, que atuam no sistema, dentro de um curto espaço de tempo, são desprezíveis;

## Procedimento experimental

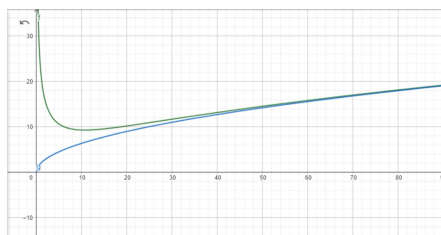
Para a realização do experimento devemos sempre considerar os possíveis erros sistemáticos que surgem devido a montagem do experimento. Neste caso, os erros principais surgem do desalinhamento do eixo de rotação e da precisão do local considerado como o centro de massa.

Em relação ao erro do desalinhamento, devemos furar o tubo de papel levando em consideração que os furos devem estar o mais paralelos possível para minimizar potenciais erros sistemáticos. Para isso usamos a seguinte estratégia: Primeiro, enrolamos o tubo em uma folha de papel sulfite, deixando-a o mais justa possível no tubo. Então, retiramos a folha - que agora está no formato cilíndrico e nas dimensões do tubo - e a dobramos nela mesma. Com a folha dobrada podemos marcar com o auxílio de uma régua os locais para os furos de forma com que fiquem quase perfeitamente paralelos. Enrolamos novamente o papel no tubo e furamos nos locais marcados. Realizaremos 7 pares de furos paralelos.

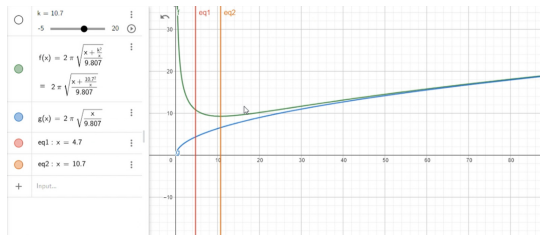
Agora, em relação ao erro do centro de massa, podemos usar um método simples para determinar com precisão suficiente o centro de massa do tubo. Para isso, equilibramos a lateral do tubo em qualquer pequena superfície plana e observamos em que ponto o tubo se mantém equilibrado.

Para determinar as distâncias onde faremos os furos, primeiro calculamos a inércia teórica do nosso pêndulo usando o site de referência (1). Para isso, medimos a massa do tubo de papel com uma balança digital obtendo o valor de  $21.3 \pm 0.1$  g. Inserindo os dados no site obtemos um resultado de  $I_{CM} = 2,45 * 10^{-4} \text{ kg} * \text{m}^2$ . A partir desse valor, calculamos o raio de rotação teórico usando a fórmula  $I_{CM} = m * k^2$ , o que nos dá um valor de  $k = 10,7 \text{ cm}$ .

Com isso, plotamos o gráfico de T em função de D, conforme mostrado na Figura 2a, utilizando a equação (6) com  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$  e  $k = 10,7 \text{ cm}$ . Identificamos que o ponto de mínimo coincidia com o valor de k. Em seguida, selecionamos 7 pontos de interesse que abrangeriam nosso experimento, (4.7), (6.2), (7.7), (9.2), (10.7), (12.2) e (13.7), como ilustrado na Figura 2b.



(a) Gráfico de T em função de D.



(b) Escolha do intervalo de pontos.

Montamos o pêndulo atravessando os furos com um arame e realizamos o experimento. Nosso objetivo é determinar o período do pêndulo através da filmagem de seu movimento. Filmamos cada par de furos três vezes, resultando em um total de 21 vídeos. Esses vídeos serão posteriormente analisados utilizando o software Tracker. É importante observar que, devido às suposições dos modelos, soltamos o tubo de ângulos pequenos ( $< 10^\circ$ ) para permitir a análise posterior.

Utilizando do software Tracker, fomos capaz de construir um gráfico do ângulo com a vertical ( $\theta$ ) em função do tempo  $t$ . Ainda no mesmo programa, fomos capazes de selecionar o conjunto de pontos iniciais e ajustar uma curva do tipo  $\theta(t) = A \sin(Bt + C)$ , onde  $A$  é a fase inicial do movimento,  $B$  a velocidade angular e  $C$  a diferença de fase inicial. Apartir dessa regressão, obter os valores de  $\omega$  para os vídeos gravados. Com esses valores em mãos, calculamos o periodo e construímos a regressão linear

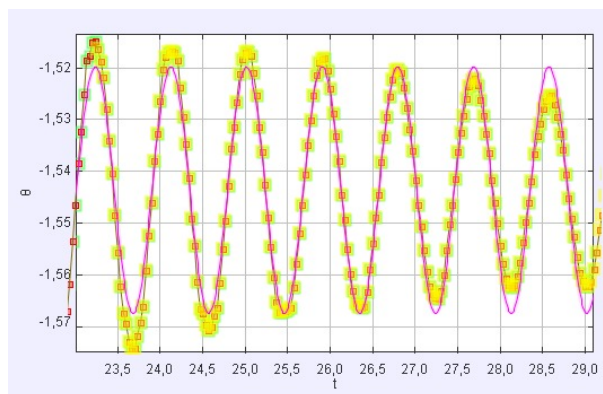


Figura 3: Exemplo de dados da posição ( $\theta$  em Rad) por tempo ( $t$  em segundos). Por cima, em vermelho, está a regressão senoidal.

## Resultado

Para cada vídeo gravado extraímos um valor de período, estimado através da regressão senoidal. Então, ainda com os dados brutos e suas incertezas, construímos um gráfico de Período ( $T$  em segundos) por Comprimento ( $D$  em metros). Nele, também, encontram-se duas funções, referentes às equações (6) e (7), substituindo a gravidade local, obtida através de um estudo que correlaciona latitude, altura e a gravidade local [2], além do valor de  $k$  previamente calculado em nossas estimativas. O gráfico comparativo é representado pela figura 4.

Após isso, ajustamos os valores das grandezas para realizar a nossa regressão linear e assim construímos o gráfico ( $T^2 D \times D^2$ ), respeitando a equação:  $D^2 = \frac{g}{4\pi^2} T^2 D - k^2$  (8), que é um tratamento matemático que possibilita linearizar a equação (6), conforme mostra a Figura 5. A partir do coeficiente angular, estimado pelo ajuste feito no ScyDavis, encontramos o valor de  $g = 9,91 \pm 0,04 \text{ m/s}^2$ . Já a partir do coeficiente linear encontramos o valor de  $k = 0,093 \pm 0,002 \text{ m}$

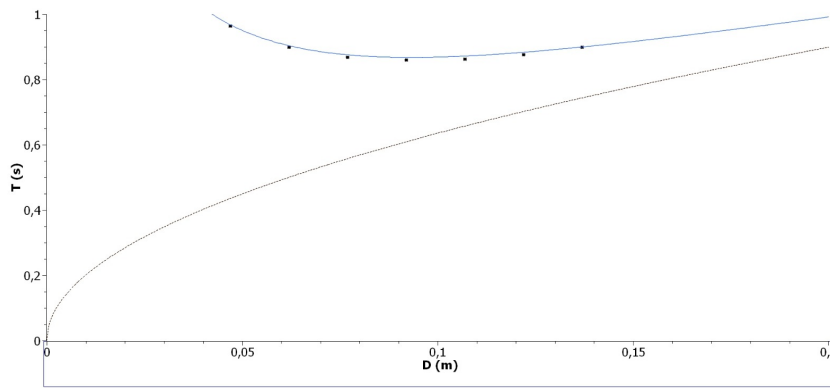


Figura 4: Gráfico de  $T \times D$  onde é possível ver os pontos coletados em preto, e as equações modelo (6) em azul a cima da equação (7) em vermelho. Note que os pontos são melhor representados pela equação do pêndulo físico, como já prevíamos em nossas hipóteses.

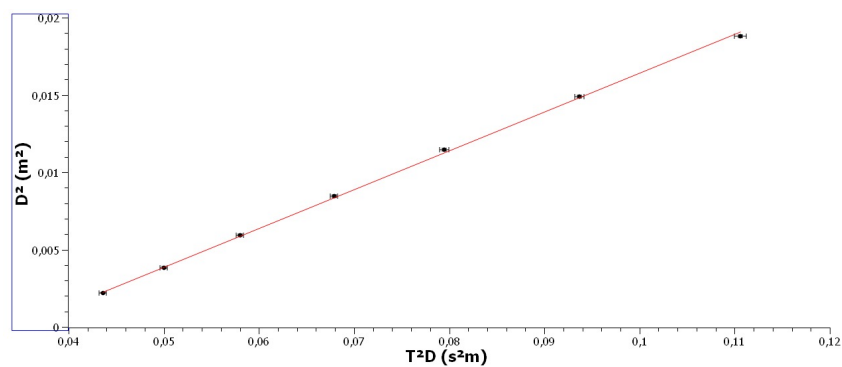


Figura 5: Relação entre os dados linearizados, de acordo com a equação (8) proposta no texto. Em vermelho encontra-se o Ajuste linear, cujo os coeficiente se encontram na Tabela 1

Tabela 1:

<b>Linearização:</b> $Y = \alpha x + \beta$	$D^2 = \frac{g}{4\pi^2} T^2 D - k^2$
<b>Coeficiente angular:</b> $\alpha$	$(2,51 \pm 0,01) 10^{-1} m/s^2$
<b>Coeficiente angular:</b> $\beta$	$(8,69 \pm 0,08) 10^{-3} m^2$
<b>Aceleração da gravidade Experimental</b>	$(9,91 \pm 0,04) m/s^2$
<b>Raio de giração</b>	$(9,3 \pm 0,2) cm$

**Discussão:**

**Conclusão:**

**Referências:**

1. Momento de inércia do cilindro: <https://amesweb.info/inertia/hollow-cylinder-moment-of-inertia.aspx>

**Apêndice A: Dados experimentais e incertezas**