

## Правила на заклучување

Табела 1. Правила за заклучување		
Правило	Тавтологија	Име
$\frac{p \quad p \rightarrow q}{\therefore q}$	$[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$	Модус поненс
$\frac{\neg q \quad p \rightarrow q}{\therefore \neg p}$	$[\neg q \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow \neg p$	Модус толенс
$\frac{p \rightarrow q \quad q \rightarrow r}{\therefore p \rightarrow r}$	$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$	Хипотетички силогизам
$\frac{p \vee q \quad \neg p}{\therefore q}$	$[(p \vee q) \wedge \neg p] \rightarrow q$	Дисјунктивен силогизам
$\frac{p}{\therefore p \vee q}$	$p \rightarrow (p \vee q)$	Додавање
$\frac{p \wedge q}{\therefore p}$	$(p \wedge q) \rightarrow p$	Упростување
$\frac{p \quad q}{\therefore p \wedge q}$	$[(p) \wedge (q)] \rightarrow (p \wedge q)$	Конјукција
$\frac{p \vee q \quad \neg p \vee r}{\therefore q \vee r}$	$[(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)] \rightarrow (q \vee r)$	Резолуција

Табела 2. Правила за заклучување за квантифицирани искази	
Правило	Име
$\frac{\forall x P(x)}{\therefore P(c)}$	Универзален примерок
$\frac{P(c) \text{ за произволно } c}{\therefore \forall x P(x)}$	Универзална генерализација
$\frac{\exists x P(x)}{\therefore P(c) \text{ за некое } c}$	Егзистенцијален примерок
$\frac{P(c) \text{ за некое } c}{\therefore \exists x P(x)}$	Егзистенцијална генерализација



**Задача 1:** Дали може да се заклучи дека заклучокот е точен, ако дадените премиси се точни:

Ако Џорџ нема 8 нозе, тогаш тој не е инсект  
Џорџ е инсект

---

Џорџ има 8 нозе

**Решение:** Нека означиме

$p$ : Џорџ има 8 нозе

$q$ : Џорџ е инсект

Тогаш дадените премиси се:  $\neg p \rightarrow \neg q$  и  $q$ . Бидејќи  $q \equiv \neg \neg q$ , од правилото Модус толенс, следува  $\neg \neg p$ , т.е.  $p$ , т.е. Џорџ има 8 нозе.

**Задача 2:** Кое правило за изведување е искористено во секој од следните аргументи:

а) Марија е математичар. Следува, Марија е математичар или информатичар.

б) Петар е математичар и информатичар. Следува, Петар е математичар.

в) Ако денес е врнежливо, тогаш базенот ќе биде затворен. Врнежливо е. Следува, базенот е затворен.

г) Ако денес врне снег, универзитетот ќе биде затворен. Универзитетот не е затворен денес. Следува, денес не врне снег.

д) Ако одам да пливам, тогаш долго ќе останам на сонце. Ако долго останам на сонце, тогаш ќе изгорам. Следува, ако одам да пливам, тогаш ќе изгорам.

**Решение:**

а)  $p$ : Марија е математичар

$q$ : Марија е информатичар.

$p$

---

$p \vee q$  (додавање)

б)  $p$ : Петар е математичар

$q$ : Петар е информатичар.

$p \wedge q$

---

$p$  (упростување)

в)  $p$ : Денес е врнежливо

$q$ : Базенот е затворен

$p \rightarrow q$

$p$

---

q (Модус Поненс)

г) p: Денес врне снег

q: Универзитетот е затворен

$p \rightarrow q$

$\neg q$

---

$\neg p$  (Модус Толенс)

д) p: Ќе одам да пливам

q: Долго ќе останам на сонце

r: Ќе изгорам

$p \rightarrow q$

$q \rightarrow r$

---

$p \rightarrow r$  (Хипотетички силогизам)

**Задача 3:** Со користење на правилата за заклучување, докажи дека хипотезите: “Ако не е врнежливо или не е магливо, тогаш трката и тенискиот натпревар ќе се одржат”, “Ако трката се одржи, тогаш трофејот ќе биде доделен”, “Трофејот не е доделен”, го повлекуваат заклучокот “Врнежливо е”.

**Решение:**

p: Врнежливо е

q: Магливо е

r: Трката е одржана

s: Тенискиот натпревар е одржан

t: Трофејот е доделен

Тогаш, хипотезите се:  $(\neg p \vee \neg q) \rightarrow (r \wedge s)$ ,  $r \rightarrow t$ ,  $\neg t$

Доказот е:

1.  $(\neg p \vee \neg q) \rightarrow (r \wedge s)$  претпоставка
2.  $r \rightarrow t$  претпоставка
3.  $\neg t$  претпоставка
4.  $\neg r$  Модус Толенс на (2) и (3)
5.  $\neg r \vee \neg s$  додавање на (4)
6.  $\neg(r \wedge s)$  Де-Морганови закони на (5)
7.  $\neg(\neg p \vee \neg q)$  Модус Толенс на (6) и (1)
8.  $p \wedge q$  Де-Морганови закони на (7)
9. p упростување на (8)

**Задача 4:** Кои правила на заклучување се користени во аргументот: “Ниту еден човек не е остров. Хвар е остров. Следува, Хвар не е човек”.

**Решение:** Нека

$P(x)$ :  $x$  е човек

$S(x)$ :  $x$  е остров.

Тогаш:

1.  $(\forall x)(P(x) \rightarrow \neg S(x))$  претпоставка
2.  $S(\text{Хвар})$  претпоставка
3.  $P(\text{Хвар}) \rightarrow \neg S(\text{Хвар})$  универзален примерок од (1)
4.  $\neg P(\text{Хвар})$  Модус Толенс од (2) и (3)

**Задача 5:** Докажи дека од хипотезите: “Том, студент од овој клас, знае Јава”. “Секој кој знае Јава може да добие добро платена работа”, следува заклучокот “Некој од овој клас може да добие добро платена работа”.

**Решение:**

Нека  $P(x)$ :  $x$  е од овој клас

$S(x)$ :  $x$  знае Јава

$R(x)$ :  $x$  може да добие добро платена работа

Тогаш:

1.  $P(\text{Том}) \wedge S(\text{Том})$  претпоставка
2.  $P(\text{Том})$  упростување од (1)
3.  $S(\text{Том})$  упростување од (1)
4.  $(\forall x)(S(x) \rightarrow R(x))$  претпоставка
5.  $S(\text{Том}) \rightarrow R(\text{Том})$  универзален примерок од (4)
6.  $R(\text{Том})$  Модус Поненс на (3) и (5)
7.  $P(\text{Том}) \wedge R(\text{Том})$  конјункција на (2) и (6)
8.  $(\exists x)(P(x) \wedge R(x))$  егзистенцијална генерализација на (7)

**Задача 6:** Што не е во ред со следниот доказ: Нека  $H(x)$ :  $x$  е среќен. Од премисата  $(\exists x)H(x)$  заклучуваме дека  $H(\text{Марко})$ , т.е. Марко е среќен.

**Решение:** Од тоа што  $(\exists x)H(x)$  не следува дека токму Марко е вредноста на  $x$  за која  $H(x)$  е точно.

**Задача 7:** Најди ја грешката во следниот доказ со кој се покажува дека ако  $(\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$  е точно следува дека  $(\exists x)(P(x) \wedge Q(x))$  е точно:

1.  $(\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$  претпоставка
2.  $(\exists x)P(x)$  упростување од (1)
3.  $P(c)$  егзистенцијален примерок од (2)
4.  $(\exists x)Q(x)$  упростување од (1)
5.  $Q(c)$  егзистенцијален примерок од (4)
6.  $P(c) \wedge Q(c)$  конјункција на (3) и (5)
7.  $(\exists x)(P(x) \wedge Q(x))$  егзистенцијална генерализација на (6)

**Решение:** Грешката е во тоа што во чекор 5 е земено дека  $Q(x)$  е точно за истата вредност на  $x$  за која што  $P(x)$  е точно, а ова секако не мора да е точно.

**Задача 8:** Докажи дека:

$$(\forall x)(p(x) \rightarrow q(x)), (\forall x)(q(x) \rightarrow r(x)) \Rightarrow (\forall x)(p(x) \rightarrow r(x))$$

**Решение:**

- |  |                                    |
|--|------------------------------------|
| 1. $(\forall x)(p(x) \rightarrow q(x))$        | претпоставка                       |
| 2. $p(c) \rightarrow q(c)$ , за произволно $c$ | универзален примерок од (1)        |
| 3. $(\forall x)(q(x) \rightarrow r(x))$        | претпоставка                       |
| 4. $q(c) \rightarrow r(c)$ , за произволно $c$ | универзален примерок од (3)        |
| 5. $p(c) \rightarrow r(c)$ , за произволно $c$ | хипотетички силогизам од (2) и (4) |
| 6. $(\forall x)(p(x) \rightarrow r(x))$        | универзална генерализација од (5)  |

**Задача 9:** Определи дали следните заклучоци се точни или не. Доколку се точни, наведи кое правило на заклучување е искористено:

- а) Ако  $n$  е реален број т.ш.  $n > 1$ , тогаш  $n^2 > 1$ . Да претпоставиме дека  $n^2 > 1$ . Тогаш  $n > 1$ .
- б) Ако  $n$  е реален број т.ш.  $n > 3$ , тогаш  $n^2 > 9$ . Да претпоставиме дека  $n^2 \leq 9$ . Тогаш  $n \leq 3$ .
- в) Ако  $n$  е реален број т.ш.  $n > 2$ , тогаш  $n^2 > 4$ . Да претпоставиме дека  $n \leq 2$ . Тогаш  $n^2 \leq 4$ .

**Решение:** а) Не е точно

б) Точно. Модус Толенс

в) Не е точно

**Задача 10:** Дали од хипотезите:  $p \rightarrow q$ ,  $(q \vee \neg r) \rightarrow \neg s$ ,  $s$  може да се заклучи  $\neg p$ ? Во потврден случај дади доказ, во спротивно прецизно образложи зошто не може да се изведе дадениот заклучок.

**Решение:**

- |   |                   |
|---|-------------------|
| 1. $p \rightarrow q$                    | претпоставка      |
| 2. $(q \vee \neg r) \rightarrow \neg s$ | претпоставка      |
| 3. $s$                                  | претпоставка      |
| 4. $\neg (q \vee \neg r)$               | М.Т. од 2 и 3     |
| 5. $\neg q \wedge r$                    | Де Морганови од 4 |
| 6. $\neg q$                             | упростување од 5  |
| 7. $\neg p$                             | М.Т. од 6 и 1     |

**Задача 11:** Дали од хипотезите:  $p \rightarrow (q \vee r)$ ,  $s \rightarrow (p \vee r)$ ,  $s \wedge \neg r$  може да се заклучи  $q$ ? Во потврден случај дади доказ, во спротивно прецизно образложи зошто не може да се изведе дадениот заклучок.

**Решение:**

1.  $p \rightarrow (q \vee r)$  претпоставка
2.  $s \rightarrow (p \vee r)$  претпоставка
3.  $s \wedge \neg r$  претпоставка
4.  $s$  упростување од 3
5.  $\neg r$  упростување од 3
6.  $p \vee r$  М.П. од 2 и 4
7.  $p$  Д.С. од 6 и 5
8.  $q \vee r$  М.П. од 7 и 1
9.  $q$  Д.С. од 8 и 5

**Задача 12:** Дали од хипотезите:  $p \vee q \rightarrow r$ ,  $\neg r \vee s$ ,  $\neg s$  може да се заклучи  $\neg q$ ? Во потврден случај дади доказ, во спротивно прецизно образложи зошто не може да се изведе дадениот заклучок.

**Решение:**

1.  $p \vee q \rightarrow r$  претпоставка
2.  $\neg r \vee s$  претпоставка
3.  $\neg s$  претпоставка
4.  $\neg r$  Д.С. од 2 и 3
5.  $\neg (p \vee q)$  М.Т. од 1 и 4
6.  $\neg p \wedge \neg q$  Де Морганови од 5
7.  $\neg q$  упростување од 6

**Задача 13:** Дали од хипотезите:  $p \wedge q \rightarrow r$ ,  $r \rightarrow s$ ,  $p \wedge \neg s$  може да се заклучи  $\neg q$ ? Во потврден случај дади доказ, во спротивно прецизно образложи зошто не може да се изведе дадениот заклучок.

**Решение:**

1.  $p \wedge q \rightarrow r$  претпоставка
2.  $r \rightarrow s$  претпоставка
3.  $p \wedge \neg s$  претпоставка
4.  $p$  упростување од 3
5.  $\neg s$  упростување од 3
6.  $\neg r$  М.Т. од 2 и 5
7.  $\neg (p \wedge q)$  М.Т. од 1 и 6
8.  $\neg p \vee \neg q$  Де Морганови од 7
9.  $\neg q$  Д.С. од 4 и 8

**Задача 14:** Дали од хипотезите: “Ако редовно учиш ќе положиш Калкулус 1”, “Ќе положиш Калкулус 1 или нема да положиш Дискретна математика 1, само ако не положиш Структурно програмирање” и “Си положил Структурно програмирање” може да се изведе заклучокот “Не учиш редовно”? Во потврден случај дади доказ, во спротивно прецизно образложи зошто не може да се изведе дадениот заклучок.

**Решение:**

p: Редовно учиш

q: Си положил Калкулус 1

r: Си положил Дискретна математика 1

s: Си положил Структурно програмирање

1.  $p \rightarrow q$  претпоставка
2.  $(q \vee \neg r) \rightarrow \neg s$  претпоставка
3.  $s$  претпоставка
4.  $\neg (q \vee \neg r)$  М.Т. од 2 и 3
5.  $\neg q \wedge r$  Де Морганови од 4
6.  $\neg q$  упростување од 5
7.  $\neg p$  М.Т. од 6 и 1

**Задача 15:** Дали од хипотезите: “Ако редовно учиш, ќе положиш Калкулус или Дискретна математика”, “Ќе положиш Структурно програмирање, само ако положиш Дискретна математика или редовно учиш” и “Си положил Структурно програмирање, а не си положил Дискретна математика” може да се изведе заклучокот “Ќе положиш Калкулус”? Во потврден случај дади доказ, во спротивно прецизно образложи зошто не може да се изведе дадениот заклучок.

**Решение:**

p: редовно учиш

q: ќе положиш Калкулус

r: ќе положиш Дискретна Математика

s: ќе положиш Структурно програмирање

1.  $p \rightarrow (q \vee r)$  претпоставка
2.  $s \rightarrow (p \vee r)$  претпоставка
3.  $s \wedge \neg r$  претпоставка
4.  $s$  упростување од 3
5.  $\neg r$  упростување од 3
6.  $p \vee r$  М.П. од 2 и 4
7.  $p$  Д.С. од 6 и 5
8.  $q \vee r$  М.П. од 7 и 1
9.  $q$  Д.С. од 8 и 5

**Задача 16:** Дали од хипотезите: “Само ако си го положил испитот, тогаш си седел до крајот на колоквиумот или си го научил материјалот”, “Испитот не си го положил или си ги знаел задачите однапред” и “Задачите не си ги знаел однапред” може да се изведе заклучокот “Не си го научил материјалот”? Во потврден случај дади доказ, во спротивно прецизно образложи зошто не може да се изведе дадениот заклучок.

**Решение:**

p: си седел до крајот на колоквиумот

q: си го научил материјалот

r: си го положил испитот

s: си ги знаел задачите однапред

- |                             |                   |
|-----------------------------|-------------------|
| 1. $p \vee q \rightarrow r$ | претпоставка      |
| 2. $\neg r \vee s$          | претпоставка      |
| 3. $\neg s$                 | претпоставка      |
| 4. $\neg r$                 | Д.С. од 2 и 3     |
| 5. $\neg (p \vee q)$        | М.Т. од 1 и 4     |
| 6. $\neg p \wedge \neg q$   | Де Морганови од 5 |
| 7. $\neg q$                 | упростување од 6  |

**Задача 17:** Дали од хипотезите: “Ако ја решиш бонус задачата и имаш над 70 поени на испитот, ќе добиеш десетка”, “Десетка ќе добиеш само ако ги решиш сите задачи од книгата” и “Си ја решил бонус задачата, но не си ги решил сите задачи од книгата” може да се изведе заклучокот “Немаш освоено 70 поени”? Во потврден случај дади доказ, во спротивно прецизно образложи зошто не може да се изведе дадениот заклучок.

**Решение:**

p: ќе ја решиш бонус задачата

q: имаш над 70 поени на испитот

r: ќе добиеш десетка

s: си ги решил сите задачи од книгата

- |                               |                   |
|-------------------------------|-------------------|
| 1. $p \wedge q \rightarrow r$ | претпоставка      |
| 2. $r \rightarrow s$          | претпоставка      |
| 3. $p \wedge \neg s$          | претпоставка      |
| 4. p                          | упростување од 3  |
| 5. $\neg s$                   | упростување од 3  |
| 6. $\neg r$                   | М.Т. од 2 и 5     |
| 7. $\neg (p \wedge q)$        | М.Т. од 1 и 6     |
| 8. $\neg p \vee \neg q$       | Де Морганови од 7 |
| 9. $\neg q$                   | Д.С. од 8 и 4     |

**Задача 18:** За секој од следните докази, објасни дали се коректни или не:

а) Сите студенти во оваа група знаат логика. Давор е студент од оваа група. Следува, Давор знае логика

б) Секој студент на ФИНКИ учи Дискретна математика. Марија учи Дискретна математика. Следува, Марија е студент на ФИНКИ

в) Сите папагали сакаат овошје. Мојата птица не е папагал. Следува, мојата птица не сака овошје

г) Сите кои што јадат зеленчук секој ден се здрави. Линда не е здрава. Следува, Линда не јаде зеленчук секој ден.

**Решение:**





- а) Да (Универзален примерок, Модус поненс)
- б) Не
- в) Не
- г) Да (Универзален примерок, Модус толенс)