Исказно сметање

Дефиниција: **<u>Исказ</u>** е секоја декларативна реченица, којашто задоволува точно еден од следнива два услови:

1) реченицата е вистинита;
2) реченицата е невистинита.

Примери: Искази (<u>прости</u> искази) се следниве реченици:

p) 2 + 3 = 5;
q) Март има 31 ден.;
r) 2 · 5 = 6;
s) Париз е главен град на Македонија.

и тоа p и q се <u>точни</u> искази, r и s се <u>неточни</u> искази.

Следниве реченици не се искази:

p) Времето е убаво.
q) Утре ќе биде сончево.
r) Февруари има 29 дена.
s) Бројот n е делив со 3.

Исказите ги бележиме со латинските букви: p, q, r, s, . . . , p_1, p_2, . . .

Со $\top$ и $\perp$ означуваме <u>вистинитосни вредности</u> на исказите, односно $\{\top, \perp\}$ е множество вистинитосни вредности. Ознака: $\tau(p)=\top$, $\tau(q)=\perp$.

За формирање на <u>сложени</u> искази ги користиме <u>логичките оператори</u>: $\neg, \wedge, \vee, \oplus, \rightarrow, \leftrightarrow$.

<u>Таблиците на вистинитост</u> за исказите: $\neg p$, $p\wedge q$, $p\vee q$, $p\rightarrow q$, $p\leftrightarrow q$ и $p\oplus q$ се следниве:

p	¬p
$\top$	$\perp$
$\perp$	$\top$

p	q	$p\wedge q$	$p\vee q$	$p\rightarrow q$	$p\leftrightarrow q$	$p\oplus q$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\perp$
$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$

Секоја исказна формула определува функција на вистинитост која може да се претстави со соодветна таблица на вистинитост.

Задача 1: Дали се искази следниве реченици?

а) Секој рамностран триаголник е рамнокрак.

б) Секој рамнокрак триаголник е рамностран.

в) Парниот број n е делив со 3 без остаток.

г) Јас сега можам.

Решение:

а) да, (вистинит исказ);

б) да, (невистинит исказ);

в) не;

г) не.

Задача 2: Да се запишат во вид на искази следниве реченици:

а) Или треба да се почитуваат сообраќајните правила или треба да се плати казна;

б) 35 и 60 се делат со 3;

в) Производот на два броја е позитивен акко броевите се со ист знак;

г) Само еден од броевите 60 и 34 се дели со 5;

д) Производот на 3 и 4 е 7.

Решение:

а) $p \oplus q$;

(p: Треба да се почитуваат сообраќајните правила,

q: Треба да се плати казна);

б) $3|35 \wedge 3|60$;

в) $x \cdot y>0 \leftrightarrow (x>0 \wedge y>0) \vee (x<0 \wedge y<0)$;

г) $5|60 \oplus 5|34$;

д) p: $3 \cdot 4 = 7$.

Задача 3: Да се напишат вистинитосни таблици за следниве исказни формули:

а) $p \vee q \to r$; б) $((p \to q) \to (\neg p \to q)) \to q$;

в) $(p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to r)$.

Решение:

а)

p	q	r	$p \vee q$	$p \vee q \to r$
T	T	T	T	T
T	T	⊥	T	⊥
T	⊥	T	T	T
T	⊥	⊥	T	⊥
⊥	T	T	T	T
⊥	T	⊥	T	⊥
⊥	⊥	T	⊥	T
⊥	⊥	⊥	⊥	T

б)

p	q	$\neg p$	$p \to q$	$\neg p \to q$	$(p \to q) \to (\neg p \to q)$	$((p \to q) \to (\neg p \to q)) \to q$
T	T	⊥	T	T	T	T
T	⊥	⊥	⊥	T	T	⊥
⊥	T	T	T	T	T	T
⊥	⊥	T	T	⊥	⊥	T

в)

p	q	r	p→ q	q → r	(p→q)∧ (q→r)	p → r	(p→q) ∧ (q → r)→(p→r).
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	⊥	T	⊥	⊥	⊥	T
T	⊥	T	⊥	T	⊥	T	T
T	⊥	⊥	⊥	T	⊥	⊥	T
⊥	T	T	T	T	T	T	T
⊥	T	⊥	T	⊥	⊥	T	T
⊥	⊥	T	T	T	T	T	T
⊥	⊥	⊥	T	T	T	T	T

Задача 4: Да се провери дали следните исказни формули се задоволиви:

а) $(p \vee q) \to (\neg p \wedge r) \vee \neg q$;

б) $q \leftrightarrow (((\neg p \vee \neg q) \wedge \neg r) \to r)$;

в) $(\neg p \vee (q \wedge s)) \vee p \leftrightarrow (\neg s \vee \neg p)$.

Решение:

а) $\alpha: \underbrace{(p \vee q)}_{\beta} \to \underbrace{(\neg p \wedge r) \vee \neg q}_{\gamma}$;

$\tau(\alpha)$=T, ако $\tau(\beta)$=T и $\tau(\gamma)$=T или

$\tau(\beta)=\perp$ и $\tau(\gamma)$=T или

$\tau(\beta)=\perp$ и $\tau(\gamma)=\perp$.

Нека $\tau(\beta)=\perp$ и $\tau(\gamma)$=T. Од $\tau(\beta)=\perp$ следи $\tau(p)=\perp$ и $\tau(q)=\perp$. Ако се замени во γ се добива вредноста на r:

$\tau((\neg p \wedge r) \vee \neg q)$=T

$\tau((T \wedge r) \vee T)$=T

Од замената се гледа дека за која било вредност на r, $\tau(\gamma)$=T, па една вредност на исказните променливи за кои формулата прима вредност T е:

$\tau(p)=\perp$, $\tau(q)=\perp$ и $\tau(r)$=T.

Следува, формулата е задоволива.

б) α: $q \leftrightarrow \underbrace{(((\neg p \vee \neg q) \wedge \neg r) \ \rightarrow \ r)}_{\beta}$

$\tau(\alpha)$=T, ако $\tau(q)$=T и $\tau(\beta)$=T или

$\tau(q)=\perp$ и $\tau(\beta)=\perp$.

Нека $\tau(q)=\perp$ и $\tau(\beta)=\perp$. Од $\tau(\beta)=\perp$ следи $\tau((\neg p \vee \neg q) \wedge \neg r)$=T и $\tau(r)=\perp$. Ако за вредностите на q и r се замани во $\tau((\neg p \vee \neg q) \wedge \neg r)$=T се добива дека p може да прими било која вредност, па една вредност на исказните променливи за кои формулата прима вредност T е:

$\tau(p)$=T, $\tau(q)=\perp$ и $\tau(r)=\perp$.

Значи, формулата е задоволива.

в) $\alpha : \underbrace{(\neg p \vee (q \wedge s)) \vee \ p}_{\beta} \leftrightarrow \underbrace{(\neg s \vee \neg p)}_{\gamma}$

$\tau(\alpha)$=T, ако $\tau(\beta)$=T и $\tau(\gamma)$=T или

$\tau(\beta)=\perp$ и $\tau(\gamma)=\perp$.

Нека $\tau(\beta)$=T и $\tau(\gamma)$=T.

Од $\tau(\beta)$=T следи $\tau(\neg p \vee (q \wedge s))$=T или $\tau(p)$=T.

Од $\tau(\gamma)$=T следи $\tau(\neg s)$=T или $\tau(\neg p)$=T.

Ако $\tau(p)$=T и $\tau(s)=\perp$, q може да прими било која вредност, па една вредност на исказните променливи за кои формулата прима вредност T е:

$\tau(p)$=T, $\tau(q)$= T и $\tau(s)=\perp$.

Следува, формулата е задоволива.

Задача 5: Да се утврдат вредности за p, q и r така што исказната формула

$$\alpha: (\underbrace{(p \vee q) \rightarrow r}_{\beta}) \leftrightarrow \underbrace{(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)}_{\gamma}$$

ќе биде невистинита.

Решение:

$\tau(\alpha)=\perp$, ако $\tau(\beta)$=T и $\tau(\gamma)=\perp$ или

$(\beta)=\perp$ и $\tau(\gamma)$=T .

Нека $\tau(\beta)$=T и $\tau(\gamma)=\perp$.

Од $\tau(\gamma)=\perp$ следи $\tau(p \to r)= \perp$ и $\tau(q \to r)=\perp$, односно $\tau(p)=T$, $\tau(q)=T$ и $\tau(r)=\perp$. Ако за овие вредности се замени во β, се добива дека $\tau(\beta)=\perp$ што е контрадикција со $\tau(\beta)=T$. Поради тоа се проверува другиот случај.

Нека $\tau(\beta)=\perp$ и $\tau(\gamma)=T$.

Од $\tau(\beta)=\perp$ следи $\tau(p \vee q)=T$ и $\tau(r)=\perp$, односно $\tau(r)=\perp$ и ($\tau(p)=T$ или $\tau(q)=T$).

Од $\tau(\gamma)=T$ следи $\tau(p \to r)=T$ или $\tau(q \to r)=T$. Бидејќи $\tau(r)=\perp$ следи $\tau(p)=\perp$ или $\tau(q)=\perp$.

Една вредност на исказните променливи за кои формулата е невистинита е:

$$\tau(p)= \perp,\ \tau(q)=T \text{ и } \tau(r)=\perp.$$

Задача 6: Дали следниов систем од спецификации е конзистентен?

- Корисникот не може да влезе во системот од документи секогаш кога софтверскиот систем се надоградува.
- Ако корисникот може да влезе во системот од документи, тогаш може да зачува нов документ.
- Ако корисникот не може да зачува нов документ, тогаш системот не се надоградува.

Решение:

p: корисникот може да влезе во системот од документи

q: софтверскиот систем се надоградува

r: корисникот може да зачува нов документ

Системот од спецификации може да се претстави со: $(q \to \neg p) \wedge (p \to r) \wedge (\neg r \to \neg q)$

Ќе покажеме дека системот е конзистентен на два начини.

Прв начин (користејќи логички еквиваленции):

$$\begin{aligned}
(q \to \neg p) \wedge (p \to r) \wedge (\neg r \to \neg q) &\equiv (\neg q \vee \neg p) \wedge (\neg p \vee r) \wedge (\neg\neg r \vee \neg q) \\
&\equiv \big((\neg q \wedge \neg p) \vee (\neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg p) \vee (\neg p \wedge r)\big) \wedge (r \vee \neg q) \qquad \text{Д.з.} \\
&\equiv ((\neg q \wedge \neg p) \vee (\neg q \wedge r) \vee \neg p \vee (\neg p \wedge r)) \wedge (r \vee \neg q) \\
&\equiv ((\neg q \wedge \neg p) \vee \neg p \vee (\neg q \wedge r)) \wedge (r \vee \neg q) \equiv ((\neg q \wedge r) \vee \neg p) \wedge (r \vee \neg q) \\
&\equiv (\neg q \wedge r \wedge r) \vee (\neg p \wedge r) \vee (\neg q \wedge r \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \\
&\equiv (\neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge r) \vee (\neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q) \\
&\equiv (\neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q)
\end{aligned}$$

Од овде следува дека системот кога $q \equiv \perp$ и $r \equiv \mathrm{T}$ сите спецификации се исполнети, од каде следува дека системот е конзистентен. (Сите спецификации се исполнети и кога $p \equiv \perp$ и $r \equiv \mathrm{T}$ или кога $p \equiv q \equiv \perp$)

Втор начин: Со оглед на тоа дека сите три барања (спецификации) се зададени во облик на импликација, ако левата страна на секоја од овие импликации има вредност $\perp$, тогаш импликацијата ќе биде точна (вистинитосната вредност на импликацијата ќе биде T). Според тоа, може да земеме: $\tau(q) = \perp$, $\tau(p) = \perp$ и $\tau(\neg r) = \perp$ односно $\tau(q) = \perp$, $\tau(p) = \perp$ и $\tau(r) = \mathrm{T}$, па тогаш $\tau((q \to \neg p) \wedge (p \to r) \wedge (\neg r \to \neg q)) = \tau((\perp \to \mathrm{T}) \wedge (\perp \to \mathrm{T}) \wedge (\perp \to \mathrm{T})) = \tau(\mathrm{T} \wedge \mathrm{T} \wedge \mathrm{T}) = \mathrm{T}$, од каде заклучуваме дека системот е конзистентен.

Тавтологии

Дефиниција: (**тавтологија**) Една исказна формула е тавтологија ако за секое можно доделување на вредности на исказните променливи, формулата има вредност T.

(тавтологија=логички точна формула)

Дефиниција: (**контрадикција**) Една исказна формула е контрадикција ако за секое можно доделување на вредности на исказните променливи, формулата има вредност $\perp$.

Примери: Тавтологии се: $p \vee \neg p$, $p \leftrightarrow p$

Контрадикции се: $p \wedge \neg p$, $p \leftrightarrow (\neg p)$

Постојат три начини за докажување дали дадена исказна формула е тавтологија

1) со таблици;
2) со доведување до противречност;
3) со користење на еквивалентни формули.

Задача 1: Дали се тавтологии исказните формули:

а) $p \to q \leftrightarrow \neg p \vee q$,

б) $((p \to q) \to p) \to p$,

в) $(p \to q) \to ((p \to r) \to (p \to (q \wedge r)))$.

Решение:

а) со таблици

p	q	$\neg p$	$p \to q$	$\neg p \lor q$	$p \to q \leftrightarrow \neg p \lor q$
T	T	F	T	T	T
T	F	F	F	F	T
F	T	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T

б)

p	q	$p \to q$	$(p \to q) \to p$	$((p \to q) \to p) \to p$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	T
F	T	T	F	T
F	F	T	T	T

в)

$$\alpha: \underbrace{(p \to q)}_{\beta} \to \underbrace{((p \to r) \to (p \to (q \land r)))}_{\gamma}$$

p	q	r	β	p->r	$q \land r$	p-> $q \land r$	γ	α
T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	T	T
T	F	T	F	T	F	F	F	T
T	F	F	F	F	F	F	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	F	T	T	T
F	F	F	T	T	F	T	T	T

Некои поважни еквиваленции и логички закони:

1. $p \lor \neg p$ – закон за исклучување на третото;

2. $p \Leftrightarrow \neg\neg p$ – двојна негација;

3. $(p \to q) \Leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$ – контрапозиција;

4. $p \land q \Leftrightarrow q \land p$

   $p \lor q \Leftrightarrow q \lor p$ – комутативност;

5. $p \land (q \land r) \Leftrightarrow (p \land q) \land r$

   $p \lor (q \lor r) \Leftrightarrow (p \lor q) \lor r$ – асоцијативност;

6. $p\wedge(q\vee r) \Leftrightarrow (p\wedge q)\vee(p\wedge r)$

$p\vee(q\wedge r) \Leftrightarrow (p\vee q)\wedge(p\vee r)$ – дистрибутивност;

7. $\neg(p\wedge q) \Leftrightarrow \neg p\vee\neg q$

$\neg(p\vee q) \Leftrightarrow \neg p\wedge\neg q$ – Де Морганови закони;

8. $p\wedge p \Leftrightarrow p$

$p\vee p \Leftrightarrow p$ – иденпотентност;

9. $p\wedge(p\vee q) \Leftrightarrow p$

$p\vee(p\wedge q) \Leftrightarrow p$ – апсорпција;

10. $(p\rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p\vee q)$ – закон за замена на импликација;

11. $(p\leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p))$ – закон за замена на еквиваленција;

12. $p\wedge\neg p \Leftrightarrow \perp$;

13. $p\wedge T \Leftrightarrow p$, $p\wedge\perp \Leftrightarrow \perp$

$p\vee T \Leftrightarrow T$, $p\vee\perp \Leftrightarrow p$

Задача 3: Докажи дека е тавтологија следнава формула: $p\wedge(p\rightarrow q) \leftrightarrow p\wedge q$.

Решение:

$p\wedge(p \rightarrow q) \Leftrightarrow p\wedge(\neg p\vee q)$ (правило за замена на импликација)

$\Leftrightarrow (p\wedge\neg p)\vee(p\wedge q)$ (дистрибутивен закон)

$\Leftrightarrow \perp\vee(p\wedge q)$ (тавтологијата $p\wedge\neg p \Leftrightarrow \perp$)

$\Leftrightarrow p\wedge q$.

Задача 4: Докажи дека е тавтологија следнава формула: $p\vee(\neg p\wedge q) \leftrightarrow p\vee q$.

Решение:

$p\vee(\neg p\wedge q) \Leftrightarrow (p\vee\neg p)\wedge(p\vee q)$ (дистрибутивен закон)

$\Leftrightarrow T\wedge(p\vee q)$ (тавтологијата $p\vee\neg p \leftrightarrow T$)

$\Leftrightarrow p\vee q$ (тавтологијата $T\wedge x \leftrightarrow x$).

Задача 5: Докажи дека е тавтологија следнава формула: $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$.

Решение:

α: (p → q) → p) → p≡ ¬((p → q) → p) ∨ p≡ ¬(¬(p → q) ∨ p) ∨ p≡ ((p → q) ∧¬p) ∨ p≡

$$\equiv ((\neg p \vee q) \wedge \neg p) \vee p \equiv \neg p \wedge \neg p \vee q \wedge \neg p \vee p \equiv \neg p \vee p \vee q \wedge \neg p \equiv T$$

Задача 6: Следниве реченици да се напишат со помош на искази, да се најде нивната негација, и таа да се запише како реченица:

а) Ако во бавчата имам јаболкови и сливови дрвја, наесен ќе собирам јаболка и сливи.

б) Ако одам во казино или ќе добијам пари или ќе бидам тажен.

в) На сончево време излегувам надвор, инаку гледам телевизија.

Решение:

а) Нека со p, q, r и s ги означиме следниве искази:

p: Во бавчата имам јаболкови дрвја.

q: Во бавчата имам сливови дрвја.

r: Наесен ќе собирам јаболки.

s: Наесен ќе собирам сливи.

Тогаш реченицата запишана како формула го има следниов облик:

$$(p \wedge q) \rightarrow (r \wedge s) \qquad (1)$$

Негација на формулата (1) е:

¬((p∧q) → (r∧s)) ⇔ ¬(¬(p∧q)∨(r∧s)) ⇔ (p∧q) ∧ ¬ (r∧s) ⇔(p∧q) ∧ ¬ (r∧s) ⇔

⇔(p∧q) ∧ (¬ r∨¬s)

Негираната реченица е:

Во бавчата имам јаболкови и сливови дрвја и наесен нема да собирам и јаболки и сливи.

б) Нека со p, q и r ги означиме следниве искази:

p: Одам во казино.

q: Ќе добијам пари.

r: Ќе бидам тажен.

Тогаш реченицата запишана како формула го има следниов облик:

$$p \rightarrow (q \veebar r) \qquad (2)$$

Негација на формулата (2) е:

$$\neg(p \rightarrow (q \veebar r)) \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee (q \veebar r)) \Leftrightarrow p \wedge \neg(q \veebar r) \Leftrightarrow p \wedge (q \leftrightarrow r)$$

Негираната реченица е:

Одам во казино и ќе добијам пари ако и само ако сум тажен.

в) На сончево време излегувам надвор, инаку гледам телевизија.

Реченицата може да се запише како: Ако е сончево тогаш ќе излезам надвор и ако не е сончево тогаш ќе гледам телевизија, или $(p \rightarrow g) \wedge (\neg p \rightarrow r)$, каде

p: Сончево е. q: Ќе излезам надвор. r: Ќе гледам телевизија.

За негацијата добиваме

$$\neg\big((p \rightarrow g) \wedge (\neg p \rightarrow r)\big) \equiv \neg\big((\neg p \vee q) \wedge (p \vee r)\big) \equiv (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg r)$$

и ќе се прочита Сончево е и не излегувам надвор или, не е сончево и не гледам телевизија.

Задача 7. Следната реченица запиша ја како исказ: Секогаш кога одам надвор, врне снег.

Решение:

Реченицата е иста со „ Ако одам надвор, тогаш врне снег.“

Па записот ќе биде $p \rightarrow$ q , каде

p: Одам надвор. q: Врне снег.

Задача 8. Најди негација на следната реченица: Ако завршиме порано, ќе играме фудбал.

Решение:

Запишана како исказ е $p \rightarrow$ q, каде

p: Ќе завршиме порано,

q: Ќе играме фудбал.

Негацијата ја добиваме на следниот начин:

$\neg(p \to q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q)$

Негацијата ќе се прочита – Ќе завршиме порано и нема да играме фудбал.

Задача 9. Следната реченица запиша ја како исказ: Таа се смее само ако е среќна.

Решение:

Реченицата може да се запише и како „Ако не е среќна тогаш не се смее.“

Ако ставиме

p: Таа се смее.

q: Таа е среќна.

Тогаш реченицата може да се запише со $\neg q \to \neg p$, што е еквивалентно со $p \to q$. Затоа записот на првата реченица е $p \to q$.

Дополнителни задачи

Задача 1. Да се покаже дека $((p \vee q) \wedge (p \to r) \wedge (q \to r)) \to r$ е тавтологија.

Решение: Формулата е еквивалентна со формулата

$\neg(p \vee q) \vee \neg(p \to r) \vee \neg(q \to r) \vee r \equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg r) \vee (q \wedge \neg r) \vee r \equiv$

Од дистрибутивниот закон:

$$\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee \neg r \vee (p \wedge q) \vee r \equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q) \vee T \equiv T$$

Задача 2. Да се покаже дека $((\neg q \wedge \neg r) \wedge ((p \to q) \vee (p \to r))) \to \neg p$ е тавтологија.

Решение:

Задача 3. Да се провери дали $(((p \to q) \wedge (p \to r)) \wedge p) \to (q \wedge r)$ е тавтологија.

Решение:

$$((p \to q) \wedge (p \to r)) \wedge p \Leftrightarrow ((\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)) \wedge p \Leftrightarrow (\neg p \vee (q \wedge r)) \wedge p$$
$$\Leftrightarrow (\neg p \wedge p) \vee (q \wedge r \wedge p) \Leftrightarrow \perp \vee (q \wedge r \wedge p) \Leftrightarrow q \wedge r \wedge p \Rightarrow q \wedge r$$

Задача 4. Да се провери дали $(((p \to r) \vee (q \to r)) \wedge \neg r) \to (\neg p \vee \neg q)$ е тавтологија.

Решение:

$$(((p \to r) \vee (q \to r)) \wedge \neg r) \to (\neg p \vee \neg q) \Leftrightarrow \neg(((\neg p \vee r) \vee (\neg q \vee r)) \wedge \neg r) \vee (\neg p \vee \neg q)$$
$$\Leftrightarrow \neg((\neg p \vee r \vee \neg q \vee r) \wedge \neg r) \vee (\neg p \vee \neg q)$$
$$\Leftrightarrow (\neg(\neg p \vee \neg q \vee r) \vee \neg\neg r) \vee (\neg p \vee \neg q)$$
$$\Leftrightarrow ((\neg\neg p \wedge \neg\neg q \wedge \neg r) \vee r) \vee (\neg p \vee \neg q)$$
$$\Leftrightarrow (((p \wedge q) \wedge \neg r) \vee r) \vee (\neg p \vee \neg q)$$
$$\Leftrightarrow \Big(((p \wedge q) \vee r) \wedge (\neg r \vee r)\Big) \vee (\neg p \vee \neg q)$$
$$\Leftrightarrow \Big(((p \wedge q) \vee r) \wedge \mathrm{T}\Big) \vee (\neg p \vee \neg q) \Leftrightarrow \big((p \wedge q) \vee r\big) \vee \neg(p \wedge q)$$
$$\Leftrightarrow (p \wedge q) \vee r \vee \neg(p \wedge q) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee \neg(p \wedge q)) \vee r \Leftrightarrow \mathrm{T} \vee r \Leftrightarrow \mathrm{T}$$

Задача 5. Да се покаже без користење на вистинитосни таблици дека формулата

$$((p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)) \to (q \vee r)$$

е тавтологија.

Решение:

$((p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)) \to (q \vee r) \Leftrightarrow \neg((p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)) \vee (q \vee r) \Leftrightarrow$

$(\neg (p \vee q) \vee \neg (\neg p \vee r)) \vee (q \vee r) \Leftrightarrow ((\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg r)) \vee (q \vee r) \Leftrightarrow$

$((\neg p \vee p) \wedge (\neg p \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee p) \wedge (\neg q \vee \neg r)) \vee (q \vee r) \Leftrightarrow$

$(\mathrm{T} \wedge (\neg p \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee p) \wedge (\neg q \vee \neg r)) \vee (q \vee r) \Leftrightarrow$

$((\neg p \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee p) \wedge (\neg q \vee \neg r)) \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg r \vee q \vee r) \wedge (\neg q \vee p \vee q \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg r \vee q \vee r) \Leftrightarrow$

$(\neg p \vee q \vee r \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee q \vee r \vee p) \wedge (\neg q \vee q \vee r \vee \neg r) \Leftrightarrow$

$(\neg p \vee q \vee r \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee q \vee r \vee p) \wedge (\neg q \vee q \vee r \vee \neg r) \Leftrightarrow (\neg p \vee q \vee \mathrm{T}) \wedge (\mathrm{T} \vee r \vee p) \wedge (\mathrm{T} \vee \mathrm{T}) \Leftrightarrow \mathrm{T} \wedge \mathrm{T} \wedge \mathrm{T} \Leftrightarrow \mathrm{T}$

Задача 6. Да се покаже без користење на вистинитосни таблици дека формулата

$$((r \lor p) \land (r \to q) \land (p \to q)) \to q$$

е тавтологија.

Решение:

$((r \lor p) \land (r \to q) \land (p \to q)) \to q \Leftrightarrow ((r \lor p) \land (\urcorner r \lor q) \land (\urcorner p \lor q)) \to q \Leftrightarrow$

$((r \lor p) \land (q \lor (\urcorner r \land \urcorner p))) \to q \Leftrightarrow \urcorner ((r \lor p) \land (q \lor (\urcorner r \land \urcorner p))) \lor q \Leftrightarrow$

$(\urcorner (r \lor p) \lor (\urcorner q \land \urcorner (\urcorner r \land \urcorner p))) \lor q \Leftrightarrow (\urcorner (r \lor p) \lor (\urcorner q \land (r \lor p))) \lor q \Leftrightarrow$

$((\urcorner (r \lor p) \lor \urcorner q) \land (\urcorner (r \lor p) \lor (r \lor p))) \lor q \Leftrightarrow ((\urcorner (r \lor p) \lor \urcorner q) \land T) \lor q \Leftrightarrow$

$(\urcorner (r \lor p) \lor \urcorner q) \lor q \Leftrightarrow \urcorner (r \lor p) \lor (\urcorner q \lor q) \Leftrightarrow \urcorner (r \lor p) \lor T \Leftrightarrow T$

Задача 7. Да се покаже без користење на вистинитосни таблици дека формулата

$$((r \lor p) \land (\neg r \lor q)) \to (p \lor q)$$

е тавтологија.

Решение:

$((r \lor p) \land (\neg r \lor q)) \to (p \lor q) \Leftrightarrow \urcorner((r \lor p) \land (\neg r \lor q)) \lor (p \lor q) \Leftrightarrow$

$(\urcorner (r \lor p) \lor \urcorner (\neg r \lor q)) \lor (p \lor q) \Leftrightarrow ((\urcorner r \land \urcorner p) \lor (r \land \urcorner q)) \lor (p \lor q) \Leftrightarrow$

$((\urcorner r \lor r) \land (\urcorner r \lor \urcorner q) \land (\urcorner p \lor r) \land (\urcorner p \lor \urcorner q)) \lor (p \lor q) \Leftrightarrow$

$(T \land (\urcorner r \lor \urcorner q) \land (\urcorner p \lor r) \land (\urcorner p \lor \urcorner q)) \lor (p \lor q) \Leftrightarrow$

$((\urcorner r \lor \urcorner q) \land (\urcorner p \lor r) \land (\urcorner p \lor \urcorner q)) \lor (p \lor q) \Leftrightarrow (\urcorner r \lor \urcorner q \lor p \lor q) \land (\urcorner p \lor r \lor p \lor q) \land (\urcorner p \lor \urcorner q \lor p \lor q) \Leftrightarrow (\urcorner r \lor p \lor q \lor \urcorner q) \land (\urcorner p \lor p \lor q \lor r) \land (\urcorner p \lor p \lor q \lor \urcorner q) \Leftrightarrow$

$(\urcorner r \lor p \lor q \lor \urcorner q) \land (\urcorner p \lor p \lor q \lor r) \land (\urcorner p \lor p \lor q \lor \urcorner q) \Leftrightarrow (\urcorner r \lor p \lor T) \land (T \lor q \lor r) \land (T \lor T) \Leftrightarrow T \land T \land T \Leftrightarrow T$

Задача 8. Без користење таблица да се испита дали исказната формула

$$((p \to q) \land (q \to r)) \to (p \to r)$$

е тавтологија.

Решение:

Нека претпоставиме дека формулата не е тавтологија.

$\tau(((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)) = \bot$

1. $\tau((p \to q) \wedge (q \to r)) = \top$

2. $\tau(p \to r) = \bot \Rightarrow \tau(p) = \top$ и $\tau(r) = \bot$

Од 1

1.1 $\tau(p \to q) = \top$ и $\Rightarrow$ бидејќи $\tau(p) = \top$, $\tau(q) = \top$

1.2 $\tau(q \to r) = \top$ ако замениме $\tau(\top \to \bot) = \bot$ #

Од докажаното следува дека формулата е тавтологија.

Задача 9. Без користење таблица да се испита дали исказната формула

$$(((\neg q \wedge (p \to q)) \to \neg p) \vee r) \leftrightarrow (\top \vee r)$$

е тавтологија.

Решение:

Задача 10. Следните реченици да се запишат како искази, а потоа да се најде нивна негација и истата да се прочита:

а) Секогаш кога учам за испит ме боли глава и не спијам.

Решение:
p: Учам за испит.
q: Ме боли глава.
r: Спијам.

$$p \to (q \wedge \neg r)$$

Негација:

$$\neg(p \to (q \wedge \neg r)) \equiv \neg(\neg p \vee (q \wedge \neg r)) \equiv p \wedge \neg(q \wedge \neg r) \equiv p \wedge (\neg q \vee \neg\neg r) \equiv p \wedge (\neg q \vee r)$$

Негирана реченица: Учам за испит, а не ме боли главата или спијам.

б) Кога учам за испит или не сум спиел, ме боли глава.

Решение:
p: Учам за испит.
q: Сум спиел.

r: Ме боли глава.

$$(p \vee \neg q) \rightarrow r$$

Негација:

$$\neg((p \vee \neg q) \rightarrow r) \equiv \neg(\neg(p \vee \neg q) \vee r) \equiv (p \vee \neg q) \wedge \neg r$$

Негирана реченица: Учам за испит или не спијам или ме боли глава.

в) Ако ми се изгаси комјутерот за време на испит, ќе се изнервирам и нема да одговорам.

Решение:

p: Ќе ми се изгаси компјутерот за време на испит.
q: Ќе се изнервирам.
r: Ќе одговорам .

$$p \rightarrow (q \wedge \neg r)$$

Негација:

$$\neg\big(p \rightarrow (q \wedge \neg r)\big) \equiv \neg\big(\neg p \vee (q \wedge \neg r)\big) \equiv p \wedge \neg(q \wedge \neg r) \equiv p \wedge (\neg q \vee \neg\neg r) \equiv p \wedge (\neg q \vee r)$$

Негирана реченица: Ќе ми се изгаси компјутерот за време на испит, ама нема да се изнервирам или ќе одговорам.

г) Секогаш кога полагам и ми се изгаси компјутерот, се нервирам.

Решение:

p: Полагам.
q: Ми се гаси компјутерот.
r: Се нервирам.

$$(p \wedge q) \rightarrow r$$

Негација:

$$\neg((p \wedge q) \rightarrow r) \equiv \neg(\neg(p \wedge q) \vee r) \equiv p \wedge q \wedge \neg r$$

Негирана реченица: Полагам, ми се гаси компутерот и не се нервирам.

Задача 11. Следната реченица да се запише како исказ, а потоа да се најде неговата негација и истата да се прочита: „Само ако задачата ја има во книгата, ќе ја решам.“

Решение:

p: Задачата ја има во книгата.

q: Задачата ќе ја решам.

$q \rightarrow p$

$\neg(q \rightarrow p) \equiv \neg(\neg q \vee p) \equiv q \wedge \neg p$

Негирана реченица: Задачата ја решив, а ја нема во книгата.

Задача 12. Следната реченица да се запише како исказ, а потоа да се најде неговата негација и истата да се прочита: „Ќе отидам на испит, само ако ги решам задачите од вежби.“

Решение:
p: Ќе отидам на испит.
q: Ќе ги решам задачите од вежби.

$$p \to q$$

Негација:

$$\neg(p \to q) \equiv \neg(\neg p \vee q) \equiv p \wedge \neg q$$

Негирана реченица: Ќе отидам на испит, а нема да ги решам задачите од вежби.

Задача 13. Следната реченица да се запише како исказ, а потоа да се најде неговата негација и истата да се прочита: „Гледам кошарка, само кога игра репрезентацијата на Македонија.“

Решение:
p: Гледам кошарка.
q: игра репрезентацијата на Македонија.

$$p \to q$$

Негација:

$$\neg(p \to q) \equiv \neg(\neg p \vee q) \equiv p \wedge \neg q$$

Негирана реченица: Ќе гледам кошарка, а нема да игра репрезентацијата на Македонија.

Задача 14. Следната реченица да се запише како исказ, а потоа да се најде неговата негација и истата да се прочита: „Само кога имам часови наутро, си легнувам пред полноќ“.

Решение:
p: Имам часови наутро.
q: Си легнувам пред полноќ.

$$q \to p$$

Негација:

$$\neg(q \to p) \equiv \neg(\neg q \vee p) \equiv q \wedge \neg p$$

Негирана реченица: Си легнувам пред полноќ, а немам часови наутро.

Задача 15. Следните реченици да се запишат како искази, а потоа да се најде нивна негација и истата да се прочита:

а) Кога грее сонце и немам обврски за факултет, сум расположена.

p: Грее сонце.
q: Имам обврски за факултет.
r: Расположена сум.

$$(p\wedge\neg q)\to r$$

Негација:

$$\neg((p\wedge\neg q)\to r)\equiv\neg(\neg(p\wedge\neg q)\vee r)\equiv(p\wedge\neg q)\wedge\neg r$$

Негирана реченица: Грее сонце и *немам* обврски за факултет и сум нерасположена.

б) Кога врне и имам обврски за факултет, сум нерасположена.

p: Врне

q: Имам обврски за факултет

r: Расположена сум

$$(p\wedge q)\to\neg r$$

Негација:

$$\neg((p\wedge q)\to\neg r)\equiv\neg(\neg(p\wedge q)\vee\neg r)\equiv(p\wedge q)\wedge r$$

Негирана реченица: Врне и имам обврски за факултет и сум расположена.

в) Кога грее сонце и сум расположена, сакам да одам на прошетка.
p: Грее сонце.
q: Расположена сум.
r: Сакам да одам на прошетка.

$$(p\wedge q)\to r$$

Негација:

$$\neg((p\wedge q)\to r)\equiv\neg(\neg(p\wedge q)\vee r)\equiv(p\wedge q)\wedge\neg r$$

Негирана реченица: Грее сонце и сум расположена, и не сакам да одам на прошетка.

г) Кога врне и сум нерасположен, не ми се учи.
p: Врне
q: Расположен сум
r: Ми се учи

$$(p\wedge\neg q)\to\neg r$$

Негација:

$$\neg((p\wedge\neg q)\to\neg r)\equiv\neg(\neg(p\wedge\neg q)\vee\neg r)\equiv(p\wedge\neg q)\wedge r$$

Негирана реченица: Врне и сум расположен, и ми се учи.

Задачи за вежбање

Задача 1. Која е вредноста на x после изјавата: Ако 2+2=4 тогаш x=x+1 ако на почетокот x=0?

Задача 2. Да се запише како исказ следната реченица: Не смеете да се возите со лифт ако сте пониски од 150 cm, освен ако сте постари од 16 години.

Задача 3. Нека p, q, и r се следните искази:

p: Имаш грип.

q: Го пропушташ колоквиумот

r: Го положуваш предметот

Искажи ги следните искази со реченици:

а) $(\neg q) \leftrightarrow r$ б) $(p \to \neg r) \vee (q \to \neg r)$

Задача 4. (Да се реши) Провери дали се тавтологии следнаве формули:

а) $((p\to q)\wedge\neg p) \to q$

б) $(p\to q)\wedge(\neg p\to q) \to q$.

Задача 5. Да се прочита $(p \vee q) \to (r \wedge s)$ ако

p: Овој семестар слушаш Дискретна математика 1.

q: Овој семестар слушаш Калкулус 1.

r: Студент си на ФИНКИ.

s: Студент си во прва година.

Потоа да се најде негација на исказот и да се прочита како реченица.

Задача 6. Следните реченици да се запишат како искази, да се најде нивна негација и да се прочитаат речениците.

а) Ако имаш нов телефон ќе имаш Android или Windows Mobile.

б) Домашниот тим победува секогаш кога врне.

Задача 7. Ако p и q се дадени со:

p: Пораката е скенирана од вируси.

q: Пораката е испратена од непознат корисник.

Да се прочитаат и запишат со искази:

а) p секогаш кога q .

б) Ако $\neg p$ тогаш $\neg q$.

Потоа да се најдат нивни негации.

Задача 8. Да се разгледа реченицата:

Ако си помал од 16 години тогаш, ако си понизок од 150 см не можеш да се возиш со лифт.

Упатство: Реченицата може да се запише со $p \rightarrow (q \rightarrow \neg r)$ каде:

p: Помал си од 16 години.

q: Понизок си од 150 см.

r: Можеш да се возиш со лифт.