Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ во Скопје
ФАКУЛТЕТ ЗА ИНФОРМАТИЧКИ НАУКИ И КОМПЈУТЕРСКО ИНЖЕНЕРСТВО

Испит по Дискретна математика 1, 29. 01. 2014

I група

Име и презиме ____________________________________ **Бр. Индекс** ____________

Професор кај кој го слуша предметот ____

Време за работа:
150 минути

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Вкупно

Задача 1. (2+8) а) Да се дефинира исказна формула.

Исказна формула дефинираме на следниов начин:

(1) Секоја исказна буква и секоја логичка константа е исказна формула.

(2) Ако α и β се исказни формули, тогаш и $(\neg\alpha)$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$ и $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ се исто така исказни формули.

(3) Исказни формули се оние и само оние изрази добиени со конечна примена на (1) и (2).

б) Да се покаже без користење на вистинитосни таблици дека формулата

$$((p \vee q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow r$$

е тавтологија.

$$((p \vee q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow r \leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)) \rightarrow r \leftrightarrow$$

$$((p \vee q) \wedge (r \vee (\neg p \wedge \neg q))) \rightarrow r \leftrightarrow \neg ((p \vee q) \wedge (r \vee (\neg p \wedge \neg q))) \vee r \leftrightarrow$$

$$(\neg (p \vee q) \vee (\neg r \wedge \neg (\neg p \wedge \neg q))) \vee r \leftrightarrow (\neg (p \vee q) \vee (\neg r \wedge (p \vee q))) \vee r \leftrightarrow$$

$$((\neg (p \vee q) \vee \neg r) \wedge (\neg (p \vee q) \vee (p \vee q))) \vee r \leftrightarrow ((\neg (p \vee q) \vee \neg r) \wedge T) \vee r \leftrightarrow$$

$$(\neg (p \vee q) \vee \neg r) \vee r \leftrightarrow \neg (p \vee q) \vee (\neg r \vee r) \leftrightarrow \neg (p \vee q) \vee T \leftrightarrow T$$

Задача 2. (8) Ако Бојан не положи Дискретна математика, нема да дипломира. Бојан дипломирал. Бојан нема да дипломира само ако не ја прочита книгата за Дискретна математика. Бојан, ако положи Дискретна математика и ја прочита книгата, ќе се вработи. Дали може да се заклучи дека Бојан ќе се вработи?

p: Бојан положил Дискретна математика

q: Бојан дипломирал

r: Бојан ја прочитал книгата

s: Бојан се вработил

$\neg p \to \neg q,\ q,\ \neg q \to \neg r,\ (p \wedge r) \to s \Rightarrow s$

1.	$\neg p \to \neg q$	претпоставка
2.	q	претпоставка
3.	p	Modus Tollens 1 и 2
4.	$\neg q \to \neg r$	претпоставка

Не може да се заклучи r, па не може да се заклучи ни s

Задача 3. (3+6+3) Реченицата "Постојат двајца различни студенти кои имаат запишано исти предмети"

а) да се напише како предикатска формула,

Доменот е множеството студенти.

$P(x, y)$: x и y имаат запишано исти предмети.

$(\exists x)(\exists y)\ (x \neq y \wedge P(x, y))$

б) да се напише негацијата на формулата, и

$$\begin{aligned}
\neg((\exists x)(\exists y)\ (x \neq y \wedge P(x, y))) &\equiv (\forall x)(\forall y)\ \neg(x \neq y \wedge P(x, y)) \\
&\equiv (\forall x)(\forall y)\ (\neg(x \neq y) \vee \neg P(x, y)) \\
&\equiv (\forall x)(\forall y)\ (x = y \vee \neg P(x, y)) \\
&\equiv (\forall x)(\forall y)\ (x \neq y \to \neg P(x, y))
\end{aligned}$$

в) да се прочита негацијата.

Секои два различни студента немаат запишано исти предмети. (т.е. Нема два различни студента кои имаат запишано исти предмети.)

Задача 4. (2+5) а) Што е решение на исказната функција “Ако бројот n е делив со 4, тогаш тој е делив со 2”, во доменот на целите броеви.

За сите цели броеви се добива вистинит исказ, значи решението на дадената исказна функција е множеството на целите броеви.

б) Да се докаже дека ако n и m се непарни природни броеви, тогаш $n^3 + m$ е парен природен број.

Нека n и m се се непарни природни броеви. Тогаш постојат цели броеви k_1 и k_2, така што $n=2k_1+1$ и $m=2k_2+1$. Оттука $n^3+m=(2k_1+1)^3+(2k_2+1)=8k_1^3+12k_1^2+6k_1+1+2k_2+1=2(4k_1^3+6k_1^2+3k_1+k_2+1)$.

$4k_1^3+6k_1^2+3k_1+k_2+1$ е цел број, да го обележиме со p. Оттука $n^3+m=2p$, па n^3+m е парен.

Задача 5. (3+10)

а) Со ДА или НЕ одговори дали е точно тврдењето:

$\emptyset \in \{\emptyset\}$ ________**ДА**________

$\emptyset \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ ______**ДА**______

$\{\{\emptyset\}\} \subset \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ ____**ДА**______

б) Да се покаже дека за произволни множества M, N и P важи:

$$((M \oplus N) - N) - P = M - (N \cup P).$$

$$((M \oplus N) - N) - P = (((M - N) \cup (N - M)) - N) - P = (((M \cap \overline{N}) \cup (N \cap \overline{M})) - N) - P =$$
$$(((M \cap \overline{N}) \cup (N \cap \overline{M})) \cap \overline{N}) - P = (((M \cap \overline{N}) \cup (N \cap \overline{M})) \cap \overline{N}) \cap \overline{P} =$$
$$((M \cap \overline{N} \cap \overline{N}) \cup (N \cap \overline{M} \cap \overline{N})) \cap \overline{P} = ((M \cap \overline{N}) \cup \emptyset) \cap \overline{P} = (M \cap \overline{N}) \cap \overline{P} = M \cap (\overline{N} \cap \overline{P}) =$$
$$M \cap (\overline{N \cup P}) = M - (N \cup P)$$

Задача 6. (2+3+3+2)

а) Користејќи предикатна логика да се дефинира поимот дека една функција е инјекција.

За функција $f:S\to T$, велиме дека е инјекција ако и само ако различни елементи од S имаат различни слики во T, односно важи следново тврдење: $(\forall x\in S)(\forall y\in S)(x\neq y\to f(x)\neq f(y))$

б) Нека f: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ е функција зададена со $f(x)=(x^2+1)/(x^2+2)$. Дали f е биекција? Одговорот да се образложи.

f е биекција акко f е инјекција и f е сурјекција.

f е инјекција акко $(\forall x,y\in M)$ $(f(x)=f(y) \to x=y)$.

$$f(x)=f(y) \Leftrightarrow (x^2+1)/(x^2+2)=(y^2+1)/(y^2+2) \Leftrightarrow (x^2+1)(y^2+2)=(x^2+2)(y^2+1) \Leftrightarrow x^2y^2+2x^2+y^2+2= x^2y^2+x^2+2y^2+2$$
$$\Leftrightarrow x^2= y^2 \Leftrightarrow x=\pm y \to x\neq y$$

f не е инјекција, значи f не е биекција.

в) Нека f: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}^+$ е функција зададена со $f(x)=x^2$. Да се определи $f^{-1}(\{x|0<x<1\})$.

$f^{-1}(\{x|0<x<1\}) = \{x|-1<x<1\}$

г) Дали функцијата f под в) е растечка или опаѓачка функција? Одговорот да се образложи.

f е растечка функција акко $(\forall x,y\in R)$ $(x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y))$, а f е опаѓачка функција акко $(\forall x,y\in R)$ $(x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y))$. Но, за $x<0$ и $y<0$ $(x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y))$, а за $x\geq 0$ и $y\geq 0$ $(x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y))$, значи f не е ни растечка ниту опаѓачка функција.

Задача 7. (8) Да се пресмета $10010_2^{157_8} (\mathrm{mod}\, 31_4)$.

$10010_2=18_{10}$, $157_8=111_{10}$, $31_4=13_{10}$

18^{111}(mod 13)
18≡5(mod 13)
5^2≡25(mod 13)
5^2≡-1(mod 13)
18^2≡5^2(mod 13)
18^2≡-1(mod 13)
$(18^2)^{55}$≡$(-1)^{55}$(mod 13)
18^{110}≡-1(mod 13)
18*18^{110}≡5*(-1)(mod 13)
18^{111}≡-5(mod 13)
18^{111}≡8(mod 13)

Задача 8. (8) Со примена на формулите за збирови без користење калкулатор да се пресмета

$$\frac{1+\sum_{i=0}^{4} 2*3^i}{\sum_{i=1}^{22} i}.$$

$$\frac{1+\sum_{i=0}^{4} 2*3^i}{\sum_{i=1}^{22} i} = \frac{1+2*(\frac{3^5-1}{3-1})}{\frac{22*23}{2}} = \frac{1+\frac{2*(243-1)}{2}}{11*23} = \frac{1+\frac{2*242}{2}}{11*23} = \frac{243}{11*23} = \frac{243}{253}$$

Задача 9. (9) Да се докаже дека $2 - 2\cdot7 + 2\cdot7^2 - \ldots + 2\cdot(-7)^n = \frac{1-(-7)^{n+1}}{4}$ за секој ненегативен цел број n.

Задачата ја решаваме со принципот на математичка индукција.

Основен случај: за n=0 важи
$2 = \frac{1-(-7)^{0+1}}{4} = \frac{1-(-7)}{4} = \frac{1+7}{4} = \frac{8}{4}$ што значи P(0) е точно.
Индуктивна претпоставка: за n=k важи

$$2 - 2\cdot7 + 2\cdot7^2 - \ldots + 2\cdot(-7)^k = \frac{1-(-7)^{k+1}}{4}$$

Нека n=k+1

$$2 - 2\cdot7 + 2\cdot7^2 - \ldots + 2\cdot(-7)^k + 2\cdot(-7)^{k+1} = \frac{1-(-7)^{k+1}}{4} + 2\cdot(-7)^{k+1} =$$
$$\frac{1-(-7)^{k+1}+8\cdot(-7)^{k+1}}{4} = \frac{1-(-7)(-7)^{k+1}}{4} = \frac{1-(-7)^{k+2}}{4}$$

Ова значи дека покажавме P(k)$\rightarrow$P(k+1), со што според принципот на математичка индукција важи даденото равенство.

Задача 10. а) (2+2+2) Нека A е подредено множество со релација за подредување "≤". Да се дефинира:

i) најголем елемент во A.
Еден елемент $a\in A$ е најголем елемент во множеството A ако сите елементи од A се помали од a, односно,

$a\in A$ е најголем во A акко $(\forall x\in A)\ x \le a$.

ii) максимален елемент во A.
За елементот $a\in A$ велиме дека е максимален елемент во множеството A, ако во A не постои елемент кој е поголем од a, односно

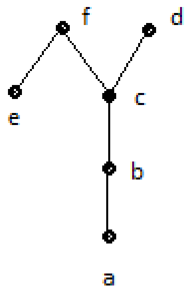
$a\in A$ е максимален елемент во A акко $(\forall x\in A)\ a \le x \Rightarrow a = x$.

iii) sup B, каде $B\subseteq A$.
За елемент $v \in A$ велиме дека е супремум за множеството B, ако е најмал елемент во множеството горни граници на B. (Најмалата горна граница доколку постои)

б) (4+3+2) Над множеството A = {a,b,c,d,e,f} е дефинирано подредување "≤" на следниов начин:

$\le = \Delta_A \cup$ {(a, b), (a, c), (a, d), (a, f), (b, c), (b, d), (b, f), (c, d), (c, f), (e, f)}.

i) Да се нацрта Хасеовиот дијаграм.



ii) Да се одредат: најмалиот и најголемиот елемент, како и минималните и максималните елементи.

Минимални елементи се a и e, нема најмал елемент.

Максимални елементи се d и f, нема најголем елемент.

iii) Ако B = {b, c, d}, да се одредат infB и supB.

$B^{*}=\{d\}$, $\sup B=d$

$B_{*}=\{a,b\}$, $\inf B=b$

Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ во Скопје
ФАКУЛТЕТ ЗА ИНФОРМАТИЧКИ НАУКИ И КОМПЈУТЕРСКО ИНЖЕНЕРСТВО

Име и презиме ________________________________ **Бр. Индекс** ______________

Професор кај кој го слуша предметот ________________________________

Испит по Дискретна математика 1, 29.01.2014

II група

Време за работа:
150 минути

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Вкупно

Задача 1. (2+8) а) Да се дефинира тавтологија.

Тавтологија е исказна формула која е точна за која било вистинитосна вредност на исказните променливи кои ја сочинуваат, односно формула која секогаш е точна.

б) Да се покаже без користење на вистинитосни таблици дека формулата

$((p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)) \rightarrow (q \vee r)$ е тавтологија.

$((p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)) \rightarrow (q \vee r) \leftrightarrow \neg((p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)) \vee (q \vee r) \leftrightarrow$

$(\neg (p \vee q) \vee \neg (\neg p \vee r)) \vee (q \vee r) \leftrightarrow ((\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg r)) \vee (q \vee r) \leftrightarrow$

$((\neg p \vee p) \wedge (\neg p \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee p) \wedge (\neg q \vee \neg r)) \vee (q \vee r) \leftrightarrow$

$(T \wedge (\neg p \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee p) \wedge (\neg q \vee \neg r)) \vee (q \vee r) \leftrightarrow$

$((\neg p \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee p) \wedge (\neg q \vee \neg r)) \vee (q \vee r) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg r \vee q \vee r) \wedge (\neg q \vee p \vee q \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg r \vee q \vee r) \leftrightarrow$

$(\neg p \vee q \vee r \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee q \vee r \vee p) \wedge (\neg q \vee q \vee r \vee \neg r) \leftrightarrow$

$(\neg p \vee q \vee r \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee q \vee r \vee p) \wedge (\neg q \vee q \vee r \vee \neg r) \leftrightarrow (\neg p \vee q \vee T) \wedge (T \vee r \vee p) \wedge (T \vee T) \leftrightarrow T \wedge T \wedge T \leftrightarrow T$

Задача 2. (8) Ако Бојан не седел во бифе ќе положи Дискретна Математика. Ако положи ќе се вработи. Ако препишувал на испитот или седел во бифе тогаш нема да се вработи. Бојан не седел во бифе. Дали може да се заклучи дека Бојан не препишувал?

p: Бојан седи во бифе

q: Бојан положил Дискретна математика

r: Бојан се вработил

s: Бојан препишувал

$\neg p \to q,\ q \to r,\ (s \vee p) \to \neg r,\ \neg p \Rightarrow \neg s$

1. $\neg p$	претпоставка
2. $\neg p \to q$	претпоставка
3. q	Modus Ponens 1 и 2
4. $q \to r$	претпоставка
5. r	Modus Ponens 3 и 4
6. $(s \vee p) \to \neg r$	претпоставка
7. $\neg (s \vee p)$	Modus Tollens на 5 и 6
8. $\neg s \wedge \neg p$	Де Морганови на 7
9. $\neg s$	упростување на 8

Задача 3. (3+6+3) Реченицата "Постојат две различни слики кои имаат исти коментари на Facebook."

а) да се напише како предикатска формула,

Доменот е множеството слики на Facebook.

$P(x, y)$: x и y имаат исти коментари.

$(\exists x)(\exists y)\ (x \neq y \land P(x, y))$

б) да се напише негацијата на формулата, и

$$\begin{aligned}
\neg((\exists x)(\exists y)\ (x \neq y \land P(x, y))) &\equiv (\forall x)(\forall y)\ \neg(x \neq y \land P(x, y)) \\
&\equiv (\forall x)(\forall y)\ (\neg(x \neq y) \lor \neg P(x, y)) \\
&\equiv (\forall x)(\forall y)\ (x = y \lor \neg P(x, y)) \\
&\equiv (\forall x)(\forall y)\ (x \neq y \to \neg \mathrm{P}(x, y))
\end{aligned}$$

в) да се прочита негацијата.

Секои две различни слики немаат исти коментари на Facebook. (т.е. Нема две различни слики кои имаат исти коментари на Facebook.)

Задача 4. (2+5) а) Што е решение на исказната функција "Ако бројот n е делив со 6, тогаш тој е делив со 2." , во доменот на целите броеви.

За сите цели броеви се добива вистинит исказ, значи решението на дадената исказна функција е множеството на целите броеви.

б) Да се докаже дека ако n е парен природен број и m е непарен природен број, тогаш $n+m^3$ е непарен природен број.

Нека n е парен природен број и m е непарен природен број. Тогаш постојат цели броеви k_1 и k_2, така што $n=2k_1$ и $m=2k_2+1$. Оттука $n+m^3=2k_1+(2k_2+1)^3=2k_1+8k_2^3+12k_2^2+6k_2+1=2(k_1+4k_2^3+6k_2^2+3k_2)+1$.

$k_1+4k_2^3+6k_2^2+3k_2$ е цел број, да го обележиме со p. Оттука $n+m^3=2p+1$, па $n+m^3$ е непарен.

Задача 5. (3+10)

а) Со ДА или НЕ одговори дали тврдењето е точно:

$\{\emptyset\} \in \{\emptyset\}$ ____НЕ________

$\{\emptyset\} \subset \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ ___ДА______

$\emptyset \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ ______ДА_____

б) Да се покаже дека за произволни множества A, B и C важи:

$$(A \oplus B) - B - C = A - (B \cup C).$$

$$((A \oplus B) - B) - C = (((A - B) \cup (B - A)) - B) - C = (((A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})) - B) - C =$$

$$(((A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})) \cap \overline{B}) - C = (((A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})) \cap \overline{B}) \cap \overline{C} =$$

$$((A \cap \overline{B} \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A} \cap \overline{B})) \cap \overline{C} = ((A \cap \overline{B}) \cup \emptyset) \cap \overline{C} = (A \cap \overline{B}) \cap \overline{C} = A \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) =$$

$$A \cap (\overline{B \cup C}) = A - (B \cup C)$$

Задача 6. (2+3+3+2)

а) Користејќи предикатна логика да се дефинира поимот дека една функција е сурјекција.

За функција f:S→T велиме дека е сурјекција ако и само ако за секој елемент $y \in$ T постои елемент $x \in$ S таков што $f(x) = y$, односно $(\forall y \in T)(\exists x \in S)(f(x) = y)$

б) Нека f: **R**→**R** е функција зададена со $f(x)=(x^2+2)/(x^2+3)$. Дали f е биекција? Одговорот да се образложи.

f е биекција акко f е инјекција и f е сурјекција.

f е инјекција акко $(\forall x,y \in M)\ (f(x)=f(y) \rightarrow x=y)$.

$$f(x)=f(y) \Leftrightarrow (x^2+2)/(x^2+3)=(y^2+2)/(y^2+3) \Leftrightarrow (x^2+2)(y^2+3)=(x^2+3)(y^2+2) \Leftrightarrow x^2y^2+3x^2+2y^2+6= x^2y^2+2x^2+3y^2+6$$
$$\Leftrightarrow x^2= y^2 \Leftrightarrow x=\pm y \rightarrow x\neq y$$

f не е инјекција, значи f не е биекција.

в) Нека f: **R**→**R**$^+$ е функција зададена со $f(x)=x^2$. Да се определи $f^{-1}(\{x|x>4\})$.

$f^{-1}(\{x|x>4\}) = \{x|x<-2\}$ U $\{x|x>2\}$

г) Дали функцијата f под в) е растечка или опаѓачка функција? Одговорот да се образложи.

f е растечка функција акко $(\forall x,y \in R)\ (x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y))$, а f е опаѓачка функција акко $(\forall x,y \in R)\ (x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y))$. Но, за x<0 и y<0 $(x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y))$, а за $x\geq 0$ и $y\geq 0$ $(x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y))$, значи f не е ни растечка ниту опаѓачка функција.

Задача 7. (8) Да се пресмета $10111_2^{59_{16}}\ (mod\ 101_4)$

$10111_2=23_{10}$, $59_{16}=89_{10}$, $101_4=17_{10}$

$23^{89}(\text{mod } 17)$
$23\equiv 6(\text{mod } 17)$
$6^2\equiv 36(\text{mod } 17)$
$6^2\equiv 2(\text{mod } 17)$
$2^4\equiv 16(\text{mod } 17)$
$2^4\equiv -1(\text{mod } 17)$
$(6^2)^4\equiv -1(\text{mod } 17)$
$6^8\equiv -1(\text{mod } 17)$
$23^8\equiv -1(\text{mod } 17)$
$(23^8)^{11}\equiv(-1)^{11}(\text{mod } 17)$
$23^{88}\equiv -1(\text{mod } 17)$
$23*23^{88}\equiv 6*(-1)(\text{mod } 17)$
$23^{89}\equiv -6(\text{mod } 17)$
$23^{89}\equiv 11(\text{mod } 17)$

Задача 8. (8) Со примена на формулите за збирови без користење на калкулатор да се пресмета

$$\frac{\sum_{i=1}^{12} i^2}{\sum_{i=1}^{5} i^3}$$

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{12} i^2}{\sum\limits_{i=1}^{5} i^3} = \frac{\frac{12*13*25}{6}}{\frac{5^2*6^2}{4}} = \frac{\frac{12*13*25}{6}}{\frac{25*36}{4}} = \frac{12*13*4}{6*36} = \frac{26}{9}$$

Задача 9. (9) Да се докаже дека $1\cdot2\cdot3 + 2\cdot3\cdot4 + \ldots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$ за секој позитивен цел број n.

Задачата ја решаваме со принципот на математичка индукција.

Основен случај: за n=1 важи

$1\cdot2\cdot3 = 6 = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4}{4}$ што значи P(0) е точно.

Индуктивна претпоставка: за n=k важи

$$1\cdot2\cdot3 + 2\cdot3\cdot4 + \ldots + k(k+1)(k+2) = \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}$$

Нека n=k+1

$$1\cdot2\cdot3 + 2\cdot3\cdot4 + \ldots + k(k+1)(k+2) + (k+1)(k+2)(k+3) = \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4} + (k+1)(k+2)(k+3) =$$

$$\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)+4(k+1)(k+2)(k+3)}{4} = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4}$$

Ова значи дека покажавме $P(k)\rightarrow P(k+1)$, со што според принципот на математичка индукција важи даденото равенство.

Задача 10. а) (2+2+2) Над непразно множество A дефинирана е релација за подредување "≤". Да се дефинира

i) најмал елемент во A

Еден елемент $a\in A$ е најмал елемент во множеството A ако е помал од сите елементи од A, односно,

$a\in A$ е најмал во A акко $(\forall x\in A)\ a \le x$.

ii) минимален елемент во A

За елементот $a\in A$ велиме дека е минимален елемент во множеството A, ако во A не постои елемент кој е помал од a, односно,

$a\in A$ е минимален елемент во A акко $(\forall x\in A)\ x \le a \Rightarrow x = a$.

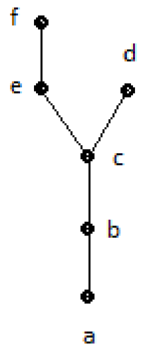
iii) Ако $B\subseteq A$, да се дефинира inf B.

За елемент $u \in A$ велиме дека е инфимум за множеството B, ако е најголем елемент во множеството долни граници на B. (Најголема долна граница доколку постои)

б) (4+3+2) Над множеството A={a,b,c,d,e,f}, елемент, дефинирано е подредување "≤" на следниов начин:

$$\le\ = \Delta_A \cup \{(a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (a, f), (b, c), (b, e), (b, f), (c, d), (c, e), (c, f), (e, f)\}.$$

i) Да се нацрта Хасеовиот дијаграм.



ii) Да се одредат: најмалиот, најголемиот елемент, минималните и максималните елементи.

Минимален елемент е a, најмал елемент е a.
Максимални елементи се d и f, нема најголем елемент.

iii) Ако B = {c, d, e}, да се одредат infB и supB.

$B^{*}=\varnothing$, supB нема
$B_{*}=\{a,b,c\}$, infB=c

Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ во Скопје
ФАКУЛТЕТ ЗА ИНФОРМАТИЧКИ НАУКИ И КОМПЈУТЕРСКО ИНЖЕНЕРСТВО

Име и презиме ____ **Бр. Индекс** ________________

Професор кај кој го слуша предметот ____

Испит по Дискретна математика 1, 29.01.2014

III група

Време за работа:
150 минути

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Вкупно

Задача 1. (2+8) а) Да се дефинира контрадикција.

Контрадикција е исказна формула која е неточна за која било вистинитосна вредност на исказните променливи кои ја сочинуваат, односно формула која секогаш е неточна.

б) Да се покаже без користење на вистинитосни таблици дека формулата

$$((r \lor p) \land (r \to q) \land (p \to q)) \to q$$

е тавтологија.

$((r \lor p) \land (r \to q) \land (p \to q)) \to q \leftrightarrow ((r \lor p) \land (\neg r \lor q) \land (\neg p \lor q)) \to q \leftrightarrow$

$((r \lor p) \land (q \lor (\neg r \land \neg p))) \to q \leftrightarrow \neg ((r \lor p) \land (q \lor (\neg r \land \neg p))) \lor q \leftrightarrow$

$(\neg (r \lor p) \lor (\neg q \land \neg (\neg r \land \neg p))) \lor q \leftrightarrow (\neg (r \lor p) \lor (\neg q \land (r \lor p))) \lor q \leftrightarrow$

$((\neg (r \lor p) \lor \neg q) \land (\neg (r \lor p) \lor (r \lor p))) \lor q \leftrightarrow ((\neg (r \lor p) \lor \neg q) \land T) \lor q \leftrightarrow$

$(\neg (r \lor p) \lor \neg q) \lor q \leftrightarrow \neg (r \lor p) \lor (\neg q \lor q) \leftrightarrow \neg (r \lor p) \lor T \leftrightarrow T$

Задача 2. (8) Ако Илинка не одела на часови по танц нема да научи да танцува. Илинка научила да танцува. Илинка нема да научи да танцува само ако не вежба дома. Илинка ако одела на часови по танц и вежбала дома ќе стане инструктор по танц. Дали може да се заклучи дека Илинка ќе стане инструктор по танц?

p: Илинка одела на часови по танц

q: Илинка научила да танцува

r: Илинка вежба дома

s: Илинка ќе биде инструктор

$\neg p \to \neg q$, q, $\neg q \to \neg r$, $(p \wedge r) \to s \Rightarrow s$

$\neg p \to \neg q$, q, $\neg q \to \neg r$, $(p \wedge r) \to s \Rightarrow s$

1. $\neg p \to \neg q$	претпоставка
2. q	претпоставка
3. p	Modus Tollens 1 и 2
4. $\neg q \to \neg r$	претпоставка

Не може да се заклучи r

Задача 3. (3+6+3) Реченицата “Постојат две различни девојки кои имаат ист дечко.”

а) да се напише како предикатска формула,

Доменот е множеството девојки.

$P(x, y)$: x и y имаат ист дечко.

$(\exists x)(\exists y)\ (x \neq y \wedge P(x, y))$

б) да се напише негацијата на формулата, и

$$\begin{aligned}\neg((\exists x)(\exists y)\ (x \neq y \wedge P(x, y))) &\equiv (\forall x)(\forall y)\ \neg(x \neq y \wedge P(x, y)) \\ &\equiv (\forall x)(\forall y)\ (\neg(x \neq y) \vee \neg P(x, y)) \\ &\equiv (\forall x)(\forall y)\ (x = y \vee \neg P(x, y)) \\ &\equiv (\forall x)(\forall y)\ (x \neq y \to \neg \mathrm{P}(x, y))\end{aligned}$$

в) да се прочита негацијата.

Секои две различни девојки немаат ист дечко. (т.е. Нема две различни девојки кои имаат ист дечко.)

Задача 4. (2+5) а) Што е решение на исказната функција “Ако бројот n е делив со 8, тогаш тој е делив со 4.” , во доменот на целите броеви.

За сите цели броеви се добива вистинит исказ, значи решението на дадената исказна функција е множеството на целите броеви.

б) Да се докаже дека ако n е непарен природен број и m е парен природен број, тогаш $(n+m)^2$ е непарен природен број.

Нека *n* е непарен природен број и *m* е парен природен број. Тогаш постојат цели броеви k_1 и k_2, така што $n=2k_1+1$ и $m=2k_2$. Оттука

$(n+m)^2 =(2k_1+1+2k_2)^2=4k_1^2+4k_2^2+4k_1k_2+4k_1+4k_2+1=2(2k_1^2+2k_2^2+2k_1k_2+2k_1+2k_2)+1$.

$2k_1^2+2k_2^2+2k_1k_2+2k_1+2k_2$ е цел број, да го обележиме со *p*. Оттука $(n+m)^2 =2p+1$, па $(n+m)^2$ е непарен.

Задача 5. (3+10)

а) Со ДА или НЕ одговори дали тврдењето е точно:

$\{\emptyset\} \subset \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ ____**ДА**_______

$\emptyset \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ ______**ДА**______

$\{\{\emptyset\}\} \subset \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ ____**ДА**_____

б) Да се покаже дека за произволни множества M, N и P важи:

$$(M-(\overline{P\oplus M}))-N = M-(N\cup P)$$

$$(M-(\overline{P\oplus M}))-N = (M\cap(\overline{\overline{P\oplus M}}))-N = (M\cap(P\oplus M))-N =$$
$$(M\cap((P-M)\cup(M-P)))-N = (M\cap((P\cap\overline{M})\cup(M\cap\overline{P})))-N =$$
$$((M\cap P\cap\overline{M})\cup(M\cap M\cap\overline{P}))-N = (\varnothing\cup(M\cap\overline{P}))-N = (M\cap\overline{P})-N =$$
$$(M\cap\overline{P})\cap\overline{N} = M\cap(\overline{P}\cap\overline{N}) = M\cap(\overline{P\cup N}) = M\cap(\overline{N\cup P}) = M-(N\cup P)$$

Задача 6. (2+3+3+2)

а) Користејќи предикатна логика да се дефинира поимот дека една функција е инјекција.

За функција $f:S\rightarrow T$, велиме дека е инјекција ако и само ако различни елементи од S имаат различни слики во T, односно важи следново тврдење: $(\forall x \in S)(\forall y \in S)(x\neq y \rightarrow f(x)\neq f(y))$

б) Нека $f: \mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}$ е функција зададена со $f(x)=(x^2+3)/(x^2+4)$. Дали f е биекција? Одговорот да се образложи.

f е биекција акко f е инјекција и f е сурјекција.

f е инјекција акко $(\forall x,y\in M)\ (f(x)=f(y) \rightarrow x=y)$.

$f(x)=f(y) \Leftrightarrow (x^2+3)/(x^2+4)=(y^2+3)/(y^2+4) \Leftrightarrow (x^2+3)(y^2+4)=(x^2+4)(y^2+3) \Leftrightarrow x^2y^2+4x^2+3y^2+12= x^2y^2+3x^2+4y^2+12$
$\Leftrightarrow x^2= y^2 \Leftrightarrow x=\pm y \rightarrow x\neq y$

f не е инјекција, значи f не е биекција.

в) Нека $f: \mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}^+$ е функција зададена со $f(x)=x^2$. Да се определи $f^{-1}(\{x|x>2\})$.

$f^{-1}(\{x|x>2\}) = \{x|\ x<-\sqrt{2}\ \}\ \cup\ \{x|\ \sqrt{2}<x\ \}$

г) Дали функцијата f под в) е растечка или опаѓачка функција? Одговорот да се образложи.

f е растечка функција акко $(\forall x,y\in R)\ (x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y))$, а f е опаѓачка функција акко $(\forall x,y\in R)\ (x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y))$. Но, за $x<0$ и $y<0$ $(x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y))$, а за $x\geq 0$ и $y\geq 0$ $(x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y))$, значи f не е ни растечка ниту опаѓачка функција.

Задача 7. (8) Да се пресмета $102_4^{6F_{16}} (mod\ 1101_2)$

$102_4=18_{10}$, $6F_{16}=111_{10}$, $1101_2=13_{10}$

18^{111}(mod 13)
18≡5(mod 13)
5^2≡25(mod 13)
5^2≡-1(mod 13)
18^2≡5^2(mod 13)
18^2≡-1(mod 13)
$(18^2)^{55}$≡$(-1)^{55}$(mod 13)
18^{110}≡-1(mod 13)
$18*18^{110}$≡5*(-1)(mod 13)
18^{111}≡-5(mod 13)
18^{111}≡8(mod 13)

Задача 8. (8) Со примена на формулите за збирови без користење на калкулатор да се пресмета

$$\frac{\sum_{i=1}^{11} i^3}{\sum_{i=1}^{10} 6 * i}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{11} i^3}{\sum_{i=1}^{10} 6*i} = \frac{\frac{121*144}{4}}{6*\frac{10*11}{2}} = \frac{121*36}{30*11} = \frac{11*36}{30} = \frac{11*6}{5} = \frac{66}{5}$$

Задача 9. (9) Да се докаже дека $1^4 + 2^4 + ... + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$ за секој позитивен цел број n.

Задачата ја решаваме со принципот на математичка индукција.

Основен случај: за n=1 важи
$1^4 = 1 = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 5}{30}$ што значи P(0) е точно.
Индуктивна претпоставка: за n=k важи

$$1^4 + 2^4 + ... + k^4 = \frac{k(k+1)(2k+1)(3k^2+3k-1)}{30}$$

Нека n=k+1

$$1^4 + 2^4 + ... + k^4 + (k+1)^4 = \frac{k(k+1)(2k+1)(3k^2+3k-1)}{30} + (k+1)^4 = \frac{k(k+1)(2k+1)(3k^2+3k-1)+30(k+1)^4}{30} =$$

$$\frac{(k+1)(k(2k+1)(3k^2+3k-1)+30(k+1)^3)}{30} =$$

$$\frac{(k+1)(6k^4+39k^3+91k^2+89k+30)}{30} =$$

$$\frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)(3(k+1)^2+3(k+1)-1)}{30}$$

Ова значи дека покажавме P(k)→P(k+1), со што според принципот на математичка индукција важи даденото равенство.

Задача 10. а) (2+2+2) Над непразно множество A дефинирана е релација за подредување "≤". Да се дефинира

i) минимален елемент во A

За елементот $a \in A$ велиме дека е минимален елемент во множеството A, ако во A не постои елемент кој е помал од a, односно,

$a \in A$ е минимален елемент во A акко $(\forall x \in A)\ x \leq a \Rightarrow x = a$.

ii) најмал елемент во A

Еден елемент $a \in A$ е најмал елемент во множеството A ако е помал од сите елементи од A, односно,

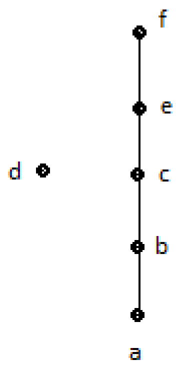
$a \in A$ е најмал во A акко $(\forall x \in A)\ a \leq x$.

iii) Ако $B \subseteq A$, да се дефинира inf B.

За елемент $u \in A$ велиме дека е инфимум за множеството B, ако е најголем елемент во множеството долни граници на B. (Најголема долна граница доколку постои) б) (4+3+2) Над множеството A={a,b,c,d,e,f}, елемент, дефинирано е подредување "≤" на следниов начин:

$\leq\; = \Delta_A \cup \{(a, b), (a, c), (a, e), (a, f), (b, c), (b, e), (b, f), (c, e), (c, f), (e, f)\}$.

i) Да се нацрта Хасеовиот дијаграм.



ii) Да се одредат: најмалиот, најголемиот елемент, минималните и максималните елементи.

Минимални елементи се a и d, нема најмал елемент.
Максимални елементи се d и f, нема најголем елемент.

iii) Ако B = {a, d, e}, да се одредат infB и supB.

$B^* = \varnothing$, supB нема
$B_* = \varnothing$, infB нема

Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ во Скопје
ФАКУЛТЕТ ЗА ИНФОРМАТИЧКИ НАУКИ И КОМПЈУТЕРСКО ИНЖЕНЕРСТВО

Име и презиме ____ **Бр. Индекс** ________________

Професор кај кој го слуша предметот ____

Испит по Дискретна математика 1, 29.01.2014

IV група

Време за работа:
150 минути

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Вкупно

Задача 1. (2+8) а) Да се дефинира задоволива (остварлива) исказна формула.

За една исказна формула велиме дека е задоволива (остварлива) ако постојат вистинитосни вредности на променливите за кои исказната формула е точна.

б) Да се покаже без користење на вистинитосни таблици дека формулата

$$((r \vee p) \wedge (\neg r \vee q)) \rightarrow (p \vee q)$$

е тавтологија.

$((r \vee p) \wedge (\neg r \vee q)) \rightarrow (p \vee q) \leftrightarrow \neg((r \vee p) \wedge (\neg r \vee q)) \vee (p \vee q) \leftrightarrow$

$(\neg (r \vee p) \vee \neg (\neg r \vee q)) \vee (p \vee q) \leftrightarrow ((\neg r \wedge \neg p) \vee (r \wedge \neg q)) \vee (p \vee q) \leftrightarrow$

$((\neg r \vee r) \wedge (\neg r \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q)) \vee (p \vee q) \leftrightarrow$

$(T \wedge (\neg r \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q)) \vee (p \vee q) \leftrightarrow$

$((\neg r \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q)) \vee (p \vee q) \leftrightarrow (\neg r \vee \neg q \vee p \vee q) \wedge (\neg p \vee r \vee p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee p \vee q) \leftrightarrow$

$(\neg r \vee p \vee q \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee p \vee q \vee \neg q) \leftrightarrow$

$(\neg r \vee p \vee q \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee p \vee q \vee \neg q) \leftrightarrow (\neg r \vee p \vee T) \wedge (T \vee q \vee r) \wedge (T \vee T) \leftrightarrow T \wedge T \wedge T \leftrightarrow T$

Задача 2. (8) Ако Илинка не си купи нови штикли тогаш ќе оди на забава. Ако оди на забава ќе танцува со Бојан. Ако си купи нови штикли или нов фустан нема да танцува со Бојан. Илинка не си купила нови штикли. Дали може да се заклучи дека Илинка не си купила нов фустан?

p: Илинка си купила нови штикли

q: Илинка оди на забава

r: Илинка танцува со Бојан

s: Илинка си купила нов фустан

$\neg p \rightarrow q$, $q \rightarrow r$, $(s \vee p) \rightarrow \neg r$, $\neg p$ => $\neg s$

1. $\neg p$	претпоставка
2. $\neg p \rightarrow q$	претпоставка
3. q	Modus Ponens 1 и 2
4. $q \rightarrow r$	претпоставка
5. r	Modus Ponens 3 и 4
6. $(s \vee p) \rightarrow \neg r$	претпоставка
7. $\neg (s \vee p)$	Modus Tollens на 5 и 6
8. $\neg s \wedge \neg p$	Де Морганови на 7
9. $\neg s$	упростување на 8

Задача 3. (3+6+3) Реченица "Постојат две различни згради на ФИНКИ кои имаат ист број на простории."

а) да се напише како предикатска формула,

Доменот е множеството згради на ФИНКИ.

$P(x, y)$: x и y имаат ист број на простории.

$(\exists x)(\exists y)\ (x \neq y \wedge P(x, y))$

б) да се напише негацијата на формулата, и

$$\begin{aligned}\neg((\exists x)(\exists y)\ (x \neq y \wedge P(x, y))) &\equiv (\forall x)(\forall y)\ \neg(x \neq y \wedge P(x, y))\\ &\equiv (\forall x)(\forall y)\ (\neg(x \neq y) \vee \neg P(x, y))\\ &\equiv (\forall x)(\forall y)\ (x = y \vee \neg P(x, y))\\ &\equiv (\forall x)(\forall y)\ (x \neq y \rightarrow \neg \mathrm{P}(x, y))\end{aligned}$$

в) да се прочита негацијата.

Секои две различни згради на ФИНКИ немаат ист број на простории. (т.е. Нема две различни згради на ФИНКИ кои имаат ист број на простории.)

Задача 4. (2+5) а) Што е решение на исказната функција "Ако бројот n е делив со 6, тогаш тој е делив со 3." , во доменот на целите броеви.

За сите цели броеви се добива вистинит исказ, значи решението на дадената исказна функција е множеството на целите броеви.

б) Да се докаже дека ако n е парен природен број и m е непарен природен број, тогаш $(n+m)^2$ е непарен природен број.

Нека n е парен природен број и m е непарен природен број. Тогаш постојат цели броеви k_1 и k_2, така што $n=2k_1$ и $m=2k_2+1$. Оттука

$(n+m)^2 = (2k_1+2k_2+1)^2 = 4k_1^2+4k_2^2+4k_1k_2+4k_1+4k_2+1 = 2(2k_1^2+2k_2^2+2k_1k_2+2k_1+2k_2)+1$.

$2k_1^2+2k_2^2+2k_1k_2+2k_1+2k_2$ е цел број, да го обележиме со p. Оттука $(n+m)^2 = 2p+1$, па $(n+m)^2$ е непарен.

Задача 5. (3+10)

а) Со ДА или НЕ одговори дали тврдењето е точно:

$\emptyset \in \{\emptyset\}$ ____________

$\{\{\emptyset\}\} \subset \{\{\emptyset\},\{\emptyset\}\}$ _____________

$\emptyset \in \{\emptyset,\{\emptyset\}\}$ ______________

б) Да се покаже дека за произволни множества A, B и C важи:

$$A-(\overline{C\oplus A})-B=A-(B\cup C).$$

$$(A-(\overline{C\oplus A}))-B=(A\cap(\overline{\overline{C\oplus A}}))-B=(A\cap(C\oplus A))-B=$$

$$(A\cap((C-A)\cup(A-C)))-B=(A\cap((C\cap\overline{A})\cup(A\cap\overline{C})))-B=$$

$$((A\cap C\cap\overline{A})\cup(A\cap A\cap\overline{C}))-B=(\emptyset\cup(A\cap\overline{C}))-B=(A\cap\overline{C})-B=$$

$$(A\cap\overline{C})\cap\overline{B}=A\cap(\overline{C}\cap\overline{B})=A\cap(\overline{C\cup B})=A\cap(\overline{B\cup C})=A-(B\cup C)$$

Задача 6. (2+3+3+2)

а) Користејќи предикатна логика да се дефинира поимот дека една функција е сурјекција.

За функција f:S$\rightarrow$T велиме дека е сурјекција ако и само ако за секој елемент $y \in$ T постои елемент $x \in$ S таков што $f(x) = y$, односно $(\forall y \in T)(\exists x \in S)(f(x) = y)$

б) Нека f: **R**$\rightarrow$**R** е функција зададена со $f(x)=(x^2+4)/(x^2+5)$. Дали f е биекција? Одговорот да се образложи.

f е биекција акко f е инјекција и f е сурјекција.

f е инјекција акко $(\forall x,y \in M)\ (f(x)=f(y) \rightarrow x=y)$.

$f(x)=f(y) \Leftrightarrow (x^2+4)/(x^2+5)=(y^2+4)/(y^2+5) \Leftrightarrow (x^2+4)(y^2+5)=(x^2+4)(y^2+5) \Leftrightarrow x^2y^2+5x^2+4y^2+20= x^2y^2+4x^2+5y^2+20$

$\Leftrightarrow x^2= y^2 \Leftrightarrow x=\pm y \rightarrow x\neq y$

f не е инјекција, значи f не е биекција.

в) Нека f: **R**$\rightarrow$**R**$^+$ е функција зададена со $f(x)=x^2$. Да се определи $f^{-1}(\{x|2<x<3\})$.

$f^{-1}(\{x|2<x<3\}) = \{x| -\sqrt{3} < x < -\sqrt{2}\}$ U $\{x| \sqrt{2} < x < \sqrt{3}\}$

г) Дали функцијата f под в) е растечка или опаѓачка функција? Одговорот да се образложи.

f е растечка функција акко $(\forall x,y \in R)\ (x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y))$, а f е опаѓачка функција акко $(\forall x,y \in R)\ (x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y))$. Но, за $x<0$ и $y<0$ $(x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y))$, а за $x\geq 0$ и $y\geq 0$ $(x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y))$, значи f не е ни растечка ниту опаѓачка функција.

Задача 7. (8) Да се пресмета $113_4{}^{131_8}\,(mod\ 10001_2)$.

$113_4=23_{10}$, $131_8=89_{10}$, $10001_2=17_{10}$

23^{89}(mod 17)
$23\equiv6$(mod 17)
$6^2\equiv36$(mod 17)
$6^2\equiv2$(mod 17)
$2^4\equiv16$(mod 17)
$2^4\equiv-1$(mod 17)
$(6^2)^4\equiv-1$(mod 17)
$6^8\equiv-1$(mod 17)
$23^8\equiv-1$(mod 17)
$(23^8)^{11}\equiv(-1)^{11}$(mod 17)
$23^{88}\equiv-1$(mod 17)
$23*23^{88}\equiv6*(-1)$(mod 17)
$23^{89}\equiv-6$(mod 17)
$23^{89}\equiv11$(mod 17)

Задача 8. (8) Со примена на формулите за збирови без користење на калкулатор да се пресмета

$$\frac{\sum_{i=1}^{5} i^3 * \sum_{i=1}^{4} i^3}{\sum_{i=1}^{25} i * \sum_{i=1}^{6} 6}$$

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{5} i^3 * \sum\limits_{i=1}^{4} i^3}{\sum\limits_{i=1}^{25} i + \sum\limits_{i=1}^{6} 6} = \frac{\frac{25*36}{4} * \frac{16*25}{4}}{\frac{25*26}{2} * 36} = \frac{\frac{16*25*25*36}{16}}{\frac{25*26*36}{2}} = \frac{25*25*36}{13*25*36} = \frac{25}{13}$$

Задача 9. (9) Да се докаже дека $1^2 - 2^2 + 3^2 - \ldots + (-1)^{n-1}n^2 = \frac{(-1)^{n-1}n(n+1)}{2}$ за секој позитивен цел број n.

Задачата ја решаваме со принципот на математичка индукција.

Основен случај: за n=1 важи

$1^2 = 1 = \frac{(-1)^{1-1}1\cdot 2}{2} = \frac{2}{2}$ што значи P(0) е точно.

Индуктивна претпоставка: за n=k важи

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - \ldots + (-1)^{k-1}k^2 = \frac{(-1)^{k-1}k(k+1)}{2}$$

Нека n=k+1

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - \ldots + (-1)^{k-1}k^2 + (-1)^k(k+1)^2 = \frac{(-1)^{k-1}k(k+1)}{2} + (-1)^k(k+1)^2 =$$

$$\frac{(-1)^{k-1}k(k+1)+2(-1)^k(k+1)^2}{2} =$$

$$\frac{(-1)^{k-1}(k+1)(k+2(-1)(k+1))}{2} =$$

$$\frac{(-1)^{k-1}(k+1)(k-2k-2)}{2} =$$

$$\frac{(-1)^{k-1}(k+1)(-k-2)}{2} =$$

$$\frac{(-1)^{k}(k+1)(k+2)}{2}$$

Ова значи дека покажавме P(k)→P(k+1), со што според принципот на математичка индукција важи даденото равенство.

Задача 10. а) (2+2+2) Над непразно множество A дефинирана е релација за подредување "≤". Да се дефинира

i) максимален елемент во A
За елементот $a \in A$ велиме дека е максимален елемент во множеството A, ако во A не постои елемент кој е поголем од a, односно
$a \in A$ е максимален елемент во A акко $(\forall x \in A)$, $a \leq x \Rightarrow a = x$.

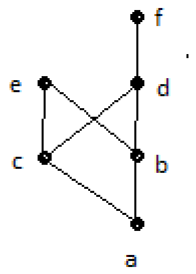
ii) најголем елемент во A
Еден елемент $a \in A$ е најголем елемент во множеството A ако сите елементи од A се помали од a, односно,
$a \in A$ е најголем во A акко $(\forall x \in A)$, $x \leq a$.

iii) Ако $B \subseteq A$, да се дефинира sup B.
За елемент $v \in A$ велиме дека е супремум за множеството B, ако е најмал елемент во множеството горни граници на B. (Најмалата горна граница доколку постои)

б) (4+3+2) Над множеството A={a,b,c,d,e,f}, елемент, дефинирано е подредување "≤" на следниов начин:

$\leq\ = \Delta_A \cup \{(a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (a, f), (b, d), (b, e), (b, f), (c, d), (c, e), (c, f), (d, f)\}$.

i) Да се нацрта Хасеовиот дијаграм.



ii) Да се одредат: најмалиот, најголемиот елемент, минималните и максималните елементи.

Минимален елемент е a, најмал елемент е a.
Максимални елементи се e и f, нема најголем елемент.

iii) Ако B = {a, c, d}, да се одредат infB и supB.

B^*={d,f}, supB =d
B_*={a}, infB=a