Методи на докажување

"Ss. Cyril and Methodius" University in Skopje
FACULTY OF COMPUTER
SCIENCE AND ENGINEERING

Пример 1. Да се докаже дека $p \to (q \to p)$ е тафтологија

I начин

$p \to (q \to p)$

$\Leftrightarrow \neg p \vee (\neg q \vee p)$

$\Leftrightarrow \neg p \vee \neg q \vee p$

$\Leftrightarrow (\neg p \vee p) \vee \neg q$

$\Leftrightarrow T \vee \neg q \Leftrightarrow T$

II начин

- Нека формулата не е тафтологија
- Тогаш постои некоја комбинација за p и q за кои прима вредност F
- За тоа да се случи мора p да прими вредност T, а $q \to p$ вредност F
- Но $q \to T$ никогаш не прима вредност F, па нема комбинација за p и q за кои прима вредност F
- Формулата е тафтологија

III начин

- p може да прими вредност T или F
- Ако p прими вредност T формулата го има обликот

$T \to (q \to T) \Leftrightarrow T \to T \Leftrightarrow T$

- Ако p прими вредност F формулата го има обликот

$F \to (q \to F) \Leftrightarrow T$

Анализа на доказите

- Во првиот доказ, имајќи ја во предвид формулата, покажавме дека тврдењето дека е тафтологија **мора да важи** **– директен доказ**
- Во вториот доказ претпоставивме дека тврдењето дека формулата е тафтологија не важи и покажавме дека **не може** да се случи некогаш да прими вредност F **– индиректен доказ**
- Во третиот доказ ги разгледавме двата можни случаи, кога p е точно и кога p е неточно и покажавме дека и во двата случаи формулата ќе прими вредност T **– доказ по случаи**

Формални и неформални докази

- **Доказ** претставува валиден аргумент (точна постапка) кој ја одредува вистинитоста на одредено тврдење.
- Аргументите од претходното предавање претставуваа формални докази, каде се прикажани сите чекори и се наведени правилата кои се користат во секој чекор.
- Но, при докажување на теореми во пракса не користиме толку формални докази туку таканаречени неформални докази. Обично чекорите ги објаснуваме со говорен јазик, со математички формули, наместо со јазикот на исказната логика.
- **Овде ќе користиме (неформални) докази за да илустрираме различни методи на докажување на теореми.**

Теорема

- ***Теорема***: Тврдење кое може да се покаже дека е точно.

- Типична теорема е од облик

$$\underbrace{p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n}_{\textit{Претпоставки (аксиоми)}} \rightarrow \underbrace{q}_{\textit{Заклучок}}$$

Примери:

•Ако α, β и γ се агли на триаголник, тогаш $\alpha+\beta+\gamma=180°$

•Ако a, b и c се должините на страните на некој триаголник, тогаш b+c>a

Да разгледаме одредени методи за докажување на теореми

Методи за докажување за импликации

- За докажување на импликациите $p \to q$ имаме:
- ***Директни*** докази: Претпоставуваме дека *p* е точно, и докажуваме *q*.
- ***Индиректни*** докази: Докази кои не започнуваат со претпоставките или не завршуваат со заклучокот.
- ***Празни*** докази: Докажуваме дека $\neg p$ е точно.
- ***Тривијални*** докази: Докажуваме дека *q* е точно.
- **Докази по случаи**:
  Покажуваме дека $p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n \to q$ со покажување дека $(p_1 \to q) \wedge (p_2 \to q) \wedge \ldots \wedge (p_n \to q)$

Директни докази

- **Директен доказ** на условното тврдење $p \rightarrow q$ се состои од:

  1. Првиот чекор е претпоставката дека p е точно.

  2. Во следните чекори се користат правилата на логички заклучоци

  3. Последниот чекор покажува дека q мора да е точно.

Пример за директен доказ

- **Дефиниција:** Целиот број n се нарекува непарен ако $n=2k+1$ за некој цел број k; n е парен ако $n=2k$ за некое k.
- **Аксиома:** Секој цел број е или парен или непарен.
- **Теорема:** (За сите **цели** броеви n) Ако n е непарен цел број, тогаш n^2 е непарен цел број.

Доказ:

- За некој цел број k, $n=2k+1 \Rightarrow$
- За тој цел број k, $n^2=(2k+1)^2 = 4k^2+4k+1= 2(2k^2+2k)+1 \Rightarrow$
- За целиот број $k_1=2k^2+2k$, $n^2 = 2k_1+1 \Rightarrow n^2$ е непарен

Индиректни докази

- Доказите кои не започнуваат со претпоставките или не завршуваат со заклучокот се наречени **индиректни докази**.
- Многу корисен тип на ваков доказ е **доказ со контрапозиција**. Се користи фактот дека $p \rightarrow q$ е еквивалентно со неговата контрапозиција $\neg q \rightarrow \neg p$.
- Почнуваат со $\neg q$ како претпоставка и со користење на расположивите факти се покажува дека и $\neg p$ мора да е точно.
- Може да се применат кога директните докази не се едноставни.

Пример 2.

Теорема: За секој цел број *n* важи тврдењето „Ако 3*n*+2 е непарен, тогаш *n* е непарен.“

Доказ:

Аналогно на претходно: Нека 3*n*+2 е непарен. Тогаш постои k, таков што 3*n*+2 =2k+1, односно постои k, таков што 3*n*+1 =2k.

Дали можеме да заклучиме дека n е непарен?

- *нема директен начин да го докажеме ова, освен да утврдиме дека ако n е парен тогаш* 3*n*+1 не може да биде напишан како 2k за цел број k.

Пример 2.

Теорема: За секој цел број *n* важи тврдењето „Ако 3*n*+2 е непарен, тогаш *n* е непарен.“

Доказ:

Нека претпоставиме дека *n* не е непарен. Тогаш тој е парен и

- Постои цел број k, таков што $n = 2k \Rightarrow$
- За тој цел број k, $3n+2 = 3(2k)+2 = 6k+2 = 2(3k+1) \Rightarrow$
- За целиот број $k_1 = 3k+1$, $3n+2 = 2k_1 \Rightarrow 3n+2$ е парен
- Ова значи дека 3n+2 не е непарен

Докажавме дека ако n не е непарен, тогаш 3n+2 не е непарен, што е еквивалентно со тврдењето дека ако 3n+2 е непарен, тогаш n е непарен

Пример 3.

Нека природниот број $n=ab$. Тогаш $\sqrt{n} \leq a$ или $\sqrt{n} \leq b$.

- Да претпоставиме дека заклучокот не е точен, т.е. дека

  $$\neg(\sqrt{n} \leq a \text{ или } \sqrt{n} \leq b) \Leftrightarrow \sqrt{n} > a \text{ и } \sqrt{n} > b.$$

- Но, ако ова важи тогаш $\sqrt{n}\sqrt{n} > ab \Leftrightarrow n > ab.$

- *Докажавме дека ако заклучокот не е точен, тогаш и претпоставката не е точна, што е доказ на тврдењето.*

Докази со контрадикција

- Посебен тип на *индиректни докази* се доказите со доведување до контрадикција.
- Да разгледаме теорема од облик $P \Rightarrow C$, каде P ги претставува претпоставките $p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n$. Методот со контрадикција се базира на еквиваленцијата

  $$P \rightarrow C \equiv \neg(P \wedge \neg C).$$

  Со други зборови, ако $P \Rightarrow C$ е логички закон, односно е секогаш точно, тогаш $P \wedge \neg C$ е секогаш неточно, односно е контрадикција. Според тоа, ако се додаде негацијата на заклучокот на претпоставките добиваме

  $$p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n \wedge \neg C \Rightarrow \bot$$

Доказ со контрадикција 1 – пример 1

- Докажи дека за секој цел број *n* важи: ако n^3+5 е непарен, тогаш n е парен.

Доказ: Претпоставуваме дека n^3+5 е непарен и n е непарен.

- Нека $n=2k+1$ за некој цел број k (дефиниција за непарни броеви)
- $n^3+5 = (2k+1)^3+5 = 8k^3+12k^2+6k+6 = 2(4k^3+6k^2+3k+3)=2k_1$.
- Добиваме $n^3+5 = 2k_1$, при што $k_1 =4k^3+6k^2+3k+3$ е цел број, што значи дека n^3+5 е парен. Контрадикција!

Доказ со контрадикција 1 – пример 2

- Да се докаже дека: $(h \to i) \wedge (j \to k), (i \vee k) \to s, \neg s \Rightarrow \neg(h \vee j)$

Доказ: Со метод на контрадикција треба да покажеме дека

$(h \to i) \wedge (j \to k), (i \vee k) \to s, \neg s, (h \vee j) \Rightarrow \perp$

1. $(h \to i) \wedge (j \to k)$	претпоставка
2. $h \to i$	од 1. и упростување
3. $j \to k$	од 1. и упростување
4. $\neg h \vee i$	2. и замена на импликација
5. $\neg j \vee k$	3. и замена на импликација
6. $h \vee j$	претпоставка
7. $i \vee j$	4. и 6., резолуција
8. $i \vee k$	5. и 7., резолуција
9. $(i \vee k) \to s$	претпоставка
10. s	модус поненс, од 8. и 9.
11. $\neg s$	претпоставка
12. $\perp$	од 10. и 11.

Доказ со контрадикција 1 – пример 3

- Да се докаже со индиректен доказ (со метод на контрадикција) дека

$$p \rightarrow q, \neg(q \vee r) \Rightarrow \neg p$$

Доказ:

1. p	негација на заклучокот
2. $p \rightarrow q$	претпоставка
3. q	1. и 2. и М.П.
4. $q \vee r$	3. и правило за додавање
5. $\neg(q \vee r)$	претпоставка
6. $\perp$	4. и 5.

Докази со контрадикција 2

- Да претпоставиме дека сакаме да докажеме дека едно тврдење p е точно. Ако покажеме дека $\neg p \rightarrow f$ е точно и f е контрадикција ($f \equiv \perp$), тогаш мора ¬p да е неточно, односно можеме да заклучиме дека p е точно. Прашањето е како да најдеме вакво f?
- Знаеме дека $r \wedge \neg r$ е контрадикција и, според тоа, можеме да покажеме дека p е точно ако најдеме некое r за коешто $\neg p \rightarrow (r \wedge \neg r)$, односно е $\neg p \rightarrow \perp$ е точно.

Празен доказ

- **Сакаме да докажеме дека p → q**

  Ако покажеме дека претпоставката p е неточна, тогаш $p \rightarrow q$ е секогаш точно затоа што $\perp \rightarrow q$ е секогаш T, без оглед на тоа дали q е точно или неточно.

Пример за празен доказ

- **Теорема:** Нека P(n) означува дека “ако n > 1 тогаш n^2> n” е ТОЧНО.

  Да се покаже P(0).

- **Доказ:** За n=0 претпоставката е неточна. Според тоа P(0) е секогаш точно.

Пример 2 за празен доказ

- Триаголникот со страни 5, 2, 2 е правоаголен триаголник
  - Ако триаголникот има страни 5, 2 и 2, тогаш тој триаголник е правоаголен.

Од Питагорина теорема

$5^2 \neq 2^2+2^2$

$2^2 \neq 5^2+2^2$

Не е точно

- **Доказ:**
- 5>2+2, па ваков триаголник не постои.
- Следува дека условот не е запазен,
- Па, целото тврдење е точно.

Тривијален доказ

- **Сакаме да покажеме дека p → q е точно.**

  Ако покажеме дека заклучокот q е секогаш точен , тогаш импликацијата p → q е тривијално точна затоа што p→ T секогаш е точно без оглед на тоа дали p е точно или неточно.

Следува од тавтологијата $q \rightarrow (p \rightarrow q)$

Пример за тривијален доказ

- **Теорема:** (За сите природни броеви *n*) Ако *n* е сума од два прости броја, тогаш *n* е или непарен или парен.
- **Доказ:** Секој цел број *n* е или парен или непарен. Па од тука следува дека заклучокот на теоремата е точен. Оваа импликација е точна тривијално.

Докази по случаи

- Понекогаш не можеме да докажеме некоја теорема користејќи една постапка која важи за сите случаи. Меѓутоа можеме да ја докажеме со разгледување на сите посебни случаи. Овој метод е базиран на логичката еквиваленција

  $$[(p_1 \lor p_2 \lor \ldots \lor p_n) \to q] \equiv [(p_1 \to q) \land (p_2 \to q) \land \ldots \land (p_n \to q)].$$

- Според тоа, за да ја покажеме точноста на тврдењето

  $(p_1 \lor p_2 \lor \ldots \lor p_n) \to q$, е доволно да докажеме дека за секој $i = 1, 2, \ldots, n$, тврдењата $p_i \to q$ се точни.

Доказ по случаи

- Според тоа, за да докажеме дека тврдењето $(p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n) \to q$ е точно, покажуваме дека сите можни случаи $(p_1 \to q)$ и $(p_2 \to q)$ и … и $(p_n \to q)$ се точни.

Доказ по случаи - пример

- Деф. Апсолутна вредност на реален број се дефинира со

$$|x| = \begin{cases} x & \text{ako } x \geq 0 \\ -x & \text{ako } x < 0 \end{cases}$$

- Докажете дека

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$$

  - Притоа $b \neq 0$
- Случаи:
  - Случај 1: $a \geq 0$ и $b > 0$
    - Тогаш $|a| = a$, $|b| = b$
  - Случај 2: $a \geq 0$ и $b < 0$
    - Тогаш $|a| = a$, $|b| = -b$

Случај 3: $a < 0$ и $b > 0$

Тогаш $|a| = -a$, $|b| = b$

Случај 4: $a < 0$ и $b < 0$

Тогаш $|a| = -a$, $|b| = -b$

Доказ по случаи

- Мора да се осигураме дека СИТЕ случаи се испитани
  - Најголема грешка е да се остават некои случаи надвор од доказот!

Доказ по случаи - пример

- Да се докаже дека квадрат на реален број е позитивен број или 0.

Решение:

- Нека реалниот број го означиме со x.
- Ако x е позитивен, тогаш x^2 е позитивен
- Ако x е негативен, тогаш x^2 е позитивен
- Ако x е 0, тогаш $x^2 = 0$.

Докази на еквивалентности

- Како да докажеме дека "$p \leftrightarrow q$", т.е. "p ако и само q"?
  - Доволно е да се докаже "$p \rightarrow q$" и "$q \rightarrow p$".
- Како да докажеме дека $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ се меѓусебно еквивалентни, т.е., $p_1 \leftrightarrow p_2 \leftrightarrow p_3 \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow p_n$?
  - Доволно е да се докаже "$p_1 \rightarrow p_2$" и "$p_2 \rightarrow p_3$" и "$p_3 \rightarrow p_4$" и … и "$p_{n-1} \rightarrow p_n$" и "$p_n \rightarrow p_1$"!

Докази на еквивалентности

- Докажи дека $m^2 = n^2$ акко $m = n$ или $m = -n$.
- Формално запишано: $(m^2 = n^2) \leftrightarrow [(m = n) \vee (m = -n)]$
  - Прво да докажеме дека $[(m = n) \vee (m = -n)] \rightarrow (m^2 = n^2)$
    - Доказ по случаи!
    - Случај 1: Треба да докажеме дека $(m = n) \rightarrow (m^2 = n^2)$
      - Нека $m = n$, тогаш јасно е дека $m^2 = n^2$.
    - Случај 2: Треба да докажеме дека $(m = -n) \rightarrow (m^2 = n^2)$
      - Нека $m = -n$, тогаш $m^2=(-n)^2 = n^2$, па следи $m^2 = n^2$.
  - Потоа да докажеме дека $(m^2 = n^2) \rightarrow [(m = n)\vee(m = -n)]$
    - Одземаме n^2 од двете страни на $m^2 = n^2$, и добиваме $m^2 - n^2 = 0$.
    - Разложуваме $(m + n)(m - n) = 0$.

      Барем еден од множителите од левата страна треба да е нула.
    - Значи $m + n = 0$ ($m = -n$) или $m - n = 0$ $(m = n)$

Што не е точно во доказот?

- Докажи дека 1 = 2.

"Доказ": Нека a и b се еднакви позитивни цели броеви.

1. $a = b$
2. $a^2 = ab$
3. $a^2 - b^2 = ab - b^2$
4. $(a-b)(a+b) = b(a-b)$
5. $a+b = b$
6. $2b = b$
7. $2 = 1$

Што не е точно во доказот?

- Ако n^2 е позитивен број, тогаш n е позитивен број.

"Доказ": Нека n^2 е позитивен број. Бидејќи условната реченица "ако n е позитивен број, тогаш n^2 е позитивен број" е точно, следува дека n е позитивен број.

(од точноста на q и $p \rightarrow q$ не следува точноста на p)

Што не е точно во доказот?

- Ако n не е позитивен број, тогаш n^2 не е позитивен број.

“Доказ“: Нека n не е позитивен број. Од точноста на “ако n е позитивен број, тогаш n^2 е позитивен број“ следува дека n^2 не е позитивен број.

Од точноста на $\neg p$ и $p \rightarrow q$ не следува точноста на $\neg q$.

Други методи за докажување

- ***Директни, индиректни, празни*** и ***тривијални докази*** на тврдењата од облик $p \to q$.
- ***Доказ со контрадикција*** на кое било тврдење.
- Следно: ***Конструктивни*** и ***неконструктивни егзистенцијални докази***.

Егзистенцијални докази

- Доказ на тврдење од облик $\exists x\, P(x)$ се нарекува ***егзистенцијален доказ***.
- Ако доказот покажува како се наоѓа или конструира специјален елемент *a* така што *P*(*a*) е точно, тогаш тоа е ***конструктивен*** доказ.
- Инаку тој е ***неконструктивен***.

Конструктивен егзистенцијален доказ

- **Теорема:** Постои позитивен цел број *n* кој што е сума од два перфектни кубови на два различни начини:
  - Еднакво со $j^3 + k^3$ и $l^3 + m^3$ каде j, k, l, m се позитивни цели броеви и $\{j, k\} \neq \{l, m\}$
- **Доказ:**
- $1729 = 10^3 + 9^3 = 12^3 + 1^3$

Конструктивен егзистенцијален доказ

- Докажи дека постои квадрат од некој број кој е еднаков од сума на два квадрати од броеви

  Доказ: $3^2 + 4^2 = 5^2$

- Докажи дека постои куб од некој број кој е еднаков од сума на три куба од броеви

  Доказ: $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$

Конструктивен егзистенцијален доказ

- Винарот има сад со 8 литри вино и два празни сада со 5 и 3 литри. Дали може да му продаде на купувачот 4 литри вино?

- Од 8те го полни садот од 5 литри, а од него го полни садот од 3 литри. Во садот од 5 литри останувaат 2 литри.
- Виното од садот со 3 литри се враќа во садот со 8 литри
- 2та литри од садот со 5 литри се ставаат во садот од 3 литри
- Се насипуваат 5 l од садот од 8 (кој сега има 6) во тој со 5
- Од садот со 5 l се дополнува тој со 3 (1 l) -> остануваат 4

Неконструктивен егзистенцијален доказ

- Докажи дека постојат ирационални броеви x и y такви што x^y е рационален.

Доказ: Да земеме *a*= $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$.

- Ако *a* е рационален, тогаш $x = \sqrt{2}$ и $y = \sqrt{2}$.
- Ако *a* не е рационален, тогаш x=a= $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ и $y = \sqrt{2}$. Имаме,

$$x^y = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$$

е рационален број кој е од обликот кој го бараме.

Докази за единственост

- Постоење: Покажи дека постои елемент *x* со бараното својство.
- Единственост: Може да се покаже на два начина:
  1. Покажи дека ако $y \neq x$, тогаш y го нема бараното својство, или
  2. Ако x, y го имаат бараното својство, тогаш $y = x$.

Докази за единственост - пример

- Равенката 5x+3=a има единствено решение
- Постоење
  - x=(a-3)/5
- Единственост
  - Ако има два такви броја x и y, тогаш 5x+3=a и 5y+3=a.
  - Значи, 5x+3= 5y+3, од каде што следува дека x = y.
    - Решението е единствено!

Контрапримери

- За дадено тврдење кое подразбира универзален квантификатор, да се најде пример кога не е точно.

- Ова е докажување на негација на тврдење во кое има универзален квантификатор, со наоѓање на контрапример

- Секој позитивен број е квадрат од друг цел број
  - Квадратен корен од 5 е 2.236, што не е цел број

Контрапримери

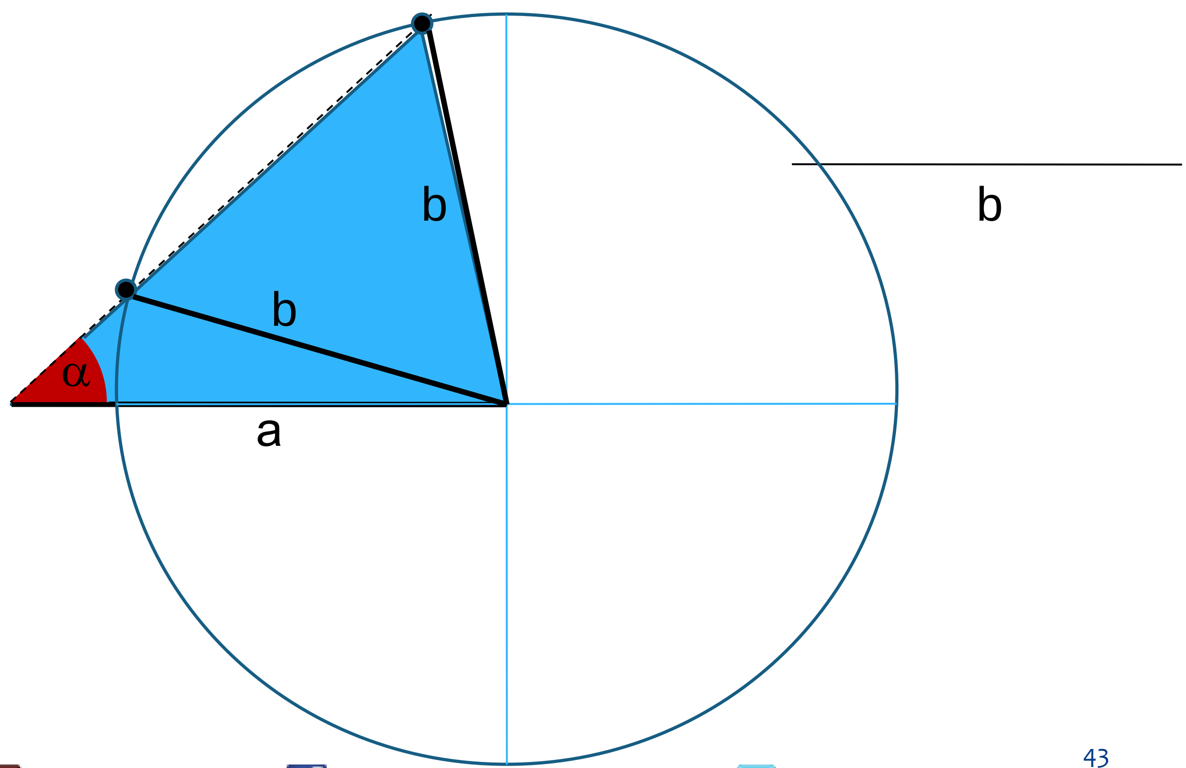
- Дали важи дека сите триаголници со страни a и b и агол $0° < \alpha < 180°$, кој лежи спроти страната b се складни?

Контрапримери

- Дали важи дека за сите триаголници со страни a и b и агол $0° < \alpha < 180°$, кој лежи спроти страната b се складни?

За вака избрани должини постојат два нескладни триаголника

НЕ ВАЖИ



Што не е точно во доказот?

- Ако n^2 е парен број, тогаш n е парен број.

"Доказ": Нека n^2 е парен број. Тогаш $n^2 = 2k$ за некој цел број k. Нека $n = 2s$ за некој цел број s. Тогаш n е парен број.