Множества

Ознаки:

<u>Множество</u> - поим што не се дефинира (интуитивно се подразбира).

Ознаки за множества: A, B, C, …

Ознаки за елементи на множества: a, b, c, …

$x\in A$ – "елементот x припаѓа на множеството A"

$x\notin A$ – "елементот x не припаѓа на множеството A".

$\varnothing$ - множество што не содржи елементи,
$\varnothing \subseteq A$, каде A е произволно множество.
$\varnothing\neq\{\varnothing\}$.

P(A) – партитивно множество (булеан)
Множество од сите подмножества од A.
$P(A)=\{X|\ X \subseteq A\}$.

$|A|$- број на елементи на множеството A.
Ако $|A|=n$, тогаш $|P(A)|=2^n$.

Дефиниции:

1. $A\subseteq B$ акко $(\forall x)\ (x\in A \to x\in B)$.
2. $A\subset B$ акко $A\subseteq B$ и $A\neq B$, т.е. $A\subseteq B$ и $(\exists x)\ (x\in B \wedge x\notin A)$.
3. $A=B$ акко $A\subseteq B$и $B\subseteq A$ т.е. $(\forall x)\ (x\in A \leftrightarrow x\in B)$.

Операциите со множества:

1. $A\cap B=\{x|\ x\in A \wedge x\in B\}$- пресек.
2. $A\cup B=\{x|\ x\in A \vee x\in B\}$- унија.
3. $A-B=\{x|\ x\in A \wedge x\notin B\}$- разлика.
4. $A\oplus B=(A\cup B)-(A\cap B) = (A-B)\cup(B-A)$ – симетрична разлика.
5. Ако U е универзално множество, тогаш
   $\overline{A} = \{x|\ x\in U \wedge x\notin A\}= U-A$ – комплемент.

Користејќи ја дефиницијата за комплемент на множество, дефинициите за разлика и симетрична разлика може да се запишат на следниов начин:

$A-B=A\cap \overline{B}$

$A\oplus B= (A\cap \overline{B})\cup(B\cap \overline{A})$.

Задача 1: Нека $A=\{a,\{b\},c\}$. Кое од следните тврдења се точни:

а) $a\in A$ б) $a\subseteq A$ в) $\{a\}\in A$ г) $\{a\}\subseteq A$ д) $b \in A$
ѓ) $\{b\}\in A$ е) $\{b\}\subseteq A$ ж) $\{\{b\}\}\in A$ з) $\{\{b\}\}\subseteq A$

Решение: Точни се тврдењата под а, г, ѓ, з.

Задача 2: Кои тврдења се вистинити за A, B и C:

а) Ако $A\in B$ и $B\in C$, тогаш $A\in C$.
б) Ако $A\subseteq B$ и $B\in C$, тогаш $A\subseteq C$.
в) Ако $A\subseteq B$ и $B\in C$, тогаш $A\in C$.
г) Ако $A\neq B$ и $B\neq C$, тогаш $A\neq C$.

Решение:

а) Не.
$A=\{1\}$, $B=\{\{1\}, a\}$, $C=\{\{\{1\}, a\}, 3\}$, тогаш $A\in B$ и $B\in C$, но $A\notin C$.
б) Не.
$A=\{1, 2\}$, $B=\{1, 2, 3\}$, $C=\{\{1, 2, 3\}, 1\}$, тогаш $A\subseteq B$ и $B\in C$, но $A\not\subset C$.
в) Не.
$A=\{1, 2\}$, $B=\{1, 2, 3\}$, $C=\{\{1, 2, 3\}, 1\}$, тогаш $A\subseteq B$ и $B \in C$, но $A\notin C$.
г) Не,
$A=\{1, 2\}$, $B=\{1, 2, 3\}$, $C=\{1, 2\}$, тогаш $A\neq B$ и $B\neq C$, но $A=C$

Задача 3: Да се напишат еквивалентни услови со дадените со помош на множества:

а) $(\forall x)\ (x\notin A\leftrightarrow x\notin B)$
б) $(\forall x)\ (x\in A\rightarrow x\notin B)$
в) $(\exists x\in M)\ x\in S$.
г) $(\forall x\in M)\ x\notin S$
д) $x\notin B \rightarrow x\notin A$.

Решение:

а) $(\forall x)\ (x\notin A\leftrightarrow x\notin B) \Leftrightarrow (\forall x)\ (x\notin A\rightarrow x\notin B \wedge x\notin B\rightarrow x\notin A) \Leftrightarrow$
$(\forall x)\ (\neg\ (x\notin B) \rightarrow \neg(x\notin A)\ \wedge \neg\ (x\notin A) \rightarrow \neg(x\notin B)) \Leftrightarrow$
$(\forall x)\ ((x\in B) \rightarrow (x\in A)\ \wedge (x\in A) \rightarrow (x\in B)) \Leftrightarrow$
$(\forall x)\ ((x\in A) \leftrightarrow (x\in B)) \Leftrightarrow A=B$.

б) $(\forall x)\ (x\in A\rightarrow x\notin B) \Leftrightarrow (\forall x)(\neg(\ x\in A) \vee (x\notin B)) \Leftrightarrow$
$(\forall x\ )(\ (x\notin A) \vee (x\notin B))\ ) \Leftrightarrow (\forall x)(\neg((\ x\in A)\ \wedge (x\in B))) \Leftrightarrow$
$(\forall x\ )(\ \neg(\ x\in A\cap B)) \Leftrightarrow A\cap B=\varnothing$.

в) $(\exists x\in M)\ x\in S \Leftrightarrow \{\ x\in M|\ x\in S\ \}\neq\varnothing \Leftrightarrow$
$\{x|\ x\in M\ \wedge\ x\in S\ \}\neq\varnothing \Leftrightarrow M\cap S\neq\varnothing$.

г) $(\forall x\in M)\ x\notin S \Leftrightarrow \neg\ (\exists x\in M)\ x\in S \Leftrightarrow$
$\neg\ M\cap S\neq\varnothing \Leftrightarrow M\cap S=\varnothing$.

д) $x\notin B\rightarrow x\notin A\Leftrightarrow \neg(\ x\notin A) \rightarrow \neg\ (x\notin B) \Leftrightarrow$
$((x\in A) \rightarrow (x\in B)) \Leftrightarrow A\subseteq B$.

Задача 4: Докажи дека за пресек на множества важи асоцијативниот закон:

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

Решение:

$x\in(A\cap B)\cap C \Leftrightarrow x\in A\cap B \wedge x\in C \Leftrightarrow (x\in A \wedge x\in B)\wedge x\in C \Leftrightarrow$
$x\in A \wedge (x\in B \wedge x\in C) \Leftrightarrow x\in A \wedge x\in B\cap C \Leftrightarrow x\in A\cap(B\cap C)$.

Задача 5: Докажи дека е точно:

а) $\overline{A\cap B} = \overline{A}\cup\overline{B}$
б) $\overline{A\cup B} = \overline{A}\cap\overline{B}$.

Решение:

а) $x\in\overline{A\cap B} \Leftrightarrow x\in U \wedge x\notin A\cap B \Leftrightarrow x\in U \wedge \neg(x\in A\cap B) \Leftrightarrow$
$x\in U \wedge \neg(x\in A \wedge x\in B)) \Leftrightarrow x\in U \wedge (\neg x\in A \vee \neg x\in B) \Leftrightarrow$
$(x\in U \wedge \neg x\in A) \vee (x\in U \wedge \neg x\in B) \Leftrightarrow (x\in U \wedge x\notin A) \vee (x\in U \wedge \neg x\notin B) \Leftrightarrow$
$x\in\overline{A} \vee x\in\overline{B} \Leftrightarrow x\in\overline{A}\cup\overline{B}$.

б) $x\in\overline{A\cup B} \Leftrightarrow x\in U \wedge x\notin A\cup B \Leftrightarrow x\in U \wedge \neg(x\in A\cup B) \Leftrightarrow$
$x\in U \wedge \neg(x\in A \vee x\in B)) \Leftrightarrow x\in U \wedge (\neg x\in A \wedge \neg x\in B) \Leftrightarrow$
$(x\in U \wedge \neg x\in A) \wedge (x\in U \wedge \neg x\in B) \Leftrightarrow (x\in U \wedge x\notin A) \wedge (x\in U \wedge \neg x\notin B) \Leftrightarrow$
$x\in\overline{A} \wedge x\in\overline{B} \Leftrightarrow x\in\overline{A}\cap\overline{B}$.

Задача 6: Докажи дека: $A\cup(A\cap B)=A$.

Решение:

$x\in A\cup(A\cap B) \Leftrightarrow x\in A \vee x\in(A\cap B) \Leftrightarrow x\in A \vee (x\in A \wedge x\in B) \Leftrightarrow x\in A$.

Задача 7: Докажи дека: $A\cup B= B \Leftrightarrow A\subseteq B$.

Решение:

$\Leftarrow$: Нека $A\subseteq B \Rightarrow (\forall x)(x\in A\Rightarrow x\in B)$.
Ако $x\in A\cup B \Rightarrow x\in A \vee x\in B \Rightarrow x\in B \vee x\in B \Rightarrow x\in B$. Значи, $A\cup B\subseteq B$. Јасно е дека $B\subseteq A\cup B$, па $A\cup B= B$.

$\Rightarrow$: Нека $A\cup B= B$, тогаш $A\subseteq A\cup B= B\Rightarrow A\subseteq B$.

Задача 8: Докажи дека следниве услови се еквивалентни:

1. $A \subseteq B$
2. $A-B=\varnothing$
3. $\overline{A} \cup B=U$
4. $A \cap \overline{B}=\varnothing$.

Решение:

1⇔2: $A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B) \Leftrightarrow$ (замена на импликација)
$(\forall x)(x \notin A \vee x \in B) \Leftrightarrow$ (Де Морганов)
$(\forall x) \neg(x \in A \wedge x \notin B) \Leftrightarrow (\forall x) \neg(x \in A-B)$
$\Leftrightarrow (\forall x)(x \notin A-B) \Leftrightarrow A-B=\varnothing$.

2⇔4: $A-B=\varnothing \Leftrightarrow \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}=\varnothing \Leftrightarrow$
$\{x \mid x \in A \wedge x \in \overline{B}\}=\varnothing \Leftrightarrow A \cap \overline{B}=\varnothing$.

3⇔4: $\overline{A} \cup B=U \Leftrightarrow \overline{\overline{A} \cup B}=\overline{U} \Leftrightarrow$
$\overline{\overline{A}} \cap \overline{B}=\varnothing \Leftrightarrow A \cap \overline{B}=\varnothing$.

Задача 9: Докажи дека:

а) $A-B=A \Leftrightarrow A \cap B=\varnothing$
б) $A \subseteq B \Leftrightarrow A=B-(B-A)$.

Решение:

а) $A-B=A \cap \overline{B}=A \Leftrightarrow \overline{A \cap \overline{B}}=\overline{A} \Leftrightarrow$
$\overline{A} \cup \overline{\overline{B}}=\overline{A} \Leftrightarrow \overline{A} \cup B=\overline{A} \Leftrightarrow$ (задача 7)
$B \subseteq \overline{A} \Leftrightarrow$ (задача 8) $B \cap \overline{\overline{A}}=\varnothing \Leftrightarrow$
$B \cap A=\varnothing$.

б) $A=B-(B-A) \Leftrightarrow A=B \cap \overline{B \cap \overline{A}} \Leftrightarrow A=B \cap (\overline{B} \cup A) \Leftrightarrow$
$A=(B \cap \overline{B}) \cup (B \cap A)=\varnothing \cup (B \cap A)=B \cap A \Leftrightarrow$
$\overline{A}=\overline{B \cap A} \Leftrightarrow \overline{A}=\overline{B} \cup \overline{A} \Leftrightarrow$
$\overline{B} \subseteq \overline{A} \Leftrightarrow A \subseteq B$.

Задача 10: Да се докажат следниве равенства:

а) $A-(B \cap C)=(A-B) \cup (A-C)$
б) $A-(A-B)=A \cap B$
в) $(A-B)-C=(A-C)-(B-C)=A-(B \cup C)$
г) $A \cap (B-C)=(A \cap B)-(A \cap C)=(A \cap B)-C$.

Решение:

а) $A \setminus (B \cap C) = A \cap \overline{B \cap C} = A \cap (\overline{B} \cup \overline{C}) =$
$(A \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{C}) = (A-B) \cup (A-C).$

б) $A-(A-B) = A \cap \overline{A \cap \overline{B}} = A \cap (\overline{A} \cup B) =$
$(A \cap \overline{A}) \cup (A \cap B) = \varnothing \cup (A \cap B) = A \cap B.$

в) $(A-C)-(B-C) = (A \cap \overline{C}) \cap \overline{B \cap \overline{C}} =$
$(A \cap \overline{C}) \cap (\overline{B} \cup C) = A \cap (\overline{C} \cap (\overline{B} \cup C)) =$
$A \cap ((\overline{C} \cap \overline{B}) \cup (\overline{C} \cap C)) = A \cap (\overline{C} \cap \overline{B}) =$
$A \cap \overline{B \cup C} = A-(B \cup C).$

$(A-C)-(B-C) = A \cap (\overline{C} \cap \overline{B}) =$
$A \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) = (A \cap \overline{B}) \cap \overline{C} = (A-B)-C.$

г) $(A \cap B) - (A \cap C) = (A \cap B) \cap \overline{A \cap C} =$
$(A \cap B) \cap (\overline{A} \cup \overline{C}) = (A \cap B \cap \overline{A}) \cup (A \cap B \cap \overline{C}) =$
$\varnothing \cup (A \cap B \cap \overline{C}) = A \cap B \cap \overline{C} = (A \cap B)-C.$

$(A \cap B) - (A \cap C) = A \cap B \cap \overline{C} = A \cap (B \cap \overline{C}) = A \cap (B-C).$

Задача 11: Докажи дека: $A \oplus B = (A-B) \cup (B-A)$.

Решение:

$A \oplus B = (A \cup B)-(A \cap B) = (A \cup B) \cap \overline{A \cap B} = (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) =$
$(A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \cup (B \cap \overline{B}) =$
$\varnothing \cup (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \cup \varnothing = (A-B) \cup (B-A).$

Задача 12: Докажи дека:

а) $A \cup B = \varnothing$ акко $A = \varnothing$ и $B = \varnothing$
б) $A=B$ акко $A \oplus B = \varnothing$.

Решение:

а) $\Leftarrow$**:** Ако $A = \varnothing$ и $B = \varnothing$, јасно дека и $A \cup B = \varnothing$

$\Rightarrow$**:** Нека $A \cup B = \varnothing$, тогаш од законот за апсорпција
$A = A \cap (A \cup B) = A \cap \varnothing = \varnothing$.

б) $A \oplus B = \varnothing \Leftrightarrow (A-B) \cup (B-A) = \varnothing \Leftrightarrow (A-B) = \varnothing$ и $(B-A) = \varnothing \Leftrightarrow$
$(A \cap \overline{B}) = \varnothing$ и $(B \cap \overline{A}) = \varnothing \Leftrightarrow A \subseteq \overline{\overline{B}}$ и $B \subseteq \overline{\overline{A}} \Leftrightarrow$
$A \subseteq B$ и $B \subseteq A \Leftrightarrow A=B$.

Задача 13: Докажи дека:

а) $(A\cup B)-C=(A-C)\cup(B-C)$
б) $A\oplus(A\cup B)=B-A$
в) $(A\cap B)-C=(A-C)\cap(B-C)$.

Решение:

а) $(A\cup B)-C=(A\cup B)\cap\overline{C}=(A\cap\overline{C})\cup(B\cap\overline{C})=(A-C)\cup(B-C)$.

б) $A\oplus(A\cup B)=(A\cup(A\cup B))-(A\cap(A\cup B))=(A\cup B)-A=$
$(A-A)\cup(B-A)=\varnothing\cup(B-A)=B-A$.

в) $(A\cap B)-C=(A\cap B)\cap\overline{C}=(A\cap\overline{C})\cap(B\cap\overline{C})=(A-C)\cap(B-C)$.

Задача 14: Дали важи:

a) $A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$
b) $A\cup(B\oplus C)=(A\cup B)\oplus(A\cup C)$.

Решение:

a) Да.
$(A\cap B)\oplus(A\cap C)=((A\cap B)-(A\cap C))\cup((A\cap C)-(A\cap B))=$
$(A\cap(B-C))\cup(A\cap(C-B))=A\cap((B-C)\cup(C-B))=A\cap(B\oplus C)$.

b) Не.
$A=\{1,2,3\}$, $B=\{2,3,4\}$, $C=\{2,4,5\}$
$B\oplus C=\{3,5\}$, $A\cup(B\oplus C)=\{1,2,3\}\cup\{3,5\}=\{1,2,3,5\}$
$(A\cup B)\oplus(A\cup C)=\{1,2,3,4\}\oplus\{1,2,3,4,5\}=\{5\}$

Задача 15: Докажи дека:

а) $B(X)\cap B(Y)=B(X\cap Y)$
б) $B(X)\cup B(Y)\subseteq B(X\cup Y)$.

Решение:

а) $A\in B(X)\cap B(Y)\Leftrightarrow A\in B(X)\wedge A\in B(Y)\Leftrightarrow$
$A\subseteq X\wedge A\subseteq Y\Leftrightarrow A\subseteq X\cap Y\Leftrightarrow A\in B(X\cap Y)$.

б) $A\in B(X)\cup B(Y)\Leftrightarrow A\in B(X)\vee A\in B(Y)\Leftrightarrow$
$A\subseteq X\vee A\subseteq Y\Rightarrow$ (обратното не важи) $A\subseteq X\cup Y\Leftrightarrow A\in B(X\cup Y)$.

Фамилии од множества

Ознаки:

Фамилија на множества означуваме со: $\{A_i | i\in I\}$, $(A_i | i\in I)$, каде што I е индексно множество.

Дефиниции:

$$x\in \bigcap_{i\in I} A_i \Leftrightarrow (\forall i\in I)\ x\in A_i$$

$$x\in \bigcup_{i\in I} A_i \Leftrightarrow (\exists i\in I)\ x\in A_i$$

Нека $I=\{1,2, ..., n\}$, $x\in \prod_{i=1}^{n} A_i \Leftrightarrow x=(x_1,x_2,...,x_n)$, $x_i\in A_i$ за $i=1,2,...n$.

Задача 1: Докажи дека: (Обопштени асоцијативни закони)

а) $A\cap(\bigcap_i B_i)=\bigcap_i(A\cap B_i)$

б) $A\cup(\bigcup_i B_i)=\bigcup_i(A\cup B_i)$

Решение:

а) $x\in A\cap(\bigcap_i B_i) \Leftrightarrow x\in A \wedge x\in \bigcap_i B_i \Leftrightarrow x\in A \wedge (\forall i)\ x\in B_i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\forall i)\ x\in A \wedge x\in B_i \Leftrightarrow (\forall i)\ x\in A \cap B_i \Leftrightarrow x\in \bigcap_i(A\cap B_i)$.

б) $x\in A\cup(\bigcup_i B_i) \Leftrightarrow x\in A \vee x\in \bigcup_i B_i \Leftrightarrow x\in A \vee (\exists i)\ x\in B_i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\exists i)\ x\in A \vee x\in B_i \Leftrightarrow (\exists i)\ x\in A \cup B_i \Leftrightarrow x\in \bigcup_i(A\cup B_i)$.

Задача 2: Докажи дека: (Обопштени дистрибутивни закони)

а) $A\cap(\bigcup_i B_i)=\bigcup_i(A\cap B_i)$

б) $A\cup(\bigcap_i B_i)=\bigcap_i(A\cup B_i)$

Решение:

а) $x\in A\cap(\bigcup_i B_i) \Leftrightarrow x\in A \wedge x\in \bigcup_i B_i \Leftrightarrow x\in A \wedge (\exists i)\ x\in B_i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\exists i)\ x\in A \wedge x\in B_i \Leftrightarrow (\exists i)\ x\in A \cap B_i \Leftrightarrow x\in \bigcup_i(A\cap B_i)$.

б) $x\in A\cup(\bigcap_i B_i) \Leftrightarrow x\in A \vee x\in \bigcap_i B_i \Leftrightarrow x\in A \vee (\forall i)\ x\in B_i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\forall i)\ x\in A \vee x\in B_i \Leftrightarrow (\forall i)\ x\in A \cup B_i \Leftrightarrow x\in \bigcap_i (A\cup B_i)$.

Задача 3: Докажи дека: (Обопштени Де морганови закони)

а) $\overline{\bigcap_i A_i} = \bigcup_i \overline{A_i}$

б) $\overline{\bigcup_i A_i} = \bigcap_i \overline{A_i}$.

Решение:

а) $x\in \overline{\bigcap_i A_i} \Leftrightarrow x\notin \bigcap_i A_i \Leftrightarrow \neg(\ x\in \bigcap_i A_i\ ) \Leftrightarrow \neg((\forall i)\ x\in A_i) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\exists i)\ \neg(x\in A_i) \Leftrightarrow (\exists i)\ x\notin A_i \Leftrightarrow (\exists i)\ x\in \overline{A_i} \Leftrightarrow x\in \bigcup_i \overline{A_i}$.

б) $x\in \overline{\bigcup_i A_i} \Leftrightarrow x\notin \bigcup_i A_i \Leftrightarrow \neg(\ x\in \bigcup_i A_i\ ) \Leftrightarrow \neg((\exists i)\ x\in A_i) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\forall i)\ \neg(x\in A_i) \Leftrightarrow (\forall i)\ x\notin A_i \Leftrightarrow (\forall i)\ x\in \overline{A_i} \Leftrightarrow x\in \bigcap_i \overline{A_i}$.

Задача 4: Нека $\{A_{ij}\ |(i,j)\ I\times J\}$ е фамилија од множества. Докажи дека:

$\bigcup_j (\bigcap_i A_{ij}) \subseteq \bigcap_i (\bigcup_j A_{ij})$. (равенството не важи во општ случај)

Решение:

$x\in \bigcup_j (\bigcap_i A_{ij}) \Leftrightarrow (\exists j)\ x\in \bigcap_i A_{ij} \Leftrightarrow (\exists j)((\forall i)\ x\in A_{ij}) \Rightarrow$

$\Rightarrow (\forall i)((\exists j)\ x\in A_{ij}) \Leftrightarrow (\forall i)\ x\in \bigcup_j A_{ij} \Leftrightarrow x\in \bigcap_i (\bigcup_j A_{ij})$.

Задача 5: Докажи дека:

$(\bigcup_i A_i)\setminus(\bigcup_i B_i) \subseteq (\bigcup_i A_i \setminus B_i)$.

Решение:

$x\in (\bigcup_i A_i)\setminus(\bigcup_i B_i) \Leftrightarrow x\in \bigcup_i A_i \wedge x\notin (\bigcup_i B_i) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\exists i)x\in A_i \wedge \neg(x\in (\bigcup_i B_i)) \Leftrightarrow (\exists i)x\in A_i \wedge \neg((\exists i)\ x\in B_i) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\exists i)x\in A_i \wedge((\forall i)\ \neg x\in B_i) \Rightarrow (\exists i)(\ x\in A_i \wedge x\notin B_i) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\exists i)(\ x\in A_i / B_i) \Leftrightarrow x\in \bigcup_i A_i \setminus B_i$.

Задача 6: Докажи дека:

а) $(\bigcap_k A_k) \times (\bigcap_k B_k) = \bigcap_k (A_k \times B_k)$

б) $(\bigcup_k A_k) \times (\bigcup_k B_k) \supseteq \bigcup_k (A_k \times B_k)$.

Решение:

а) $(x,y) \in (\bigcap_k A_k) \times (\bigcap_k B_k) \Leftrightarrow x \in (\bigcap_k A_k) \wedge y \in (\bigcap_k B_k) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\forall k) x \in A_k \wedge (\forall k) y \in B_k \Leftrightarrow (\forall k)\ x \in A_k \wedge y \in B_k \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\forall k)(x,y) \in A_k \times B_k \Leftrightarrow (x,y) \in \bigcap_k (A_k \times B_k)$.

б) $(x,y) \in (\bigcup_k A_k) \times (\bigcup_k B_k) \Leftrightarrow x \in (\bigcup_k A_k) \wedge y \in (\bigcup_k B_k) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\exists k) x \in A_k \wedge (\exists k) y \in B_k \Leftarrow (\exists k)\ x \in A_k \wedge y \in B_k \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\exists k)(x,y) \in A_k \times B_k \Leftrightarrow\ (x,y) \in \bigcup_k (A_k \times B_k)$.