Дискретна математика 2022/2023

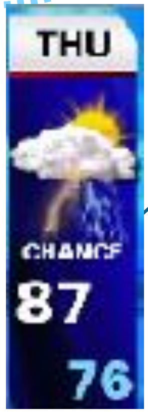
Дискретна математика

Предикати и квантификатори

Вовед

исказ

Во четврток ќе врне



Оваа недела ќе врне

Се специфицира одредено множество денови

Цела недела ќе врне

Вовед

- Исказната логика не е доволна и адекватна за во целост да го изрази значењето на математичкиот и природниот јазик.
- Пример: Да претпоставиме дека знаеме дека *секој компјутер кој е поврзан со универзитетската мрежа работи коректно*.
  - Со ниту едно правило од исказната логика не можеме да заклучиме дали „А1 работи коректно“ (каде А1 е некој компјутер од универзитетската мрежа) е точно или не.
  - Ниту дали: „Постои компјутер поврзан со универзитетската мрежа кој не работи коректно“ е точно или не.

Предикатна логика

Примери

- x>3
- x=y+1
- Компјутерот x работи коректно.

Ниту точни, ниту неточни.

- x е поголемо од 3 има два дела:
  - x – променлива, субјектот за кој се работи,
  - е поголемо од 3 – предикат се однесува на особината која ја има субјектот.
  - P(x) – исказна функција
    - Вредноста на исказната функција за x.

Примери

- P(x): x>3. Најди ја вредноста за x=2 и x=5.
  - $P(2) \equiv \bot$
  - $P(5) \equiv T$
- P(x): Компјутерот x нема вирус. Најди P(A1) и P(A4)
  - Ако 20-те компјутери во лабораторијата се обележани од A1 до A20 и знаеме дека само A1 и A2 имаат вирус.
  - $P(A1) \equiv \bot$, $P(A4) \equiv T$
- P(x, y): x=y+1. Најди ја вредноста за x=2, y=2 и x=5, y=4.
  - $P(2, 2) \equiv \bot$
  - $P(5, 4) \equiv T$

Исказна функција

- Тврдење во кое се вклучени една или повеќе променливи и кое станува исказ со секоја замена на конкретни вредности на променливите, се нарекува **исказна функција.**
- Исказна функција со n променливи $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ја бележиме со со

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

  и се нарекува исказна фукција P над n-торката $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
- Уште се нарекува **n-арен предикат.**

Примери на исказни функции

- Функции со повеќе променливи:
  - $P(x,y) : x + y = 0$
    - $P(1,2)$ е неточно, $P(1,-1)$ е точно
  - $P(x,y,z) : x + y = z$
    - $P(3,4,5)$ е неточно, $P(1,2,3)$ е точно
  - $P(x_1,x_2,x_3 \ldots x_n) = \ldots$

Состав на исказна функција

$$P(x) : \underbrace{x + 5 > x}_{\text{предикат}}$$

променлива

Решение на исказна функција

Променливата во исказната функција може да зема вредности од дадено множество.

- Тоа може да е специфицирано, но може и да се подразбира од контекстот. Обично се нарекува **универзум за кој се говори** или **домен** на променливата.

Решение на исказната функција се сите вредности од доменот за кои важи дека кога тие ќе се заменат на местото на променливата, исказната функција ќе стане точно тврдење.

Пример: Решение на исказната функција $P(x)$: $|x|+1=3$ е множеството $\{2, -2\}$.

Решение на исказна функција

- Што е решение на исказната функција $P(x): x > 3 \rightarrow 2|x$, ако доменот е {1, 2, 3, 4, 5, 6}?
  - $1>3 \rightarrow 2|1 \equiv \perp \rightarrow \perp \equiv T$
  - $2>3 \rightarrow 2|2 \equiv \perp \rightarrow T \equiv T$
  - $3>3 \rightarrow 2|3 \equiv \perp \rightarrow \perp \equiv T$
  - $4>3 \rightarrow 2|4 \equiv T \rightarrow T \equiv T$
  - $5>3 \rightarrow 2|5 \equiv T \rightarrow \perp \equiv \perp$
  - $6>3 \rightarrow 2|6 \equiv T \rightarrow T \equiv T$

Множеството решенија е {1, 2, 3, 4, 6}.

Квантификатори

Кога на променливата *x* во една исказна функција P(*x*) ќе и' се даде некоја конкретна вредност *a*, таа станува исказ P(*a*).

Исказна функција може да стане исказ и со **квантифицирање** - со зборовите: за секој, некој, постои, никој и сл.

Квантификаторите обезбедуваат начин кој овозможува да квантифицираме (изброиме) колку објекти од универзумот за кој говориме го задоволуваат даденото својство.

Два типа на квантификатори

- Универзален,
- Егзистенционален.

Универзален квантификатор

Цела недела
ќе врне

Секој ден од
оваа недела ќе
врне

За секој ден во
оваа недела, тој
ден ќе врне

Универзален квантификатор

Многу математички тврдења велат дека некое својство е точно за сите елементи во некое множество, кое го нарекуваме домен.

Универзалната квантификација на некоја исказна функција P(x) е тврдењето дека P(x) важи за сите x во дадениот домен.

- **Доменот треба да се специфицира.**

Дефиниција

Универзалната квантификација на P(x) е исказот
"P(x) за секој x од доменот."

Се бележи со $\forall x\, P(x)$.

$\forall$ се нарекува **универзален квантификатор.**

Се чита: "за секое x P(x)", "за сите x P(x)" или "за секој x P(x)".

Еден елемент од доменот за кој P(x) не е точно, се нарекува контрапример за $\forall x\, P(x)$.

Примери

Пример. P(x): x+1 > x. Дали е точно $\forall x\, P(x)$, ако x е реален број?

- Да.

Пример. P(x): x+1 > |x|. Дали е точно $\forall x\, P(x)$, ако x е реален број?

- Не, не важи за x=-1.

Врска меѓу универзалниот квантификатор и множеството решенија на исказната функција

- Ако $\forall x\ P(x)$ е точно, тогаш множеството решенија на исказната функција $P(x)$ е целиот домен.
- Ако $\forall x\ P(x)$ не е точно, тогаш постои барем еден елемент од доменот на $P(x)$ кој не е во множеството решенија на исказната функција.
- Забелешка: ако доменот е празно можество, тогаш исказот $\forall x\ P(x)$ е точен за која било исказна функција $P(x)$.
- Ако сите елементи од доменот се излистаат, $x_1, x_2, \dots, x_n$, тогаш $\forall x\ P(x)$ е конјункцијата:

$$P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \dots \wedge P(x_n).$$

Други начини на искажување на универзалниот квантификатор

Универзалниот квантификатор освен со “за секој”, “за секое” или “за сите”, може да се искаже и на многу други начини:

- “за кој било”, “за кое било”, “кој било”, “за кое и да било”…
  - За кој било природен број важи дека тој е помал од неговиот следбеник.
- “сите од”, “секој од”, “секој”…
  - Секој студент има индекс.
- “за произволно”…
  - За произволен природен број важи дека е поголем од 0.
- Забелешка: Ако P(x) е негација на некое тврдење, тогаш се користат сосема други зборови, за кои ќе зборуваме подоцна.

Примери

- Дали е точно $\forall x, x^2 > 0$?
  - Не, за $x=0$ не е точно дека $0^2 > 0$
- Дали е точно $\forall x, x^2 < 10$ ако доменот се сите природни броеви стриктно помали од 4?
  - Да.
- Што значи $\forall x\ P(x)$, ако x е компјутер на факултетот, а P(x) е „компјутерот x е вклучен на интернет“?
  - Сите компјутери на факултетот се вклучени на интернет.

Егзистенцијален квантификатор

Оваа недела ќе врне

Некој ден од оваа недела ќе врне

Постои ден од оваа недела во кој ден ќе врне

Егзистенцијален квантификатор

Многу математички тврдења велат дека некое својство е точно само за некој од елементите во некое множество.

Егзистенционалната квантификација на некоја исказна функција P(x) е тврдењето дека P(x) важи за барем еден x од дадениот домен.

Дефиниција

Егзистенционалната квантификација на P(x) е исказот "Постои елемент x во доменот, за кој P(x) е точен исказ."

Се бележи со $\exists x\, P(x)$.

$\exists$ се нарекува егзистенционален квантификатор.

Се чита: "Постои x P(x)", "За некое x P(x)" или "Има барем едно x така што P(x)".

Квантификатори

Исказ	Кога е точен?	Кога е неточен?
$\forall x\ P(x)$	Кога P(x) е точно за секое x	Постои x за кое P(x) е не точно
$\exists x\ P(x)$	Постои x за кое P(x) е точно	P(x) е неточно за секое x

Примери

- P(x): x > 3. Дали е точно $\exists x\, P(x)$, ако x е реален број?
  - Да, на пример 4.

- P(x): x+1=x. Дали е точно $\exists x\, P(x)$, ако x е реален број?
  - Не.

Врска меѓу егзистенционалниот квантификатор и множеството решенија на исказната функција

- Ако $\exists x\, P(x)$ е точно, тогаш множеството решенија на исказната функција $P(x)$ има барем еден елемент.
- Ако $\exists x\, P(x)$ не е точно, тогаш множеството решенија на исказната функција $P(x)$ е празно множество.
- Забелешка: ако доменот е празно можество, тогаш исказната функција $\exists x\, P(x)$ секогаш ќе биде неточна.
- Ако сите елементи од доменот се излистаат, x_1, x_2, …, x_n, тогаш $\exists x\, P(x)$ е дисјункцијата:

  $P(x_1) \vee P(x_2) \vee \ldots \vee P(x_n)$

Квантификатор за единственост (уникатност)

- Често се случува некое тврдење да покажува егзистенција на точно еден елемент од доменот за кој важи предикатот P(x)

  $\exists! x\ P(x)$ односно $(\exists_1 x\ P(x))$

  Се чита "постои единствено x за кое важи P(x)".
- Точно е ако постои само еден елемент за кој важи P(x)
- Неточно е кога не постои елемент за кој важи P(x) или ако има барем два елементи за кои важи P(x).

Пример. Ако доменот е **R**, $\exists! x\ x^2 = 0$ е точно, додека $\exists! x\ x^2 = 1$ е неточно (затоа што постојат два елементи со ова својство, $1^2 = 1$ и $(-1)^2 = 1$), а $\exists! x\ x^2 = -1$ не е точно бидејќи не постои елемент со такво својство.

Квантификатори со ограничен домен

Пример.

- $\exists x>0,\ x^2=1$
- $\forall x>1,\ x^2>x$

Ваквото квантифицирање може да се напише и со помош на квантификатори $\exists$ и $\forall$ со тоа што ограничувањето во доменот ќе се искаже со соодветна исказна функција.

- $\exists x,\ x>0 \wedge x^2=1$
- $\forall x,\ x>1 \rightarrow x^2>x$

Приоритет на квантификатори

Квантификаторите имаат најголем приоритет во однос на останатите логички оператори.

Пример. $\forall x\ P(x) \wedge Q(x)$ значи $(\forall x\ P(x)) \wedge Q(x)$, а не значи $\forall x\ (P(x) \wedge Q(x))$.

Ограничени променливи

- Ако за некоја променлива се користи квантификатор, ќе речеме дека таа променлива е **ограничена**.
- Ако за променлива во исказна функција не се користи квантификатор, таа променлива е **слободна**.
- Пример:
  - $\exists x$, $x+y=1$: x е ограничена, додека y е слободна променлива.
  - $\exists x(P(x) \vee Q(x)) \wedge \forall x\, R(x)$: x е ограничена.
  - $\exists x(P(x) \vee Q(x)) \wedge \forall y\, R(y)$: двете променливи се ограничени.

Логички еквиваленции кои вклучуваат квантификатори

Тврдења во кои се вклучени квантификатори се **логички еквивалентни** акко имаат иста вистинитосна вредност без разлика кои предикати се ставени во тврдењето и без разлика кој е доменот на исказните функции.

Користиме ознака $S \equiv T$.

Логички еквиваленции кои вклучуваат квантификатори

- Важат следните логички еквиваленции:
  - $\forall x\,(P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$
    - Секој ден ќе врне и ќе има температура поголема од 80°F ≡ Секој ден врне и секој ден има температура поголема од 80°F
  - $\exists x\,(P(x) \vee Q(x)) \equiv \exists x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x)$
    - Некој ден ќе врне или температурата ќе биде пониска од 80°F ≡ Некој ден ќе врне или некој ден температурата ќе биде пониска од 80 °F

Логички еквиваленции кои вклучуваат квантификатори

- Дали важи:
  - $\exists x\,(P(x) \land Q(x)) \equiv \exists x\, P(x) \land \exists x\, Q(x))$
    - Постои ден во неделата кога ќе врне и ќе има температура 92 °F ? ≡ Постои ден во неделата кога ќе врне и постои ден во неделата кога температурата ќе биде 92°F
    - $\exists x\,(x>0 \land x<0)$ не е точно, додека $\exists x,\ x>0 \land \exists x,\ x<0 \equiv T \land T \equiv T$
    - $\exists x\,(x>0 \land x<3)$ е точно, пример 2, па точно е $\exists x,\ x>0 \land \exists x,\ x<3$
  - $\forall x\,(P(x) \lor Q(x)) \equiv \forall x\, P(x) \lor \forall x\, Q(x))$
    - $\forall x\,(x>0 \lor x \leq 0)$ е точно, додека $\forall x,\ x>0 \lor \forall x,\ x \leq 0 \equiv \perp \land \perp \equiv \perp$
    - Секој ден во неделата е облачно или температурата е над 85°F ? ≡ Секој ден во неделата е облачно или секој ден во неделата температурата е над 85°F

Негација на искази кои вклучуваат квантификатори

$\neg($  $)$

Не е точно дека сите денови ќе врне

Постои ден кога нема да врне

Негација на квантифицирани изрази

- Секој студент во твојот клас слуша калкулус.
- $\forall x\ P(x)$
  - $P(x)$: x го слуша предметот калкулус.
  - x е студент од твојот клас (го одредува доменот)
- $\neg(\forall x\ P(x)) \equiv \exists x \neg P(x)$
- Постои студент од твојот клас кој не слуша калкулус
  - Некој студент од твојот клас не слуша калкулус.
  - Има студент од твојот клас кој не слуша калкулус.
  - Барем еден студент од твојот клас не слуша калкулус.

Негација на искази кои вклучуваат квантификатори

$\neg($  $)$

Не е точно дека постои ден кога врне

Сите денови не врне

Негација на квантифицирани изрази

- Постои студент во твојот клас кој слуша калкулус.
- $\exists x\ P(x)$
  - $P(x)$: x слуша курс од калкулус
  - x е студент од твојот клас
- $\neg(\exists x\ P(x)) \equiv \forall x \neg P(x)$
- Сите студенти од твојот клас не слушаат калкулус
  - Ниеден студент од твојот клас не слуша калкулус
  - Никој од твојот клас не слуша калкулус

Де Морганови закони за Квантификатори

Негација	Еквивалентен исказ	Кога негацијата е точна?	Кога негацијата не е точна?
$\neg(\exists x\, P(x))$	$\forall x \neg P(x)$	За секое x, P(x) е неточно	Постои x за кое P(x) е точно
$\neg(\forall x P(x))$	$\exists x \neg P(x)$	Постои x за кое P(x) е неточно	P(x) е точно за секое x

Конечен домен

- Кога доменот има n елементи, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, тогаш $\forall x P(x)$ е $P(x_1) \land P(x_2) \land \ldots \land P(x_n)$, па неговата негација е:

$$\neg P(x_1) \lor \neg P(x_2) \lor \ldots \lor \neg P(x_n).$$

- Кога доменот има n елементи, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, тогаш $\exists x P(x)$ е $P(x_1) \lor P(x_2) \lor \ldots \lor P(x_n)$, па неговата негација е:

$$\neg P(x_1) \land \neg P(x_2) \land \ldots \land \neg P(x_n).$$

Примери

- Постои чесен политичар
- НЕГАЦИЈА: $\neg(\exists x$, x е чесен политичар$) \equiv \forall x$, x не е чесен политичар
    - Сите политичари се нечесни

- Сите Македонци јадат ајвар
- НЕГАЦИЈА: $\neg(\forall x$ Македонец, x јаде ајвар$) \equiv \exists x$ Македонец, x не јаде ајвар
    - Има Македонци што не јадат ајвар

- $\forall x\,(x^2>x)$
- НЕГАЦИЈА: $\neg(\forall x\,(x^2>x)) \equiv \exists x\,\neg(x^2>x) \equiv \exists x\,(x^2\leq x)$

- $\exists x\,(x^2=2)$
- НЕГАЦИЈА: $\neg(\exists x\,(x^2=2)) \equiv \forall x\,\neg(x^2=2) \equiv \forall x\,(x^2 \neq 2)$

Негација на импликација

- $\neg\forall x(P(x) \to Q(x))$

  $\equiv \exists x(\neg(P(x) \to Q(x)))$

  $\equiv \exists x(\neg(\neg P(x) \lor Q(x)))$

  $\equiv \exists x(P(x) \land \neg Q(x))$

Домен е м-вото реални броеви (R)

P(x): x е природен број
Q(x): корен од x е природен број

Пример.

- Ако некој број е природен број, тогаш и неговиот корен е природен број.
- НЕГАЦИЈА: Постои број таков што тој е природен број, а неговиот корен не е природен број.

Преведување на реченици од македонски јазик во логички израз

- Секој студент од овој клас слуша калкулус.

1. Ако доменот се студентите од овој клас
   - $C(x)$: x слуша калкулус
   - $\forall x\, C(x)$
2. Ако доменот се сите луѓе.
   - $C(x)$: x слуша калкулус
   - $S(x)$: x е студент од овој клас
   - $\forall x\, (S(x) \rightarrow C(x))$
3. Ако доменот се сите луѓе и сите курсеви на факултетот
   - $Q(x, y)$: студентот x го слуша курсот y
   - $S(x)$: x е студент од овој клас
   - $\forall x\, (S(x) \rightarrow Q(x, \text{калкулус}))$

Преведување на реченици од македонски јазик во логички израз

Доменот се студентите од овој клас

- Нема студент од овој клас што слуша калкулус.

  - Не е точно дека постои студент x од овој клас, така што x слуша калкулус.

  C(x): x слуша калкулус - $\neg(\exists x\, C(x)) \equiv \forall x\, \neg C(x)$

  (Ако доменот се сите луѓе:)

  - S(x): x е студент од овој клас - $\forall x\,(S(x) \rightarrow \neg C(x))$
- Нема студент од овој клас што не слуша калкулус.
  - $\neg(\exists x\, \neg C(x)) \equiv \forall x\, C(x)$
  - Сите студенти од овој клас слушаат калкулус.
- Никој од студентите од овој клас не слуша калкулус.
  - Личи на двојна негација
  - $\forall x\, \neg C(x)$

Преведување на реченици од македонски јазик во логички израз

Никој, ништо, никаде, ниту, никаков, иако изгледаат како негации, всушност со нив со универзален квантификатор се квантифицира негација на некоја исказна функција

- Никој не знае каде се продава таа книга.

⇒ За секој човек x важи, x не знае каде се продава таа книга.

- Ништо не погодив на спортска прогноза.

⇒ За секое типување x важи, x не го погодив .

- Не можам да научам ниту една лекција.

⇒ За секоја лекција x важи, x не можам да ја научам.

Користење на квантификатори во спецификации на систем

Примери

1. Секој мејл поголем од еден мегабајт ќе се компресира.

Превод

- S(m,y): мејлот m е поголем од y мегабајти
- C(m): мејлот m ќе се компресира
- $\forall m\,(S(m,1) \rightarrow C(m))$

2. Ако корисникот е активен, најмалку еден линк ќе биде активен.

Превод

- A(u): корисникот u е активен,
- ***S(n): линкот n е активен***
- $\forall u\,(A(u) \rightarrow \exists n\, S(n))$

Пример

1. Сите лавови се крволочни
2. Некои лавови не пијат кафе
3. Некои крволочни животни не пијат кафе

Доменот се подразбира: Сите животни

- P(x): x е лав
- Q(x): x е крволочен
- R(x): x пие кафе

- $\forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x))$
- $\exists x\ (P(x) \wedge \neg R(x))$
- $\exists x\ (Q(x) \wedge \neg R(x))$

Вгнездени квантификатори

- Два квантификатори се вгнездени ако еден е во состав на другиот
- Пример:
  - $\forall x\, \exists y(x+y=0) \;\; \equiv \forall x\, Q(x)$
    - $Q(x)$: $\exists y(x+y=0)$
    - $P(x, y)$: $x+y=0$ тогаш може и вака $Q(x)$: $\exists y\, P(x, y)$
  - $\forall x\, \forall y(x+y=y+x)$ – комутативен закон

Редослед на квантификатори

- $\forall x\ \forall y\ P(x,y) \equiv \forall y\ \forall x\ P(x,y)$
  - $\forall x\ \forall y(x + y = y + x) \equiv \forall y\ \forall x\ (x + y = y + x)$
- $\exists x\ \exists y\ P(x,y) \equiv \exists y\ \exists x\ P(x,y)$
  - $\exists x\ \exists y\ (x + y = 0) \equiv \exists y\ \exists x\ (x + y = 0)$
- $\exists y\ \forall x\ P(x,y) \rightarrow \forall x\ \exists y\ P(x,y)$

  Обратната импликација не важи:
  - $\forall x\ \exists y\ (x + y = 0)$ – точно, затоа што за секое x можеме да го земеме y така што $y = -x$
  - $\exists y\ \forall x\ (x + y = 0)$ – неточно, затоа што не постои број y кој што дава 0 кога ќе се собере кој било број.
  - $\exists y\ \forall x\ (xy = 0)$ – точно за y=0.
  - $\forall x\ \exists y\ (xy = 0)$ – точно, пак за y=0

Вежба со квантификатори

Ако $R(x,y)$ значи “x се потпира на y” и доменот се сите луѓе, да се изразат следниве реченици:

$\forall x(\exists y\, R(x,y))$:

Секој има некого на кој може да се потпре.

$\exists y(\forall x\, R(x,y))$:

Има некоја добра душа на која секој се потпира (вклучително и самиот)!

$\exists x(\forall y\, R(x,y))$:

Постои некој човек кој се потпира на секого (вклучитено и на себе).

$\forall y(\exists x\, R(x,y))$:

Секој има некого кој се потпира на него.

$\forall x(\forall y\, R(x,y))$:

Секој на секого се потпира. (влучувајќи се и самите себе)

Табела за квантификатори од две променливи

Тврдење	Кога е точно?	Кога е неточно?
$\forall x \, \forall y \, P(x,y)$ $\forall y \, \forall x \, P(x,y)$	Кога P(x,y) е точно за секој пар (x,y)	Кога постои пар (x,y) за кој P(x,y) не е точно
$\forall x \, \exists y \, P(x,y)$	За секој x постои некое y (кое може да зависи од избраната вредност x), така што P(x,y) е точно	Кога постои x такво што за кое и да било y P(x,y) не е точно
$\exists x \, \forall y \, P(x,y)$	Кога постои x такво што за кое и да било y P(x,y) е точно	За секој x постои некое y (кое може да зависи од избраната вредност x), така што P(x,y) не е точно
$\exists x \, \exists y \, P(x,y)$	Кога постои пар (x,y) за кој P(x,y) е точно	Кога P(x,y) не е точно за секој пар (x,y)

Преводи од математички тврдења во тврдења со вгнездени квантификатори

Пример. Сумата на два позитивни броеви е секогаш позитивна.

- Или: Сумата на било кои два позитивни броеви е секогаш позитивна
- Или:
- За секој број x и за секој број y, ако x > 0 и y > 0, тогаш x + y > 0
- Дефинираме предикат
- $P(x)$: $x > 0$
- Преведуваме:
- $\forall x \, \forall y \, (P(x) \land P(y) \rightarrow P(x+y))$

- Можеме и директно
- $\forall x \, \forall y \, ((x > 0) \land (y > 0) \rightarrow (x + y > 0))$

Преводи од математички тврдења во тврдења со вгнездени квантификатори

Пример. Сите реални броеви, освен нулата, имаат инверзен број.

- За кој било број x, освен за 0, x има инверзен број.
- За кој било број x, ако x е различен од 0, за него постои број y таков што xy = 1.

- $\forall x\ ((x \neq 0 \rightarrow \exists y\ (xy=1))$
- $\forall x\ (\neg(x \neq 0) \vee \exists y\ (xy=1))$ – закон за замена на импликација

- Бидејќи предикатот $\neg(x \neq 0)$ не зависи од квантифициранаta променлива y, тој може да „влезе" позади $\exists y$, односно
- $\forall x\ \ \exists y\ (\neg(x \neq 0) \vee (xy=1))$
- $\forall x\ \exists y((x \neq 0 \rightarrow (xy=1))$

Преводи на вгнездени квантификатори во говорен јазик

Пример. $\forall x\,(C(x) \vee \exists y(C(y) \wedge F(x,y)))$

$C(x)$ – x има компјутер

$F(x,y)$ – x и y се другари

Доменот се студентите на ФИНКИ

- За секој студент x на ФИНКИ важи дека тој има компјутер или пак постои студент y кој има компјутер и кој е другар на x.
- Секој студент на ФИНКИ има компјутер или пак неговиот другар од ФИНКИ има компјутер.

Негација на вгнездени квантификатори

Не постои жена кој има летано со лет на секоја авиокомпанија во светот

- Негација на: Постои жена која има летано со некој лет на секоја авионска компанија во светот.
  - P(w, f): w летал со летот f
  - Q(f, a): f е лет на компанијата a
  - $\neg(\exists w \forall a \exists f (P(w,f) \wedge Q(f,a)) \equiv \forall w \exists a \forall f (\neg P(w,f) \vee \neg Q(f,a))$

За секоја жена постои некоја авионска компанија таква што за секој лет, таа жена нема летано на тој лет или тој лет не е на таа компанија.