Докази

Задача 1: Да се докаже: $p \rightarrow q,\ r \rightarrow q \Rightarrow p \vee r \rightarrow q$

Решение:

1. $p \rightarrow q$	претпоставка
2. $\neg p \vee q$	од (1)
3. $r \rightarrow q$	претпоставка
4. $\neg r \vee q$	од (2)
5. $(\neg p \vee q) \wedge (\neg r \vee q)$	конјукција на (2) и (4)
6. $(\neg p \wedge \neg r) \vee q$	дистрибутивност во (5)
7. $\neg (p \vee r) \vee q$	Де-Органови закони во (6)
8. $p \vee r \rightarrow q$	замена на импликација во (7)

Задача 2: Да се дадат директни и индиректни докази:

а) $a \rightarrow b,\ c \rightarrow b,\ d \rightarrow (a \vee c),\ d \Rightarrow b$

б) $(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s),\ (q \rightarrow t) \wedge (s \rightarrow u),\ \neg (t \rightarrow u),\ p \rightarrow r \Rightarrow \neg p$

в) $p \rightarrow (q \rightarrow r),\ \neg s \vee p,\ q \Rightarrow s \rightarrow r$

Решение:

Директни докази:

а)

1. $d \rightarrow (a \vee c)$	претпоставка
2. d	претпоставка
3. $a \vee c$	Модус Поненс од (1) и (2)
4. $\neg a \rightarrow c$	замена на импликација во (3)
5. $c \rightarrow b$	претпоставка
6. $\neg a \rightarrow b$	хипотетички силогизам од (4) и (5)
7. $a \vee b$	замена на импликација во (6)
8. $a \rightarrow b$	претпоставка
9. $\neg a \vee b$	замена на импликација во (8)
10. $(a \vee b) \wedge (\neg a \vee b)$	конјукција на (7) и (9)
11. $(a \wedge \neg a) \vee b$	дистрибутивност во (10)
12. b	од (11)

б)

1. $(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)$	претпоставка
2. $r \rightarrow s$	упростување од (1)
3. $(q \rightarrow t) \wedge (s \rightarrow u)$	претпоставка
4. $s \rightarrow u$	упростување од (3)
5. $r \rightarrow u$	хипотетички силогизам од (2) и (4)
6. $p \rightarrow r$	претпоставка
7. $p \rightarrow u$	хипотетички силогизам од (5) и (6)
8. $\neg (t \rightarrow u)$	претпоставка
9. $\neg (\neg t \vee u)$	замена на импликација во (8)

10. $t\wedge\neg u$	Де-Моргановi закони во (9)
11. $\neg u$	упростување од (10)
12. $\neg p$	Модус Толенс од (7) и (11)

в) Ќе докажуваме: $p\to(q\to r), \neg s\vee p, q, s \Rightarrow r$

1. $\neg s\vee p$	претпоставка
2. s	претпоставка
3. p	дисјункт. силогизам од (1) и (2)
4. $p\to(q\to r)$	претпоставка
5. $q\to r$	Модус Поненс од (3) и (4)
6. q	претпоставка
7. r	Модус Поненс од (5) и (6)

Индиректни докази:

а)

1. $\neg b$	негиран заклучок
2. $a\to b$	претпоставка
3. $\neg a$	Модус Толенс од (1) и (3)
4. $c\to b$	претпоставка
5. $\neg c$	Модус Толенс од (1) и (4)
6. $\neg a\wedge\neg c$	конјукција на (3) и (5)
7. $\neg(a\vee c)$	Де-Морганови закони во (6)
8. $d\to(a\vee c)$	претпоставка
9. $\neg d$	Модус Толенс од (7) и (8)
10. d	претпоставка
11. $\perp$	конјукција на (9) и (10)

б)

1. p	негиран заклучок
2. $p\to r$	претпоставка
3. r	Модус Поненс од (1) и (2)
4. $(p\to q)\wedge(r\to s)$	претпоставка
5. $r\to s$	упростување од (4)
6. s	Модус Поненс од (3) и (5)
7. $(q\to t)\wedge(s\to u)$	претпоставка
8. $s\to u$	упростување од (7)
9. u	Модус Поненс од (6) и (8)
10. $\neg(t\to u)$	претпоставка
11. $\neg(\neg t\vee u)$	замена на ипмикација во (10)
12. $t\wedge\neg u$	Де-Морганови закони во (11)
13. $\neg u$	упростување од (12)
14. $\perp$	конјукција на (9) и (13)

в) Ќе докажуваме: $p\to(q\to r), \neg s\vee p, q, s \Rightarrow r$

1. $\neg r$	негиран заклучок
2. $\neg s\vee p$	претпоставка
3. s	претпоставка

4. p дисјунктивен силогизам од (2) и (3)
5. $p\rightarrow(q\rightarrow r)$ претпоставка
6. q претпоставка
7. $q\wedge\neg r$ конјукција на (1) и (6)
8. $\neg(\neg q\vee r)$ Де-Морганови закони во (7)
9. $\neg(q\rightarrow r)$ замена на импликација во (8)
10. $\neg p$ Модус Толенс од (5) и (9)
11. $\perp$ конјукција на (4) и (10)

Задача 3: Докажи дека: $p\rightarrow r, p\vee q\Rightarrow q\vee r$.

Решение: Дисјункцијата во заклучокот можеме да ја замениме со q, со тоа што во претпоставките ќе додадеме $\neg r$. На овој начин добиваме: $p\rightarrow r, p\vee q, \neg r\Rightarrow q$.

1. $p\rightarrow r$ претпоставка.
2. $\neg r$ претпоставка.
3. $\neg p$ Модус Толенс од (2) и (3)
4. $p\vee q$ претпоставка.
5. q дисјунктивен силогизам од (3) и (4)

Задача 4: Докажи дека: $p\vee q, \neg q\vee r, r\rightarrow s\Rightarrow \neg p\rightarrow s$

Решение: Импликацијата во заклучокот може да се замени со s, со тоа што во претпоставките додаваме $\neg p$. На овој начин добиваме: $p\vee q, \neg q\vee r, r\rightarrow s, \neg p\Rightarrow s$.

1. $\neg p$ претпоставка.
2. $p\vee q$ претпоставка.
3. q дисјунктивен силогизам од (1) и (2)
4. $\neg q\vee r$ претпоставка.
5. r дисјунктивен силогизам од (3) и (4)
6. $r\rightarrow s$ претпоставка.
7. s Модус Поненс од (5) и (6)

Задача 5: Докажи дека: $p\vee\neg q, r\rightarrow s, p\rightarrow t, \neg t\vee r, \neg t\vee\neg s\Rightarrow (q\rightarrow r)\wedge(t\rightarrow(s\leftrightarrow r))$.

Решение: Со разделување на конјукцијата во заклучокот, задачата се сведува на решавање на следните две задачи: $p\vee\neg q, r\rightarrow s, p\rightarrow t, \neg t\vee r, \neg t\vee\neg s\Rightarrow q\rightarrow r$ и $p\vee\neg q, r\rightarrow s, p\rightarrow t, \neg t\vee r, \neg t\vee\neg s\Rightarrow t\rightarrow(s\leftrightarrow r)$.

Импликацијата во заклучокот на првата задача може да се замени со r, со тоа што во претпоставките додаваме q. На овој начин добиваме: $p\vee\neg q, r\rightarrow s, p\rightarrow t, \neg t\vee r, \neg t\vee\neg s, q\Rightarrow r$.

1. q претпоставка.
2. $p\vee\neg q$ претпоставка.
3. p дисјунктивен силогизам од (1) и (2)
4. $p\rightarrow t$ претпоставка.

5. t Модус Поненс од (3) и (4)
6. $\neg t \vee r$ претпоставка.
7. r дисјунктивен силогизам од (5) и (6)

И во втората задача ја заменуваме импликацијата во заклучокот:
$p \vee \neg q, r \to s, p \to t, \neg t \vee r, \neg t \vee \neg s, t \Rightarrow s \leftrightarrow r$.

1. $\neg t \vee r$ претпоставка.
2. t претпоставка.
3. r дисјунктивен силогизам од (1) и (2)
4. $\neg t \vee \neg s$ претпоставка
5. $\neg s$ дисјунктивен силогизам од (2) и (4)
6. $\neg s \vee r$ дисјункција од (3) и (5)
7. $s \to r$ замена на импликација во (6)
8. $r \to s$ претпоставка.
9. $r \leftrightarrow s$ конјукција на (7) и (8)

Задача 6: Докажи дека: $p \to r, r \to q, (q \vee \neg r) \to (p \wedge r) \Rightarrow p \leftrightarrow q$.

Решение: Со разделување на еквиваленцијата во заклучокот, дадената задача се сведува на решавање на следните две задачи: $p \to r, r \to q, (q \vee \neg r) \to (p \wedge r) \Rightarrow p \to q$ и $p \to r, r \to q, (q \vee \neg r) \to (p \wedge r) \Rightarrow q \to p$.

Решението $p \to r, r \to q, (q \vee \neg r) \to (p \wedge r) \Rightarrow p \to q$ е:

1. $p \to r$ претпоставка.
2. $r \to q$ претпоставка.
3. $p \to q$ Хипот.силогизам на (1) и (2)

Решението $p \to r, r \to q, (q \vee \neg r) \to (p \wedge r) \Rightarrow q \to p$ е:

1. $(q \vee \neg r) \to (p \wedge r)$ претпоставка.
2. $\neg(q \vee \neg r) \vee (p \wedge r)$ замена на имликација во 1
3. $(\neg q \wedge r) \vee (p \wedge r)$ Де-Морганови закони во 2
4. $(\neg q \vee p) \wedge r$ дистрибутивни закони во (3)
5. $\neg q \vee p$ упростување од (4)
6. $q \to p$ замена на импликација во (5)

Задача 7: Докажи дека:
$$(\forall x)(p(x) \vee q(x)), (\forall x)((\neg p(x) \wedge q(x)) \to r(x)) \Rightarrow (\forall x)(\neg r(x) \to p(x))$$

Решение

1. $(\forall x)((\neg p(x) \wedge q(x)) \to r(x))$ претпоставка
2. $(\neg p(c) \wedge q(c)) \to r(c)$ универзален примерок од (1)
3. $\neg(\neg p(c) \wedge q(c)) \vee r(c)$, за произволно c замена на импликација во (2)
4. $(p(c) \vee \neg q(c)) \vee r(c)$, за произволно c Де-Морганови закони во (3)
5. $(\forall x)(p(x) \vee q(x))$ претпоставка

6. $p(c) \vee q(c)$, за произволно c универзален примерок од (5)
7. $((p(c) \vee \neg q(c)) \vee r(c)) \wedge (p(c) \vee q(c))$, за произволно c конјункција на (4) и (6)
8. $(\neg q(c) \vee (p(c) \vee r(c))) \wedge (q(c) \vee p(c))$, за произволно c асоцијативност во (7)
9. $p(c) \vee r(c) \vee p(c)$, за произволно c резолуција во (8)
10. $p(c) \vee r(c)$, за произволно c од (9)
11. $\neg r(c) \to p(c)$, за произволно c замена на импликација во (10)
12. $(\forall x)(\neg r(x) \to p(x))$ универзална генерализација од (11)

Задача 8: Докажи дека:

$$(\forall x)(p(x) \vee q(x)), (\forall x)(\neg q(x) \vee s(x)), (\forall x)(r(x) \to \neg s(x)), (\exists x)\neg p(x) \Rightarrow (\exists x)\neg r(x)$$

Решение:

1.	$(\exists x)\neg p(x)$	претпоставка
2.	$\neg p(a)$	егзистенцијален примерок од (1)
3.	$(\forall x)(p(x) \vee q(x))$	претпоставка
4.	$p(a) \vee q(a)$	универзален примерок од (3)
5.	$q(a)$	дисјунктивен силогизам од (2) и (4)
6.	$(\forall x)(\neg q(x) \vee s(x))$	претпоставка
7.	$\neg q(a) \vee s(a)$	универзален примерок од (3)
8.	$s(a)$	дисјунктивен силогизам од (5) и (7)
9.	$(\forall x)(r(x) \to \neg s(x))$	претпоставка
10.	$r(a) \to \neg s(a)$	универзален примерок од (9)
11.	$\neg r(a)$	Модус Толенс од (8) и (10)
12.	$(\exists x)\neg r(x)$	егзистенцијална генерализација од (11)

Техники на докажување

Задача 9: Со употреба на директен доказ докажи дека сумата на два непарни природни броја е парен број.

Решение: Нека n и m се непарни природни броеви. Според дефиницијата за непарен број овие може да се запишат како n = 2k + 1 и m = 2l + 1, каде k и l се природни броеви. Тогаш, n+m=2(k+l+1), т.е. n+m=2s, каде s=k+l+1, што исто така е природен број. Ова значи дека по дефиницијата за парен број, сумата на n и m е парен број.

Задача 10: Докажи дека ако m + n и n + p се парни цели броеви, каде m, n, и p се цели броеви, тогаш m + p е парен. Каков тип на доказ користевте?

Решение: Директен доказ: Да претпоставиме дека m+n и n+p се парни. Тогаш, m+n = 2s, за некој цел број s и n + p = 2t за некој цел број t. Ако ги собереме овие се добива m+p+2n = 2s +2t. Со одземање на 2n од двете страни имаме m + p = 2s + 2t − 2n =2(s + t − n). Бидејќи го запишавме m + p на овој начин, може да заклучиме дека m + p е парен број.

Задача 11: Со употреба на директен доказ докажи дека секој непарен цел број е разлика на два квадрати.

Решение: Бидејќи n е непарен, може да запишеме n = 2k + 1 за некој цел број k. Тогаш $(k+1)^2 - k^2 = k^2+2k+1-k^2 = 2k+1 = n$.

Задача 12: Ако е дадена теоремата: "Сумата на два рационални броеви е рационален број", користи доказ со контрадикција за да се докаже дека сумата на ирационален и рационален број е ирационален број.

Решение: Нека r е рационален број и i е ирационален, а s = r + i е рационален. Тогаш според дадената теорема, s+(−r) = i е рационален, што е контрадикција.

Задача 13: Докажи или негирај дека производот на два ирационални броеви е ирационален број.

Решение: Бидејќи $\sqrt{2}\sqrt{2} = 2$ и $\sqrt{2}$ е ирационален број, производот на два ирационални броеви не мора да е ирационален број.

Задача 14: Со употреба на доказ со контрапозиција покажи дека ако $x + y \geq 2$, каде x и y се реални броеви, тогаш $x \geq 1$ или $y \geq 1$.

Решение: Да претпоставиме дека не е точно $x \geq 1$ или $y \geq 1$. Тогаш, $x < 1$ и $y < 1$. Со додавање на овие две неравенства, добиваме дека $x + y < 2$, што е спротивно од $x+y \geq 2$.

Задача 15: Да се докаже дека ако n е цел број и $n^3 + 5$ е непарен, тогаш n е парен со употреба на
а) доказ со контрапозиција.
б) доказ со контрадикција.

Решение:
а) Да претпоставиме дека n е непарен, така што n = 2k+1 за некој цел број k. Тогаш $n^3+5 = 2(4k^3+6k^2+3k+3)$, па $n^3 + 5$ е парен.
б) Да претпоставиме дека $n^3 + 5$ е непарен и n е непарен. Бидејќи n е непарен и производот на два непарни броја е непарен, следува дека n^2 е непарен и дека n^3 е непарен. Но, тогаш $5 = (n^3 + 5) - n^3$ мора да биде парен бидејќи е разлика од два непрани броја. Затоа, претпоставката дека и $n^3 + 5$ и n се двата непарни е грешна.

Задача 16: Да се докаже дека најмалку 10 од било кои избрани 64 дена мора да паѓаат во ист ден од неделата.

Решение: Да претпоставиме дека избираме 64 дена. Исто така, да претпоставиме постои начин на кој што ќе се распределат избраните 64 денови во 7те денови од неделата така што не повеќе од 9 денови се во ист ден од неделата, т.е. да претпоставиме дека тврдењето на задачата не е точно. Ако избереме 9 или помалку денови во секој ден од неделата, ова ќе значи вкупно најмногу $9 \cdot 7 = 63$ денови. Но ние сме избрале 64 денови. Оваа контрадикција покажува дека најмалку 10 од деновите кои сме ги избрале мора да бидат во ист ден во неделата.

Задача 17: Со помош на контрадикција (метод на доведување до противречност) докажи дека следните исказни формули се тавтологии:

а) $p \to q \leftrightarrow \neg p \vee q$,

б) $((p \to q) \to p) \to p$,

в) $(p \to q) \to ((p \to r) \to (p \to (q \wedge r)))$.

Решение:

а) $\alpha: \underbrace{p \to q}_{\beta} \leftrightarrow \underbrace{\neg p \vee q}_{\gamma}$

Нека α не е тавтологија , значи за некое доделување на вредности на исказните променливи, формулата има вредност $\perp$.

$\tau(\alpha)=\perp$, за некоја комбинација на вредности на исказните променливи p и q.

1° $\tau(\beta)=T$ и $\tau(\gamma)=\perp$ или

2° $\tau(\beta)=\perp$ и $\tau(\gamma)=T$.

1° Од $\tau(\gamma)=\perp$ следи $\tau(\neg p)=\perp$ и $\tau(q)=\perp$ т.е . $\tau(p)=T$ и $\tau(q)=\perp$, но тогаш $\tau(\beta)=\tau(p \Rightarrow q)=\perp$, што е контрадикција со $\tau(\beta)=T$.

2° Од $\tau(\beta)=\perp$ следи $\tau(p)=T$ и $\tau(q)=\perp$, но тогаш $\tau(\gamma)=\tau(\neg p \vee q)=\perp$, што е контрадикција со $\tau(\gamma)=T$.

Од 1° и 2° следува дека α е тавтологија .

б) α: $(p \to q) \to p) \to p$

Нека α не е тавтологија, значи за некое доделување на вредности на исказните променливи, формулата има вредност $\perp$.

$\tau(\alpha)=\perp$, за некоја комбинација на вредности на исказните променливи p и q, односно имаме:

$\tau((p \to q) \to p)=T$ и $\tau(p)=\perp$ т.е.

$\tau((\perp \to q) \to \perp)=T$ и $\tau(p)=\perp$ т.е.

$\tau(\perp \to q)=\perp$ и $\tau(p)=\perp$.

но $\tau(\perp \to q)=T$ за било која вредност на q, па оттука добиваме дека не постојат вредности за p и q за кои $\tau(\alpha)=\perp$. Следува $\tau(\alpha)=T$ за било која вредност на p и q, т.е α е тавтологија.

в) $\alpha: \underbrace{(p \to q)}_{\beta} \to \underbrace{((p \to r) \to (p \to (q \wedge r)))}_{\gamma}$

Нека α не е тавтологија, значи за некое доделување на вредности на исказните променливи, формулата има вредност $\perp$.

$\tau(\alpha)=\perp$, за некоја комбинација на вредности на исказните променливи p и q, односно имаме:

$\tau(p \to q)=T$ и $\tau((p \to r) \to (p \to (q \wedge r)))=\perp$

Од $\tau((p \to r) \to (p \to (q \wedge r)))=\perp$ следи

$\tau(p \to r)=T$ и $\tau(p \to (q \wedge r))=\perp$ т.е.

$\tau(p \to r)=T$, $\tau(p)=T$ и $\tau(q \wedge r)=\perp$

Од $\tau(p \to r)=T$, $\tau(p)=T$ следи $\tau(r)= T$, а ова заедно со $\tau(q \wedge r)=\perp$ повлекува $\tau(q)= \perp$. Доколку се вратиме назад на β добиваме $\tau(p \to q)= \tau(T \to \perp)=\perp$, што е контрадикција со $\tau(p \to q)=T$.

Значи α е тавтологија.

Задача 18: Докажи дека овие тврдења за некој цел број x се еквивалентни:
(i) 3x + 2 е парен, (ii) x + 5 е непарен, (iii) x^2 е парен

Решение: Ќе докажеме дека секое од овие тврдења е еквивалентно со тврдењето дека x е парен број. Ако x е парен број, тогаш x = 2k за некој цел број k. Затоа, 3x+2 = 3 · 2k+2 = 6k+2 = 2(3k+1), што е парен, бидејќи е запишан во форма 2t, каде t = 3k + 1. Слично, x + 5 = 2k + 5 = 2k + 4 + 1 = 2(k + 2) + 1, па x + 5 е непарен; и $x^2 = (2k)^2 = 2(2k^2)$, па x^2 е парен.
За обратното, ќе користиме доказ со контрапозиција. Да претпоставиме дека x не е парен, т.е. може да се запише како x = 2k + 1 за некој цел број k. Тогаш, 3x+2 = 3(2k+1)+2 = 6k+5 = 2(3k+2)+1, што е непарен, бидејќи е запишан во форма 2t+1, каде t=3k+2. Слично, x+5=2k +1+5 = 2(k +3), па x + 5 е парен и $x^2 = (2k+1)^2 = 2(2k^2+2k)+1$, па x^2 е непарен.

Задача 19: Да се докаже дека тврдењата p1, p2, p3, p4, и p5 може да се покаже дека се еквивалентни со докажување дека условните тврдења p1 → p4, p3 → p1, p4 → p2, p2 → p5, и p5 → p3 се точни.

Решение: Да претпоставиме дека p1 → p4 → p2 → p5 → p3 → p1. За да се докаже дека било кое тврдење од овие ги повлекува останатите, може да се употреби правилото на хипотетички силогизам последователно.

Задача 20: Да се докаже дека тврдењата за некој реален број x се еквивалентни:
(i) x е ирационален, (ii) 3x + 2 е ирационален,(iii) x/2 е ирационален.

Решение: Ќе докажеме дека важат импликациите (i) → (ii), (ii) → (i), (i) → (iii), и (iii) → (i).
За првото од овие, да претпоставиме дека 3x + 2 е рационален, еднаков на p/q за некои цели броеви p и q со q ≠ 0. Тогаш може да запишеме x = ((p/q) − 2)/3 = (p − 2q)/(3q), каде 3q ≠ 0. Ова покажува дека x е рационален. За второто тврдење, да претпоставиме дека x е рационален, еднаков на p/q за некои цели броеви p и q со q ≠ 0. Тогаш, може да запишеме 3x+2=(3p+2q)/q, каде q ≠ 0. Ова покажува дека 3x+2 е рационален. За третото тврдење, да претпоставиме дека x/2 е рационален еднаков на p/q за некои цели броеви p и q со q ≠ 0. Тогаш може да запишеме x = 2p/q, каде q ≠ 0. Ова покажува дека x е рационален. И за четвртото тврдење, да претпоставиме дека x е рационален еднаков на p/q за некои цели броеви p и q со q ≠ 0. Тогаш, може да запишеме x/2 = p/(2q), каде 2q ≠ 0. Ова покажува дека x/2 е рационален.

Задача 21: Да се докаже дека ако x и y се реални броеви, тогаш max(x,y)+min(x,y) = x + y.

Решение: Ако x ≤ y, тогаш max(x, y) + min(x, y) = y + x = x + y. Ако x ≥ y, тогаш max(x, y) + min(x, y) = x + y. Бидејќи ова се сите случаи, тврдењето секогаш важи.

Задача 22: Да се докаже дека постојат 100 последнователни позитивни цели броеви кои не се квадрати. Дали доказот е конструктивен или не?

Решение: 10001, 10002, . . . , 10100 не се квадрати; конструктивен доказ.

Дополнителни задачи

Задача 23. Да се покаже дека $((p \vee q) \wedge (p \to r) \wedge (q \to r)) \to r$ е тавтологија.

Решение:

Да претпоставиме дека формулата не е тавтологија. Тогаш

$$\tau((p \vee q) \wedge (p \to r) \wedge (q \to r)) = \mathrm{T}$$

и $\tau(r)=\perp$.

Од првото добиваме:

$$\tau(p \vee q) = \mathrm{T}, \tau(p \to r) = \mathrm{T}, \tau(q \to r) = \mathrm{T} \ldots\ldots (*)$$

Од $\tau(p \to r) = \mathrm{T}$ и $\tau(r)=\perp$, следува $\tau(p) = \perp$. Од $\tau(q \to r) = \mathrm{T}$ и $\tau(r)=\perp$, следува $\tau(q) = \perp$. Оттука, $\tau(p \vee q) = \perp$, што е во контрадикција со (*).

Следува дека за било кои вредности на променливите p, r и q во формулата, таа не може да добие вредност $\perp$. Оттука, формулата секогаш е точна, па според тоа таа е тавтологија.

Задача 24. Да се покаже дека $((\neg q \wedge \neg r) \wedge ((p \to q) \vee (p \to r))) \to \neg p$ е тавтологија.

Решение:

Да претпоставиме дека формулата не е тавтологија. Тогаш

$$\tau((\neg q \wedge \neg r) \wedge ((p \to q) \vee (p \to r))) = \mathrm{T}$$

и $\tau(\neg p)=\perp$.

Од првото добиваме:

$$\tau(\neg q \wedge \neg r) = \mathrm{T}, \tau((p \to q) \vee (p \to r)) = \mathrm{T} \ldots\ldots (*)$$

Оттука $\neg q \equiv \mathrm{T}$ и $\neg r \equiv \mathrm{T}$, од каде $q \equiv \perp$ и $r \equiv \perp$

Од $\tau(\neg p)=\perp$. Следува $p \equiv \mathrm{T}$. Сега да замениме во $\tau((p \to q) \vee (p \to r))$ кое треба да биде Т.

$\tau((p \to q) \vee (p \to r)) = \tau((T \to \perp) \vee (T \to \perp)) = \tau(\perp \vee \perp) = \perp$, што е во контрадикција со (*).

Следува дека за било кои вредности на променливите p, r и q во формулата, таа не може да добие вредност $\perp$. Оттука, формулата секогаш е точна, па според тоа таа е тавтологија.

Задача 25: Докажи дека или $2 \cdot 10^{500} + 15$ или $2 \cdot 10^{500} + 16$ не е квадрат. Дали докажот е констуктивен или не?

Решение: Неконструктивен доказ: Ако и двата се квадрати, тогаш со запишување $a^2=2 \cdot 10^{500} + 16$ и $b^2=2 \cdot 10^{500} + 15$, добиваме дека $a^2-b^2=(a-b)(a+b)=1$. Бидејќи a и b се цели броеви, или $a-b=1$ или $a+b=1$, што нема решение во целите броеви, или $a-b=-1$ и $a+b=-1$, што исто така нема решение. Затоа добиваме контрадикција, што значи дека двата броја не може да бидат квадрати.

Задача 26: Да се докаже дека $n^2 + 1 \geq 2^n$ кога n е позитивен цел број каде $1 \leq n \leq 4$.

Решение: $1^2 + 1 = 2 \geq 2 = 2^1$; $2^2 + 1 = 5 \geq 4 = 2^2$; $3^2 + 1 =10 \geq 8 = 2^3$; $4^2 + 1 = 17 \geq 16 = 2^4$

Задача 27: Да се докаже дека без губење на општоста $\min(x, y) = (x + y - |x - y|)/2$ и $\max(x, y) =(x + y + |x - y|)/2$ ако x и y се реални броеви.

Решение: Бидејќи $|x - y| = |y - x|$, вредностите на x и y може да се заменат една со друга. Затоа, без губење на општоста, може да претпоставиме дека $x \geq y$. Тогаш $(x + y - (x - y))/2 = (x + y - x + y)/2 =2y/2 = y = \min(x, y)$. Слично, $(x + y + (x - y))/2=(x + y + x - y)/2 = 2x/2 = x = \max(x, y)$.