Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ во Скопје
ФАКУЛТЕТ ЗА ИНФОРМАТИЧКИ НАУКИ И КОМПЈУТЕРСКО ИНЖЕНЕРСТВО

Испит по Дискретна математика 1, 13. 06. 2014

I група

Име и презиме____________________________________ **Бр. Индекс**____________

Професор кај кој го слуша предметот____

Време за работа:
150 минути

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Вкупно

Задача 1. (8) Без користење таблица да се испита дали исказната формула

$((p \rightarrow q) \land (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$ е тавтологија.

Нека претпоставиме дека формулата не е тавтологија.

$\tau(((p \rightarrow q) \land (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)) = \bot$

1. $\tau((p \rightarrow q) \land (q \rightarrow r)) = \top$

2. $\tau(p \rightarrow r) = \bot \Rightarrow \tau(p) = \top$ и $\tau(r) = \bot$

Од 1

1.1 $\tau(p \rightarrow q) = \top$ и $\Rightarrow$ бидејќи $\tau(p) = \top$, $\tau(q) = \top$

1.2 $\tau(q \rightarrow r) = \top$ ако замениме $\tau(\top \rightarrow \bot) = \bot$ #

Од докажаното следува дека формулата е тавтологија.

Задача 2.(12) Следните реченици да се запишат како искази, а потоа да се најде нивна негација и истата да се прочита:

а) (4) Кога грее сонце и немам обврски за факултет, сум расположена.

p: Грее сонце

q: Имам обврски за факултет

r: Расположена сум

$$(p\wedge\neg q)\rightarrow r$$

Негација:

$$\neg((p\wedge\neg q)\rightarrow r)\equiv\neg(\neg(p\wedge\neg q)\vee r)\equiv(p\wedge\neg q)\wedge\neg r$$

Негирана реченица: Грее сонце и *немам* обврски за факултет и сум нерасположена.

б) (8) Постојат две различни книги кои имаат исти автори - професори на ФИНКИ.

Доменот е множеството книги.

$P(x, y)$: x и y имаат исти автори - професори на ФИНКИ.

$(\exists x)(\exists y)\ (x\neq y \wedge P(x, y))$

Негација: $\neg((\exists x)(\exists y)\ (x\neq y \wedge P(x, y))) \equiv (\forall x)(\forall y)\ \neg(x\neq y \wedge P(x, y))$

$\equiv (\forall x)(\forall y)\ (\neg(x\neq y) \vee \neg P(x, y))$
$\equiv (\forall x)(\forall y)\ (x=y \vee \neg P(x, y))$
$\equiv (\forall x)(\forall y)\ (x\neq y \rightarrow \neg P(x, y))$

Секои две различни книги немаат исти автори - професори на ФИНКИ. (т.е. Нема две различни книги кои имаат исти автори - професори на ФИНКИ.)

Задача 3. (12) Бојан и Илинка се договараат за предлози за задачите на испитот по Дискретна математика со лесна, средна и тешка тежина. Ако некој од нив предложува задача, тогаш ќе даде некоја тешка задача ако и само ако не даде задача со средна тежина. Илинка сака да предложи задача само ако таа биде тешка. Ако Бојан не предложува задача, не предложува ни Илинка. Ако предложуваат и Бојан и Илинка, тогаш ќе предложат задача заедно. Ако Бојан и Илинка предложат задача заедно, тогаш едниот предложува тешка задача ако и само ако другиот предложи задача со средна тежина. Илинка предложила задача за испитот. Дали може да се заклучи дека Бојан предложил тешка задача?

$P(x)$: x предложува задача
$Q(x)$: x дава тешка задача
$R(x)$: x дава задача со средна тежина
$S(x, y)$: x и y предложуваат задача заедно

1. $(\forall x)(P(x) \rightarrow (Q(x) \leftrightarrow \neg R(x)))$ – претпоставка
2. P(Илинка)$\rightarrow$ Q(Илинка) – претпоставка
3. $\neg P$(Бојан)$\rightarrow$ $\neg P$(Илинка) – претпоставка
4. P(Бојан)$\wedge$ P(Илинка) $\rightarrow$ S(Бојан, Илинка) – претпоставка
5. $(\forall x)(\forall y)(S(x, y) \rightarrow (R(x) \leftrightarrow R(y)))$ – претпоставка
6. P(Илинка) – претпоставка
7. Q(Илинка) – од 2 и 6
8. P(Бојан) – од 3 и 6
9. P(Бојан)$\wedge$ P(Илинка) – од 6 и 8
10. S(Бојан, Илинка) – од 4 и 9
11. S(Бојан, Илинка) $\rightarrow$ (R (Бојан)$\leftrightarrow$ R(Илинка)) – од 5 за x=Бојан, y=Илинка
12. R (Бојан)$\leftrightarrow$ R(Илинка) – од 10 и 11
13. P(Илинка)$\rightarrow$ (Q(Илинка)$\leftrightarrow$ $\neg R$(Илинка)) – од 1 за Илинка
14. Q(Илинка)$\leftrightarrow$ $\neg R$(Илинка) - од 13 и 6
15. $\neg R$(Илинка) – од 14 и 7.
16. $\neg R$(Бојан) $\leftrightarrow$ $\neg R$(Илинка) - од 12
17. $\neg R$(Бојан) - од 15 и 16
18. P(Бојан)$\rightarrow$ (Q(Бојан)$\leftrightarrow$ $\neg R$(Бојан)) – од 1 за Бојан
19. Q(Бојан)$\leftrightarrow$ $\neg R$(Бојан) – од 18 и 8
20. Q(Бојан) – од 19 и 17

Q(Бојан): Бојан дава тешка задача.

Задача 4.(6)Да се одреди вистинитоста на следните тврдења:

а) Ако 1+1=2, тогаш 2+2=4. ----Да----

б) 1+1=3 ако и само ако 2+2=5. ----Да-----

в) 1+1=2 или 2+2=5. ---Да-----

Задача 5.(10) Покажи дали важи $\overline{\overline{A} \cup (B \cup C)} \subseteq A \oplus B \oplus C$.

$$\overline{\overline{A} \cup (B \cup C)} = A \cap \overline{(B \cup C)} = A \cap \bar{B} \cap \bar{C}$$

$$A \oplus B \oplus C = (A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C) \cup (A \cap B \cap C)$$

$$A \cap \bar{B} \cap \bar{C} \subseteq (A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C) \cup (A \cap B \cap C)$$

$$A \cap \bar{B} \cap \bar{C} \subseteq A \oplus B \oplus C$$

Задача 6. (10)Нека A={1, 2, 3, 4, 5, 6}, B={a, b, c} и C={x, y, z}, и нека се дадени пресликувања f: A $\rightarrow$ B иg: C$\rightarrow$ B определени со $f\colon \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a & a & b & b & b & c \end{pmatrix}$ и $g\colon \begin{pmatrix} x & y & z \\ b & c & a \end{pmatrix}$. Да се определи h(x) ако h $=g^{-1} \circ f$и $h^{-1}(D)$ ако D$\subseteq$C и D = {y, z}.

g е биекција, па постои инверзно пресликување
g^{-1}: B $\rightarrow$ C

$$g^{-1}\colon \begin{pmatrix} a & b & c \\ z & x & y \end{pmatrix}$$

Кодоменот на f е еднаков со доменот на g^{-1} па можно е преслукување h
h: A $\rightarrow$ C

$$h\colon \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ z & z & x & x & x & y \end{pmatrix}$$

$h^{-1}(D)$={1, 2, 6}

Задача 7. (10)Пресметај

$$101_2{}^{7D7_{16}}(mod\ 3032_8)$$

101_2 = 5
$7D7_{16}$ = 2007
3032_8 = 1562

$5^1 \equiv 5(mod\ 1562)$
$5^2 \equiv 25(mod\ 1562)$
$5^3 \equiv 125(mod\ 1562)$
$5^2 * 5^3 \equiv 3125(mod\ 1562)$
$5^5 \equiv 1(mod\ 1562)$
$5^{5^{401}} \equiv 1^{401}(mod\ 1562)$
$5^{2005} * 5^2 \equiv 1 * 25(mod\ 1562)$
$5^{2007} \equiv 25(mod\ 1562)$

Задача 8. (10) Да се докаже дека за секој природен број *n*≥1, бројот $6^{2n}+3^{n+2}+3^{n}$ е делив со 11.

Решение:
Задачата се докажува со математичка индукција.

1. За n=1 имаме $6^{2}+3^{1+2}+3^{1}=36+27+3=66$. Бидејќи 11|66 тврдењето важи за n=1.
2. Претпоставуваме дека тврдењето важи за n=k, т.е дека е точно $11|6^{2k}+3^{k+2}+3^{k}$.
3. Докажуваме дека тврдењето е точно за n=k+1, т.е дека важи $11|6^{2(k+1)}+3^{(k+1)+2}+3^{(k+1)}$
   Доказ:
   $6^{2(k+1)}+3^{(k+1)+2}+3^{(k+1)}=6^{2k+2}+3^{k+3}+3^{k+1}=6^{2k}*6^{2}+3^{k+2}*3^{1}+3^{k}*3^{1}=36*6^{2k}+3*3^{k+2}+3*3^{k}=36*6^{2k}+(36-33)*3^{k+2}+(36-33)*3^{k}=36\left(6^{2k}+3^{k+2}+3^{k}\right)-33\left(3^{k+2}+3^{k}\right)$
   Од чекор 2 (претпоставката) имаме дека $11|6^{2k}+3^{k+2}+3^{k}$. Од друга страна важи дека $11|33\left(3^{k+2}+3^{k}\right)$ од каде следува дека изразот $36\left(6^{2k}+3^{k+2}+3^{k}\right)-33\left(3^{k+2}+3^{k}\right)$ е делив со 11. Со тоа докажавме дека важи $11|6^{2(k+1)}+3^{(k+1)+2}+3^{(k+1)}$.

Со ова доказот е завршен и даденото твдење е точно.

Задача 9. (12) Дадено е подредувањето ({2, 4, 6, 9, 12, 18, 27, 36, 48, 60, 72}, |). Да се најдат:
а) (2) минималните елементи

Минимални елементи се: 2, 9

б) (2) максималните елементи

Максимални елементи се: 27, 48, 60, 72

в) (2) најголемиот елемент

Нема најголем елемент.

г) (2) најмалиот елемент

Нема најмал елемент.

д) (2) sup{2, 9}

sup{2, 9}=18

ѓ)(2) inf{2, 9}

inf{2, 9} нема

Задача 10. (10) Нека α е релација на *Z* дефинирана со x α y ↔ x mod 3 = y mod 3. Да се определи фактор множеството на *Z* при релацијата α.

Z/ α *={{…-6, -3, 0, 3, 6,…}, {…-5, -2, 1, 4, 7, …}, {-4, -1, 2, 5, 8, …}}*
Z/ α *={{x|x=3*k, kϵZ}, { x|x=3*k+1, kϵZ}, { x|x=3*k+2, kϵZ}}*

--- Оваа страна е за вежбање и тоа што ќе биде напишано тука нема да се прегледува ---

Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ во Скопје
ФАКУЛТЕТ ЗА ИНФОРМАТИЧКИ НАУКИ И КОМПЈУТЕРСКО ИНЖЕНЕРСТВО

Име и презиме____________________________________ **Бр. Индекс**_______________

Професор кај кој го слуша предметот____

Испит по Дискретна математика 1, 13.06.2014

II група

Време за работа:
150 минути

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Вкупно

Задача 1. (8)Без користење таблица да се испита дали исказната формула

$(((\neg q \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg p) \vee r) \leftrightarrow (\top \vee r)$ е тавтологија.

Нека претпоставиме дека формулата не е тавтологија.

$\tau((((\neg q \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg p) \vee r) \leftrightarrow (\top \vee r)) = \perp$

$\tau(\top \vee r) = \top$

$\tau(((\neg q \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg p) \vee r) = \perp$

$\tau(r) = \perp$ *и*

$\tau((\neg q \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg p) = \perp$

1. $\tau(\neg q \wedge (p \rightarrow q)) = \top$

2. $\tau(\neg p) = \perp \Rightarrow \tau(p) = \top$

Од 1

1.1 $\tau(\neg q) = \top \Rightarrow \tau(q) = \perp$ *и*

1.2 $\tau(p \rightarrow q) = \top$ *ако замениме* $\tau(\top \rightarrow \perp) = \perp$ #

Од докажаното следува дека формулата е тавтологија.

Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ во Скопје
ФАКУЛТЕТ ЗА ИНФОРМАТИЧКИ НАУКИ И КОМПЈУТЕРСКО ИНЖЕНЕРСТВО

Задача 2. (12) Следните реченици да се запишат како искази, а потоа да се најде нивна негација и истата да се прочита:

а) (4) Кога врне и имам обврски за факултет, сум нерасположена.

p: Врне

q: Имам обврски за факултет

r: Расположена сум

$$(p \wedge q) \to \neg r$$

Негација:

$$\neg((p \wedge q) \to \neg r) \equiv \neg(\neg(p \wedge q) \vee \neg r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$$

Негирана реченица: Врне и имам обврски за факултет и сум расположена.

б) (8) Постојат две различни компјутерски конфигурации кои имаат исти перформанси.

Доменот е множеството компјутерски конфигурации.

$P(x, y)$: x и y имаат исти перформанси.

$(\exists x)(\exists y)\ (x \neq y \wedge P(x, y))$

Негација: $\neg((\exists x)(\exists y)\ (x \neq y \wedge P(x, y))) \equiv (\forall x)(\forall y)\ \neg(x \neq y \wedge P(x, y))$

$\equiv (\forall x)(\forall y)\ (\neg(x \neq y) \vee \neg P(x, y))$

$\equiv (\forall x)(\forall y)\ (x = y \vee \neg P(x, y))$

$\equiv (\forall x)(\forall y)\ (x \neq y \to \neg P(x, y))$

Секои две различни компјутерски конфигурации немаат перформанси. (т.е. Нема две различни компјутерски конфигурации кои имаат исти перформанси.)

Задача 3. (12)Бојан и Илинка се договараат за предлози за задачите на испитот по Дискретна математика со лесна, средна и најтешка тежина. Ако некој од нив предложува задача, тогаш ќе даде некоја лесна задача ако и само ако не даде задача со средна тежина. Илинка сака да предложи задача само ако таа биде лесна. Ако Бојан не предложува задача, не предложува ни Илинка. Ако предложуваат и Бојан и Илинка, тогаш ќе предложат задача заедно. Ако Бојан и Илинка предложат задача заедно, тогаш едниот предложува лесна задача ако и само ако другиот предложи задача со средна тежина. Илинка предложила задача за испитот. Дали може да се заклучи дека Бојан предложил лесна задача?

$P(x)$: x предложува задача
$Q(x)$: x дава лесна задача
$R(x)$: x дава задача со средна тежина
$S(x, y)$: x и y предложуваат задача заедно

1. $(\forall x)(P(x) \to (Q(x) \leftrightarrow \neg R(x)))$ – претпоставка
2. P(Илинка)$\to Q$(Илинка) – претпоставка
3. $\neg P$(Бојан)$\to \neg P$(Илинка) – претпоставка
4. P(Бојан)$\wedge P$(Илинка) $\to S$(Бојан, Илинка) – претпоставка
5. $(\forall x)(\forall y)(S(x, y) \to (R(x) \leftrightarrow R(y)))$ – претпоставка
6. P(Илинка) – претпоставка
7. Q(Илинка) – од 2 и 6
8. P(Бојан) – од 3 и 6
9. P(Бојан)$\wedge P$(Илинка) – од 6 и 8
10. S(Бојан, Илинка) – од 4 и 9
11. S(Бојан, Илинка) $\to$ (R (Бојан)$\leftrightarrow R$(Илинка)) – од 5 за x=Бојан, y=Илинка
12. R (Бојан)$\leftrightarrow R$(Илинка) – од 10 и 11
13. P(Илинка)$\to$ (Q(Илинка)$\leftrightarrow \neg R$(Илинка)) – од 1 за Илинка
14. Q(Илинка)$\leftrightarrow \neg R$(Илинка) - од 13 и 6
15. $\neg R$(Илинка) – од 14 и 7.
16. $\neg R$(Бојан) $\leftrightarrow \neg R$(Илинка) - од 12
17. $\neg R$(Бојан) - од 15 и 16
18. P(Бојан)$\to$ (Q(Бојан)$\leftrightarrow \neg R$(Бојан)) – од 1 за Бојан
19. Q(Бојан)$\leftrightarrow \neg R$(Бојан) – од 18 и 8
20. Q(Бојан) – од 19 и 17

Q(Бојан): Бојан дава лесна задача.

Задача 4.(6)Да се одреди вистинитоста на следните тврдења:

а) Ако 2+2=4, тогаш 1+1=2. ----Да-----

б) 2+2=3 ако и само ако 1+1=5. -----Да----

в) 1+1=2 и 2+2=5. ----Не-----

Задача 5.(10) Покажи дали важи $\overline{\overline{B} \cup (A \cup C)} \subseteq A \oplus B \oplus C$.

$$\overline{\overline{B} \cup (A \cup C)} = B \cap \overline{(A \cup C)} = B \cap \bar{A} \cap \bar{C}$$

$$A \oplus B \oplus C = (A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C) \cup (A \cap B \cap C)$$

$$B \cap \bar{A} \cap \bar{C} \subseteq (A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C) \cup (A \cap B \cap C)$$

$$B \cap \bar{A} \cap \bar{C} \subseteq A \oplus B \oplus C$$

Задача 6.(10) Нека A={a, b, c, d, e, i}, B={1, 2, 3, 4, 5, 6} и C={x, y, z}, и нека се дадени пресликувања f: B $\rightarrow$ A и g: B $\rightarrow$ C определени со $f: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ b & a & e & i & c & d \end{pmatrix}$ и $g: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ y & z & x & y & x & x \end{pmatrix}$. Да се определи h(x)ако $h = g \circ f^{-1}$ и $h^{-1}(D)$ ако $D \subseteq C$ и D = {x, y}.

f е биекција, па постои инверзно пресликување
f^{-1}: A $\rightarrow$ B

$$f^{-1}: \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & i \\ 2 & 1 & 5 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Кодоменот на f^{-1} е еднаков со доменот на g па можно е преслукување h
h: A $\rightarrow$ C

$$h: \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & i \\ z & y & x & x & x & y \end{pmatrix}$$

$h^{-1}(D)$={b, c, d, e, i}

Задача 7.(10) Пресметај

$$110_2^{3722_8} (mod\ 613_{16})$$

110_2 = 6
3722_8 = 2002
613_{16} = 1555

$6^1 \equiv 6(mod\ 1555)$
$6^2 \equiv 36(mod\ 1555)$
$6^3 \equiv 216(mod\ 1555)$
$6^2 * 6^3 \equiv 7776(mod\ 1555)$
$6^5 \equiv 1(mod\ 1555)$
$6^{5^{400}} \equiv 1^{400}(mod\ 1555)$
$6^{2000} * 6^2 \equiv 1 * 36(mod\ 1555)$
$6^{2002} \equiv 36(mod\ 1555)$

*(*reshenie vo mathematica*)*
2^^110
8^^3722
16^^613
$Mod[6\text{^}2002,1555]$

Задача 8. (10) Да се докаже дека за секој природен број *n*≥1, бројот $5^{n+3} + 11^{3n+1}$ е делив со 17.

Решение:
Задачата се докажува со математичка индукција.

1. За n=1 имаме $5^{1+3} + 11^{3+1} = 5^4 + 11^4 = 625 + 14641 = 15266 = 17 * 898$. Бидејќи 17|15266 тврдењето важи за n=1.
2. Претпоставуваме дека тврдењето важи за n=k, т.е дека е точно $17|5^{k+3} + 11^{3k+1}$.
3. Докажуваме дека тврдењето е точно за n=k+1, т.е дека важи $17|5^{(k+1)+3} + 11^{3(k+1)+1}$
   Доказ:
   $5^{(k+1)+3} + 11^{3(k+1)+1} = 5^{k+4} + 11^{3k+4} = 5^{k+3} * 5^1 + 11^{3k+1} * 11^3 = 5 * 5^{k+3} + 1331 * 11^{3k+1} = 5 * 5^{k+3} + (1326 + 5) * 11^{3k+1} = 5\left(5^{k+3} + 11^{3k+1}\right) + 1326 * 11^{3k+1}$
   Од чекор 2 (претпоставката) имаме дека $17|5^{k+3} + 11^{3k+1}$. Од друга страна важи дека $17|1326 * 11^{3k+1}$ од каде следува дека изразот $5\left(5^{k+3} + 11^{3k+1}\right) + 1326 * 11^{3k+1}$ е делив со 17. Со тоа докажавме дека важи $17|5^{(k+1)+3} + 11^{3(k+1)+1}$.

Со ова доказот е завршен и даденото твдење е точно.

Задача 9. (12)Дадено е подредувањето({3, 5, 9, 15, 24, 45, 48, 60, 63, 72}, |). Да се најдат:
а) (2) минималните елементи

Минимални елементи се: 3, 5

б) (2) максималните елементи

Максимални елементи се: 45, 48, 60, 63, 72

в) (2) најголемиот елемент

Нема најголем елемент.

г) (2) најмалиот елемент

Нема најмал елемент.

д) (2) sup{3, 9}

sup{3, 9}=9

ѓ) (2) inf{3, 9}

inf{3, 9}=3

Задача 10.(10) Нека α е релација на *Z* дефинирана со x α y ⟷ x mod 4 = y mod 4. Да се определи фактор множеството на *Z* при релацијата α.

Z/ α *={{…-8, -4, 0, 4, 8,…}, {…-7, -3, 1, 5, 9, …}, {-6, -2, 2, 6, 10, …}, {-5, -1, 3, 7, 11, …}}*
Z/ α *={{x|x=4*k, kϵZ}, { x|x=4*k+1, kϵZ}, { x|x=4*k+2, kϵZ}, { x|x=4*k+3, kϵZ}}*

--- Оваа страна е за вежбање и тоа што ќе биде напишано тука нема да се прегледува ---

Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ во Скопје
ФАКУЛТЕТ ЗА ИНФОРМАТИЧКИ НАУКИ И КОМПЈУТЕРСКО ИНЖЕНЕРСТВО

Име и презиме____________________________________**Бр. Индекс**_______________

Професор кај кој го слуша предметот____

Испит по Дискретна математика 1, 13.06.2014

III група

Време за работа:
150 минути

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Вкупно

Задача 1. (8)Без користење таблица да се испита дали исказната формула

$((b \to c) \land (c \to a)) \to (b \to a)$е тавтологија.

Нека претпоставиме дека формулата не е тавтологија.

$\tau(((b \to c) \land (c \to a)) \to (b \to a)) = \bot$

1. $\tau((b \to c) \land (c \to a)) = \top$

2. $\tau(b \to a) = \bot \Rightarrow \tau(b) = \top$ *и* $\tau(a) = \bot$

Од 1

1.1 $\tau(b \to c) = \top$ *и* $\Rightarrow$ *бидејќи* $\tau(b) = \top$ *(од 2) тогаш* $\tau(c) = \top$

1.2 $\tau(c \to a) = \top$ ако замениме $\tau(\top \to \bot) = \bot$ #

Од докажаното следува дека формулата е тавтологија.

Задача 2. (12)Следните реченици да се запишат како искази, а потоа да се најде нивна негација и истата да се прочита:

а) (4) Кога грее сонце и сум расположена, сакам да одам на прошетка.

p: Грее сонце

q: Расположена сум

r: Сакам да одам на прошетка

$$(p \land q) \to r$$

Негација:

$$\neg((p \land q) \to r) \equiv \neg(\neg(p \land q) \lor r) \equiv (p \land q) \land \neg r$$

Негирана реченица: Грее сонце и сум расположена, и не сакам да одам на прошетка.

б) (8) Не постојат две различни книги кои имаат исти автори - професори на ФИНКИ.

Доменот е множеството книги.

$P(x, y)$: x и y имаат исти автори - професори на ФИНКИ.

$\neg((\exists x)(\exists y)(x \neq y \land P(x, y)))$

Негација: $\neg(\neg((\exists x)(\exists y)(x \neq y \land P(x, y)))) \equiv (\exists x)(\exists y)(x \neq y \land P(x, y))$

Постојат две различни книги кои имаат исти автори - професори на ФИНКИ.

Задача 3.(12)Бојан и Илинка се договараат за предлози за задачите на испитот по Дискретна математика со лесна, средна и тешка тежина. Ако некој од нив предложува задача, тогаш ќе даде некоја задача со средна тежина ако и само ако не даде лесна задача. Илинка сака да предложи задача само ако таа биде со средна тежина. Ако Бојан не предложува задача, не предложува ни Илинка. Ако предложуваат и Бојан и Илинка, тогаш ќе предложат задача заедно. Ако Бојан и Илинка предложат задача заедно, тогаш едниот предложува задача со средна тежина ако и само ако другиот предложи лесна задача. Илинка предложила задача за испитот. Дали може да се заклучи дека Бојан предложил задача со средна тежина?

$P(x)$: x предложува задача
$Q(x)$: x дава задача со средна тежина
$R(x)$: x дава лесна задача
$S(x, y)$: x и y предложуваат задача заедно

1. $(\forall x)(P(x)\rightarrow (Q(x)\leftrightarrow \neg R(x)))$ – претпоставка
2. P(Илинка)$\rightarrow Q$(Илинка) – претпоставка
3. $\neg P$(Бојан)$\rightarrow \neg P$(Илинка) – претпоставка
4. P(Бојан)$\wedge P$(Илинка) $\rightarrow S$(Бојан, Илинка) – претпоставка
5. $(\forall x) (\forall y)(S(x, y) \rightarrow (R (x)\leftrightarrow R(y)))$ – претпоставка
6. P(Илинка) – претпоставка
7. Q(Илинка) – од 2 и 6
8. P(Бојан) – од 3 и 6
9. P(Бојан)$\wedge P$(Илинка) – од 6 и 8
10. S(Бојан, Илинка) – од 4 и 9
11. S(Бојан, Илинка) $\rightarrow$ (R (Бојан)$\leftrightarrow R$(Илинка)) – од 5 за x=Бојан, y=Илинка
12. R (Бојан)$\leftrightarrow R$(Илинка) – од 10 и 11
13. P(Илинка)$\rightarrow$ (Q(Илинка)$\leftrightarrow \neg R$(Илинка)) – од 1 за Илинка
14. Q(Илинка)$\leftrightarrow \neg R$(Илинка) - од 13 и 6
15. $\neg R$(Илинка) – од 14 и 7.
16. $\neg R$(Бојан) $\leftrightarrow \neg R$(Илинка) - од 12
17. $\neg R$(Бојан) - од 15 и 16
18. P(Бојан)$\rightarrow$ (Q(Бојан)$\leftrightarrow \neg R$(Бојан)) – од 1 за Бојан
19. Q(Бојан)$\leftrightarrow \neg R$(Бојан) – од 18 и 8
20. Q(Бојан) – од 19 и 17

Q(Бојан): Бојан дава задача со средна тежина.

Задача 4.(6) Да се одреди вистинитоста на следните тврдења:

а) 1+1=2 или 2+2=3. ----Да-------

б) Ако 1+1=2, тогаш 2+2=4. -----Да------

в) 1+1=5 ако и само ако 2+2=3. ----Да-------

Задача 5.(10) Покажи дали важи $\overline{\overline{C} \cup (A \cup B)} \subseteq A \oplus B \oplus C$.

$$\overline{\bar{C} \cup (A \cup B)} = C \cap \overline{(A \cup B)} = C \cap \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$A \oplus B \oplus C = (A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C) \cup (A \cap B \cap C)$$

$$C \cap \bar{A} \cap \bar{B} \subseteq (A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C) \cup (A \cap B \cap C)$$

$$C \cap \bar{A} \cap \bar{B} \subseteq A \oplus B \oplus C$$

Задача 6.(10) Нека A={a, b, c, d, e, i}, B={x, y, z} и C={1, 2, 3}, и нека се дадени пресликувања f: A → B и g: C → B определени со $f\colon \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & i \\ x & x & y & y & y & z \end{pmatrix}$ и $g\colon \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ y & z & x \end{pmatrix}$. Да се определи h(x) ако h =$g^{-1} \circ f$ и $h^{-1}(D)$ ако D⊆C и D = {2, 3}.

g е биекција, па постои инверзно пресликување
g^{-1}: B → C
$g^{-1}\colon \begin{pmatrix} x & y & z \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
Кодоменот на f е еднаков со доменот на g^{-1} па можно е преслукување h
h: A → C
$h\colon \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & i \\ 3 & 3 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$h^{-1}(D)$={a, b, i}

Задача 7.(10) Пресметај

$$11_4^{3727_8}(mod\ 61A_{16})$$

$11_4 = 5$
$3727_8 = 2007$
$61A_{16} = 1562$

$5^1 \equiv 5(mod\ 1562)$
$5^2 \equiv 25(mod\ 1562)$
$5^3 \equiv 125(mod\ 1562)$
$5^2 * 5^3 \equiv 3125(mod\ 1562)$
$5^5 \equiv 1(mod\ 1562)$
$5^{5^{401}} \equiv 1^{401}(mod\ 1562)$
$5^{2005} * 5^2 \equiv 1 * 25(mod\ 1562)$
$5^{2007} \equiv 25(mod\ 1562)$

*(*reshenie vo mathematica*)*
4^^11
8^^3727
16^^61a
Mod[5^2007,1562]

Задача 8. (10) Да се докаже дека за секој природен број *n*≥1, бројот $7 * 5^{2n} + 12 * 6^{n}$ е делив со 19.

Решение:
Задачата се докажува со математичка индукција.

1. За n=1 имаме $7 * 5^{2} + 12 * 6^{1} = 7 * 25 + 12 * 6 = 175 + 72 = 247 = 19 * 13$. Бидејќи 19|247 тврдењето важи за n=1.
2. Претпоставуваме дека тврдењето важи за n=k, т.е дека е точно $19|7 * 5^{2k} + 12 * 6^{k}$.
3. Докажуваме дека тврдењето е точно за n=k+1, т.е дека важи$19|7 * 5^{2(k+1)} + 12 * 6^{k+1}$
   Доказ:
   $7 * 5^{2(k+1)} + 12 * 6^{k+1} = 7 * 5^{2k+2} + 12 * 6^{k+1} = 7 * 5^{2k} * 5^{2} + 12 * 6^{k} * 6^{1} = 25 * 7 * 5^{2k} + 6 * 12 * 6^{k} = (19 + 6) * 7 * 5^{2k} + 6 * 12 * 6^{k} = 6\left(7 * 5^{2k} + 12 * 6^{k}\right) + 19 * 7 * 5^{2k}$
   Од чекор 2 (претпоставката) имаме дека $19|7 * 5^{2k} + 12 * 6^{k}$. Од друга страна важи дека $19|19 * 7 * 5^{2k}$ од каде следува дека изразот $6\left(7 * 5^{2k} + 12 * 6^{k}\right) + 19 * 7 * 5^{2k}$ е делив со 19. Со тоа докажавме дека важи $19|7 * 5^{2(k+1)} + 12 * 6^{k+1}$

Со ова доказот е завршен и даденото твдење е точно.

Задача 9. (12) Дадено е подредувањето ({2, 4, 5, 9, 18, 20, 27, 36, 48, 60, 72}, |). Да сенајдат:
а) (2) минималните елементи

Минимални елементи се: 2, 5, 9

б) (2) максималните елементи

Максимални елеенти се: 27, 48, 60, 72

в) (2) најголемиот елемент

Нема најголем елемент.

г) (2) најмалиот елемент

Нема најмал елемент.

д) (2) sup{5, 9}

sup{5, 9} нема

ѓ) (2) inf{5, 9}

inf{5, 9} нема

Задача 10.(10) Нека α е релација на *Z* дефинирана со x α y ↔ x mod 5 = y mod 5. Да се определи фактор множеството на *Z* при релацијата α.

Z/ α *={{…-10, -5, 0, 5, 10,…}, {…-9, -4, 1, 6, 11, …}, {-8, -3, 2, 7, 12, …}, {-7, -2, 3, 8, 13, …}, {-6, -1, 4, 9, 14, …}}*
Z/ α *={{x|x=5*k, kϵZ}, { x|x=5*k+1, kϵZ}, { x|x=5*k+2, kϵZ}, { x|x=5*k+3, kϵZ}, { x|x=5*k+4, kϵZ}}*

--- Оваа страна е за вежбање и тоа што ќе биде напишано тука нема да се прегледува ---

Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ во Скопје
ФАКУЛТЕТ ЗА ИНФОРМАТИЧКИ НАУКИ И КОМПЈУТЕРСКО ИНЖЕНЕРСТВО

Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ во Скопје
ФАКУЛТЕТ ЗА ИНФОРМАТИЧКИ НАУКИ И КОМПЈУТЕРСКО ИНЖЕНЕРСТВО

Име и презиме____________________________________Бр. Индекс_____________

Професор кај кој го слуша предметот____

Испит по Дискретна математика 1, 13.06.2014

IV група

Време за работа:
150 минути

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Вкупно

Задача 1. (8)Без користење таблица да се испита дали исказната формула

$(((\urcorner c \land (b \to c)) \to \urcorner b) \lor a) \leftrightarrow (T \lor a)$ е тавтологија.

Нека претпоставиме дека формулата не е тавтологија.

$\tau((((\urcorner c \land (b \to c)) \to \urcorner b) \lor a) \longleftrightarrow (T \lor a)) = \bot$

$\tau(T \lor a) = \top$

$\tau(((\urcorner c \land (b \to c)) \to \urcorner b) \lor a) = \bot$

$\tau(a) = \bot$ *и*

$\tau((\urcorner c \land (b \to c)) \to \urcorner b) = \bot$

1. $\tau(\urcorner c \land (b \to c)) = \top$

2. $\tau(\urcorner b) = \bot \Rightarrow \tau(b) = \top$

Од 1

1.1 $\tau(\urcorner c) = \top \Rightarrow \tau(c) = \bot$ *и*

1.2 $\tau(b \to c) = \top$ *ако замениме* $\tau(\top \to \bot) = \bot$ #

Од докажаното следува дека формулата е тавтологија.

Задача 2. (12)Следните реченици да се запишат како искази, а потоа да се најде нивна негација и истата да се прочита:

а) (4) Кога врне и сум нерасположен, не ми се учи.

p: Врне

q: Расположен сум

r: Ми се учи

$$(p\land\neg q)\to\neg r$$

Негација:

$$\neg((p\land\neg q)\to\neg r)\equiv\neg(\neg(p\land\neg q)\lor\neg r)\equiv(p\land\neg q)\land r$$

Негирана реченица: Врне и сум расположен, и ми се учи.

б) (8) Не постојат две исти компјутерски конфигурации кои имаат исти перформанси.

Доменот е множеството компјутерски конфигурации.

$P(x, y)$: x и y имаат исти перформанси.

$\neg((\exists x)(\exists y)\ (x=y \land P(x, y)))$

Негација: $\neg(\neg((\exists x)(\exists y)\ (x=y \land P(x, y)))) \equiv (\exists x)(\exists y)\ (x=y \land P(x, y))$

Постојат две исти компјутерски конфигурации кои имаат исти перформанси.

Задача 3. (12)Бојан и Илинка се договараат за предлози за задачите на испитот по Дискретна математика со лесна, средна и тешка тежина. Ако некој од нив предложува задача, тогаш ќе даде некоја тешка задача ако и само ако не даде задача со средна тежина. Бојан сака да предложи задача само ако таа биде тешка. Ако Илинка не предложува задача, не предложува ни Бојан. Ако предложуваат и Бојан и Илинка, тогаш ќе предложат задача заедно. Ако Бојан и Илинка предложат задача заедно, тогаш едниот предложува тешка задача ако и само ако другиот предложи задача со средна тежина. Бојан предложил задача за испитот. Дали може да се заклучи дека Илинка предложила тешка задача?

$P(x)$: x предложува задача
$Q(x)$: x дава тешка задача
$R(x)$: x дава задача со средна тежина
$S(x, y)$: x и y предложуваат задача заедно

1. $(\forall x)(P(x) \rightarrow (Q(x) \leftrightarrow \neg R(x)))$ – претпоставка
2. P(Бојан)$\rightarrow Q$(Бојан) – претпоставка
3. $\neg P$(Илинка)$\rightarrow \neg P$(Бојан) – претпоставка
4. P(Илинка)$\wedge P$(Бојан) $\rightarrow S$(Илинка, Бојан) – претпоставка
5. $(\forall x)(\forall y)(S(x, y) \rightarrow (R(x) \leftrightarrow R(y)))$ – претпоставка
6. P(Бојан) – претпоставка
7. Q(Бојан) – од 2 и 6
8. P(Илинка) – од 3 и 6
9. P(Бојан)$\wedge P$(Илинка) – од 6 и 8
10. S(Илинка, Бојан) – од 4 и 9
11. S(Илинка, Бојан) $\rightarrow$ (R (Илинка)$\leftrightarrow R$(Бојан)) – од 5 за x=Илинка, y=Бојан
12. R (Илинка)$\leftrightarrow R$(Бојан) – од 10 и 11
13. P(Бојан)$\rightarrow$ (Q(Бојан)$\leftrightarrow \neg R$(Бојан)) – од 1 за Бојан
14. Q(Бојан)$\leftrightarrow \neg R$(Бојан) - од 13 и 6
15. $\neg R$(Бојан) – од 14 и 7.
16. $\neg R$(Илинка) $\leftrightarrow \neg R$(Бојан) - од 12
17. $\neg R$(Илинка) - од 15 и 16
18. P(Илинка)$\rightarrow$ (Q(Илинка)$\leftrightarrow \neg R$(Илинка)) – од 1 за Илинка
19. Q(Илинка)$\leftrightarrow \neg R$(Илинка) – од 18 и 8
20. Q(Илинка) – од 19 и 17

Q(Бојан): Илинка дава тешка задача.

Задача 4.(6) Да се одреди вистинитоста на следните тврдења:

а) Ако 1+1=2, тогаш 2+2=4. ------Да------

б) 2+2=2 или 3+3=3. -----Не-----

в) 1+1=10 ако и само ако 2+2=20. -----Да-----

Задача 5.(10) Покажи дали важи $\overline{\bar{A} \cup (\bar{B} \cup \bar{C})} \subseteq A \oplus B \oplus C$.

$$\overline{\bar{A} \cup (\bar{B} \cup \bar{C})} = \bar{\bar{A}} \cap \overline{(\bar{B} \cup \bar{C})} = A \cap B \cap C$$

$$A \oplus B \oplus C = (A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C) \cup (A \cap B \cap C)$$

$$A \cap B \cap C \subseteq (A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C) \cup (A \cap B \cap C)$$
$$A \cap B \cap C \subseteq A \oplus B \oplus C$$

Задача 6.(10) Нека A={1, 2, 3, 4, 5, 6}, B={a, b, c, d, e, i} и C={l, m, n}, и нека се дадени пресликувања f: B $\rightarrow$ A и g: B $\rightarrow$C определени со $f: \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & i \\ 2 & 1 & 5 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ и $g: \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & i \\ m & n & l & l & l & m \end{pmatrix}$. Да се определи h(x) ако h(x) =g ° f^{-1}(x) и h^{-1}(D) ако D⊆C и D = {l, m}.

f е биекција, па постои инверзно пресликување
$f^{-1}: A \rightarrow B$
$$f^{-1}: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ b & a & e & i & c & d \end{pmatrix}$$
Кодоменот на f^{-1} е еднаков со доменот на g па можно е преслукување h
$h: A \rightarrow C$
$$h: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ n & m & l & m & l & l \end{pmatrix}$$

$h^{-1}(D)=\{2, 3, 4, 5, 6\}$

Задача 7.(10) Пресметај

$$12_4{}^{7D2_{16}} (mod\ 3023_8)$$

12_4 = 6
$7D2_{16}$ = 2002
3023_8 = 1555

$6^1 \equiv 6(mod\ 1555)$
$6^2 \equiv 36(mod\ 1555)$
$6^3 \equiv 216(mod\ 1555)$
$6^2 * 6^3 \equiv 7776(mod\ 1555)$
$6^5 \equiv 1(mod\ 1555)$
$6^{5^{400}} \equiv 1^{400}(mod\ 1555)$
$6^{2000} * 6^2 \equiv 1 * 36(mod\ 1555)$
$6^{2002} \equiv 36(mod\ 1555)$

*(*reshenie vo mathematica*)*
4^^12
16^^7D2
8^^3023
Mod[6^2002,1555]

Задача 8. (10) Да се докаже дека за секој природен број *n*≥1, бројот $4^n + 15n - 1$ е делив со 9.

Решение:
Задачата се докажува со математичка индукција.

1. За n=1 имаме $4^1 + 15 * 1 - 1 = 4 + 15 - 1 = 18$. Бидејќи 9|18 тврдењето важи за n=1.
2. Претпоставуваме дека тврдењето важи за n=k, т.е дека е точно $9|4^k + 15k - 1$.
3. Докажуваме дека тврдењето е точно за n=k+1, т.е дека важи $9|4^{k+1} + 15(k+1) - 1$
   Доказ:
   $4^{k+1} + 15(k+1) - 1 = 4^k * 4^1 + 15k + 15 - 1 = 4 * 4^k + 15k + 14 = 4\left(4^k + 15k - 1\right) + (-45k + 18)$
   Од чекор 2 (претпоставката) имаме дека $9|4^k + 15 * k - 1$. Од друга страна важи дека $9|(-45k + 18)$ од каде следува дека изразот $4\left(4^k + 15k - 1\right) + (-45k + 18)$ е делив со 9.
   Со тоа докажавме дека важи $9|4^{k+1} + 15(k+1) - 1$.

Со ова доказот е завршен и даденото твдење е точно.

Задача 9. (12) Дадено е подредувањето ({3, 4, 6, 9, 12, 18, 27, 36, 48, 60, 72}, |). Да се најдат:
а) (2) минималните елементи

Минимални елементи се: 3, 4

б) (2) максималните елементи

Максимални елементи се: 27, 48, 60, 72

в) (2) најголемиот елемент

Нема најголем елемент.

г) (2) најмалиот елемент

Нема најмал елемент.

д) (2) sup{3, 4}

sup{3, 4}=12

ѓ) (2) inf{3, 4}

inf{3, 4} нема

Задача 10.(10) Нека α е релација на *Z* дефинирана со x α y ⟷ x mod 6 = y mod 6. Да се определи фактор множеството на *Z* при релацијата α.

Z/ α *={{…-12, -6, 0, 6, 12,…}, {…-11, -5, 1, 7, 13, …}, {-10, -4, 2, 8, 14, …}, {-9, -3, 3, 9, 15, …}, {-8, -2, 4, 10, 16, …}, {-7, -1, 5, 11, 17, …}}*
Z/ α *={{x|x=6*k, kϵZ}, { x|x=6*k+1, kϵZ}, { x|x=6*k+2, kϵZ}, { x|x=6*k+3, kϵZ}, { x|x=6*k+4, kϵZ}, {x|x=6*k+5, kϵZ}}*

--- Оваа страна е за вежбање и тоа што ќе биде напишано тука нема да се прегледува ---

Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ во Скопје
ФАКУЛТЕТ ЗА ИНФОРМАТИЧКИ НАУКИ И КОМПЈУТЕРСКО ИНЖЕНЕРСТВО