ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА

Изведување на логички заклучоци

Introduction to Higher Mathematics - Lecture 4: Proof Techniques

http://www.youtube.com/watch?v=WSb9q4Rj2Bg

Правила на изведување на заклучоци

- Доказите во математиката претставуваат *важечки* (*валидни*) *аргументи* кои ја покажуваат точноста на едно математичко тврдење.
- Аргумент – низа од изјави кои завршуваат со заклучок.
- Важечки – значи дека заклучокот, или последната изјава на аргументот, мора да следува од вистинитоста на претходните изјави, или претпоставки на аргументот.
- Значи, еден аргумент е *валиден* (*важечки*) акко не е возможно сите претпоставки да се точни, а заклучокот да не е точен.

Докази

- Во математиката, доказ е:
  - ***Правилен*** (точен, коректен, добро образложен, логички точен) и ***комплетен*** (јасен, детален) аргумент кој ригорозно и непобитно ја потврдува вистинитоста на математичкото тврдење.
- Зошто аргументот мора да биде правилен и комплетен?
  - ***Точноста*** нè спречува да се залажуваме самите себе.
  - ***Комплетноста*** овозможува било кој да го верификува резултатот.
- Во овој предмет (и во математиката воопшто) се бараат високи стандарди за точност и комплетност!

Математички докази

- Методите на математички аргументи (односно методите на докажување) може да се формализираат како ***правила на логички заклучоци***.
- Математичките докази можат формално да се претставаат како дискретни структури.
- Ќе разгледаме ***правилни*** и ***лажни*** (привидни, сомнителни) правила на изведување на заклучоци и неколку методи на докажување.

Примена на доказите

- Давање логички аргументи се сретнува при комуникација во која било област на проучување.
- Основната активност во математиката е откривање, толкување и објаснување, преку докази, на нови теореми.
- Докажувањето на теореми има примена во верификација на програми, сигурност на компјутерски системи, системи за автоматско размислување, итн.
- Докажувањето на одредена теорема нѝ овозможува да се потпреме на нејзината точност дури и во најкритичните сценарија.

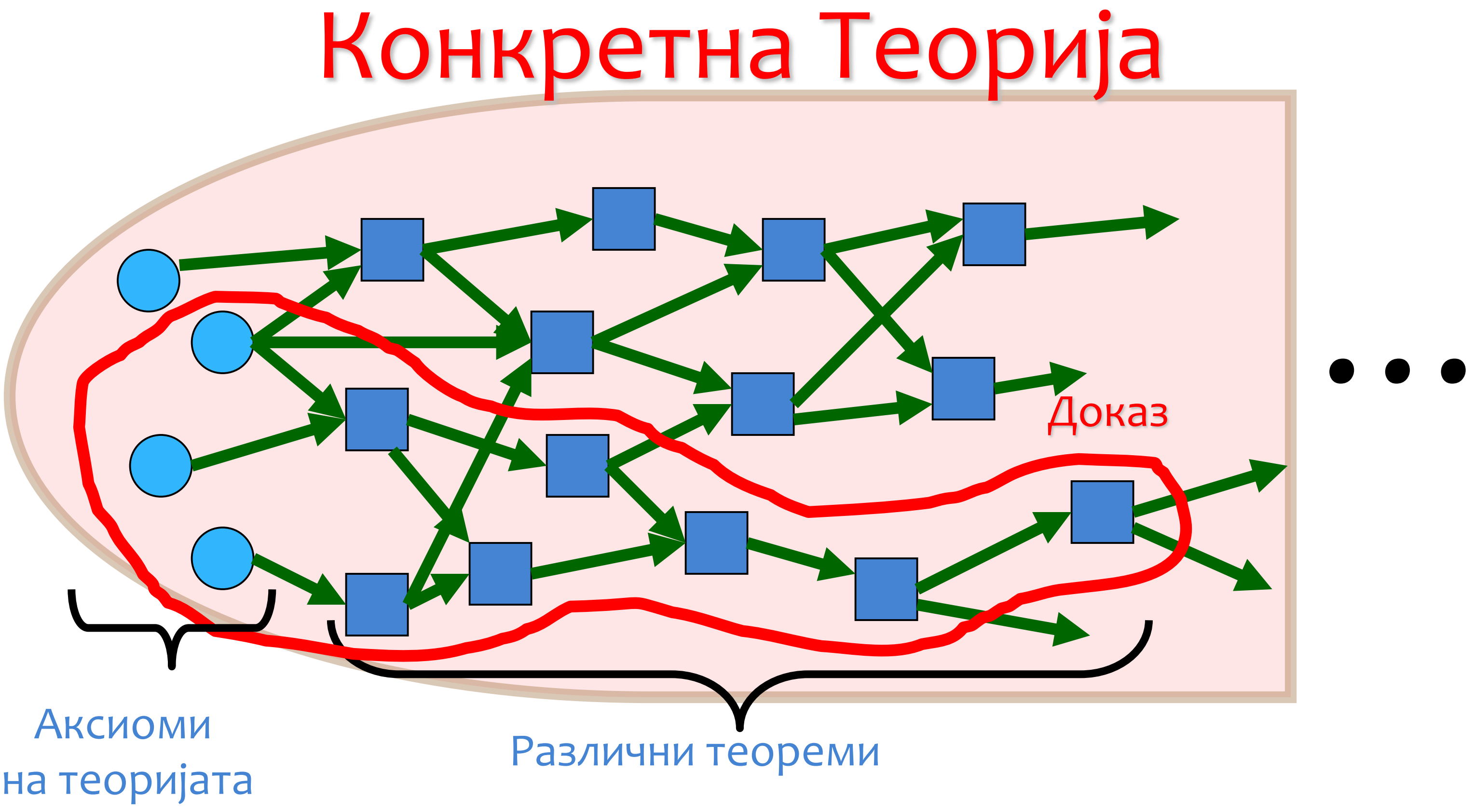
Терминологија

- ***Теорема***
  - Тврдење кое е докажано дека е точно.
- ***Аксиоми, постулати, хипотези, претпоставки***
  - Претпоставки (честопати недокажани) кои ги дефинираат структурите за кои размислуваме.
- ***Правила на изведување заклучоци***
  - Облици на логички точна дедукција од хипотези до заклучоци.

Терминологија

- ***Лема*** – Теорема која се користи како помошно тврдење во докажување на друга теорема.
- ***Последица*** – Теорема која (лесно, директно) се докажува дека следи од докажана теорема.
- ***Верување (претпоставка, хипотеза)*** – Тврдење чија вистинитост не е докажана (обично базирано на експерименти и интуиција).
- ***Теорија*** – Множество на сите теореми кои можат да се докажат од дадено множество аксиоми.

Визуелизација на теорија



Дефиниции

- ***Аргумент*** во исказната логика е низа од искази.
- Сите, освен последниот исказ, се нарекуваат **претпоставки**.
- Финалниот исказ се нарекува **заклучок** или **последица**.

Еден аргумент е валиден (важечки) ако од вистинитоста на претпоставките следува дека заклучокот е точен.

Претпоставки → Заклучок

$$p \rightarrow q$$

Аргументентен облик

- ***Аргументентен облик*** во исказната логика е низа од формули во кои се сретнуваат исказни променливи.
- Еден аргументентен облик е точен ако, кога ќе се заменат исказните променливи во претпоставките со конкретни искази, последицата е точна, ако сите претпоставки се точни.
- Од дефиницијата на точен аргументентен облик, добиваме дека аргументентен облик $p_1, p_2, \ldots, p_n \Rightarrow q$, со претпоставки $p_1, p_2, \ldots, p_n$ и заклучок q е точен, кога

$(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n) \rightarrow q$ е тавтологија.

Пример 1

- Нека се дадени следниве два искази:
  - “Вие сте во овој клас.”
  - “Ако сте во овој клас, ќе добиете оценка.”

  Според тоа,
  - “Вие ќе добиете оценка.”

$$\begin{array}{ll} & p \\ & p \to q \\ \hline \therefore & q \end{array}$$

Или

$$p,\ p \to q \Rightarrow q$$

Проверка за пример 1

- Да го разгледаме $(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$,

p	q	$p \rightarrow q$	$p \wedge (p \rightarrow q))$	$(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$
T	T	T	T	T
T	$\perp$	$\perp$	$\perp$	T
$\perp$	T	T	$\perp$	T
$\perp$	$\perp$	T	$\perp$	T

- $p, p \rightarrow q \Rightarrow q$

Правила на изведување заклучоци

- Докажување со помош на вистинитосни таблици може да е долготрајно и комплицирано.
- Затоа можеме прво да ја покажеме точноста на релативно едноставни аргументни облици, наречени правила на изведување на заклучоци.
- Овие правила можат да се користат како блокови во конструкција на посложени аргументни облици.

Правила на изведување заклучоци

Правило на изведување заклучоци

Облик или начин на покажување дека, ако знаеме дека дадено множество од претходни тврдења од определен облик се сите точни, тогаш одредено последователно тврдење е точно.

претходно тврдење 1
<u>*претходно тврдење 2 …*</u>
$\therefore$ *последица*

("$\therefore$" се чита "според тоа")

Правила на изведување заклучоци

Секое логичко правило на изведување на заклучоци соодветствува на импликација која е **тавтологија**.

Правилото:

претходно тврдење 1
претходно тврдење 2 …

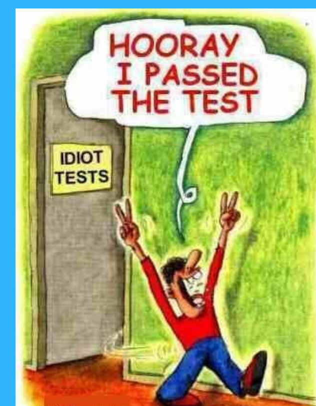
$\therefore$ *последователно тврдење*

соодветствува на тавтологија:

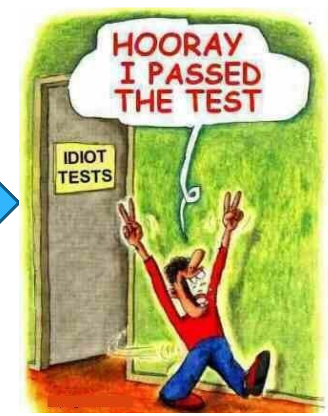
$$((\textit{претх. 1}) \land (\textit{претх. 2}) \land \ldots) \to \textit{последоват. тврдење}$$

Модус Поненс и Модус Толенс

Ако го положам тестот, ќе бидам среќен



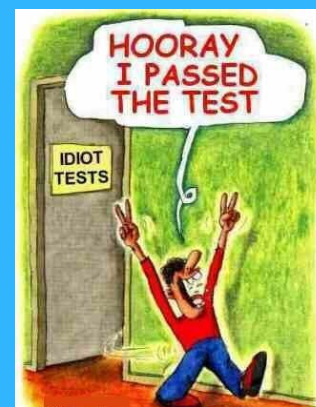
Го положив тестот



Среќен сум!

Модус Поненс и Модус Толенс

Ако го положам тестот, ќе бидам среќен



Не сум среќен

Не го положив тестот

Модус Поненс и Модус Толенс

- Најважни правила на изведување на заклучоци во исказната логика:

$$\left.\begin{array}{l} p \\ \underline{p \to q} \\ \therefore q \end{array}\right\}$$

Правило на Модус Поненс (Закон за одвојување)

"Начин на потврдување"

$$\left.\begin{array}{l} \neg q \\ \underline{p \to q} \\ \therefore \neg p \end{array}\right\}$$

Правило на Модус Толенс

"Начин на негирање"

Пример за Модус Поненс

- Да ги разгледаме исказите:
  - “Вие сте во овој клас.”
  - “Ако сте во овој клас, ќе добиете оценка.”

Нека p: “Вие сте во овој клас.”

Нека q: “Вие ќе добиете оценка.”

Со Модус Поненс, можеме да заклучиме дека вие ќе добиете оценка.

Модус Толенс - пример 2

- Нека се дадени следните два искази:
  - “Нема да добиете оценка.”
  - “Ако сте во овој клас, ќе добиете оценка.”

Нека p: “Вие сте во овој клас.”

Нека q: “Вие ќе добиете оценка.”

Со Модус Толенс, можеме да заклучиме дека не сте во овој клас.

Внимание !!!

- Може да се случи точен аргумент да доведе до неточен заклучок ако една или повеќе од претпоставките се неточни.

  “Ако имате администраторски привилегии, тогаш можете да ги смените параметрите на Moodle.”

  “Имате администраторски привилегии.“

  ∴ “Можете да ги смените параметрите на Moodle."

Правила

- $$\begin{array}{rl} & p \\ \hline \therefore & p \vee q \end{array}$$

  Правило на собирање

- $$\begin{array}{rl} & p \wedge q \\ \hline \therefore & p \end{array}$$

  Правило на упростување

- $$\begin{array}{rl} & p \\ & q \\ \hline \therefore & p \wedge q \end{array}$$

  Правило на конјункција

- $$\begin{array}{rl} & p \vee q \\ & \neg p \vee r \\ \hline \therefore & q \vee r \end{array}$$

  Правило за резолуција

Правила - Силогизми

- $$\begin{array}{rl} & p \to q \\ & q \to r \\ \hline \therefore & p \to r \end{array}$$

  Хипотетички силогизам

- $$\begin{array}{rl} & p \vee q \\ & \neg p \\ \hline \therefore & q \end{array}$$

  Дисјунктивен силогизам

Користење на логички еквиваленции

- Во текот на изведувањето на последиците, исказните формули во аргументот може да се заменат со соодветни логички еквивалентни формули. На пример, нека имаме претпоставки

  $$p \to q, \quad p \vee r, \quad \neg q.$$

  Следува дека имаме еквивалентни логички тврдења $\neg p \vee q$ и $p \vee r$, па според правилото за резолуција, како последица имаме $q \vee r$. Бидејќи q е $\perp$, заклучуваме дека последица на претпоставките е тврдењето r.

Формален доказ

- ***Формален доказ*** на заклучок C, при дадени претпоставки $p_1, p_2, \ldots, p_n$, се состои од низа од чекори, од кои секој применува некое правило на изведување на заклучоци на претпоставките или на претходно докажаните тврдења, за да се добие ново точно тврдење (последицата).
- Доказот покажува дека ако претпоставките се точни, тогаш последицата е точна.

Пример 3

- Дадени се следните претпоставки:
  - “Попладнево е сончево и е потопло од вчера.”
  - “Ќе одиме во кафуле само ако не е сончево.”
  - “Ако не одиме во кафуле, ќе одиме на прошетка.”
  - “Ако одиме на прошетка, ќе бидеме дома пред зајдисонце.”

Дали од ова следува дека “Ќе бидеме дома пред зајдисонце.”?

Нека

p = “Попладнево е сончево.” q = “Потопло е од вчера.”

r = “Ќе одиме во кафуле.” s = “Ќе одиме на прошетка.”

t = “Ќе бидеме дома пред зајдисонце.”

Дали $((p \wedge q) \wedge (r \rightarrow \neg p) \wedge (\neg r \rightarrow s) \wedge (s \rightarrow t)) \Rightarrow t$?

Доказ за пример 3

$((p \wedge q) \wedge (r \rightarrow \neg p) \wedge (\neg r \rightarrow s) \wedge (s \rightarrow t)) \Rightarrow t$

1.	$p \wedge q$	1$^{\text{та}}$ претпоставка (хипотеза)
2.	p	Упростување на чекор 1
3.	$r \rightarrow \neg p$	2$^{\text{та}}$ хипотеза
4.	$\neg\neg p$	Закон за двојна негација на чекор 2
5.	$\neg r$	Модус Толенс со чекорите 3 и 4
6.	$\neg r \rightarrow s$	3$^{\text{та}}$ хипотеза
7.	s	Модус Поненс со чекорите 5 и 6
8.	$s \rightarrow t$	4$^{\text{та}}$ хипотеза
9.	t	Модус Поненс со чекорите 7 и 8

Пример 4

- "Ако не врне или нема магла, тогаш ќе се одржи трката и ќе продолжат рекламите."

  $(\neg r \vee \neg f) \rightarrow (s \wedge d)$

- "Ако се одржи трката ќе биде доделен трофејот."

  $s \rightarrow t$

- "Трофејот не е доделен."

  $\neg t$

Може ли да заклучите дека: "Врнело."?

Доказ за Пример 4

$(\neg r \vee \neg f) \rightarrow (s \wedge d), s \rightarrow t, \neg t \Rightarrow r$

1.	$\neg t$	3[та] претпоставка
2.	$s \rightarrow t$	2[ра] хипотеза
3.	$\neg s$	Модус Толенс со чекорите 1 и 2
4.	$(\neg r \vee \neg f) \rightarrow (s \wedge d)$	1[ва] хипотеза
5.	$\neg(s \wedge d) \rightarrow \neg(\neg r \vee \neg f)$	Контрапозиција на чекор 4
6.	$(\neg s \vee \neg d) \rightarrow (r \wedge f)$	Де Морганов зак. и зак. за двојна негација
7.	$\neg s \vee \neg d$	Правило на собирање за чекор 3
8.	$r \wedge f$	Модус Поненс со чекорите 6 и 7
9.	r	Правило за упростување на чекор 8

Пример 5

- Да се провери точноста на следниов аргумент:

  „Ако си информатичар, тогаш си бистар. Ти си бистар и богат. Според тоа, ако си богат, тогаш си информатичар“

- Дефинираме:

  p: Ти си информатичар.

  q: Ти си бистар.

  r : Ти си богат.

- Претпоставки се: $p \rightarrow q$ и $q \wedge r$.
- Заклучок е: $r \rightarrow p$.

Вообичаени заблуди

- **Заблуда** е правило на изведување на заклучоци или друг метод на докажување кој не е логички валиден.
  - Може да даде погрешен заклучок!
- Заблуда на потврдување на заклучокот:
  - "$p \rightarrow q$ е точно, и q е точно, затоа мора p да е точно. "
    - Не, бидејќи $\bot \rightarrow \mathbf{T}$ е точно.
- Заблуда на негирање на хипотезата:
  - "$p \rightarrow q$ е точно и p е неточно, тогаш мора q да е неточно."
    - Не, повторно затоа што $\bot \rightarrow \mathbf{T}$ е точно.

Правила за заклучоци за квантификатори

- $$\frac{\forall x\, P(x)}{\therefore P(o)}$$

  Универзално конкретизирање

  (замена на конкретен објект o)

- $$\frac{P(g)}{\therefore \forall x\, P(x)}$$

  (за g општ елемент од доменот)

  Универзално обопштување

- $$\frac{\exists x\, P(x)}{\therefore P(c)}$$

  Егзистенцијално конкретизирање

  (замена со некоја константа c)

- $$\frac{P(o)}{\therefore \exists x\, P(x)}$$

  (замена на конкретниот објект o)

  Егзистенцијално обопштување

Пример 6

- Дадени се претпоставките:
  - “Лидија, студент на еден факултет, има црвено ферари.”
  - “Секој кој има црвено ферари има добиено казна за брзо возење.”
- Можете ли да заклучите дека: “Некој студент има добиено казна за брзо возење“?

Домен се сите луѓе
S(x): x е студент
F(x): x има црвено ферари
T(x): x има добиено казна за брзо возење

S(Лидија) и F(Лидија)
$\forall x\, (F(x) \rightarrow T(x))$

$\exists x\, (S(x) \wedge T(x))$

Доказ на Пример 6

1.	$\forall x\,(F(x) \rightarrow T(x))$	$2^{та}$ хипотеза
2.	F(Лидија) → T(Лидија)	Универзална конкретизација на чекор 1
3.	S(Лидија) ∧ F(Лидија)	$1^{та}$ хипотеза
4.	S(Лидија)	упростување на чекор 3
5.	F(Лидија)	упростување на чекор 3
6.	T(Лидија)	Модус Поненс за чекорите 2 и 5
7.	S(Лидија) ∧ T(Лидија)	Конјукција на чекорите 4 и 6
8.	$\exists x\,(S(x) \wedge T(x))$	Егзистенцијално обопштување на чекор 7

Значи покажавме дека "Некој студент има добиено казна за брзо возење."

Пример 7

- Да се покаже дека следниот аргумент е валиден: „Сите студенти одат на забави. Некои студенти премногу пијат. Според тоа, некои луѓе кои премногу пијат одат на забави.“
- Домен се сите луѓе

$S(x)$: *x е студент,*

$D(x)$: *x премногу пие*

$P(x)$: *x оди на забави.*

- Претпоставки: $\forall x[S(x) \to P(x)]$ *и* $\exists x[S(x) \land D(x)]$
- Заклучок: $\exists x[D(x) \land P(x)]$

Доказ на Пример 7

1. $\exists x[S(x) \land D(x)]$	претпоставка
2. $S(a) \land D(a)$	егзистенцијална конкретизација
3. $\forall x[S(x) \rightarrow P(x)]$	претпоставка
4. $S(a) \rightarrow P(a)$	универзална конкретизација на 3
5. $S(a)$	симплификација на 2
6. $P(a)$	Модус Поненс на 4 и 5
7. $D(a)$	симплификација за 2
8. $D(a) \land P(a)$	конјункција на 6 и 7
9. $\exists x[D(x) \land P(x)]$	егзистенцијално обопштување на 8