

Дискретна математика 1
Испит Јуни 2013, ГРУПА 1

Задача 1. (2+2+2+2) Со користење на исказите p „Пораката е скенирана за вируси“ и q „Пораката е добиена од непознат сервер“ да се изразат спецификациите:

- а) Пораката се скенира за вируси кога се добива од непознат сервер.
- б) Пораката се доби од непознат сервер, но не се скенира за вируси,
- в) Нужно е да се скенира пораката за вируси кога се добива од непознат сервер.
- г) Кога пораката не е пуштена од непознат сервер не се скенира за вируси.

Задача 2. (3+5) а) Дефинирај задоволлива формула!

- б) Покажи дека исказната формула $((p \sqcup r) \vee (q \sqcup r)) \sqcup (p \wedge q \wedge \neg r)$ е контрадикција.

Задача 3: (8) Користејќи предикати и квантификатори запишете ја формално реченицата, како и нејзината негација: „Кога на дискот има помалку од 10 мегабајти слободен простор, до секој корисник се испраќа предупредување.“

Задача 4: (8) Да се запишат со исказни формули следниве аргументи: Попладнево е облачно и постудено од вчера. Ќе играме фудбал само ако не е облачно. Ако не играме фудбал, тогаш ќе играме кошарка. Ако играме кошарка, до ручек ќе бидеме дома.

Потоа да се изведе заклучокот: До ручек ќе бидеме дома.

Задача 5: (3+3+8) а) Напиши ги партитивните множества на секои од множествата:
i) $\{\emptyset\}$, ii) $P(\emptyset)$.

- б) За кои множества A и B е точно равенството $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$?

- в) Докжи дека $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$, каде $A, B \subseteq T$, а $f: S \rightarrow T$.

Задача 6. (6) Пресметај: $\sum_{j=3}^{10} (3^{j+1} - 3^j)$

Задача 7. (5+3) а) Пресметај $123^{12} \bmod 11$.

- б) Добиениот резултат претстави го во броен систем со основа 4.

Задача 8. (10) Со помош на принципот на математичка индукција докажи дека за секој природен број $k \geq 1$ важи равенството

$$\sum_{n=1}^k \frac{1}{2^n} = \frac{2^k - 1}{2^k}$$

Задача 9. (2+5+6+5)

а) Да се дефинира транзитивна релација на произволно непразно множество M .

Нека $A = \{6, 7, 9, 4, 1\}$ и α е релација на A дефинирана со: $x \alpha y \iff x \equiv y \pmod{3}$.

б) Заокружи го точниот одговор

1. $\alpha \in R$
2. $\alpha \in S$
3. $\alpha \in T$
4. $\alpha \in AS$
5. $\alpha \in AR$

в) Релацијата α проширија до еквиваленција α^* .

г) Најди го A/α^*

Задача 10. (4+2+6)

а) Да се докаже дека релацијата α дефинирана на множеството природни броеви $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ со $x \alpha y$ ако $x|y$ е релација за подредување.

На множеството $M = \{1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 20\}$ и релацијата α од а):

б) Да се нацрта Хасеовиот дијаграм

в) Пополни:

најмал елемент е _____

најголем елемент е _____

максимални елементи се _____

минимални елементи се _____

г) Пополни:

Ако $B = \{9, 10\}$

$B^* =$ _____

$\inf B =$ _____

Испит Јуни 2013, ГРУПА 2

Задача 1. (2+2+2+2) Со користење на исказите p „Корисникот внесе точна лозинка“, q „Дозволен е пристап“ и r „Корисникот плати претплата“ да се изрзат спецификациите:

- а) Корисникот плати претплата, но не внесе точна лозинка.
- б) Пристап е дозволен кога корисникот платил претплата и внесол точна лозинка.
- в) Пристап не е дозволен ако корисникот не платил претплата.
- г) Ако корисникот не внесол точна лозинка но платил претплата, тогаш пристапот е дозволен.

Задача 2. (3+5) а) Дефинирај тавтологија!

- б) Покажи дека исказната формула $(\neg p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (q \wedge \neg (p \vee r))$ е контрадикција.

Задача 3: (8) Користејќи предикати и квантификатори запишете ја формално реченицата, како и нејзината негација: „За документот не може да се направи ‘бекап’ ако на системот постои логиран корисник.“

Задача 4: (8) Да се запишат со исказни формули следниве аргументи: Програмата ќе ја напишам ако ми пуштиш е-мејл порак. Ако не ми пуштиш е-мејл, ќе си легнам порано. Ако си легнам порано, наутро ќе станам свеж.

Потоа да се изведе заклучокот: Ако не ја напишам програмата, наутро ќе станам свеж.

Задача 5: (3+3+ 8) а) Напиши ги партитивните множества на секои од множествата:
i) \emptyset , ii) $P(\{\emptyset\})$.

- б) За кои множества A и B е точно равенството $A \times B = B \times A$?

- в) Докажи дека $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$, каде $A, B \subseteq T$, а $f: S \rightarrow T$.

Задача 6. (6) Пресметај: $\sum_{j=1}^{10} (2^{j+1} - 2^j)$.

Задача 7. (5+3) а) Пресметај $146^{11} \bmod 12$.

- б) Добиениот резултат претстави го во броен систем со основа 8.

Задача 8. (10) Со помош на принципот на математичка индукција докажи дека за секој природен број $k \geq 1$ важи равенството

$$\sum_{n=1}^k \frac{1}{n(n+1)} = \frac{k}{k+1}$$

Задача 9. (2+5+6+5)

а) Да се дефинира нерелфлексивна релација на произволно непразно множество M .

Нека $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ и α е релација на A дефинирана со: $x \alpha y \iff |x - y| < 3$.

б) Заокружи го точниот одговор

1. $\alpha \in R$
2. $\alpha \in S$
3. $\alpha \in T$
4. $\alpha \in AS$
5. $\alpha \in AR$

в) Релацијата α проширија до еквиваленција α^* .

г) Најди го A/α^*

Задача 10. (4+2+6)

а) Да се докаже дека релацијата α дефинирана на множеството природни броеви $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ со $x \alpha y$ ако $x|y$ е релација за подредување.

На множеството $M = \{2, 3, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 20\}$ и релацијата α од а):

б) Да се нацрта Хасеовиот дијаграм

в) Пополни:

најмал елемент е _____

најголем елемент е _____

максимални елементи се _____

минимални елементи се _____

г) Пополни:

Ако $B = \{2, 3\}$

$B^* =$ _____

$\inf B =$ _____