НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ

«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ

ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Факультет прикладної математики

Кафедра прикладної математики

Звіт

із курсової роботи

із дисципліни «Методи оптимізацій»

на тему

*«Безумовна та умовна оптимізації»*

|  |  |
| --- | --- |
| Виконав: | Керівник: |
| студент групи КМ-03  Орленко Антон Сергійович | *Ладогубець Т. С.* |

Київ – 2022

Зміст

[1. Постановка задачі 3](#_Toc136156376)

[2. Теоретична частина 4](#_Toc136156377)

[3. Хід роботи 5](#_Toc136156378)

[3.1. Безумовна оптимізація 5](#_Toc136156379)

[3.1.1. Визначення оптимального кроку обчислення похідних 6](#_Toc136156380)

[3.1.2. Визначення оптимальної схеми обчислення похідних 8](#_Toc136156381)

[3.1.3. Визначення оптимального значення параметру в алгоритмі Свенна 10](#_Toc136156382)

[3.1.4. Визначення оптимальної точності методу одновимірного пошуку 12](#_Toc136156383)

[3.1.5. Визначення оптимального методу одновимірного пошуку 14](#_Toc136156384)

[3.1.6. Визначення оптимального критерію закінчення 16](#_Toc136156385)

[3.1.7. Визначення необхідності наявності рестартів 18](#_Toc136156386)

[3.2. Умовна оптимізація 19](#_Toc136156387)

[3.2.1. Метод штрафних функцій в залежності від розташування локального мінімуму 19](#_Toc136156388)

[3.2.2. Метод штрафних функцій в залежності від виду допустимої області 19](#_Toc136156389)

# 1. Постановка задачі

Дослідити збіжність метода Пірсона (алгоритм 2) при мінімізації функції Розенброка в залежності від:

1. Величини кроку h при обчисленні похідних.
2. Схеми обчислення похідних.
3. Виду методу одновимірного пошуку (ДСК-Пауелла або Золотого перетину).
4. Точності методу одновимірного пошуку.
5. Значення параметру в алгоритмі Свена.
6. Вигляду критерію закінчення.

().

1. Наявності рестартів.

Використати метод штрафних функцій (метод зовнішньої точки) для умовної оптимізації в залежності від:

1. Розташування локального мінімума (всередині/поза допустимою областю).
2. Виду допустимої області (випукла/невипукла).

# 2. Теоретична частина

Алгоритм Пірсона (2) – квазіньютонівський алгоритм, що базується на апроксимації матриці, оберненої до матриці Гессе в точці. Вперше опублікований у журналі «The Computer Journal» у 1969р. Формула, що використовується для обчислення

Обчислення величини кроку (λ) здійснюється з використанням алгоритму Свенна для знаходження інтервалу невизначеності, та методу золотого перерізу або ДСК-Пауела для знаходження конкретного значення на цьому відрізку.

Формула для знаходження інтервалу невизначеності в алгоритмі Свенна:

# 3. Хід роботи

Код для програми, використаної для виконання курсової можна знайти за посиланням: https://github.com/Retro52/MOCourse

## 3.1. Безумовна оптимізація

Перелік початкових налаштувань:

* Початковою точкою було обрано взяти [2 , 2]
* Початкове значення в алгоритмі Свенна:
* Початковий крок похідних:
* Початкова схема обрахунку похідних: центр
* Алгоритм одновимірного пошуку: золотий перетин
* Точність одновимірного пошуку:
* Очікувана точність:
* Наявність рестартів: так, 100 максимум
* Максимальна дозволена кількість ітерацій алгоритму Пірсона: 100000

### 3.1.1. Визначення оптимального кроку обчислення похідних

Було обрано наступний набір можливих значень h:

[1, 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, 1e-05, 1e-06, 1e-07, 1e-08, 1e-09, 1e-10]

В результаті було отримано наступні результати:

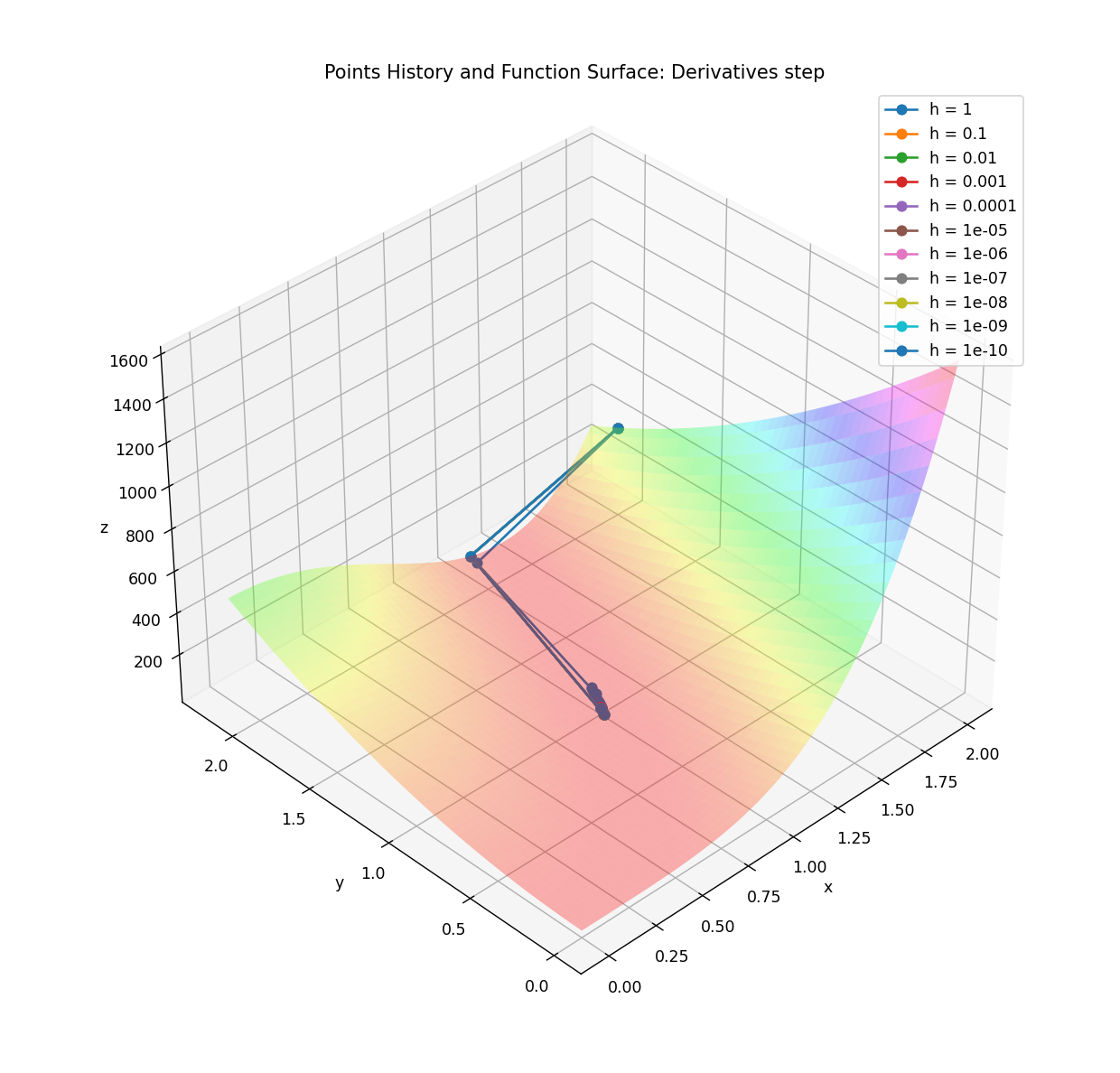


Рисунок 1 – шлях пошуку мінімуму в залежності від кроку похідних

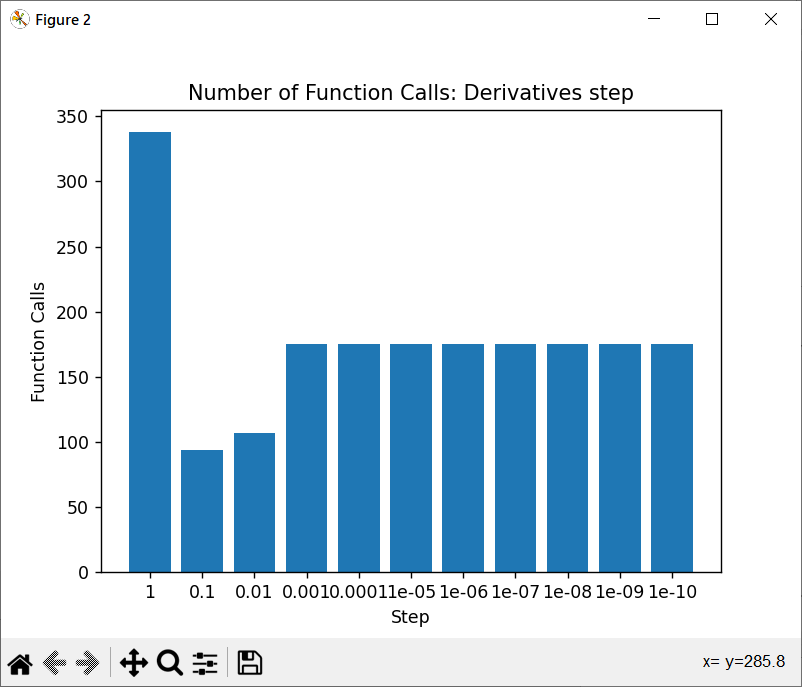
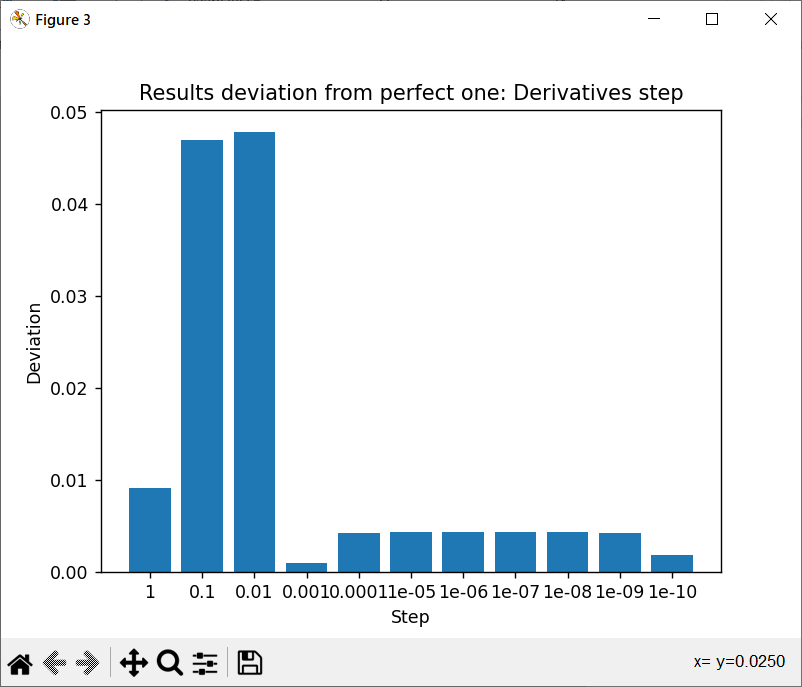
 

Рисунок 2 – кількість викликів функції в залежності від кроку похідних, та відхилення від ідеального розв’язку

Таблиця результатів:

Таблиця 1 – Результат тестування кроку обчислення похідних

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| h | Результат | Кількість викликів функції | Відхилення | F(x) |
| 1 | [0.99815752, 0.99106306] | 338 | 0.009124888558908533 | 0.0027652915362381923 |
| 0.1 | [0.9787037 , 0.95805489] | 94 | 0.04704173422541513 | 0.0004572946548854491 |
| 0.01 | [0.97834603, 0.9573132 ] | 107 | 0.04786498671996907 | 0.00047121212974840374 |
| 0.001 | [1.00019211, 1.00093298] | 175 | 0.0009525556292209975 | 3.01476057307639e-05 |
| 0.0001 | [0.99771406, 0.99640939] | 175 | 0.00425652278246184 | 0.00010049419151229233 |
| 1e-05 | [0.99767833, 0.9963414 ] | 175 | 0.004333077104449727 | 0.00010130387801978295 |
| 1e-06 | [0.99767817, 0.99634111] | 175 | 0.004333398600978763 | 0.00010130758064496741 |
| 1e-07 | [0.99767932, 0.9963433 ] | 175 | 0.004330935111146891 | 0.00010128141394159069 |
| 1e-08 | [0.99768256, 0.99634946] | 175 | 0.0043240018744388 | 0.00010120834667222108 |
| 1e-09 | [0.99770451, 0.99639125] | 175 | 0.004276957151178096 | 0.00010071179548206697 |
| 1e-10 | [0.99886943, 0.99858428] | 175 | 0.0018117473458245884 | 7.253519294337025e-05 |

Як можна побачити, кількість викликів функцій лишається приблизно на однаковому рівні (крім кроку в 1), у той час як найкраще наближення дає значення у 0.001.

В результаті обираємо значення 0.001.

### 3.1.2. Визначення оптимальної схеми обчислення похідних

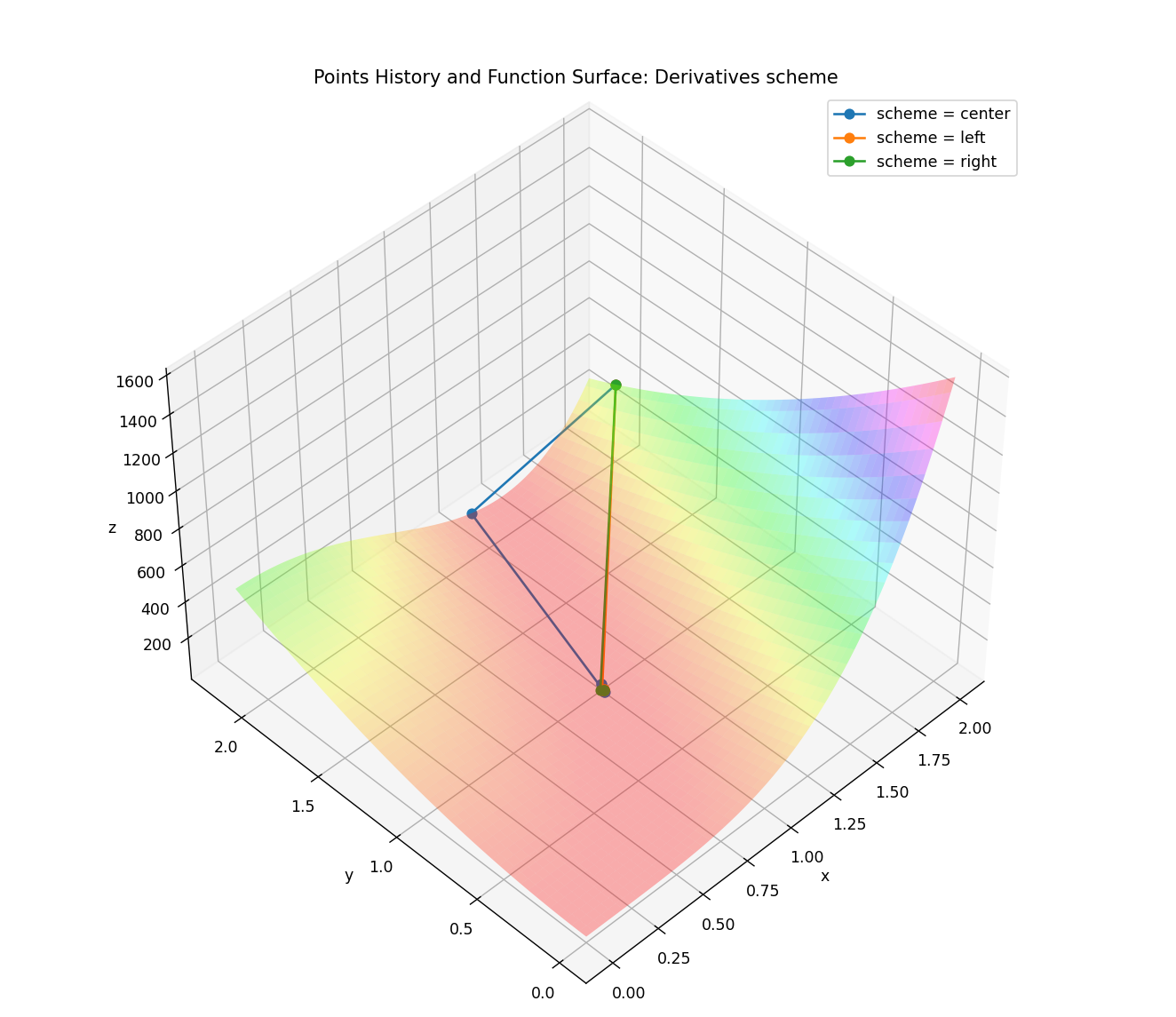


Рисунок 3 - шлях пошуку мінімуму в залежності від схеми обчислення похідних

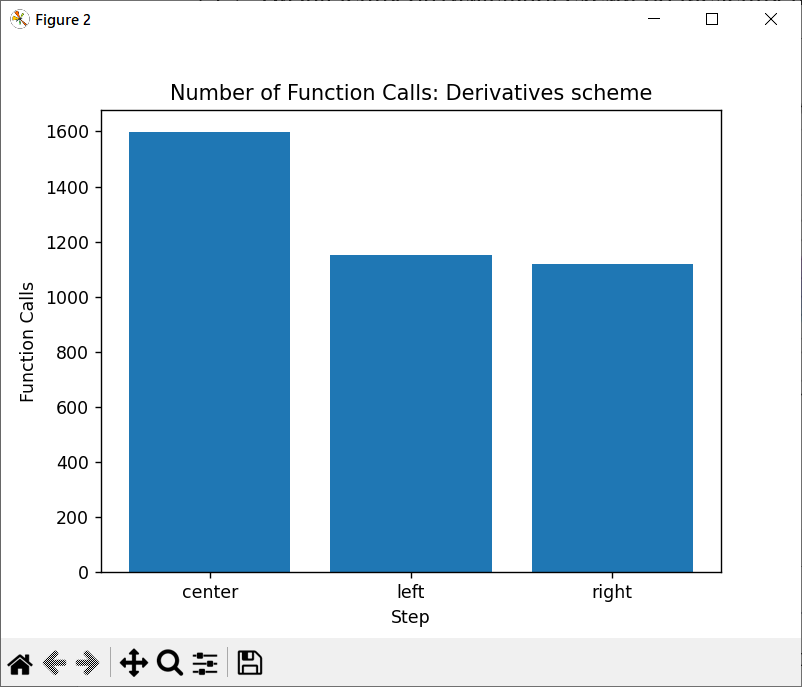
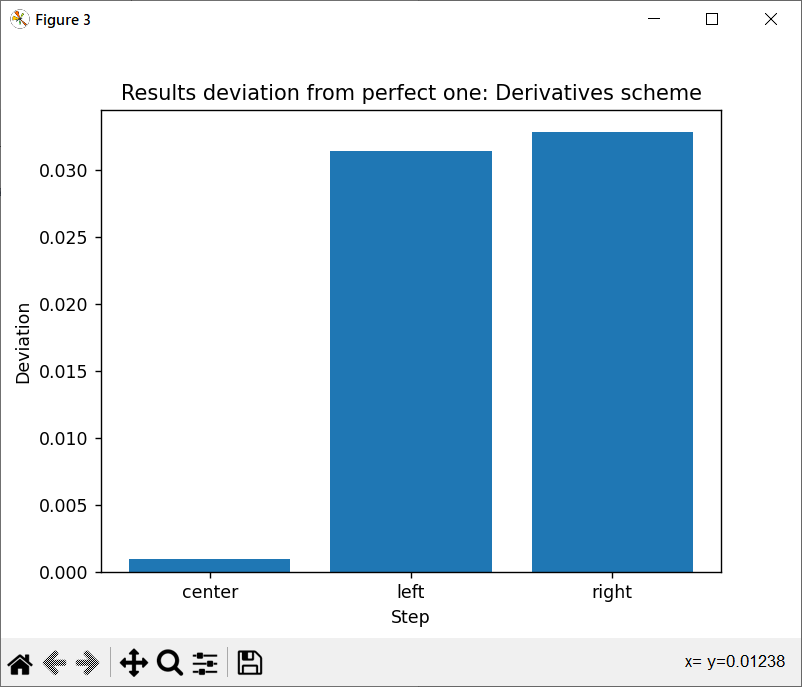
 

Рисунок 4 - кількість викликів функції в залежності від схеми обчислення похідних, та відхилення від ідеального розв’язку

Таблиця результатів:

Таблиця 2 - Результат тестування різних схем обчислення похідних

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Схема | Результат | Кількість викликів функції | Відхилення | F(x) |
| Центральна | [1.00019211, 1.00093298] | 175 | 0.0009525556292209975 | 3.01476057307639e-05 |
| Ліва | [0.98585819, 0.97200442] | 108 | 0.031364676232352076 | 0.00020076590711436186 |
| Права | [0.98518953, 0.9707299 ] | 75 | 0.03280379415667225 | 0.0002210790088010937 |

Не зважаючи на те, що ліва та праві схеми обчислення похідних дають меншу кількість обчислення функцій, вони й близько не наближаються до точності, що дає центральна схема. Отже, обираємо центральну схему обчислення.

### 3.1.3. Визначення оптимального значення параметру в алгоритмі Свенна

Наступним тестом я вирішив обрати тест коефіцієнту Свенна, адже, на мою думку, він має чи не найбільший вплив на точність обчислень. Для тестування було обрано наступні значення:

[1, 1e-1, 1e-2, 1e-3, 1e-4, 1e-5, 1e-6, 1e-7, 1e-8, 1e-9, 1e-10]

Після тестування отримано наступні результати:

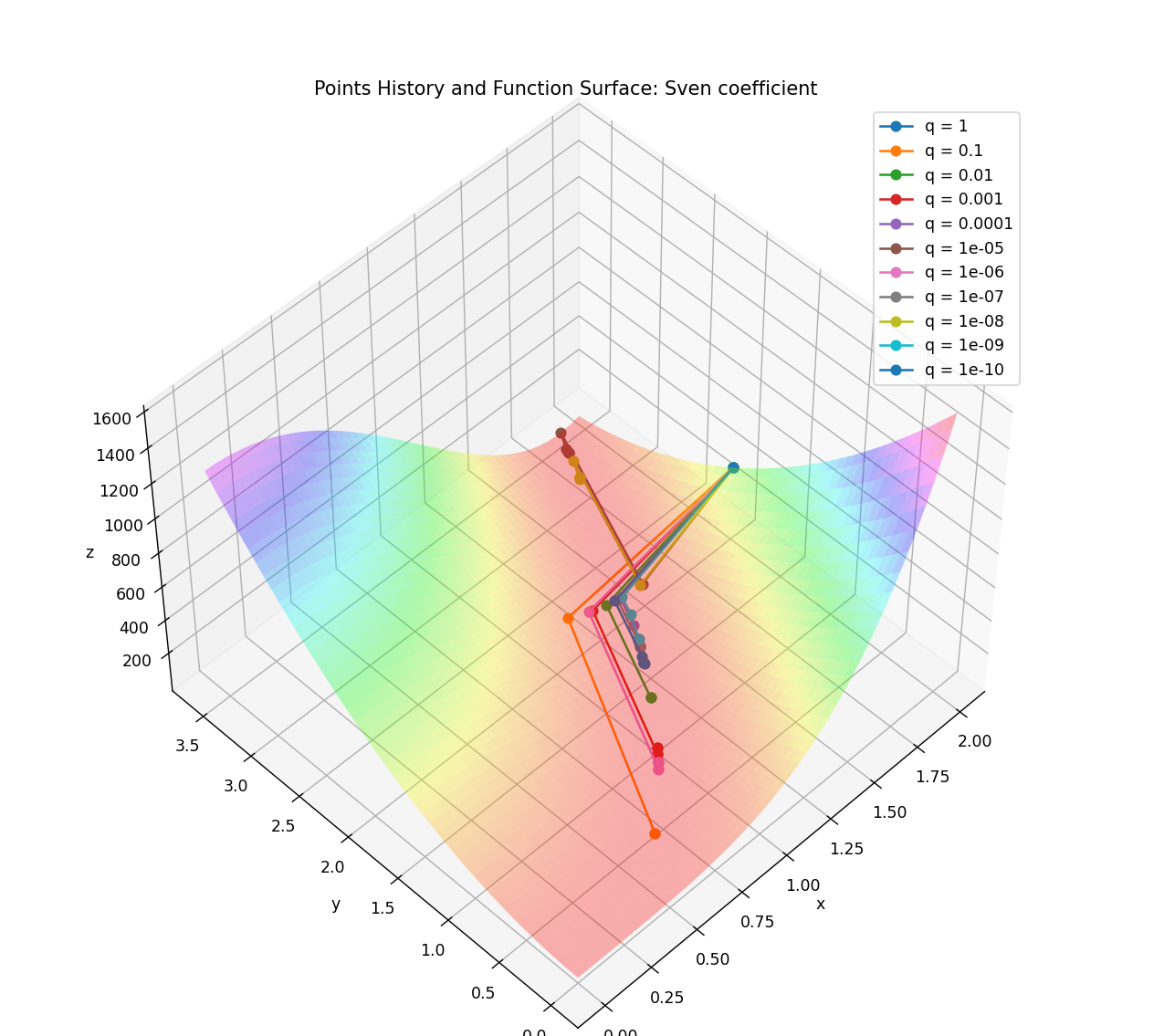


Рисунок 5 - шлях пошуку мінімуму в залежності від значення в алгоритмі Свенна

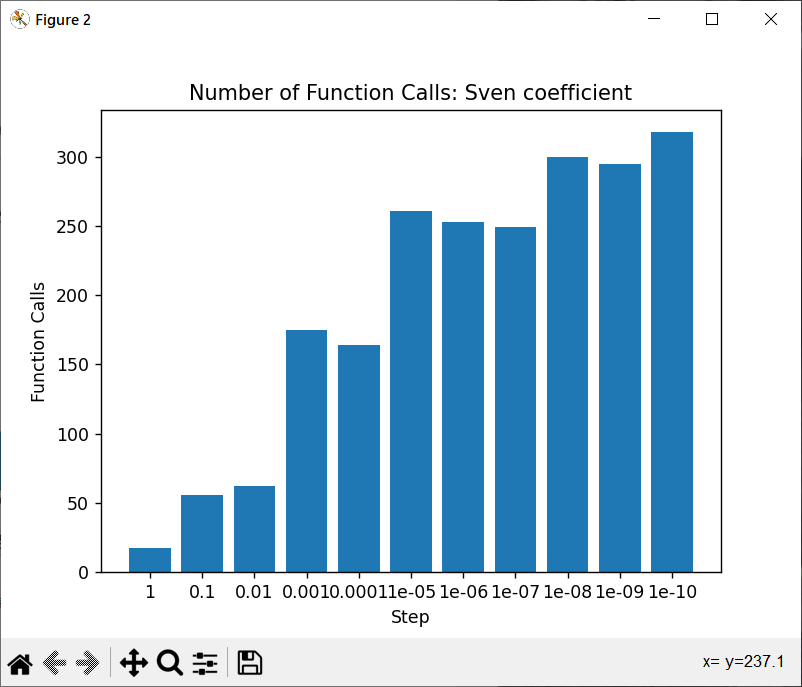
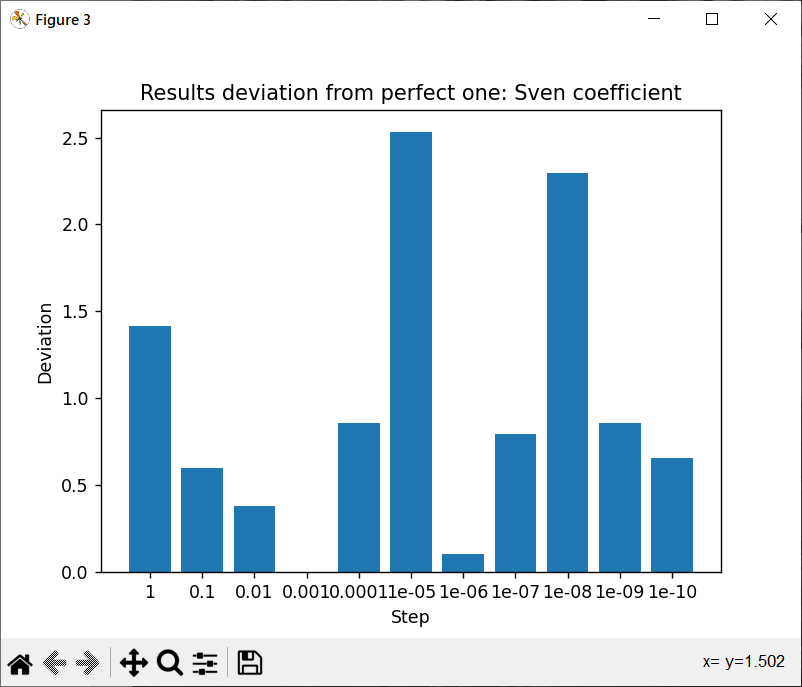
 

Рисунок 6 - кількість викликів функції в залежності від значення в алгоритмі Свенна, та відхилення від ідеального розв’язку

Таблиця результатів:

Таблиця 3 - Результат тестування різних коефіцієнтів в алгоритмі Свенна

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| q | Результат | Кількість викликів функції | Відхилення | F(x) |
| 1 | [2., 2.] | 17 | 1.4142135623730951 | 401.0 |
| 0.1 | [0.69519118, 0.48740334] | 56 | 0.5963755152661203 | 0.09459973376924201 |
| 0.01 | [1.16101169, 1.34610419] | 62 | 0.3817235567920611 | 0.026264777297228616 |
| 0.001 | [1.00019211, 1.00093298] | 175 | 0.0009525556292209975 | 3.01476057307639e-05 |
| 0.0001 | [1.34006805, 1.78443671] | 164 | 0.8549779114509599 | 0.12851873103689151 |
| 1e-05 | [1.83948724, 3.38884541] | 261 | 2.532058695752744 | 0.7073726812082758 |
| 1e-06 | [0.95337366, 0.90614631] | 253 | 0.1047975685522757 | 0.0029440864821395907 |
| 1e-07 | [1.31773984, 1.7296616 ] | 249 | 0.7958421090193304 | 0.10555093913283825 |
| 1e-08 | [1.77649002, 3.16005623] | 300 | 2.2953822513893827 | 0.6046502519070082 |
| 1e-09 | [1.34126369, 1.78492843] | 295 | 0.8559050991645947 | 0.13622887676496082 |
| 1e-10 | [1.26794807, 1.60016154] | 318 | 0.6572594946786471 | 0.07746740404411803 |

Найбільш підходящим значенням було обрано 0.001, адже за цього значення досягається найкращий результат, до того ж за адекватну кількість викликів функції.

### 3.1.4. Визначення оптимальної точності методу одновимірного пошуку

Було обрано наступний набір можливих значень eps:

[1, 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, 1e-05, 1e-06, 1e-07, 1e-08, 1e-09, 1e-10]

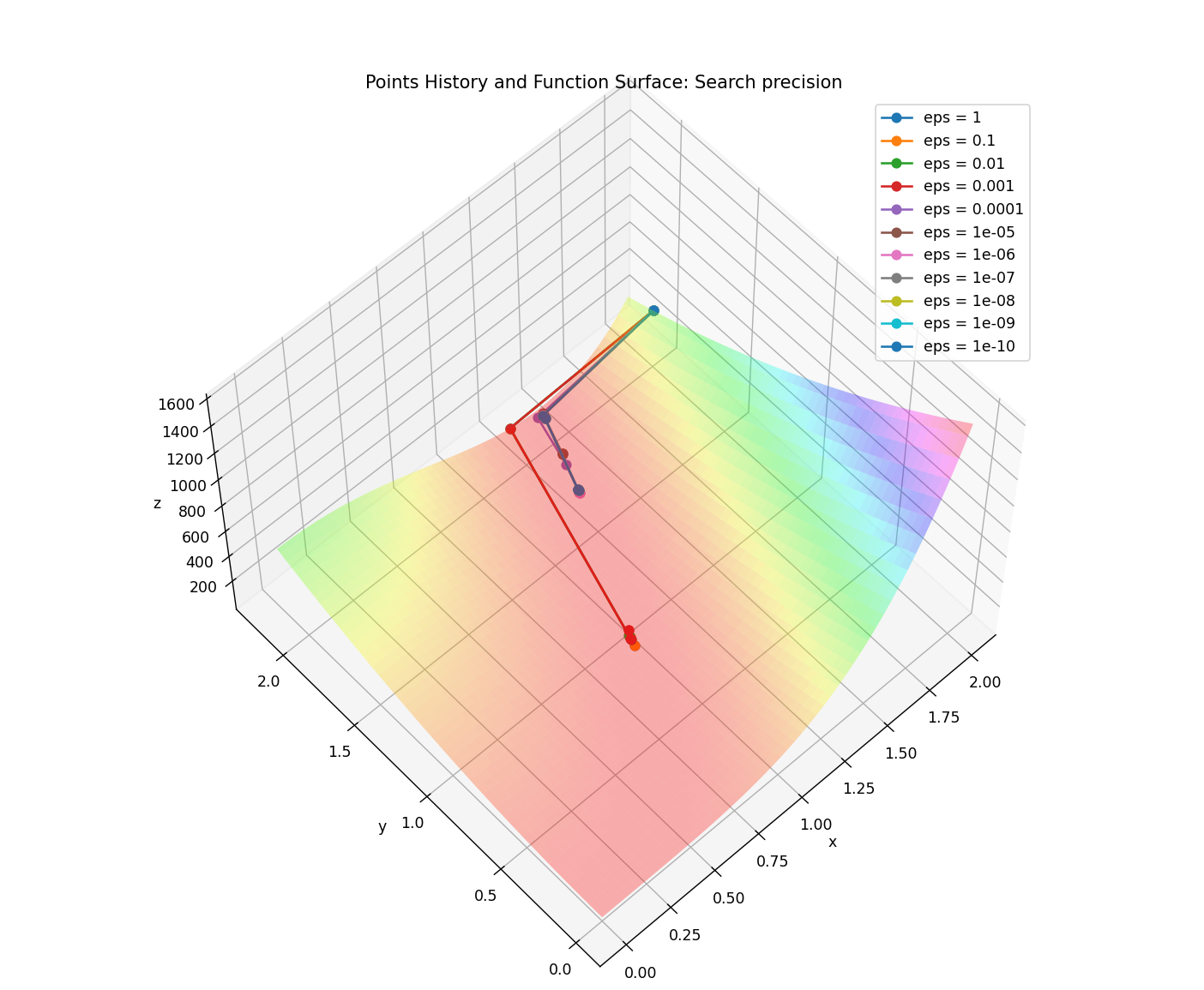


Рисунок 7 - шлях пошуку мінімуму в залежності від точності одновимірного пошуку

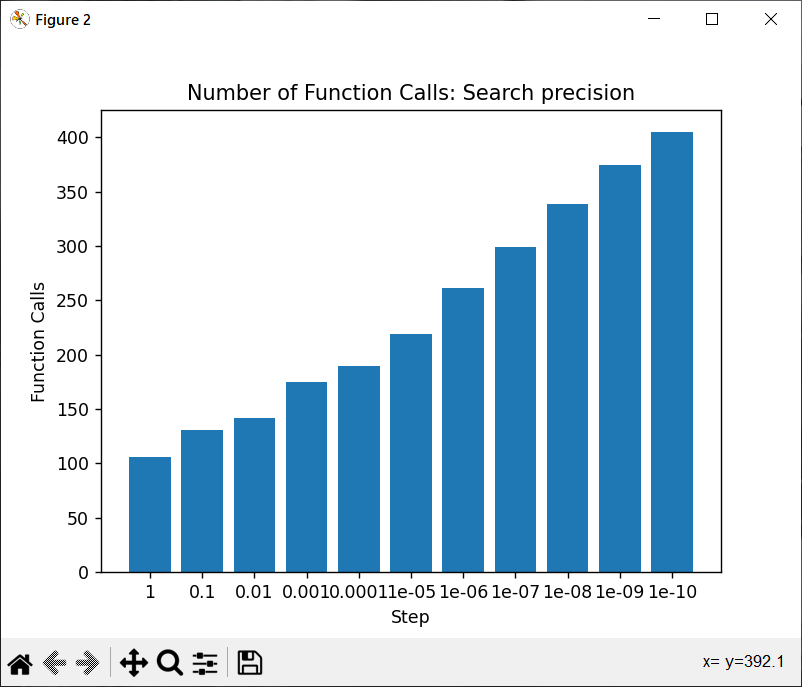
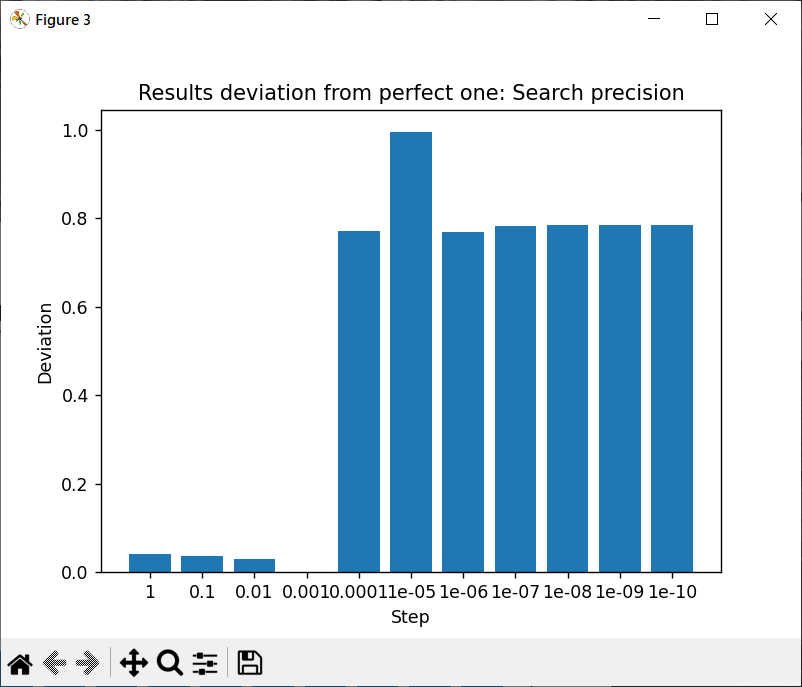
 

Рисунок 8 - кількість викликів функції в залежності від точності одновимірного пошуку, та відхилення від ідеального розв’язку

Таблиця результатів:

Таблиця 4 - Результат тестування різних точностей одновимірного пошуку

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| eps | Результат | Кількість викликів функції | Відхилення | F(x) |
| 1 | [0.98172253, 0.96416459] | 103 | 0.040227389056102625 | 0.00034892494111017197 |
| 0.1 | [0.98315254, 0.96720288] | 131 | 0.03687123220578365 | 0.00032153238648829744 |
| 0.01 | [0.98595322, 0.97335062] | 142 | 0.030124766253736997 | 0.00035277647087267506 |
| 0.001 | [1.00019211, 1.00093298] | 175 | 0.0009525556292209975 | 3.01476057307639e-05 |
| 0.0001 | [1.31048281, 1.70491682] | 190 | 0.7702644314293814 | 0.11189579887132856 |
| 1e-05 | [1.38978528, 1.91574491] | 219 | 0.9952493661033969 | 0.17676469288296112 |
| 1e-06 | [1.31054723, 1.70364085] | 261 | 0.7691228958327875 | 0.11574162030159302 |
| 1e-07 | [1.31583275, 1.71723455] | 299 | 0.783693647915111 | 0.11986119375598935 |
| 1e-08 | [1.31614728, 1.71804571] | 339 | 0.7845627733598215 | 0.12010729404255104 |
| 1e-09 | [1.31610589, 1.71793894] | 375 | 0.784448379777395 | 0.12007490326431854 |
| 1e-10 | [1.31609759, 1.71791754] | 405 | 0.7844254438232025 | 0.12006839683316929 |

Найкращою точністю є 0.001, адже за 175 викликів функції вдалося обчислити значення мінімуму з найкращою точністю.

### 3.1.5. Визначення оптимального методу одновимірного пошуку

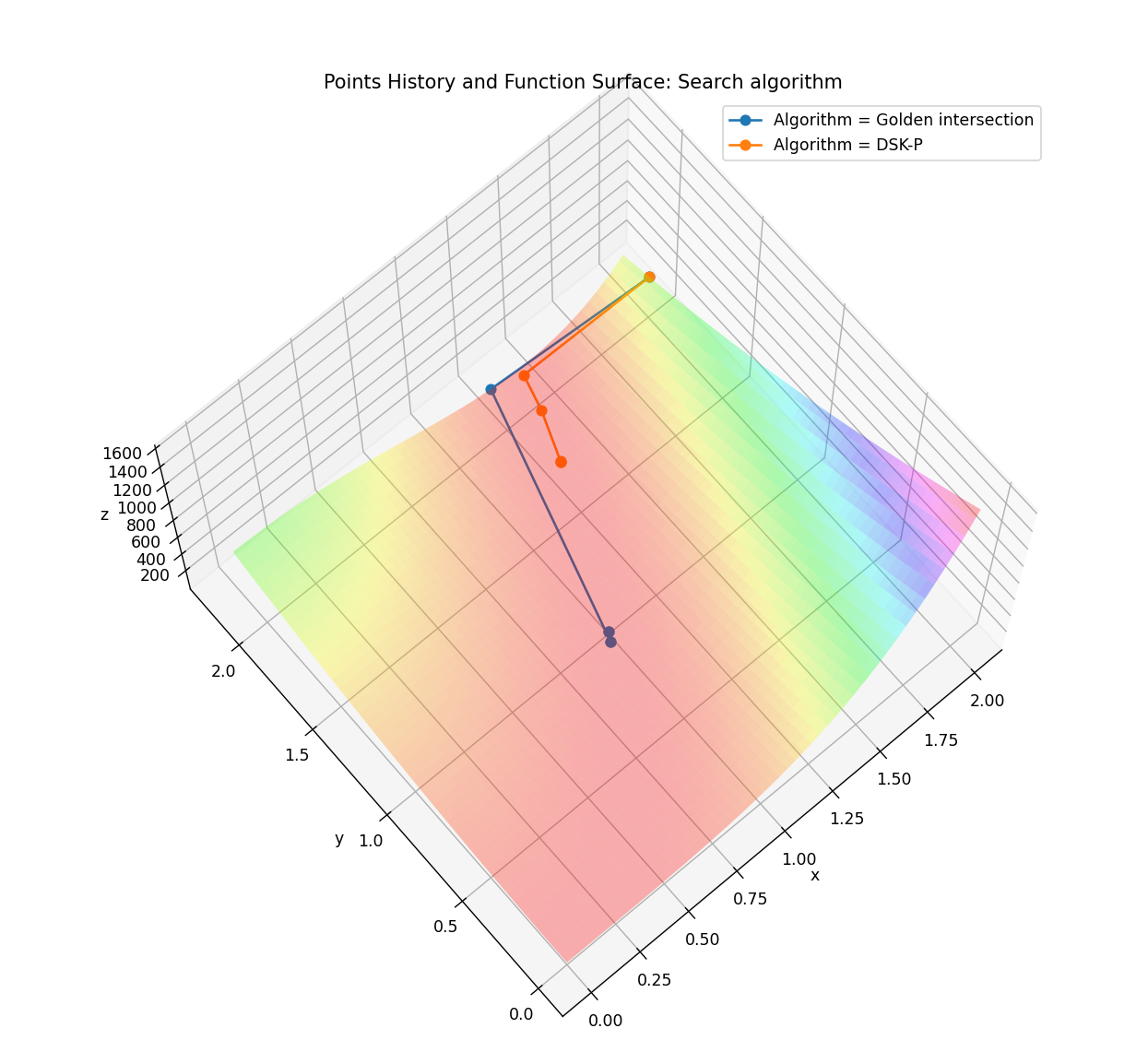


Рисунок 9 - шлях пошуку мінімуму в залежності від обраного методу одновимірного пошуку

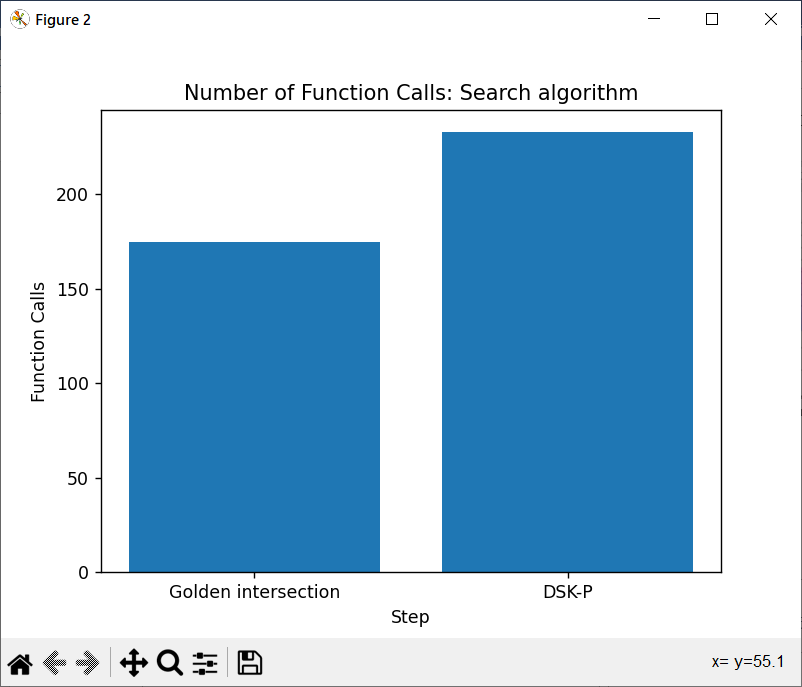
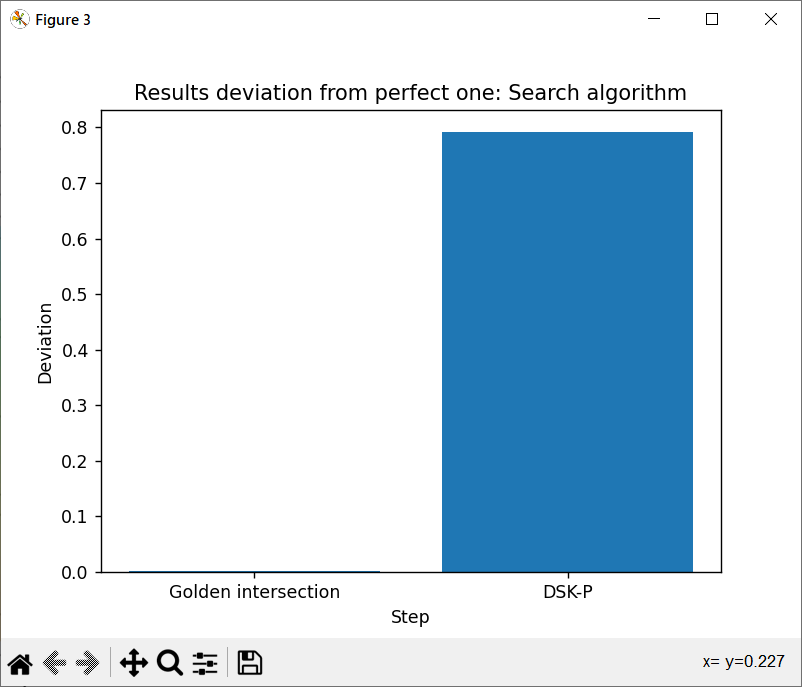
 

Рисунок 10 - кількість викликів функції в залежності від обраного методу одновимірного пошуку, та відхилення від ідеального розв’язку

Таблиця результатів:

Таблиця 5 - Результат тестування різних варіантів одновимірного пошуку

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Метод пошуку | Результат | Кількість викликів функції | Відхилення | F(x) |
| Золотий перетин | [1.00019211, 1.00093298] | 175 | 0.0009525556292209975 | 3.01476057307639e-05 |
| ДСК-П | [1.31871172, 1.72480984] | 233 | 0.7917868768208998 | 0.12171493809505807 |

Видно, що за використання методу Золотого перетину, отримуємо в 10 разів гіршу точність ніж за використання методу ДСК-Пауелла, виконавши у півтора рази менше обчислень цільової функції. Однак, оскільки ми говоримо про різницю у точності між 6 та 7 знаками після коми, має сенс і надалі використовувати метод золотого перетину.

### 3.1.6. Визначення оптимального критерію закінчення

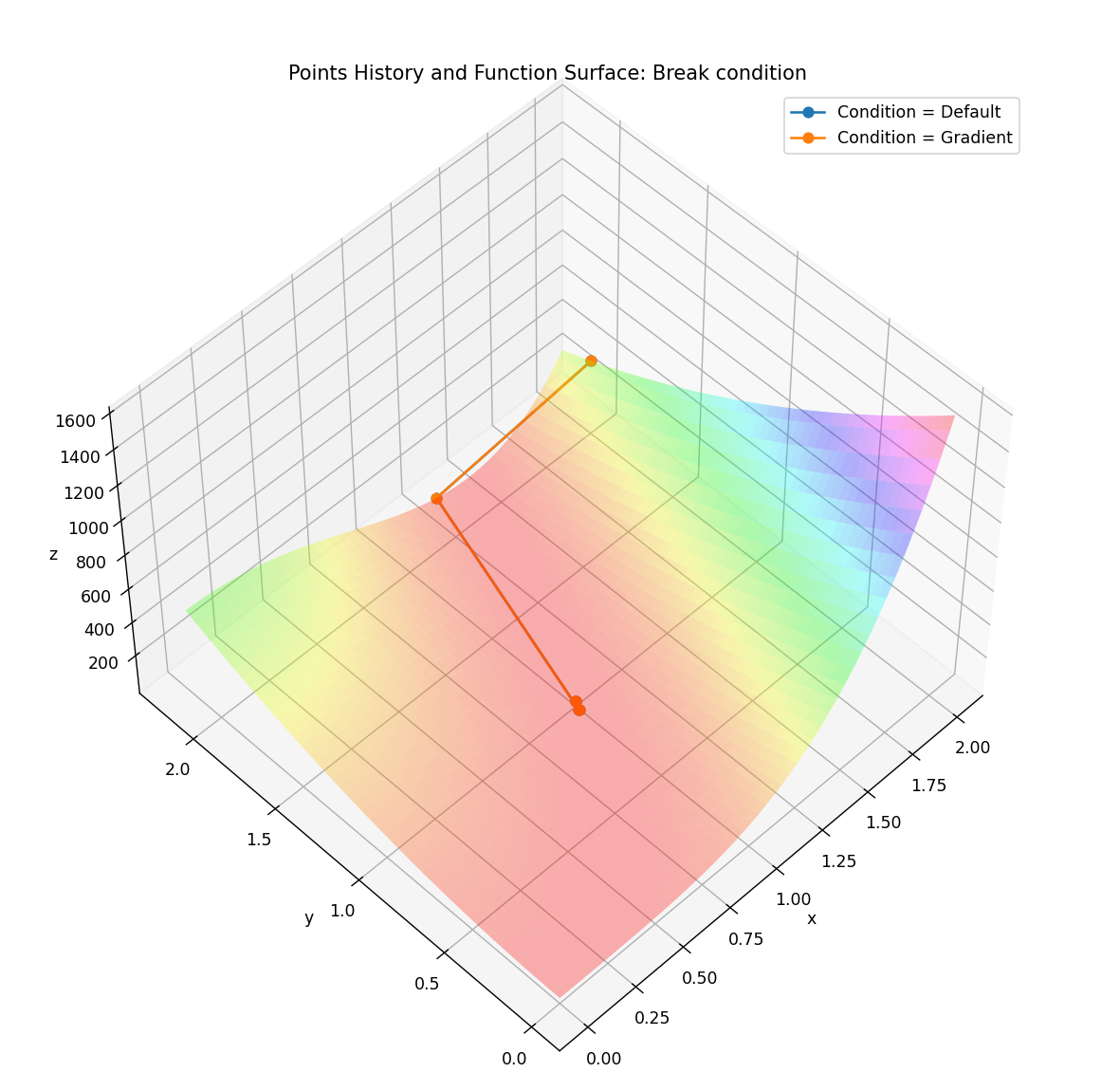


Рисунок 11 - шлях пошуку мінімуму в залежності від обраного критерію закінчення

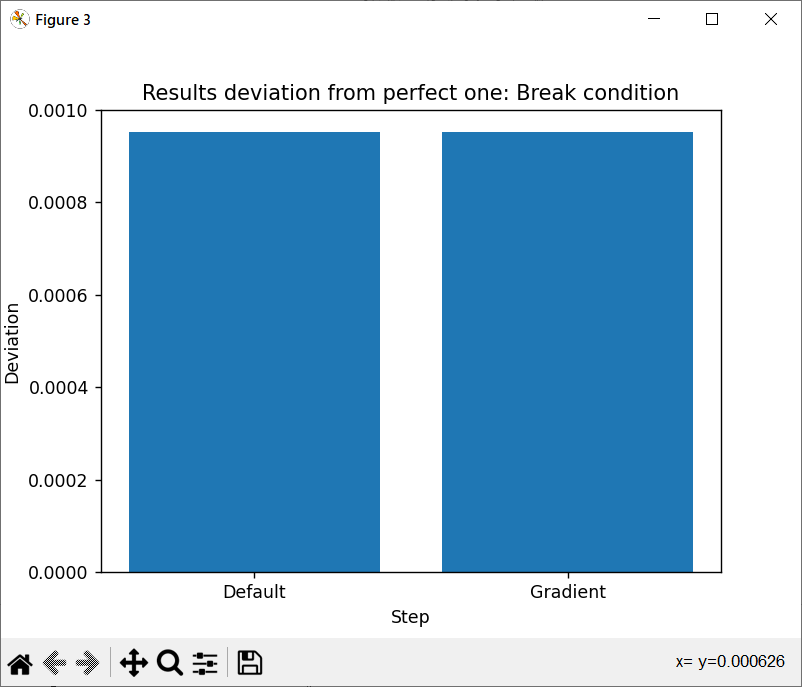
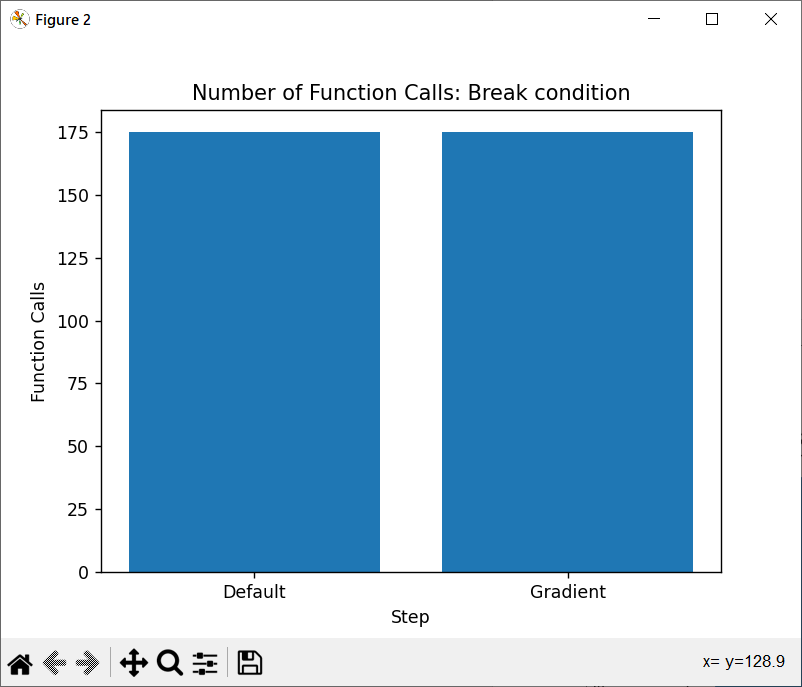


Рисунок 12 - кількість викликів функції в залежності від обраного критерію закінчення, та відхилення від ідеального розв’язку

Таблиця результатів:

Таблиця 6 - Результат тестування різних варіантів одновимірного пошуку

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Критерій | Результат | Кількість викликів функції | Відхилення | F(x) |
| Звичайний | [1.00019211, 1.00093298] | 175 | 0.0009525556292209975 | 3.01476057307639e-05 |
| Градієнт | [1.00019211, 1.00093298] | 175 | 0.0009525556292209975 | 3.01476057307639e-05 |

Результати є абсолютно однаковими

### 3.1.7. Визначення необхідності наявності рестартів

Під час попередніх досліджень, рестарт не відбувся жодного разу (умова для початку рестарту – не виконується обраний критерій закінчення та напрямок пошуку = 0 або знаменник з алгоритму Пірсона = 0 або кількість ітерацій більша за максимальну. Рестартом називаємо скидання матриці А до початкового значення та, відповідно, перерахунок напрямку руху. Однак новим початковим значенням х буде останнє обчислене значення перед початком рестарту.

Єдиним варіантом дослідження є прибрати критерії виходу та замінити їх на перевірку кількості здійснених рестартів. Протестуємо це на кількості рестартів у 1, 10, 100, 1000 та 10000.

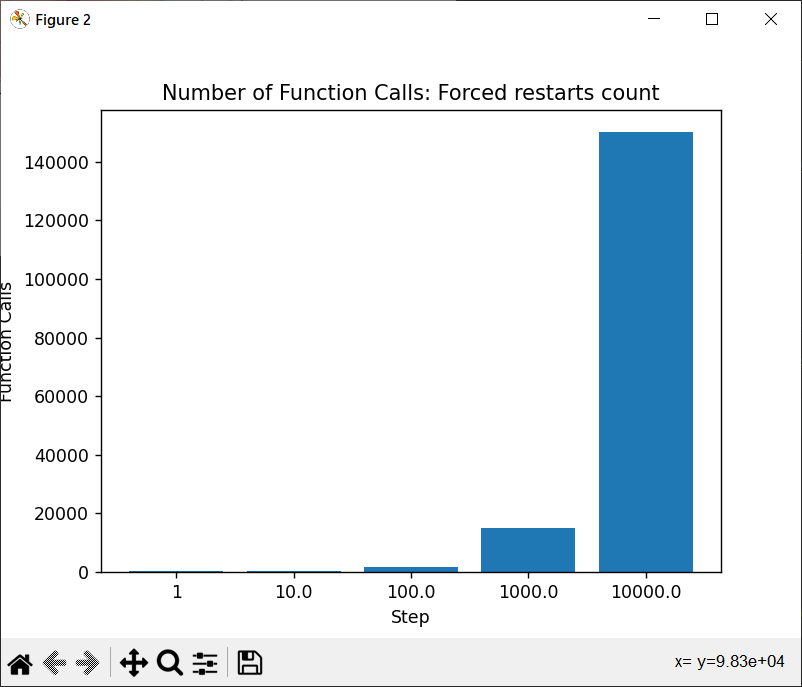
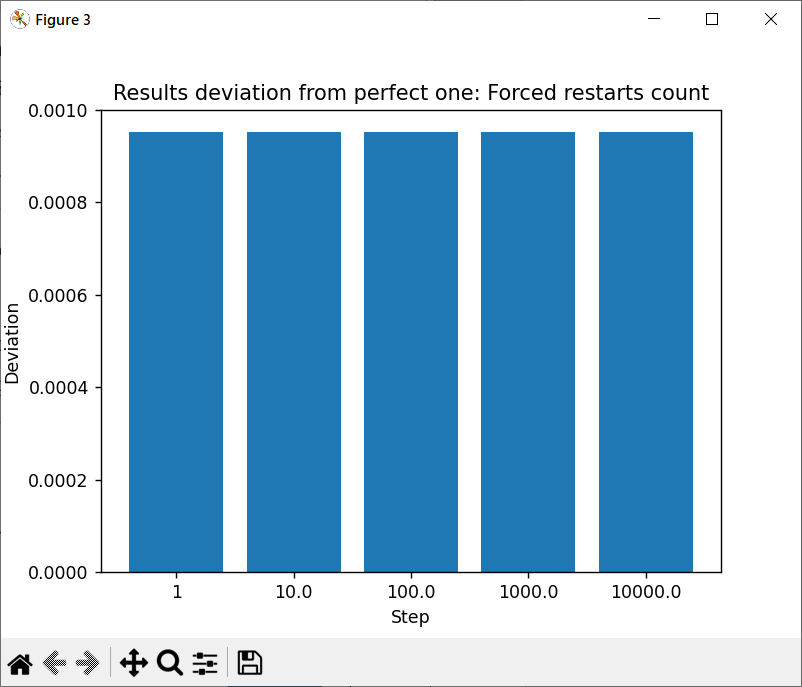


Рисунок 13 - кількість викликів функції в залежності від кількості рестартів, та відхилення від ідеального розв’язку

Результати з точки зору точності є абсолютно ідентичними, кількість же викликів функції поступово зростає в залежності від кількості рестартів.

## 3.2. Умовна оптимізація

## 3.2.1. Метод штрафних функцій в залежності від розташування локального мінімуму

Нехай допустима область задається наступним рівнянням:

Тоді цільова функція з урахуванням штрафу типу квадрату зрізки виглядатиме наступним чином:

В такому випадку локальний мінімум розташований всередині допустимої області. Нехай початкова точка також буде розташована всередині допустимої області:

Візьмемо початковою точкою .

І протестуємо точність пошуку в залежності від значення R.

Для початку, протестуємо на значеннях R що близькі до 0.

В результаті, шлях пошуку виглядатиме наступним чином:

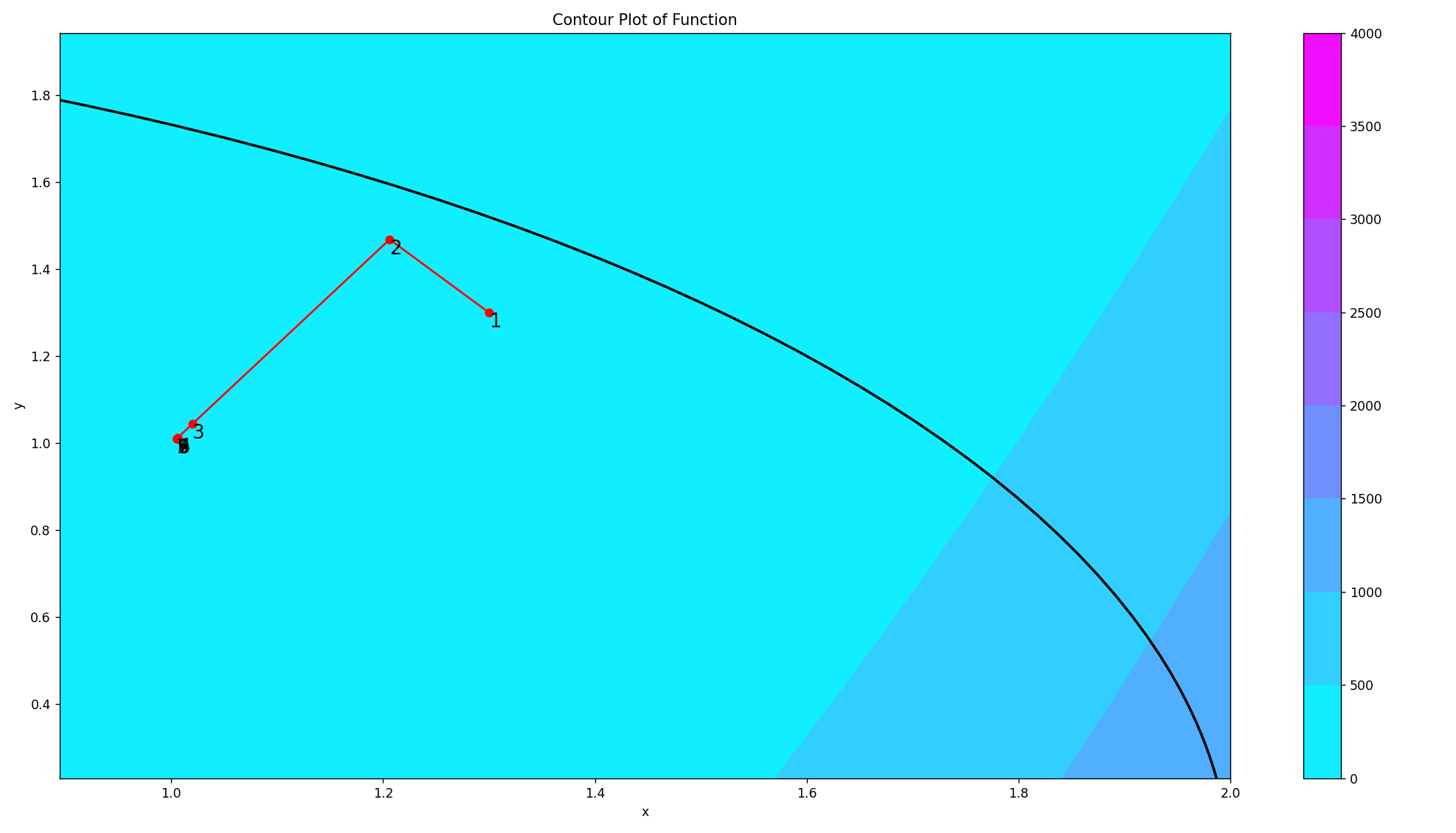


Рисунок – шлях пошуку мінімуму в залежності від значення R. Початкова точка всередині допустимої області. Значення R від 0.1 до 1e-08

Таблиця - Результат тестування в залежності від значення R. Початкова точка всередині допустимої області. Значення R від 0.1 до 1e-08

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| R | Результат | Кількість викликів функції | Відхилення | F(x) |
| 0.1 | [1.2061501 1.46829699] | 260 | 0.5116638906108106 | 0.07587590247879675 |
| 0.01 | [1.01973309 1.04367255] | 162 | 0.04792375378145398 | 0.03684870085396402 |
| 0.001 | [1.00624741 1.01274521] | 74 | 0.014194034174894028 | 0.003892208843471188 |
| 0.0001 | [1.00561635 1.01111754] | 74 | 0.012455647963909591 | 0.00042035959887960387 |
| 1e-05 | [1.00561426 1.01111807] | 74 | 0.012455173212949944 | 7.220192139620934e-05 |
| 1e-06 | [1.00561405 1.01111812] | 74 | 0.01245512576570727 | 3.7386283617802255e-05 |
| 1e-07 | [1.00561403 1.01111813] | 74 | 0.012455121021261877 | 3.390472113802821e-05 |
| 1e-08 | [1.00561403 1.01111813] | 74 | 0.01245512054681948 | 3.355656490298401e-05 |

Як бачимо, за малих значень R значення все ближче наближаються до результатів отриманих при розв’язанні задачі безумовної оптимізації.

Якщо ж взяти більші значення R то отримуємо точки розташовані вздовж границі допустимої області:

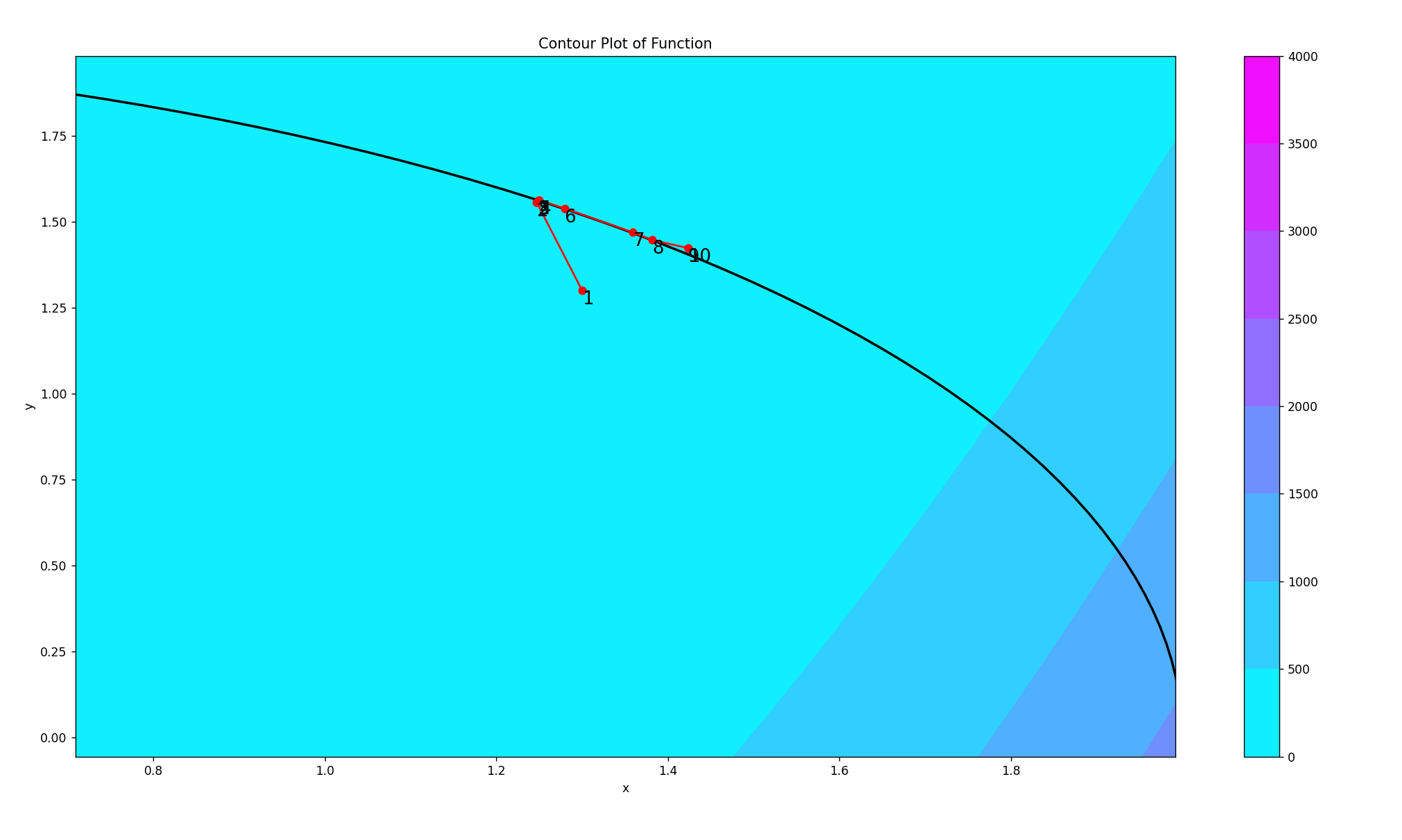


Рисунок - шлях пошуку мінімуму в залежності від значення R. Початкова точка всередині допустимої області. Значення R від 1 до 1e+08

Якщо точка розташована поза допустимою областю спостерігаємо наступну картину:

Для початкового значення . зі зменшенням значення R знайдений мінімум все далі від бажаного результату:

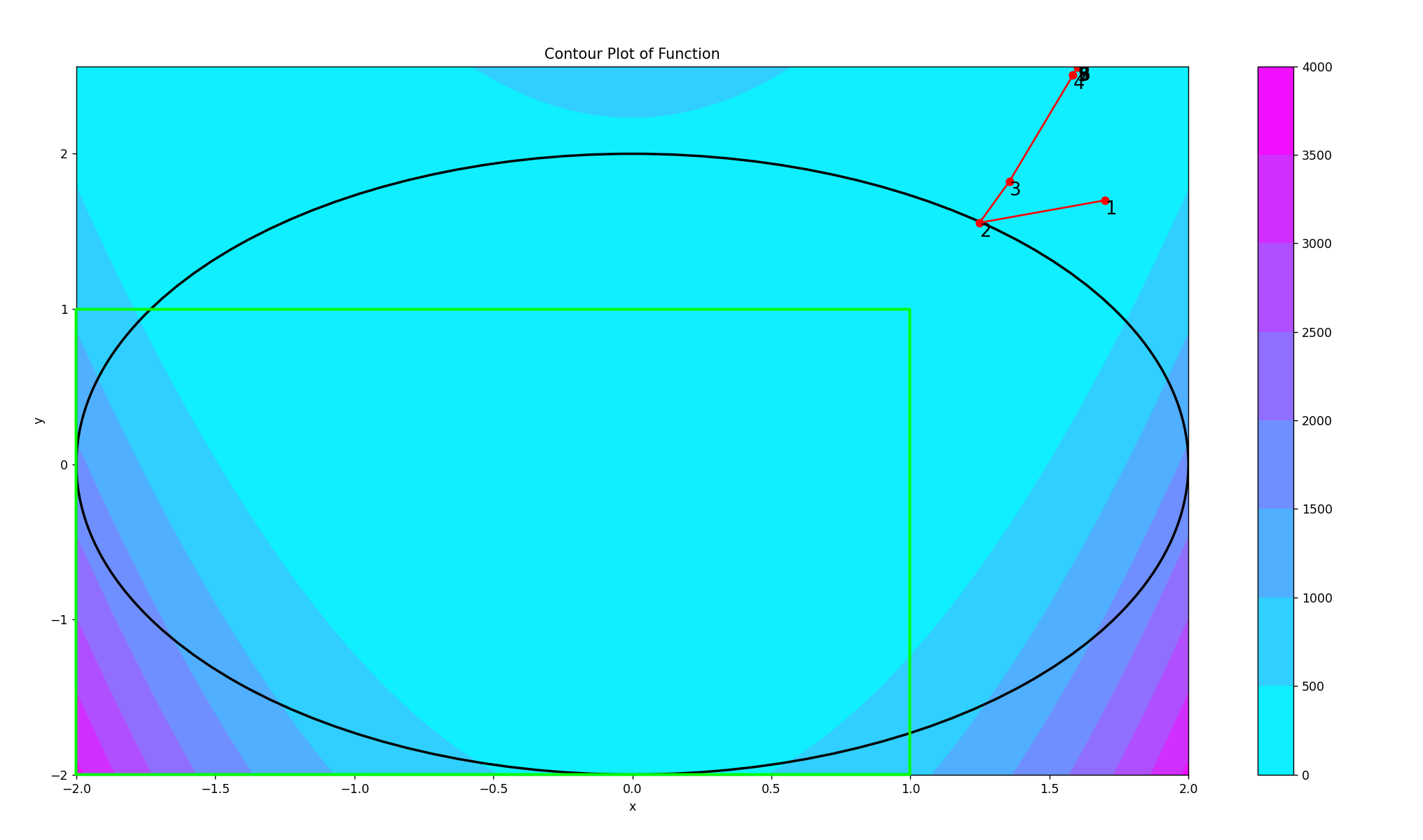


Рисунок - шлях пошуку мінімуму в залежності від значення R. Початкова точка поза допустимою областю. Значення R від 0.1 до 1e-08

У випадку зі спадаючими значеннями R значення розташовуються вздовж границі допустимої області

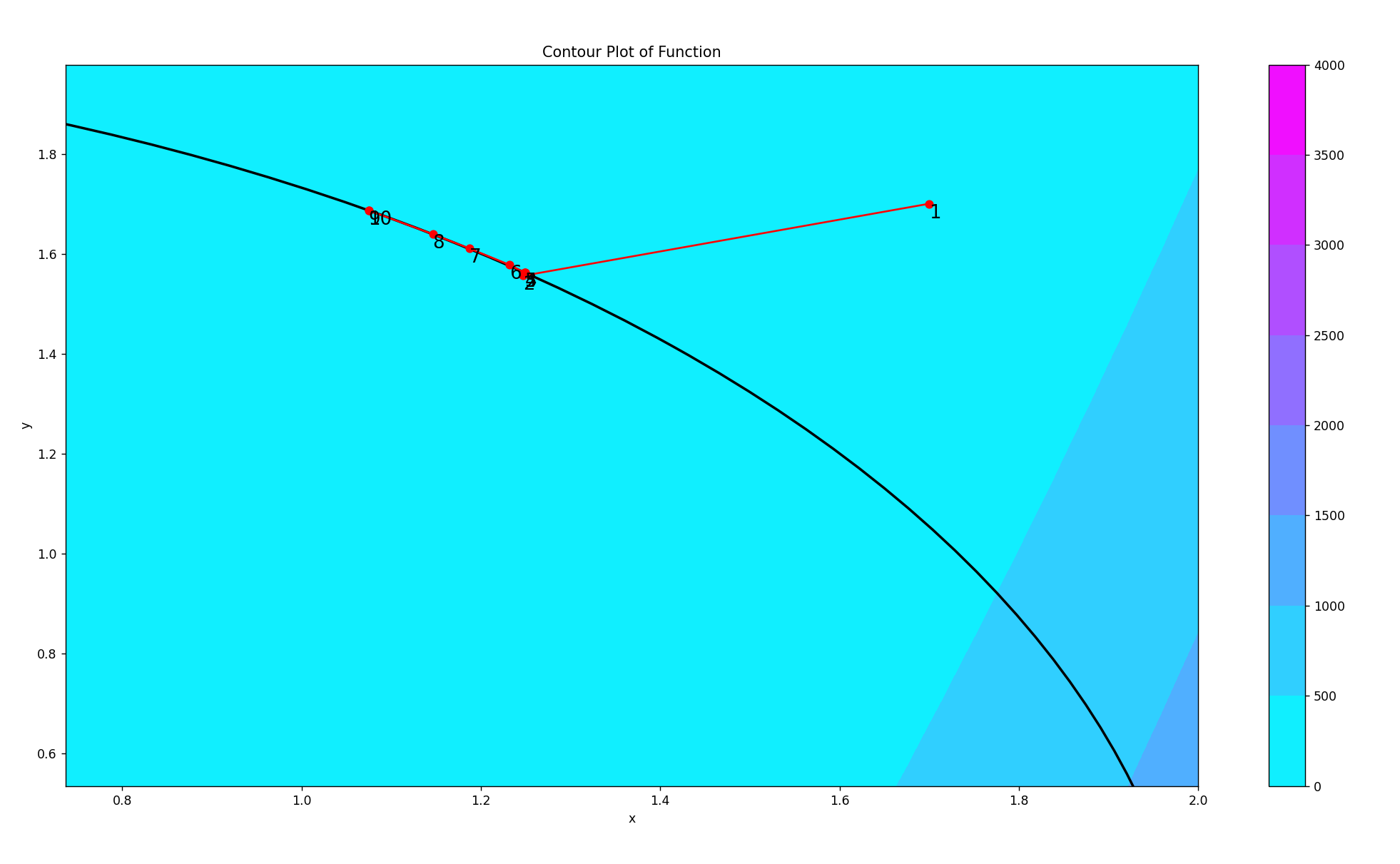


Рисунок - шлях пошуку мінімуму в залежності від значення R. Початкова точка поза допустимою областю. Значення R від 1 до 1e+08

Таблиця - Результат тестування в залежності від значення R. Початкова точка поза допустимою областю. Значення R від 1 до 1e+08

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| R | Результат | Кількість викликів функції | Відхилення | F(x) |
| 1 | [1.24727087 1.55577303] | 331 | 0.6082980669086513 | 0.061714188121624394 |
| 10 | [1.2492394 1.56153944] | 104 | 0.6143670030712335 | 0.06221861618210755 |
| 100 | [1.24893933 1.56155576] | 136 | 0.6142602547365157 | 0.06254895321115336 |
| 1000 | [1.24910295 1.561519 ] | 221 | 0.6142929836285831 | 0.06417187823885717 |
| 10000 | [1.23163431 1.57781262] | 162 | 0.6225125526435049 | 0.8360248897232399 |
| 1e+05 | [1.18752827 1.61022037] | 153 | 0.6383852689248706 | 4.954975214952758 |
| 1e+06 | [1.14641433 1.63907321] | 158 | 0.6556307854516481 | 11.255045670355134 |
| 1e+07 | [1.07477961 1.68664656] | 88 | 0.6907065114622399 | 28.306418335876668 |
| 1e+08 | [1.074792 1.68665186] | 88 | 0.6907131250249903 | 28.328508708671706 |

Підбиваючи підсумок, у випадку розташування точки локального мінімуму та початкової точки всередині допустимої області, найкращі значення було отримано за значень R близьких до 0, тобто коли вплив штрафу на цільову функцію був мінімальним. У випадку з розташуванням точки локального мінімуму всередині допустимої області, а початкової точки - поза допустимою областю, найкращий результат було отримано за значення R >= 1, однак не зважаючи від значення R усі знайдені точки розташовувались на границі допустимої області.

Нехай допустима область задається наступним рівнянням:

Тоді цільова функція з урахуванням штрафу типу квадрату зрізки виглядатиме наступним чином:

Нехай точка локального мінімуму розташована поза допустимою областю

## 3.2.2. Метод штрафних функцій в залежності від виду допустимої області