תרגיל בית 3 - מבוא לרשתות מחשבים 236334

בני נזימוב 314862129
רעות גולדברג 316254192

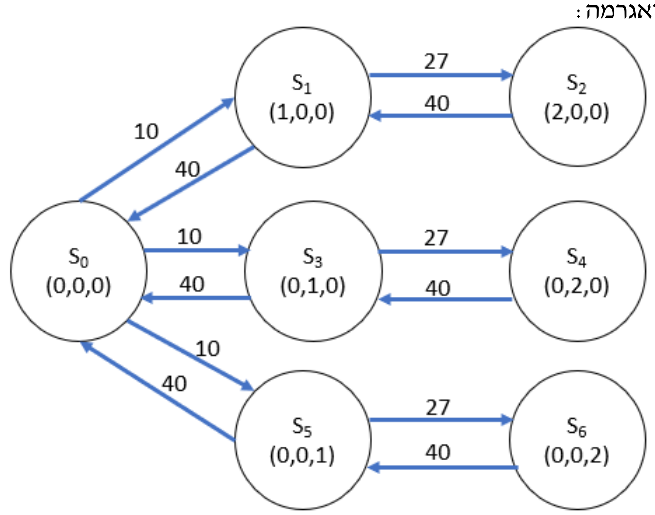
עבור הקלט: $M = 3,\ \lambda = 30,\ \mu = 40,\ P_0 = 1,\ P_1 = 0.9,\ P_2 = 0$

.1

נחשב כמה גדלים למען דיאגרמת המצבים:

$$\frac{\lambda}{M} = \frac{30}{3} = 10$$
$$\lambda \cdot P_1 = 30 \cdot 0.9 = 27$$

הדיאגרמה:



.2

כפי שנלמד בתרגולים ובהרצאות, כל מערכת עם מספר **סופי** של משתמשים היא יציבה, ולכן המערכת הנ"ל יציבה.

.3

נסמן ב-S_i את ההסתברויות למצבים המתאימים לפי הדיאגרמה. נחשב את הסתברויות המצבים כפי שנלמד בתרגול:

$$\begin{aligned}
27S_1 &= 40S_4 \\
27S_2 &= 40S_5 \\
27S_3 &= 40S_6 \\
10S_0 &= 40S_1 \\
10S_0 &= 40S_2 \\
10S_0 &= 40S_3 \\
\sum_{i=0}^{6} S_i &= 1
\end{aligned}$$

נקבל את המערכת $A\underline{x} = \underline{b}$ הבאה כאשר A היא מטריצת המקדמים ו-$\underline{x}$ הוא וקטור הנעלמים ו-$\underline{b}$ הוא וקטור הפתרון:

$$\begin{pmatrix}
0 & 27 & 0 & 0 & -40 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 27 & 0 & 0 & -40 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 27 & 0 & 0 & -40 \\
10 & -40 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
10 & 0 & -40 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
10 & 0 & 0 & -40 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

נפתור ונקבל:

$$\begin{aligned}
S_0 &= \frac{160}{361} \approx 0.4432 \\
S_1 &= \frac{40}{361} \approx 0.1108 \\
S_2 &= \frac{40}{361} \approx 0.1108 \\
S_3 &= \frac{40}{361} \approx 0.1108 \\
S_4 &= \frac{27}{361} \approx 0.0748 \\
S_5 &= \frac{27}{361} \approx 0.0748 \\
S_6 &= \frac{27}{361} \approx 0.0748
\end{aligned}$$

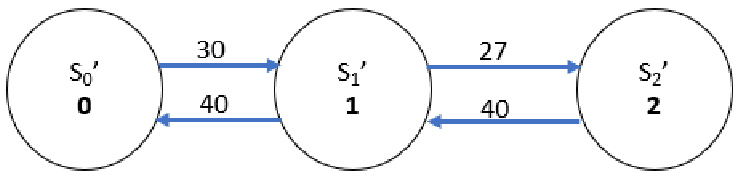
.4

נשים לב כי מאילוצי התרגיל, יכול להיות רק תור לחיסון אחד בכל רגע נתון. שכן ברגע שאין מתחסנים כלל במערכת ואז מגיע הראשון ובוחר חיסון באקראי, כל עוד התור לחיסון זה לא ריק (יש מישהו שמתחסן כרגע) אז כל המתחסנים החדשים שיגיעו לבית החולים יכנסו אך ורק לתור זה. לכן, נוכל לתאר מצב של המערכת על ידי מספר המתחסנים שיש כרגע **בתור**

כלשהו. לשם כך נצמצם את המצבים באופן הבא:

$$
\begin{aligned}
0 &= (0,0,0) \\
1 &= (1,0,0) \cup (0,1,0) \cup (0,0,1) \\
2 &= (2,0,0) \cup (0,2,0) \cup (0,0,2) \\
S_0' &= S_0 = \frac{160}{361} \approx 0.4432 \\
S_1' &= S_1 + S_2 + S_3 = \frac{120}{361} \approx 0.3324 \\
S_2' &= S_4 + S_5 + S_6 = \frac{81}{361} \approx 0.2243
\end{aligned}
$$

הדיאגרמה:



.5

על מנת לחשב את $\overline{\lambda}$ נשתמש בקצבי ההגעה בדיאגרמת המצבים המצומצמת:

$$\overline{\lambda} = E(\lambda) = \sum_{i=0}^{2} S_i' \cdot \lambda_i = 30 \cdot \frac{160}{361} + 27 \cdot \frac{120}{360} + 0 = \frac{8040}{361} \approx 22.27$$

.6

נחשב את $\overline{N}$:

$$\overline{N} = E(N) = \sum_{i=0}^{2} S_i' \cdot i = 0 + 1 \cdot \frac{120}{360} + 2 \cdot \frac{81}{360} = \frac{282}{361} \approx 0.78$$

לפי משפט ליטל מתקיים: $\overline{N} = \overline{\lambda} \cdot \overline{T}$. לכן נקבל:

$$\overline{T} = \frac{\overline{N}}{\overline{\lambda}} = \frac{47}{1340} \approx 0.035$$

.7

על מנת לקבל את תוחלת זמן ההמתנה נחסיר מתוחלת זמן השהייה $\overline{T}$ את תוחלת זמן השירות $\frac{1}{\mu}$ ונקבל:

$$T_Q = \overline{T} - \frac{1}{\mu} = \frac{47}{1340} - \frac{1}{40} = \frac{27}{2680} \approx 0.01$$

.8

להלן פלט הסימולטור עבור הרצה עם הקלט הנ"ל עבור $T = 100,000$:

```
D:\GitHub\IntroToNetworksCourseWork\src>python main.py 100000 3 30 40 1 0.9 0
2228574 774208 100000.03231928438 44276.594133263236 11091.280522831627 7483.198872508757 0.4427657982338949
 0.11091276938210291 0.07483196453993214 0.010073525320463341 0.025004078027485558 22.285732797410642
```

כאשר הפרמטרים המסומנים באדום משמאל לימין הם:

$$Z_0, Z_1, Z_2, \overline{T_W}, \overline{T_S}, \overline{\lambda_A}$$

נשווה ביניהם לבין החישובים התיאורטיים:

$$\begin{aligned}
Z_0 &= 0.44352 \approx 0.4432 = S_0 \\
Z_1 &= 0.11091 \approx 0.1108 = S_1, S_2, S_3 \\
Z_2 &= 0.07483 \approx 0.0748 = S_4, S_5, S_6 \\
\overline{T_W} &= 0.01007 \approx 0.01 = T_Q \\
\overline{T_S} &= 0.025004 \approx 0.025 = \frac{1}{\mu} \\
\overline{\lambda_A} &= 22.28 \approx 22.27 = \overline{\lambda}
\end{aligned}$$

ניתן לראות שהחישובים התיאורטיים מסכימים עם הסימולטור עד כדי שגיאה זניחה כתוצאה מרעש אקראי.
נציין כי במימוש הסימולטור שלנו סימלצנו את המערכת **המצומצמת** המתוארת בסעיף 4 למען פשטות המימוש, וכדי לקבל את ההסתברויות המתאימות למערכת המקורית חישבנו את A_{Ti} באופן הבא:
לכל $i > 0$, סכמנו את כל הזמנים בהם היה קיים תור עם בדיוק i אנשים וחילקנו סכום זה ב-M. חישוב זה נכון מכיוון שהתורים נבחרים באופן אחיד, ולכן אין אף תור שיש לו "עדיפות" על תור אחר. עקב כך, A_{Ti} שמוגדר להיות הממוצע על פני כל התורים עבור כמות הזמן שגודל שבתור מסוים היו $i > 0$ אנשים, שווה לסך כל הזמן בו היה קיים תור **כשלהו** במערכת בגודל i, חלקי מספר התורים, M.
פורמלית, כאשר T_i^m מסמל את סך הזמן בו היו בתור ה-m בדיוק i אנשים:

$$A_{Ti} = \frac{1}{M} \cdot \sum_{m=1}^{M} T_i^m = \frac{Total\_Time\_Exists\_Queue\_Size\_i}{M}$$

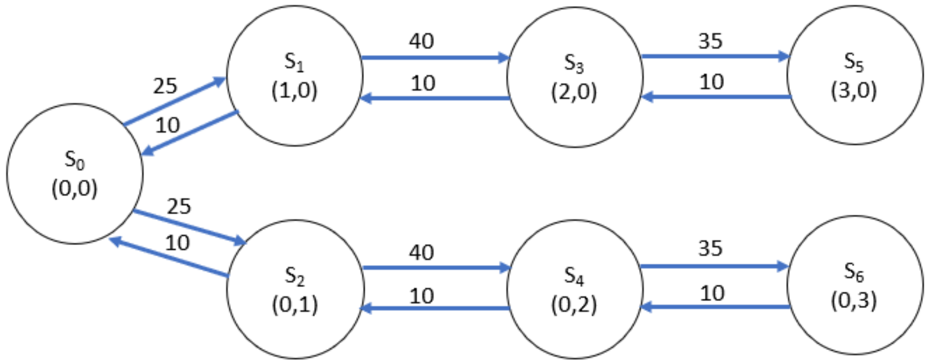
בנוסף Z_i תלויים ב-A_{Ti}, וכל שאר הפרמטרים לא מושפעים מאופן החישוב הנ"ל, ולכן בתוצאות הסימולציה שלנו קיבלנו בעצם תוצאות המשקפות את המערכת המקורית.

עבור הקלט: $M = 2,\ \lambda = 50,\ \mu = 10,\ P_0 = 1,\ P_1 = 0.8,\ P_2 = 0.7,\ P_3 = 0$

.1

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda}{M} &= \frac{50}{2} = 25 \\
\lambda \cdot P_1 &= 50 \cdot 0.8 = 40 \\
\lambda \cdot P_2 &= 50 \cdot 0.7 = 35
\end{aligned}$$

הדיאגרמה:



.2

כפי שנלמד בתרגולים ובהרצאות, כל מערכת עם מספר **סופי** של משתמשים היא יציבה, ולכן המערכת הנ"ל יציבה.

.3

נסמן ב-S_i את ההסתברויות למצבים המתאימים לפי הדיאגרמה. נחשב את הסתברויות המצבים כפי שנלמד בתרגול:

$$25S_0 = 10S_1$$
$$25S_0 = 10S_2$$
$$40S_1 = 10S_3$$
$$40S_2 = 10S_4$$
$$35S_3 = 10S_5$$
$$35S_4 = 10S_6$$
$$\sum_{i=0}^{6} S_i = 1$$

נקבל את המערכת $A\underline{x} = \underline{b}$ הבאה כאשר A היא מטריצת המקדמים ו-$\underline{x}$ הוא וקטור הנעלמים ו-$\underline{b}$ הוא וקטור הפתרון:

$$\begin{pmatrix} 25 & -10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 25 & 0 & -10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 0 & -10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 40 & 0 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 35 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 35 & 0 & -10 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

נפתור ונקבל:

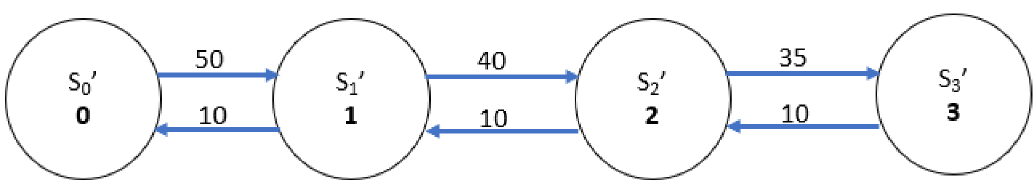
$$S_0 = \frac{2}{192} \approx 0.0104$$
$$S_1 = \frac{5}{192} \approx 0.02604$$
$$S_2 = \frac{5}{192} \approx 0.02604$$
$$S_3 = \frac{20}{192} \approx 0.1042$$
$$S_4 = \frac{20}{192} \approx 0.1042$$
$$S_5 = \frac{70}{192} \approx 0.3646$$
$$S_6 = \frac{70}{192} \approx 0.3646$$

.4

בנימוק דומה לקלט הקודם:

$$0 = (0,0)$$
$$1 = (1,0) \cup (0,1)$$
$$2 = (2,0) \cup (0,2)$$
$$3 = (3,0) \cup (0,3)$$
$$S_0' = S_0 = \frac{2}{192} \approx 0.0104$$
$$S_1' = S_1 + S_2 = \frac{10}{192} \approx 0.0521$$
$$S_2' = S_3 + S_4 = \frac{40}{192} \approx 0.2083$$
$$S_3' = S_5 + S_6 = \frac{140}{192} \approx 0.7292$$

הדיאגרמה:



.5

על מנת לחשב את $\overline{\lambda}$ נשתמש בקצבי ההגעה בדיאגרמת המצבים המצומצמת:

$$\overline{\lambda} = E(\lambda) = \sum_{i=0}^{3} S_i' \cdot \lambda_i = 50 \cdot \frac{2}{192} + 40 \cdot \frac{10}{192} + 35 \cdot \frac{40}{192} + 0 = \frac{475}{48} \approx 9.896$$

.6

נחשב את $\overline{N}$:

$$\overline{N} = E(N) = \sum_{i=0}^{3} S'_i \cdot i = 0 + 1 \cdot \frac{10}{192} + 2 \cdot \frac{40}{192} + 3 \cdot \frac{140}{192} = \frac{85}{32} = 2.65625$$

לפי משפט ליטל מתקיים: $\overline{N} = \overline{\lambda} \cdot \overline{T}$. לכן נקבל:

$$\overline{T} = \frac{\overline{N}}{\overline{\lambda}} = \frac{51}{190} \approx 0.2684$$

.7

על מנת לקבל את תוחלת זמן ההמתנה נחסיר מתוחלת זמן השהייה $\overline{T}$ את תוחלת זמן השירות $\frac{1}{\mu}$ ונקבל:

$$T_Q = \overline{T} - \frac{1}{\mu} = \frac{51}{190} - \frac{1}{10} = \frac{16}{95} \approx 0.1684$$

.8

להלן פלט הסימולטור עבור הרצה עם הקלט הנ"ל עבור $T = 100,000$:

```
D:\GitHub\IntroToNetworksCourseWork\src>python main.py 100000 2 50 10 1 0.8 0.7 0
991077 4008049 100000.15388759576 1052.0451908802531 2614.0378385228173 10425.323153125904 36434.69335670904 0.010520435719156939
 0.026140338158490258 0.10425307109871441 0.3643463728832169 0.16808928038193202 0.09983897184246626 9.910754748577796
```

כאשר הפרמטרים המסומנים באדום משמאל לימין הם:

$$Z_0, Z_1, Z_2, \overline{T_W}, \overline{T_S}, \overline{\lambda_A}$$

נשווה ביניהם לבין החישובים התיאורטיים:

$$\begin{aligned}
Z_0 &= 0.0105 \approx 0.0104 = S_0 \\
Z_1 &= 0.0261 \approx 0.02604 = S_1, S_2 \\
Z_2 &= 0.104253 \approx 0.1042 = S_3, S_4 \\
Z_2 &= 0.3643 \approx 0.3646 = S_5, S_6 \\
\overline{T_W} &= 0.1681 \approx 0.1684 = T_Q \\
\overline{T_S} &= 0.0998 \approx 0.1 = \frac{1}{\mu} \\
\overline{\lambda_A} &= 9.91 \approx 9.896 = \overline{\lambda}
\end{aligned}$$

ניתן לראות שהחישובים התיאורטיים מסכימים עם הסימולטור עד כדי שגיאה זניחה כתוצאה מרעש אקראי.
(גם כאן סימלצנו את המערכת המצומצמת, כפי שכבר הוסבר בקלט הקודם).