

OPERATORE 1: MODULO

DEF: MODULO: Operatore matematico che trasforma il valore di x a seconda del suo segno.

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

PROPRIETA': Gode delle seguenti proprietà:

- 1) $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$
- 2) $-|x| \leq x \leq |x|, \forall x \in \mathbb{R}$
- 3) $|-x| = |x|, \forall x \in \mathbb{R}$
- 4) $|x| \leq k, k > 0 \Leftrightarrow -k \leq x \leq k$
- 5) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|; \forall x, y \in \mathbb{R}$
- 6) $|x| \geq k, k > 0 \Leftrightarrow x \leq -k \vee x \geq k$

DISUGUAGLIANZE NOTEVOLI:

- | | | |
|--|----------------|--------------------------------|
| 1) $ x + y \leq x + y , \forall x, y \in \mathbb{R}$ | dim 1). | Disuguaglianza triangolare |
| 2) $ x - y \leq x - y $ | | Disuguaglianza moduli annidati |

DIMOSTRAZIONE 1).

$-|x| \leq x \leq |x| \rightarrow$ sommiamo il corrispondente con la y

$-|y| \leq y \leq |y|$

$-|x| - |y| \leq x + y \leq |x| + |y|$

\rightarrow imposto $k = |x| + |y| \geq 0$, sostituisco:

$-k \leq x + y \leq k$

\rightarrow è la proprietà 4 al contrario

Vale quindi: $|x + y| \leq k = |x| + |y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$

CVD

APPLICAZIONE DEL MODULO ALLO STUDIO DI FUNZIONE:

Soventi sono gli studi di funzione contenenti un modulo. Risulta opportuno e comodo, spezzare la funzione in più tratti, distinguendo gli intervalli dove l'argomento del modulo è positivo e quelli in cui l'argomento è negativo. Ricordarsi di invertire il segno di tutti i membri dell'argomento dentro il modulo. Prestare attenzione alle eventuali proprietà di simmetria (Pari / Dispari) da identificare anche attraverso le proprietà del modulo riportate in precedenza.

Es: 1 modulo

$$f(x) = \frac{|x+3|}{2x}$$

A- Valutare il modulo negli intervalli in cui $P(x) \geq 0$

$$x + 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3$$

B- Scrivere la funzione divisa in -3

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+3}{2x} & \text{se } x \geq -3 \\ \frac{-x-3}{2x} & \text{se } x < -3 \end{cases}$$

Es: 2 moduli

$$f(x) = |x-1| - |x|$$

A- Valutare i due moduli negli intervalli dove $P(x) \geq 0$

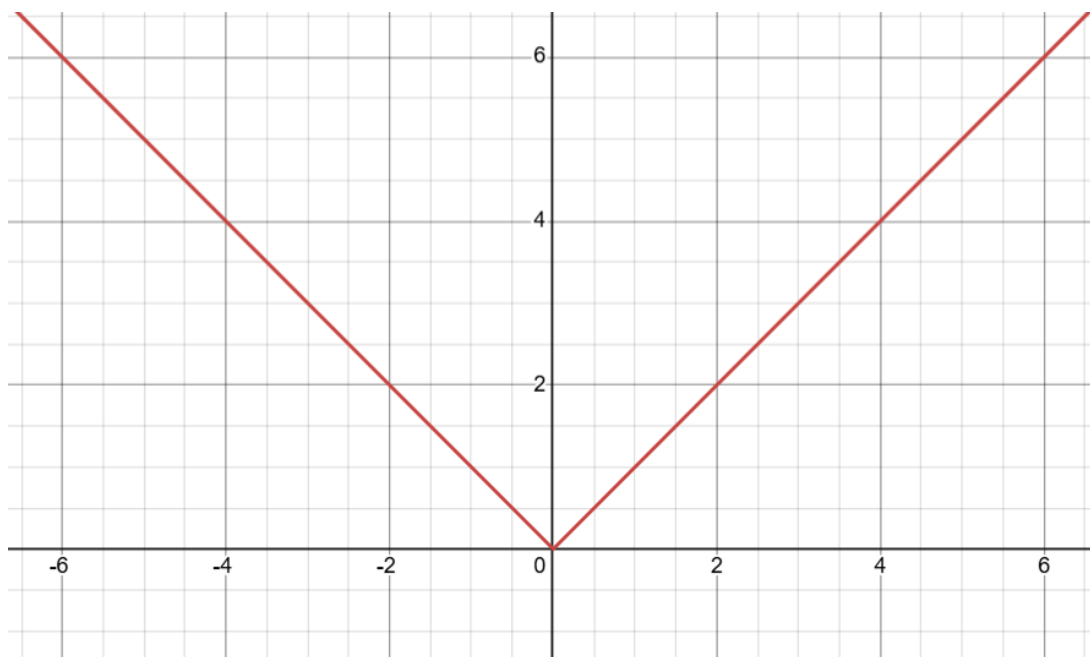
$$\begin{aligned} x - 1 &\geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

B- Avendo due valori, gli intervalli saranno divisi dai due punti, in base alla condizione di ogni argomento. Riscrivere la funzione

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \geq 1 \\ -2x + 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

VISUALIZZAZIONE GRAFICA MODULO:

$$f(x) = |x|$$



Come si può notare, il grafico di $f(x) = x$ (bisettrice del I e III quadrante) viene “ribaltato” rispetto l’asse x su $(-\infty, 0]$. Viene infatti rispettata la definizione iniziale secondo la quale, i valori negativi del modulo, vengono resi positivi.