# FUNZIONI

## INTRODUZIONE

**DEF:** PRODOTTO CARTESIANO: Presi A e B insiemi, si definisce il prodotto cartesiano AxB:

A x B $\Leftrightarrow \{(x, y): x \in A \wedge y \in B\}$

A x B $\neq$ B x A , proprietà non commutativa

Es:

A = {a, b}  B = {1, 2, 3}

A x B = {(a, 1), (a, 2), (a, 3) (b, 1), (b, 2), (b, 3)} → prodotto cartesiano di n x m elementi

Da $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$

**DEF:** RELAZIONE: Una relazione R tra A e B è un sottoinsieme A x B.

Es:

$R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 16\}$ → è una relazione. (0,4), (0,-4), (4,0)…

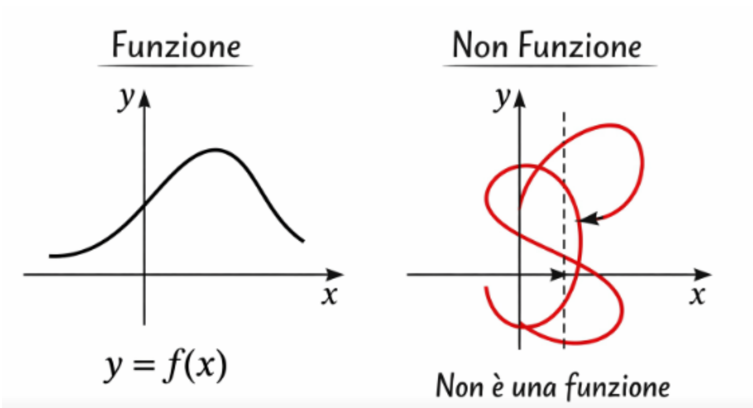
**DEF:** FUNZIONE: Presi A, B insiemi con $A \subseteq \mathbb{R} \wedge A \neq \emptyset, B \in \mathbb{R} \wedge B \neq \emptyset$, si definisce funzione:

$$\begin{matrix} f: A \to B \\ x \to y = f(x) \end{matrix} \Leftrightarrow \forall x \epsilon A, \exists!\, y \in B : y = f(x)$$

È una relazione che ad ogni $x \in A$ = dom f(x), associa una ed una sola $y \in B$ = codom f(x).

**DEF:** GRAFICO DI FUNZIONE:

$Gf = \{(x, y) \in \mathbb{R}: x \in A \wedge y = f(x)\}$




Dalla definizione:

Grafico nero: è funzione

Grafico rosso: non è funzione

***DEF:*** IMMAGINE DI UN INSIEME ATTRAVERSO f(x):

Presa una funzione $f: A \to B$ e sia $E \subseteq A = dom\, f(x)$:

l'immagine attraverso f(x) di E è: $f(E) = \{f(x): x \in E\}$

*OSS:* se E ≡ A = $dom\, f(x)$ allora $f(E) = f(dom\, f(x)) = Im\, f(x)$

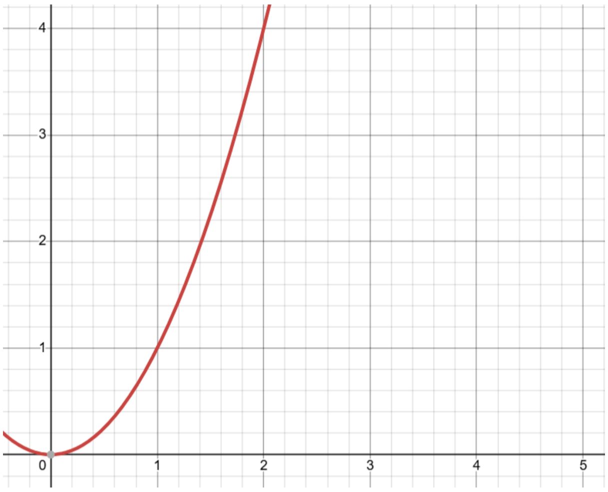
***DEF:*** CONTROIMMAGINE DI UN INSIEME ATTRAVERSO f(x):

Presa una funzione $f: A \to B$ e sia $F \subseteq B = codom\, f(x)$:

la contro immagine attraverso f(x) di F è: $f^{-1}(F) = \{x \in \text{dom}\, f : f(x) \in F\}$

Es: $f(x) = x^2$

- sia E = [1, 2], l'immagine di E è [1, 4]
- sia F = [2, 3], la contro immagine di F è $[-\sqrt{3}, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ per simmetria della funzione




## *PROPRIETA' FUNZIONI:*

Per le seguenti proprietà si assume una funzione $f: A = dom\, f \to B = codom\, f$

*DEF:* SURIETTIVITA': $f(A) = f(dom\, f) = B = codom\, f \Leftrightarrow$ la funzione è SURIETTIVA

Per ogni y, la funzione ammette almeno 1 contro immagine.

*DEF:* INIETTIVITA': $\forall x_1, x_2 \in A \wedge x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \Leftrightarrow$ la funzione è INIETTIVA

Per ogni y, la funzione ammette al più 1 contro immagine.

*DEF:* BIETTIVITA': Una funzione iniettiva e suriettiva è BIETTIVITA'

Per ogni y, la funzione ammette una e una sola contro immagine.

# ***TIPOLOGIE DI FUNZIONI:***

***DEF:*** FUNZIONE INVERSA:

Sia $f: X \to f(x)$ una funzione iniettiva. È possibile definire la funzione inversa come:

$f^{-1}: f(x) \to X$
$y \to x: y = f(x)$

*OSS:* Il grafico della funzione e della sua inversa sono simmetrici rispetto la bisettrice y = x

*OSS:* Una funzione, per essere invertita qualora non sia iniettiva, deve essere ristretta in maniera opportuna.

Es:

$f(x) = x^2 \to \mathbb{R}$ non è iniettiva e non è invertibile, mentre $f(x) = x^2 \to [0, +\infty)$ è invertibile.

***DEF:*** FUNZIONI MONOTONE: $f: A = dom\, f \to B = codom\, f$

1. $f(x)$ è CRESCENTE su A $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A \wedge x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
2. $f(x)$ è DECRESCENTE su A $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A \wedge x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
3. $f(x)$ è STRETTAMENTE CR. su A $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A \wedge x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
4. $f(x)$ è STRETTAMENTE DECR. su A $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A \wedge x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

***TEOREMA:*** se f(x) è STRETTAMENTE MONOTONA su $A \subseteq \mathbb{R}$ allora è INIETTIVA.

*DIM*: Supponendo che f sia strettamente crescente avrò:

$\forall x_1, x_2 \in A \wedge x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

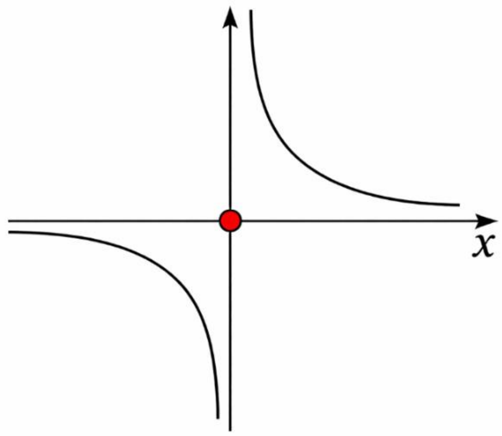
Si può notare quindi che per $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ che è la definizione di iniettività.

NON VALE IL VICEVERSA: non è detto che una funzione iniettiva sia strettamente monotona.

Di seguito un controesempio per giustificare il “non vale il viceversa”.

Es:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & se \quad x \neq 0 \\ 0 & se \quad x = 0 \end{cases}$$




La funzione non è strettamente monotona dato che presi due punti rispettivamente a sinistra e destra rispetto lo 0, la funzione è crescente. Sui suoi rami è decrescente → la funzione non è strett. monotona nonostante sia iniettiva.

*OSS:* La somma di due funzioni monotone CONCORDI è una funzione monotona di uguale natura.

1. Monotona crescente + monotona crescente = monotona crescente

   Es: $f(x) = e^x + x$ è somma di due funzioni monotone crescenti

2. Monotona decrescente + monotona decrescente = monotona decrescente

   Es: $f(x) = -\sqrt{x} - x$

***DEF:*** FUNZIONE COMPOSTA: Siano f e g due funzioni di cui f suriettiva.

Esiste la funzione composta $g \circ f$ : dom $g \circ f \to$ Im $g \circ f$

$$x \to y = g[f(x)]$$

Condizione di componibilità:

$f\colon dom\, f \to Im\, f$
$g\colon dom\, g \to Im\, g$ → per essere componibile deve risultare: $Im\, f \cap dom\, g \neq \emptyset$

Valutazione dominio e immagine:

$dom\, g \circ f = f^{-1}(Im\, f \cap dom\, g)$ → Dominio della composta

Im $g \circ f = g(Im\, f \cap dom\, g)$ → Immagine della composta

Esempio di composizione di una funzione: vogliamo ottenere $g \circ f$:

$f(x) = \sqrt{x}$ → $[0, +\infty] \to [0, +\infty]$ → Prelevo $Im\, f = [0, +\infty]$

$g(x) = e^x$ → $\mathbb{R} \to (0, +\infty]$ → Prelevo $dom\ g = \mathbb{R}$

È componibile? Sì, perché $Im\ f \cap dom\ g \neq \emptyset$ e risulta $[0, +\infty]$

$dom\ g \circ f = f^{-1}(Im\ f \cap dom\ g)$ → $f^{-1}([0, +\infty]) = [0, +\infty]$

Im $g \circ f = g(Im\ f \cap dom\ g)$ → $g([0, +\infty]) = [1, +\infty]$

La funzione $g \circ f$ risulta essere:

$g \circ f : [0, +\infty] \to [1, +\infty]$

$x \to y = e^{\sqrt{x}}$

**TEOREMA:** Prese due funzioni f e g componibili tra loro si ha che:

1. f crescente su A e g crescente su f(A) ⇒ $g \circ f$ è CRESCENTE su A
2. f decrescente su A e g decrescente su f(A) ⇒ $g \circ f$ è CRESCENTE su A
3. f crescente su A e g decrescente su f(A) ⇒ $g \circ f$ è DECRESCENTE su A
4. f decrescente su A e g crescente su f(A) ⇒ $g \circ f$ è DECRESCENTE su A

**DEF:** FUNZIONE PERIODICA: Sia f una funzione definita su $A \subseteq \mathbb{R}$:

f è T-periodica⇔ 1) $x \in A \Rightarrow x + T \in A\ con\ T > 0$

2) $f(x) + kT = f(x), \forall x \in A, k \in \mathbb{Z}$

Viene definito periodo fondamentale $T_0 = \min\{T > 0: \ f(x) = f(x+T), x \in A\}$

Calcolo del periodo di una funzione:

$f(x) = sin(2x)$ → $T_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi = T_0$ → divido per il moltiplicatore il periodo → $T_0$

Calcolo del periodo di una somma di funzioni:

$f(x) = cos\left(\frac{x}{2}\right) + sin(4x) + 5$

Prima funzione: $cos\left(\frac{x}{2}\right)$ → $T_1 = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$

Seconda funzione: $sin(4x)$ → $T_2 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

Devo verificare che il rapporto tra i periodi sia un C $\epsilon$ $\mathbb{Q}$: $\frac{T_1}{T_2} = \frac{4\pi}{\frac{\pi}{2}} = 8 \in \mathbb{Q}$ → è periodica

Calcolo il periodo della funzione: $T_0 = mcm\left\{\frac{1}{2}, 4\right\} = 4\pi$

La funzione finale è periodica con T = $4\pi$

## FUNZIONI LIMITATE:

**DEF:** FUNZIONE LIMITATA SUPERIORMENTE: Sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f$ è limitata superiormente su A ⇔ $f(A)$ ammette maggioranti ⇔ $\exists M \epsilon \mathbb{R}$: $f(x) \leq M_, \forall x \in A$

Es: $f(x) = -x^2$ è limitata superiormente per ogni M ≥ 0

**DEF:** FUNZIONE LIMITATA INFERIORMENTE: Sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f$ è limitata inferiormente su A ⇔ $f(A)$ ammette minoranti ⇔ $\exists M \epsilon \mathbb{R}$: $f(x) \geq M_, \forall x \in A$

Es: $f(x) = e^x$ è limitata inferiormente per ogni M ≤ 0

**DEF:** FUNZIONE LIMITATA: Sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

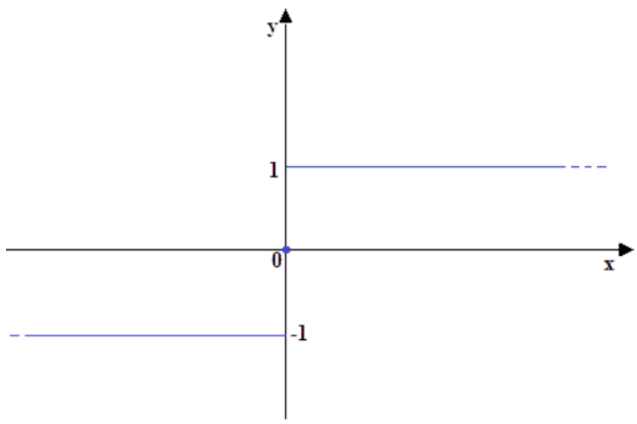
$f$ è limitata su A ⇔ $\exists M > 0\ \epsilon \mathbb{R}$: $|f(x)| \leq M_, \forall x \in A$

Es: $f(x) = \sin(x)$ è limitata per ogni M ≥ 1

## FUNZIONI NOTEVOLI:

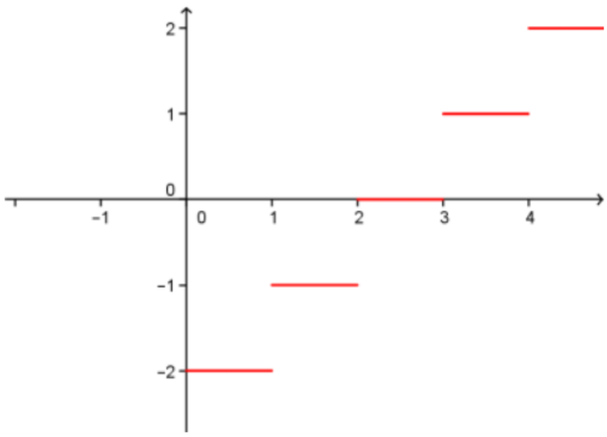
SEGNO:

$$sgn(x) = \begin{cases} 1 & se \quad x > 0 \\ 0 & se \quad x = 0 \\ -1 & se \quad x < 0 \end{cases}$$




La funzione "segno" è limitata tra -1 e +1 che sono anche i valori di minimo e massimo, nonché di Inf f(x) e Sup f(x)

PARTE INTERA:

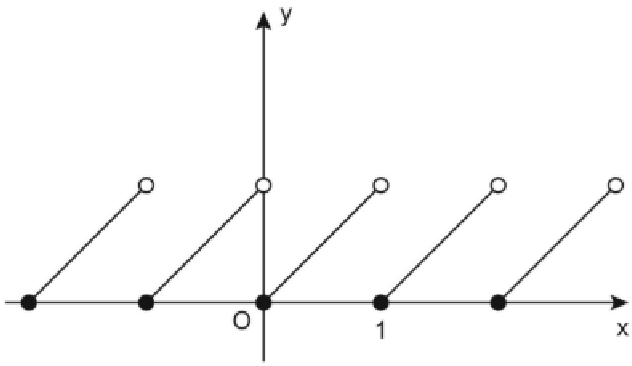



$[x] = max\{n \in \mathbb{Z}: n \leq x, x \in \mathbb{R}\}$

La funzione "parte intera" viene anche chiamata scalinata o gradinata e procede costante per tratti di ascisse lunghe 1 per scalare sulle ordinate a salti di 1.

MANTISSA:

$M(x) = x - [x]$




La funzione "mantissa" è data dalla differenza tra x e la sua parte intera. È una funzione limitata tra 0 e +1 e possiede minimo e quindi anche Inf f(x) = 0 mentre possiede Sup f(x) = 1 ma non ha massimo. È una funzione periodica di periodo T = 1.