INSIEMI NUMERICI

PRINCIPALI INSIEMI

NATURALI: $\mathbb{N}$, ne fanno parte: {0, 1, 2, 3…}

INTERI: $\mathbb{Z}$, ne fanno parte: {… -2, -1, 0, 1, 2, 3…}

RAZIONALI: $\mathbb{Q}$, ne fanno parte: $\{\frac{m}{n} : n \neq 0 \wedge m, n \in \mathbb{Z} \wedge m, n\ primi\ tra\ loro\}$

REALI: $\mathbb{R}$, ne fanno parte: {-1, 0, 1, $\sqrt{2}, \pi$}

COMPLESSI: $\mathbb{C}$: { $\mathbb{R}$ + i} con i = immaginari

Vale sempre la seguente relazione: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

STRUTTURA DI $\mathbb{Q}$

È un insieme dotato di 2 operazioni BINARIE: somma e prodotto

SOMMA:

1) $\forall a_, b \epsilon \mathbb{Q}: a + b = b + a$ Commutativa
2) $\forall a, b, c \in \mathbb{Q}: (a + b) + c = a + (b + c)$ Associativa
3) $\exists 0 \in \mathbb{Q}; \forall a_, a + 0 = a$ Esistenza elemento neutro
4) $\forall a \in Q_, \exists b \in Q: a + b = 0$ Esistenza elemento opposto

PRODOTTO:

1) $\forall a_, b \in \mathbb{Q}: a \cdot b = b \cdot a$ Commutativa
2) $\forall a_, b_, c \ \epsilon\ \mathbb{Q}: (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ Associativa
3) $\exists\ 1\ \epsilon\ \mathbb{Q} : \forall\ a_,\ \ a \cdot 1 = a$ Esistenza elemento neutro
4) $\forall a \neq 0, \exists b \epsilon \mathbb{Q}: a \cdot b = 1$ Esistenza elemento opposto

GENERICA:

1) $\forall a_, b_, c \ \epsilon\ \mathbb{Q}:\ a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ Distributiva somma/prodotto

Un insieme Q dotato delle due operazioni binarie (somma e prodotto) che soddisfano le proprietà elencate, viene detto *CAMPO*. In questo caso campo *RAZIONALE*.

SOTTRAZIONE: $\forall a, b \in \mathbb{Q}: a - b \Leftrightarrow a + (-b)$

DIVISIONE: $\forall a, b \in \mathbb{Q} : \frac{a}{b} = a\left(\frac{1}{b}\right)$

PROPRIETA': $\mathbb{Q}$ è un campo totalmente ordinato che soddisfa le premesse di somma e prodotto. In $\mathbb{Q}$ è definita una relazione d'ordine:

- $\forall a \in \mathbb{Q}: a \leq a$
- $\forall a, b \in \mathbb{Q}: a \leq b \wedge b \leq a \Leftrightarrow a = b$
- $\forall a, b, c \in \mathbb{Q} : a \leq b \wedge b \leq c \Leftrightarrow a \leq c$

Le 3 elencate sono le proprietà d'ordine di $\mathbb{Q}$.

PROBLEMATICA: Nel 500 a.C. circa, sorse un problema matematico riguardo la completezza del campo $\mathbb{Q}$. Presi OA distanza di valore 1 e AP, sempre di valore 1, due cateti di un triangolo rettangolo orientato con la base sull'asse $\mathbb{Q}$, si nota che l'ipotenusa del triangolo OP riportata con traslazione sull'asse $\mathbb{Q}$, non è esprimibile attraverso il rapporto m/n del campo $\mathbb{Q}$. Il valore risulta $\sqrt{2}$ non esprimibile da definizione. È necessario dunque inserire un campo più denso e completo rispetto $\mathbb{Q}$.

STRUTTURA DI $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ è la retta reale, continua in ogni punto e senza salti. Risulta più completa rispetto $\mathbb{Q}$.

1) $\forall x \in \mathbb{R}$ esiste un punto "p" appartenente alla retta corrispondente
2) $\forall$ *punto "p" ϵ alla retta*, $\exists x \in \mathbb{R}$ corrispondente

Le due proprietà compongono, unite, una corrispondenza biunivoca

DENSITA' DI $\mathbb{R}$: valgono le seguenti due proprietà:

1) Esistono infiniti razionali z : $x < z < y$
2) Esistono infiniti irrazionali z : $x < z < y$

INTERVALLI

DEF: INTERVALLO: è un insieme limitato ma infinito di elementi che gode della proprietà di connessione. Sono intervalli:

[a, b] = intervallo chiuso $[a,b] = \{x \in \mathbb{R}: a \leq x \leq b\}$

(a, b) = intervallo aperto $(a,b) = \{x \in \mathbb{R}: a < x < b\}$

[a, b) = chiuso a sinistra

(a, b] = chiuso a destra

[a, +∞) [a, +∞) = $\{x \in \mathbb{R}: x \geq a\}$

DEF: PROPRIETA' DI CONNESSIONE: $\forall x, y \in I, \forall z: x < z < y \Rightarrow z \in I$

Es: [2,3) ∪ [5,10] non è intervallo dato che l'unione di due intervalli, non è un intervallo. Preso infatti z=4, questo non appartiene ad I intervallo.

DEF: MASSIMO E MINIMO: Sia A ⊆ ℝ un intervallo:

Si definisce *MASSIMO* di A : $x_m \Leftrightarrow (x_m \in A) \wedge (\forall x \epsilon A: x_m \geq x)$

Si definisce *MINIMO* di A: $x_m \Leftrightarrow (x_m \in A) \wedge (\forall x \epsilon A: x_m \leq x)$

Es:

A = [0, 4]	min = 0; max = 4
B = [2,3) ∪ {4}	min = 2; max = 4
C = ℕ	min = 0; max = ∄
D = [4, +∞)	min = 4; max = ∄
E = (4, 8)	min = ∄ ; max = ∄

DEF: INSIEME SUPERIORMENTE LIMITATO: Sia A ⊆ ℝ Λ $A \neq \emptyset$:

A è *SUPERIORMENTE LIMITATO* $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}, \forall x \epsilon A: x \leq k$ k è maggiorante di A

DEF: INSIEME INFERIORMENTE LIMITATO: Sia A ⊆ ℝ Λ $A \neq \emptyset$:

A è *INFERIORMENTE LIMITATO* ⇔ $\exists h \in \mathbb{R}, \forall x \epsilon A: x \geq h$ h è minorante di A

DEF: INSIEME LIMITATO: Sia A ⊆ $\mathbb{R}\ \Lambda\ A \neq \emptyset$:

A è *LIMITATO* ⇔ $\exists\ k, h \in \mathbb{R}, \forall x \epsilon A: h \leq x \leq k$

Si indica con:

A^+ l'insieme dei maggioranti di A

A^- l'insieme dei minoranti di A

Es:

A = [0,4] A^+ = [4, +∞); A^- = (-∞, 0]

B = [2,3) ∪ {4} B^+ = [4, +∞); B^- = (-∞, 2]

DEF: INTERVALLO ILLIMITATO SUPERIORMENTE:

Sia A ⊆ $\mathbb{R}\ \Lambda\ A \neq \emptyset$:

A è *SUPERIORMENTE ILLIMITATO* ⇔ $\forall k \in \mathbb{R}, \exists x \epsilon A : x > k$ non ammette magg.

DEF: INTERVALLO ILLIMITATO INFERIORMENTE:

Sia A ⊆ $\mathbb{R}\ \Lambda\ A \neq \emptyset$:

A è *INFERIORMENTE ILLIMITATO* ⇔ $\forall h \in \mathbb{R}, \exists x \epsilon A : x < h$ non ammette minor.

DEF: INTERVALLO ILLIMITATO:

Sia A ⊆ $\mathbb{R}\ \Lambda\ A \neq \emptyset$:

A è *ILLIMITATO* se non ammette né maggioranti né minoranti

DEF: ESTREMO SUPERIORE / ESTREMO INFERIORE DI A:

Sia A ⊆ $\mathbb{R}\ \Lambda\ A \neq \emptyset$:

- Sup (A) = min (A^+)= min $\{k \in \mathbb{R}: x \leq k, \forall x \in A\}$ minore dei maggioranti
- Inf (A) = max (A^-) = max $\{h \in \mathbb{R}: x \geq h, \forall x \in A\}$ massimo dei minoranti

Per convenzione il Sup di ∅ è +∞

Valgono le seguenti relazioni:

1) Se C^+ = ∅ allora Sup (C) = +∞ mentre se C^- = ∅ allora Inf (C) = −∞. Ciò significa che sono rispettivamente, superiormente ed inferiormente illimitati.
2) Se A ⊆ $\mathbb{R} \wedge A \neq \emptyset$ ammette max (A) allora Sup (A) = max A()
   Se ammette min (A) allora Inf (A) = min (A)
3) Se il Sup (A) ⊆ A, A ammette max e vale Sup (A)
   Se l' Inf (A) ⊆ A, A ammette min e vale Inf (A)

DEF: CARATTERIZZAZIONE DEL SUP DI A:

Sia A ⊆ $\mathbb{R} \wedge A \neq \emptyset$:

l = Sup(A) = 1) $\forall x \epsilon A: l \geq x$ l è maggiorante

2) $\forall \varepsilon > 0, \exists x \epsilon A: l - \varepsilon < x$ l è il minore dei maggioranti

DEF: CARATTERIZZAZIONE DELL' INF DI A:

Sia A ⊆ $\mathbb{R} \wedge A \neq \emptyset$:

l = Inf(A) = 1) $\forall x \epsilon A: l \leq x$ l è minorante

2) $\forall \varepsilon > 0, \exists x \epsilon A: l + \varepsilon > x$ l è il maggiore dei minoranti