LOGICA E TEORIA DEGLI INSIEMI

DEFINIZIONI LOGICHE

DEF: PROPOSIZIONE: Una proposizione è un enunciato che può essere vero o falso (V/F)

Es: p: "Oggi è Martedì" → V. In questo caso p è una proposizione

q: "Il gelato alla crema è il migliore" La risposta è soggettiva, no proposizione

DEF: PREDICATO: È una proposizione che dipende da 1 o più parametri

Es: 1) a(x): "x" è un numero pari → dipende da 1 parametro

2) p(x,y): "Lo studente x conosce y" → dipende da 2 parametri

3) q(x,y,z): "La somma di x, y vale z" → dipende da 3 parametri

QUANTIFICATORI

$\forall$: Per ogni / qualunque

$\exists$: Esiste almeno uno

$\exists!$: Esiste ed è unico

All'interno di ogni predicato, è necessario usare uno o più quantificatori a seconda del numero di parametri del predicato. Es: predicato con 2 parametri → 2 quantificatori.

OPERATORI LOGICI (Vengono fornite le tavole di verità degli operatori)

DEF: NEGAZIONE: Fornisce la negazione di una proposizione generica "p":

p	**¬p**
V	**F**
F	**V**

DEF: DISGIUNZIONE LOGICA: Vera nel caso in cui almeno una tra "p" e "q" sia vera:

p	q	**p ∨ q**
V	V	**V**
F	V	**V**
V	F	**V**
F	F	**F**

DEF: CONGIUNZIONE LOGICA: Vera solo nel caso in cui sia "p" che "q" sono vere:

p	q	**p ∧ q**
V	V	**V**
F	V	**F**
V	F	**F**
F	F	**F**

DEF: RELAZIONI DI DE MORGAN:

1) $\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$

2) $\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$

DEF: IMPLICAZIONE LOGICA: Prese "p" e "q" proposizioni, si ha implicazione se "p" (ipotesi) comporta "q" (tesi). "p" viene anche definita *antecedente* e "q" *conseguente*.

p	q	**p ⇒ q**
V	V	**V**
F	V	**F**
V	F	**V**
F	F	**V**

Ricordare che l'implicazione risulta Falsa dal momento in cui non si può giungere ad una tesi partendo da un'ipotesi errata.

DEF: EQUIVALENZA LOGICA: Prese "p" e "q" proposizioni, si ha equivalenza se "p" e "q" possiedono lo stesso valore di verità.

p	q	**p ⇔ q**
V	V	**V**
F	V	**F**
V	F	**F**
F	F	**V**

L'equivalenza logica può anche essere chiamata *coimplicazione logica* e vale la seguente relazione:

$p \Leftrightarrow q \quad == \quad (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

COME NEGARE DELLE PROPOSIZIONI: Si devono sostituire i simboli di "per ogni" con "qualunque".

Es 1:

p : "Per ogni x, vale p(x) → $\forall x, p(x)$

¬p: "Per nessuna x, vale p(x)" → $\exists x, \neg p(x)$

Es 2:

q: "Per ogni x, esiste y tale che q(x, y) → $\forall x, \exists y : q(x, y)$

¬q: "Esiste una x, per ogni y tale che q(x, y) è falso → $\exists x, \forall y : \neg q(x, y)$

ELEMENTI DI INSIEMI

IDENTIFICAZIONE INSIEMI: A, B, C, D... sono insiemi e si indicano con lettere maiuscole

ELENCHI: Un elenco compare così: A = {a, b, c, d...} gli elementi sono singolari

PROPRIETA': una proprietà compare così: $B = \{x : x \geq 2\}$ condizione necessaria

RELAZIONI TRA INSIEMI

DEF: INCLUSIONE: Presi due insiemi A, B si dice che A è incluso in B ($A \subseteq B$) se tutti gli elementi di A appartengono anche a B:

$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall a, (a \in A) = (a \in B)$

Valgono le seguenti proprietà:

1) Riflessiva: $\forall A : A \subseteq B$
2) Antisimmetrica o uguaglianza: $\forall A,B: A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Rightarrow A=B$
3) Transitiva: $\forall A,B,C: A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

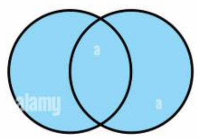
DEF: INCLUSIONE STRETTA: Presi due insiemi A, B si dice che A è strettamente incluso in B se e solo se tutti gli elementi di A appartengono anche a B ma esiste almeno un elemento di B che non appartiene ad A

$A \subset B \Leftrightarrow [\forall A, (a \in A) \Rightarrow a \in B] \wedge [\exists\, b \in B : b \notin A]$

DEF: INSIEME VUOTO: è un insieme che non contiene elementi, indicato con $\emptyset$ oppure {}.

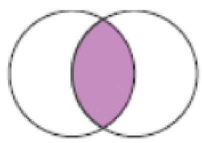
Per ogni insieme A, vale sempre: $\emptyset \in A$

OPERAZIONI TRA INSIEMI



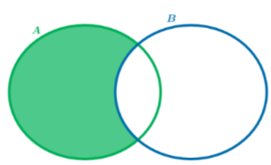
DEF: UNIONE: La totalità degli elementi di due insiemi (regione azzurra).

$A \cup B \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B)$



DEF: INTERSEZIONE: Elementi comuni a due insiemi (regione viola).

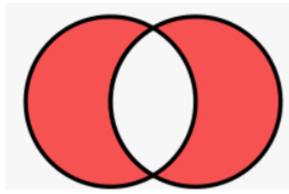
$A \cap B \;\Leftrightarrow\; (x \in A \wedge x \in B)$



DEF: DIFFERENZA INSIEMISTICA: Presi due insiemi, si priva il primo della parte in comune con il secondo. È una proprietà non commutativa dato che A \ B è diverso da B \ A. (regione verde).

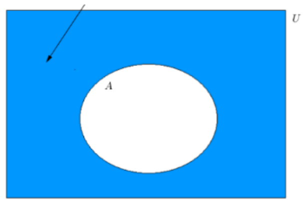
$A \setminus B \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B)$

DEF: DIFFERENZA SIMMETRICA: Presi due insiemi, sono tutti gli elementi esclusi quelli comuni ai due (regione rossa).



A Δ B ⇔ $(x \in A \cup B \;\; \wedge \;\; A \cap B)$

DEF: COMPLEMENTO DI UN INSIEME: Comprende tutti gli elementi dell'universalità esclusi quelli dell'insieme (regione azzurra).



$C_U(A) \Leftrightarrow \{x \in U : x \notin A\} = U \setminus A$

Valgono le seguenti proprietà:

1) $C_U(C_U(A)) = A$ complementare del complementare
2) $A \subseteq B \Leftrightarrow C_U(B) \subseteq C_U(A)$ gli elementi dell'uguaglianza sono gli stessi

DEF: INSIEME DELLE PARTI: Sia A un insieme e P(A) l'insieme delle parti di A. P(A) è un insieme di insiemi contenente tutti gli insiemi possibili di A.

$P(A) \Leftrightarrow \{X : X \subseteq A\}$

Es: A = {1, 2, 3}. A possiede 3 elementi e P(A) sarà:

P(A) = [∅, A, {1}, {2}, {3}, {1,2}, {2,3}, {1,3}]

Si noti che, preso un A finito con n elementi, P(A) avrà esattamente 2^n elementi.