SUCCESSIONI E LIMITI DI SUCCESSIONI

SUCCESSIONI

DEF: SUCCESSIONE: Una successione è una particolare funzione del tipo:

$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$n \to f(n) = a_n \in \mathbb{R}$$

DEFINIZIONI UTILI: Preso un predicato P(n)che dipende da n ϵ $\mathbb{N}$, si dice:

- P(n) è definitivamente vero $\Leftrightarrow \exists n_0 \epsilon \mathbb{N}: p(n)$ è $vera$ $\forall$n $> n_0$
- P(n) è frequentemente vero $\Leftrightarrow$ P(n) è vera per un numero infinito di $n \in \mathbb{N}$

Es:

1) P(n) è vera se $(n^2 - 26)$ è positivo → definitivamente e frequentemente per $n > 2$.
2) P(n) è vera se n termina con 2005 → frequentemente ma non definitivamente vera.

ESEMPI DI SUCCESSIONI: Una successione può essere definita su A $= \{n \in \mathbb{N}: n > n_0\}, n_0 \in \mathbb{N}$

$a_n = \dfrac{1}{n}, n > 0$

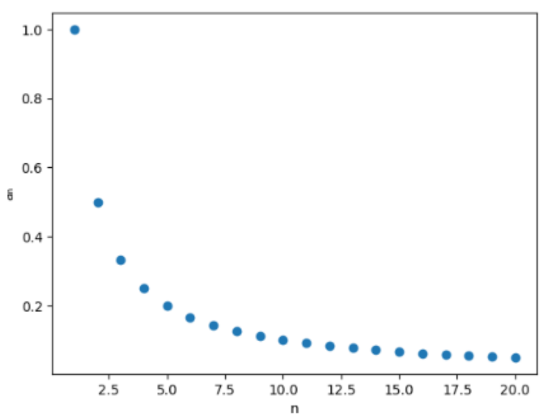
$b_n = \sqrt{n-4}, n > 3$

$C_n = \sqrt{6-n}$ non è successione

RAPPRESENTAZIONE DI SUCCESSIONI: è l'insieme dei punti della successione.

Rappresentazione dei punti della successione:

$a_n = \dfrac{1}{n}, n > 0$



INTRODUZIONE AI LIMITI DI SUCCESSIONI:

DEF: INTORNO DI x_0:

Un intorno di x_0 raggio $r > 0 \Leftrightarrow I_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}: |x - x_0| < r\} = (x_0 - r, x_0 + r)$

DEF: INTORNO DI $+\infty$:

Un intorno di $+\infty \Leftrightarrow I_a(+\infty) = \{x \in \mathbb{R}: x > a\} = (a, +\infty)$

DEF: INTORNO DI $-\infty$:

Un intorno di $-\infty \Leftrightarrow I_b(-\infty) = \{x \in \mathbb{R}: x < a\} = (-\infty,\ b)$

LIMITI DI SUCCESSIONI:

Presa una generica successione a_n, abbiamo 4 possibili comportamenti:

N.B: Studiamo il comportamento solo a $+\infty$ dato che le successioni sono funzioni definite su $\mathbb{N}$.

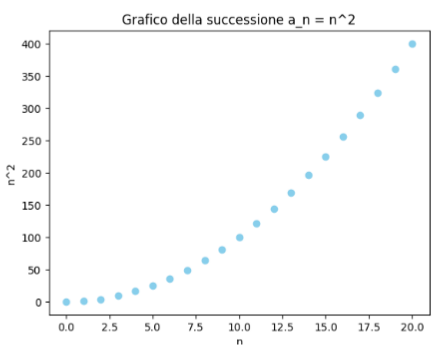
1) a_n DIVERGE POSITIVAMENTE $\Leftrightarrow a_n \to +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$
2) a_n DIVERGE NEGATIVAMENTE $\Leftrightarrow a_n \to -\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$
3) a_n CONVERGE ad L$\Leftrightarrow a_n \to l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$
4) a_n OSCILLA / INDETERMINATA$\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \nexists$

1° CASO:

$a_n = n^2$

$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$

DEFINIZIONE: $a_n \to +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists n_a: n > n_a \Rightarrow a_n > A$

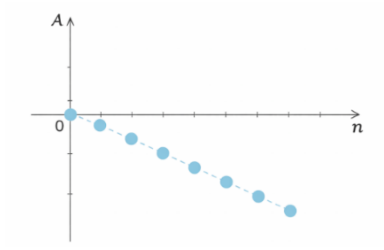


2° CASO:

$a_n = -n$

$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} -n = -\infty$

<u>DEFINIZIONE</u>: $a_n \to -\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists n_a : n > n_a \Rightarrow a_n < -A$

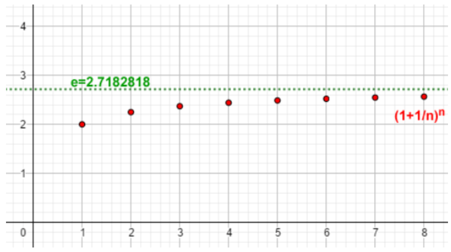


3° CASO:

$a_n = \frac{n}{n+1}$

$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = l \in \mathbb{R}$

<u>DEFINIZIONE</u>: $a_n \to l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_e : n > n_e \Rightarrow |a_{n-l}| < \varepsilon$

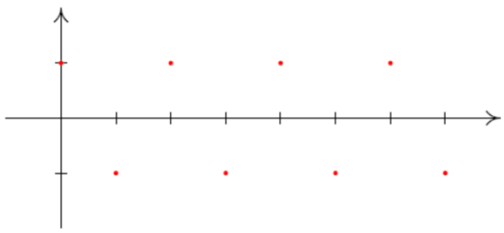


4° CASO:

$a_n = (-1)^n$

$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} (-1)^n = \nexists$

In questo caso la successione oscilla ed è indeterminata, quindi il limite a $+\infty$ non esiste.



$a_n = (-1)^n$

<u>MONOTONIA E LIMITATEZZA DI SUCCESSIONI:</u>

Presa una generica successione a_n, possiamo avere:

- a_n è monotona CRESCENTE $\Leftrightarrow a_{n+1} \geq a_n$ definitivamente
- a_n è monotona DECRESCENTE $\Leftrightarrow a_{n+1} \leq a_n$ definitivamente
- a_n è monotona strettamente CRESCENTE $\Leftrightarrow a_{n+1} > a_n$ definitivamente
- a_n è monotona strettamente DECRESCENTE $\Leftrightarrow a_{n+1} < a_n$ definitivamente

Analogamente alle funzioni, avremo che:

- a_n è limitata SUPERIORMENTE $\Leftrightarrow \exists M \epsilon \mathbb{R}: a_n \leq M$ definitivamente
- a_n è limitata INFERIORMENTE $\Leftrightarrow \exists M \epsilon \mathbb{R}: a_n \geq -M$ definitivamente
- a_n è limitata $\Leftrightarrow \exists M \epsilon \mathbb{R}^+: |a_n| \leq M$ definitivamente

DEFINIZIONI E TEOREMI:

DEF: SUCCESSIONE REGOLARE: Una successione a_n si dice regolare se diverge o converge.

TEOREMA: REGOLARITA'

IPOTESI: Sia a_n una successione e monotona definitivamente

TESI: a_n è regolare

COROLLARIO: **dim. 1)**

IPOTESI: Sia a_n una successione monotona crescente

TESI: 1) Se a_n è superiormente limitata allora $a_n \to Sup\ \{a_n\} = l \in \mathbb{R}$

2) Se a_n non è superiormente limitata allora $a_n, \to\ +\infty$

Vale anche per a_n successione monotona decrescente: tenderà all' $Inf\ \{a_n\}$ oppure a $-\infty$.

DIMOSTRAZIONE 1).

Indico con $\{a_n\}$ = codom n. Considerando la successione su $A \subseteq \mathbb{R} \wedge A \neq \emptyset$ con A superiormente limitato, allora A ammette Sup {A}. L'insieme $\{a_n\}$ ammette Sup $\{a_n\}$ ovvero un $l \in \mathbb{R}$. Prendiamo in considerazione i 3 seguenti punti:

1) $\forall n: a_n \leq l$
2) $\forall \varepsilon > 0, \exists n_e: l - \varepsilon < a_{n\varepsilon} \leq l$ → Sup $\{a_n\}$
3) $\forall n > n + \varepsilon: a_{ne} \leq a_n \leq l < l + \varepsilon$ → monotonia

Osserviamo dunque che $\exists n_\varepsilon: n > n_e \Rightarrow l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$, che è la definizione di funzione che tende ad $l \in \mathbb{R}$ ovvero il Sup $\{a_n\}$. CVD

TEOREMA: CONVERGENZA-LIMITATEZZA **dim. 2)**

IPOTESI: Sia a_n una successione convergente

TESI: a_n è limitata

DIMOSTRAZIONE 2).

Per la definizione di successione convergente si ha che: $a_n \to l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_e : n > n_e \Rightarrow |a_{n-l}| < \varepsilon$. Scelto un $\varepsilon = 1$, esisterà sicuramente un n_1 per cui, $n > n_1 \Rightarrow l - 1 < a_n < l + 1$ definitivamente. Identificando adesso con $m = min\{a_0, a_1, a_2, l - 1 \dots\}$ e con $M = max\{a_0, a_1, a_2, l + 1 \dots\}$ si ha sicuramente: $\forall n; m \leq a_n \leq M$. La seguente scrittura è per definizione indicativa di una successione limitata. CVD

N.B.: NON vale il VICEVERSA del seguente teorema: non è detto che una successione limitata sia convergente. Si pensi alla successione $a_n = (-1)^n$, è una successione limitata tra +1 e -1 ma non è convergente, bensì oscillatoria e indeterminata.

CASO FAMOSO DI SUCCESSIONE:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e$$

È una successione strettamente crescente e superiormente limitata. Il suo limite è immediato e vale “e”.

TEOREMA: UNICITA’ DEL LIMITE:

IPOTESI: Sia a_n una successione ed esista il limite

TESI: Il limite della successione è unico

TEOREMA: CONFRONTO:

IPOTESI: Siano a_n e b_n due successioni regolari e valgano le seguenti relazioni:

1) $a_n \leq b_n$ definitivamente
2) $\lim_{n \to +\infty} a_n = l \in \overline{\mathbb{R}} \wedge \lim_{n \to +\infty} b_n = m \in \overline{\mathbb{R}}$ $\qquad \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

TESI: si ha che: $l \leq m$

TEOREMA: DOPPIO CONFRONTO o CARABINIERI:

IPOTESI: Siano $a_n,\ b_n,\ c_n$ tre successioni e valgano le seguenti relazioni:

1) $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = l \in \overline{\mathbb{R}}$
2) $a_n \leq b_n \leq c_n$ definitivamente

TESI: valgono le seguenti 2 tesi:

1) Esiste il limite di b_n $a + \infty$
2) Il limite vale $l \in \overline{\mathbb{R}}$

TEOREMA: PRODOTTO TRA SUCCESSIONI:

IPOTESI: Sia a_n una successione infinitesima (ovvero $a_n \to 0$) e b_n una successione limitata

TESI: Allora il limite: $\lim_{n\to+\infty} a_n \cdot b_n = 0$

ALGEBRA DEI LIMITI PER LE SUCCESSIONI:

Siano a_n e b_n e valgano: $a_n \to l \in \overline{\mathbb{R}} \wedge b_n \to m \in \overline{\mathbb{R}}$ in un intorno di $+\infty$. Valgono le seguenti relazioni:

1. $\lim_{n\to+\infty} a_n \pm b_n = l \pm m$ (se esistono i limiti)
2. $\lim_{n\to+\infty} a_n \cdot b_n = l \cdot m$ (se esistono i limiti)
3. $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{l}{m}$ (se esistono i limiti e $b_n \neq 0$ definitivamente)

LIMITE NOTEVOLE:

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} 0 & se \quad |q| < 1 \\ 1 & se \quad q = 1 \\ +\infty & se \quad q > 1 \\ \nexists & se \quad q \leq 1 \end{cases}$$

CRITERIO DEL RAPPORTO:

Sia a_n una successione positiva definitivamente. Se esiste il $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, allora si hanno:

$$\begin{cases} q > 1 \Rightarrow a_n \to +\infty \\ q = 1 \Rightarrow a_n \to q \\ q < 1 \Rightarrow a_n \to 0 \end{cases}$$

CRITERIO DELLA RADICE:

Sia a_n una successione positiva definitivamente. Se esiste il $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$, allora si hanno:

$$\begin{cases} q > 1 \Rightarrow a_n \to +\infty \\ q = 1 \Rightarrow a_n \to q \\ q < 1 \Rightarrow a_n \to 0 \end{cases}$$

GERARCHIA DEGLI INFINITI:

$\ln n < n < n^{\alpha} < q^n < n! < n^n$