

2.1. Séries de Potências e Fórmula de Taylor

(Slides com ligeiras adaptações de outros já existentes fortemente baseados no Capítulo 4 dos Apontamentos de Cálculo II da Prof. Doutora Virgínia Santos (disponíveis no Moodle))

Universidade de Aveiro, 2023/2024

Cálculo II – C

Resumo dos Conteúdos

- 1 Séries de Potências
- 2 Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange
- 3 Séries de Taylor
- 4 Anexos

Série de potências — definição

Definição:

Chama-se **série de potências centrada em $c \in \mathbb{R}$** (ou série de potências de $x - c$) a uma série da forma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - c)^n = a_0 + a_1(x - c) + a_2(x - c)^2 + \dots + a_n(x - c)^n + \dots \quad (1)$$

onde $a_n \in \mathbb{R}$, para todo o $n \in \mathbb{N}_0$. Os números a_n são designados de **coeficientes da série**.

Observação: No caso em que $c = 0$, temos a série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ que se chama **série de potências centrada na origem**.

Convenção: Em (1) supomos que $a_0(x - c)^0 = a_0$ mesmo que $x = c$ (isto é, vamos supor que $0^0 = 1$).

Exemplo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

Série de potências centrada na origem com coeficientes unitários.

Notar que [**porquê?**]

- a série é convergente sse $|x| < 1$, i.e., sse $x \in]-1, 1[$.

- $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, para $|x| < 1$.

O conjunto $] -1, 1[$ é chamado de **domínio de convergência** da série.

Domínio de convergência de uma série de potências

Definição:

Chama-se **domínio de convergência** da série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - c)^n$ ao conjunto de pontos $x \in \mathbb{R}$ para os quais a série é convergente.

Exemplos:

Usando os Critérios de D'Alembert e/ou de Cauchy e, se necessário, outros critérios de convergência de séries numéricas (como o Critério de Leibniz), podemos concluir que:

$$\textcircled{1} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}; \quad \text{domínio de convergência: } \mathbb{R}$$

$$\textcircled{2} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (x + 1)^n; \quad \text{domínio de convergência: }] - 2, 0]$$

$$\textcircled{3} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n! (x - 2)^n; \quad \text{domínio de convergência: } \{2\}$$

Domínio de convergência de uma série de potências

Notação: Usualmente denota-se o domínio de convergência de uma série de potências por D_c .

Observação: Uma vez que para $x = c$ a série de potências

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - c)^n$$

é convergente, podemos concluir que $D_c \neq \emptyset$.

Intervalo de convergência/Raio de convergência

Teorema:

Qualquer que seja $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - c)^n$, verifica-se uma, e uma só, das seguintes condições:

- (i) a série converge absolutamente em $x = c$ e diverge se $x \neq c$;
- (ii) a série converge absolutamente em todo o $x \in \mathbb{R}$;
- (iii) existe um único $R > 0$ para o qual a série converge absolutamente se $x \in]c - R, c + R[$ e diverge se $x \in]-\infty, c - R[\cup]c + R, +\infty[$.

Definições:

Ao número R chamamos **raio de convergência** da série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - c)^n$.

No caso (i), consideramos $R = 0$; no caso (ii), consideramos $R = +\infty$; Caso $R \neq 0$, o intervalo $I_c =]c - R, c + R[$ (ou \mathbb{R} , quando $R = +\infty$) designa-se por **intervalo de convergência** da série.

Exemplos:

$$\textcircled{1} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}; \text{ intervalo de convergência: } \mathbb{R}; R = +\infty$$

$$\textcircled{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (x+1)^n; \text{ intervalo de convergência: }]-2, 0[; R = 1$$

Observações:

- Uma série de potências pode convergir ou não nos extremos do seu intervalo de convergência. O teorema do slide anterior nada afirma sobre a natureza da série nesses pontos.
- O domínio de convergência de uma série de potências contém o seu intervalo de convergência, mas poderá ainda conter algum dos extremos desse intervalo. O estudo da natureza da série nesses pontos é feito caso a caso.

Raio de Convergência, usando os Coeficientes da Série

Proposição:

Seja $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - c)^n$ uma série de potências com $a_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

$$\textcircled{1} \quad R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}, \text{ se este limite existir.}$$

$$\textcircled{2} \quad R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}, \text{ se este limite existir.}$$

Observações:

- $\textcircled{1}$ Estas fórmulas de cálculo do raio de convergência resultam da aplicação do Critério do Quociente ou do Critério da Raiz. Assim, estes métodos funcionam quando a aplicação direta desses critérios também pode ser usada.
- $\textcircled{2}$ **Cuidado com a aplicação:** a série tem que apresentar uma escrita tal como no enunciado da proposição.

Polinómios de Taylor

Definição:

Seja f uma f.r.v.r. admitindo derivadas finitas até à ordem $n \in \mathbb{N}$ num dado ponto $c \in \mathbb{R}$. Ao polinómio

$$T_c^n f(x) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x - c)^k$$

chamamos **polinómio de Taylor de ordem n da função f no ponto c** .

Caso $c = 0$, o polinómio $T_0^n f(x)$ passa a ser designado por **polinómio de MacLaurin de ordem n da função f** .

Observação:

$T_c^n f(x)$ é o único polinómio de grau menor ou igual a n que assume o mesmo valor que f em c e que as suas sucessivas derivadas em c são iguais às sucessivas derivadas de f em c , respetivamente, até à ordem n .

Exemplos

- 1 O polinómio de Taylor de ordem n em c , para c qualquer em \mathbb{R} , de uma função polinomial de grau n é a própria função. Por exemplo, $T_1^3(x^3) = x^3$.
- 2
$$T_0^n(e^x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$
- 3
$$T_0^n\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{k=0}^n x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$$
- 4
$$T_0^{2n+1}(\sin x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$
- 5
$$T_0^{2n}(\cos x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Fórmula de Taylor

Teorema:

Sejam $n \in \mathbb{N}_0$, f uma função real com derivadas contínuas até à ordem $(n+1)$ num intervalo I e $c \in I$. Então, para todo $x \in I \setminus \{c\}$, existe θ entre c e x tal que

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x-c)^k}_{T_c^n f(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} (x-c)^{n+1}}_{R_c^n f(x)}.$$



Fórmula de Taylor de ordem n da função f no ponto c , com resto de Lagrange

$R_c^n f(x) \rightarrow$ resto de Lagrange de ordem n de f no ponto c

$T_c^n f(x) \rightarrow$ polinómio de Taylor de ordem n de f no ponto c

Note que, se $x = c$, $f(c) = T_c^n f(c)$, (resto nulo).

Majorantes do resto de Lagrange

O módulo do resto de Lagrange $R_c^n f(x)$ dá-nos o erro absoluto cometido quando tomamos $T_c^n f(x)$ por $f(x)$, uma vez que

$$|R_c^n f(x)| = |f(x) - T_c^n f(x)|.$$

Mesmo que desconheçamos esse resto é possível, em geral, majorá-lo.

Formas de efetuar a majoração do resto:

Se a $(n+1)$ -ésima derivada de f é contínua num intervalo $[a, b]$ contendo o ponto c , então ela é limitada nesse intervalo. Sendo

$M \geq \sup_{y \in [a, b]} |f^{(n+1)}(y)|$, tem-se que

$$|R_c^n f(x)| \leq M \frac{|x-c|^{n+1}}{(n+1)!} \leq M \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \text{para todo o } x \in [a, b].$$

Ver [applet](#), sobre a aproximação de uma função usando polinómios de Taylor.

Série de Taylor — definição

Definição:

Se f admitir derivadas finitas de todas as ordens em c , à série de potências

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x - c)^n = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(c)}{2!} (x - c)^2 + \dots$$

chamamos **série de Taylor da função f no ponto c** .

Se $c = 0$, passamos a chamar-lhe **série de MacLaurin de f** .

Exemplo:

A série de MacLaurin da função $f(x) = \frac{1}{1-x}$ é a série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.

Relacione com o ponto 3. do [slide 11](#).

No exemplo do slide anterior, a série de Taylor da função no ponto $c = 0$ converge para a função no intervalo $] - 1, 1[$, i.e., para cada $x \in] - 1, 1[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} .$$

Questão:

Seja I um intervalo aberto centrado no ponto c onde a série de Taylor de f é convergente, será que a sua soma para cada x é igual a $f(x)$?

Nem sempre, ver exemplo do slide seguinte!

Funções Analíticas

Definição:

Sejam I um intervalo aberto, $c \in I$, e f uma função definida em I que admite derivadas finitas de todas as ordens em c . Dizemos que f é **analítica em c** se existir $r > 0$ tal que, para todo o $x \in]c - r, c + r[\subset I$, a série de Taylor de f no ponto c converge para $f(x)$.

Exemplos

❶ Função analítica em $c = 0$: $g(x) = \frac{1}{1-x}$

❷ Função não analítica em $c = 0$: $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$

f possui derivadas finitas de todas as ordens em \mathbb{R} , mas como $f^{(n)}(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$, a sua série de MacLaurin converge para a função nula.

Teorema:

Sejam I um intervalo, $c \in I$ e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função com derivadas finitas de qualquer ordem em I . Então, para todo o $x \in I$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x - c)^n \text{ se, e só se, } \lim_{n \rightarrow \infty} R_c^n f(x) = 0.$$

Exemplo: Seja $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

$$R_0^n f(x) = \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad x \neq 0, \quad \xi \text{ entre } 0 \text{ e } x.$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} R_0^n f(x) = 0$, [**Porquê?**], concluímos que a série de MacLaurin da função exponencial converge para a própria função em \mathbb{R} , i.e.,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Teorema:

Sejam I um intervalo, $c \in I$ e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função com derivadas finitas de qualquer ordem em I . Se existir $M > 0$ tal que

$$|f^{(n)}(x)| \leq M, \quad \forall x \in I, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0,$$

então

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x - c)^n, \quad \forall x \in I.$$

Exercício: Usando o teorema anterior mostre que:

$$\textcircled{1} \quad \sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$\textcircled{2} \quad \cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Compare com os pontos 4. e 5. do [slide 11](#).

Séries geométricas e séries de Dirichlet

$\sum_{n=0}^{+\infty} ar^n$ com $a, r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$: série geométrica de razão r e primeiro termo

a. Esta série converge se e só se $|r| < 1$ e tem soma $S = \frac{a}{1-r}$.

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$: série de Dirichlet (ou série harmónica) de ordem p . Esta série converge se e só se $p > 1$.

Critério de D'Alembert e Critério de Cauchy

Critério de D'Alembert ou Critério do Quociente: Seja $u_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, e suponha-se que existe $L := \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|$. Se $L < 1$, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é absolutamente convergente e se $L > 1$, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é divergente.

Critério de Cauchy ou Critério da Raiz: Suponha-se que existe $L := \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|u_n|}$. Se $L < 1$, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é absolutamente convergente e se $L > 1$, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é divergente.

Critério da Comparação

Critério da Comparação: Suponha-se que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$0 \leq a_n \leq b_n, \forall n \geq n_0.$$

Então:

- $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.
- $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ diverge.

Critério do Limite

Critério do Limite: Sejam $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ duas séries tais que $a_n \geq 0$ e $b_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Suponha-se que existe o limite

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}.$$

Então verificam-se as condições seguintes:

- se $L \in \mathbb{R}^+$, então as séries têm a mesma natureza.
- se $L = 0$, $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.
- se $L = +\infty$, $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ diverge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge.

Cr terio de Leibniz

Cr terio de Leibniz: Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ tal que:

- $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$,
- a sucessão $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$   monótona decrescente.

Então a série alternada   convergente.

Conceitos de Majorantes, Supremo e Máximo

Majorante de um conjunto: Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto não vazio. Diz-se que A é um **conjunto majorado** se existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq M$, para todo o $x \in A$. Qualquer M que satisfaça essa desigualdade é chamado de **majorante** de A .

Supremo de um conjunto majorado: O **supremo** de um conjunto majorado A é o menor dos majorantes. Isto é, $s \in \mathbb{R}$ diz-se **supremo de A** se s for um majorante e se para todo o $\epsilon > 0$, existe $b \in A$ tal que $s - \epsilon < b$.

Notação: $s = \sup A$.

Axioma do Supremo:

Todo o subconjunto de \mathbb{R} majorado tem supremo.

Máximo: Se $s = \sup A$ e $\sup A \in A$, a s chama-se **máximo de A** .

Notação: $s = \max A$.