Recursion

Recursion algorithm

Divide Conquer

Divide：将问题划分为规模更小的子问题

Conquer：**递归地**解决子问题

Combine：将子问题的结果结合起来解决原本的问题

相较于 BF recursion（问题规模线性地减小：$n, n-1, n-2\dots$），D&C recursion 问题规模指数地减小：$n, \frac{n}{2}, \frac{n}{4}, \dots$

D&C examples

Max sum subsequence

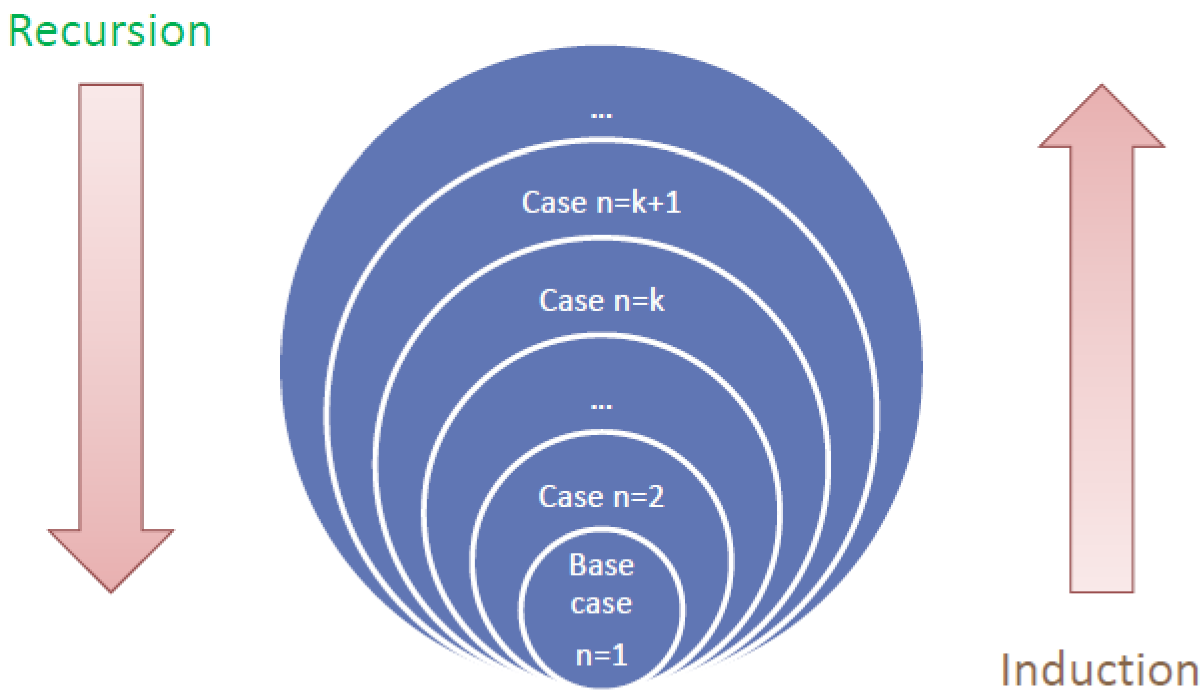
Frequent element

Multiplication：Integer and Matirx

Nearest point pair

详细内容将在 Tutorial 2 中讲解

Correctness of recursion



数学归纳法

Solving recurrence equations

Elementary techniques

> Smooth functions
>
> $f(n)$: Nonnegative eventually non-decreasing function defined on the set of natural numbers
>
> $f(n)$ is called **smooth** if $f(2n) = \Theta(f(n))$
>
> Let $f(n)$ be a smooth function, for any fixed integer $b \geqslant 2, f(bn) = \Theta(f(n))$
>
> **Smoothness Rule**
>
> Let $T(n)$ be an eventually non-decreasing functions and $f(n)$ be a smooth function
>
> If $T(n) = \Theta(f(n))$ for values of n that are powers of $b(b \geqslant 2)$, then $T(n) = \Theta(f(n))$

Backward substitutions

e.g.， Bit counting

$$T(n)=\begin{cases}0 & n=1\\ T(\lfloor\frac{n}{2}\rfloor)+1 & n>1\end{cases}$$

笨展开

$$\text{Let } n=2^k$$
$$T(n)=T\left(\frac{n}{2}\right)+1=T\left(\frac{n}{4}\right)+1+1=\dots$$
$$T(n)=T\left(\frac{n}{2^k}\right)+\log n=\log n$$

Fibonacci

> linear homogeneous relation of degree k （常系数线性齐次递推关系）：
>
> $$a_n=r_1a_{n-1}+r_2a_{n-2}+\dots+r_ka_{n-k}$$
>
> characteristic equation（特征方程）：
>
> $$x^k=r_1x^{k-1}+r_2x^{k-2}+\dots+r_k$$

对于 $k=2$ 的情况，$a_n=r_1a_{n-1}+r_2a_{n-2}$，特征方程为 $x^2-r_1x-r_2=0$，设其有两个根 s_1,s_2，则

$$a_n=us_1^n+vs_2^n$$

其中 u,v 取决于初始情况

对于 Fibonacci，特征方程为 $x^2-x-1=0$，则

$$s_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2},s_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$
$$f_1=us_1+vs_2=1$$
$$f_2=us_1^2+vs_2^2=1$$
$$u=\frac{1}{\sqrt{5}},v=-\frac{1}{\sqrt{5}}$$
$$f_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Guess and Prove

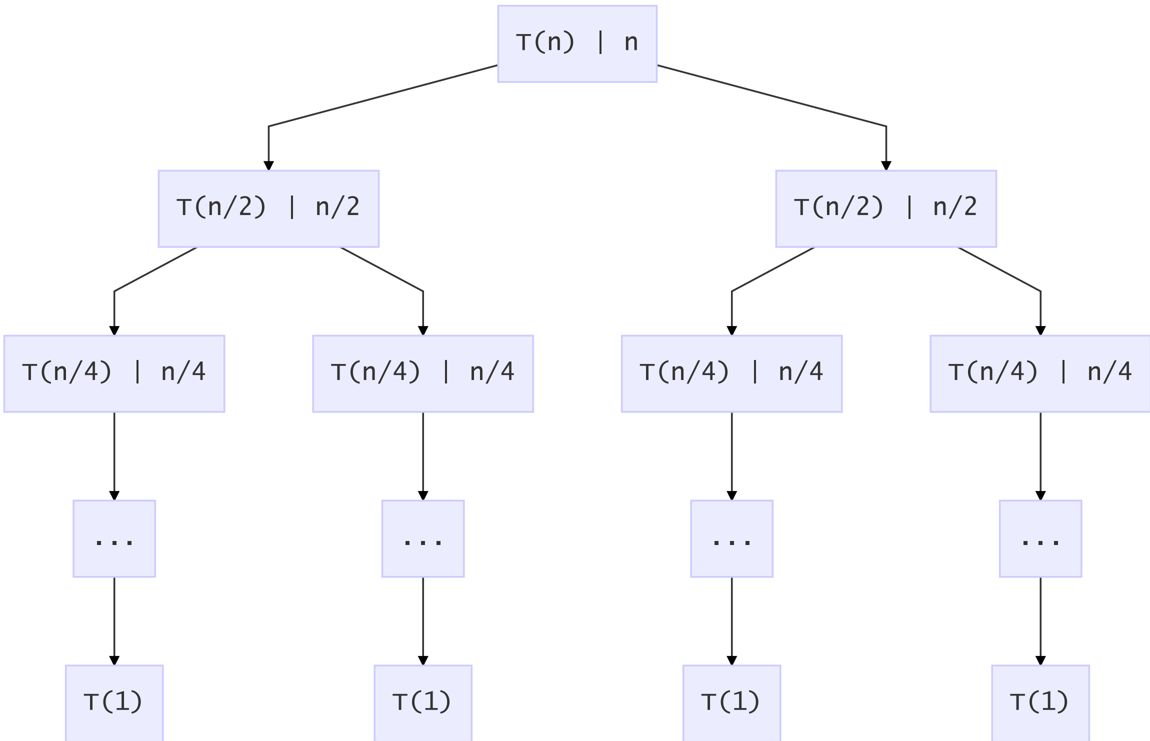
e.g.，假设 $T(n)=O(n)$，则需要证明 $T(n)<cn$

证明方法：展开

Recursion Tree

对于 D&C recursion，递归方程的形式为 $T(n) = bT(\frac{n}{c}) + f(n)$

递归树：$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n$



Node:

- Non-leaf
  - Non-recursion cost
  - recursion cost
- Leaf
  - Base case

Edge: recursion

计算时仅需计算 Non-recursion cost，因为 recursion cost 展开后被计入下层结点。最底层的叶结点为递归的 base case，计算时代价为 $O(1)$。

递归代价：**sum of row sums**

对于上图的递归树，递归代价为：

$$n+(2\times\frac{n}{2})+(4\times\frac{n}{4})+\cdots+(n\times 1)=n\log n$$

Master Theorem

对于 D&C recursion 的递归方程

$$T(n)=bT\left(\frac{n}{c}\right)+f(n)$$

- 假设 base case 出现在 D 层，则 $\frac{n}{c^D}=1, D=\frac{\log n}{\log c}$
- 设 叶结点的数量为 L ，则 $L=b^D, L=b^{\frac{\log n}{\log c}}$
- 令 $L=n^E, E=\log_n L=\log_n b^{\frac{\log n}{\log c}}=\frac{\log n}{\log c}\times\frac{\log b}{\log n}=\frac{\log b}{\log c}$

E 即为 critical exponent

对于一个深度为 $D(D=\log_c n)$ 的 recursion tree，递归代价为 sum of row sums

- 第 0 行非递归代价为 $f(n)$
- 第 D 行 base case 代价为 $b^D=b^{\log_c n}=n^{\log_c b}=n^E=\Theta(n^E)$

> **Little Master Theorem** : row sums decide the solution of the equation for D&C
>
> （存疑）
>
> 设 $T(n)=bT\left(\frac{n}{c}\right)+n^d$：
>
> - 第 0 行代价 n^d
> - 第 1 行代价 $b\times\left(\frac{n}{c}\right)^d=\left(\frac{b}{c^d}\right)\times n^d$
> - 第 2 行代价 $b^2\times\left(\frac{n}{c^2}\right)^d=\left(\frac{b}{c^d}\right)^2\times n^d$
> - 第 k 行代价 $b^k\times\left(\frac{n}{c^k}\right)^d=\left(\frac{b}{c^d}\right)^k\times n^d$
>
> 易得 $k=\log_c n$
>
> $T(n)=\text{sum of row sums }=n^d\sum_{i=0}^{\log_c n}\left(\frac{b}{c^d}\right)^i$
>
> sum of row sums 是几何级数
>
> - 增长，$T(n)=\Theta(n^E)$

> - 常数，$T(n) = \Theta(f(n) \log n)$
> - 减少，$T(n) = \Theta(f(n))$
>
> 数学上不够严谨但便于理解

Master Theorem

对于递归方程

$$T(n) = bT\left(\frac{n}{c}\right) + f(n)$$

$E = \log_c b = \dfrac{\log b}{\log c}$

- Case 1: $f(n) = O(n^{E-\varepsilon}), (\varepsilon > 0), \text{then: } T(n) = \Theta(n^E)$
- Case 2: $f(n) = \Theta(n^E), \text{then: } T(n) = \Theta(n^E \log n)$
- Case 3: $f(n) = \Omega(n^{E+\varepsilon}), (\varepsilon > 0)$ and if $bf\left(\frac{n}{c}\right) < \theta f(n)$ for some constant $\theta < 1$ and all sufficiently large n , then: $T(n) = \Theta(f(n))$

可见 $f(n)$ 和 n^E 中较大的一个决定时间复杂度，且在 Case 1/3 时要注意 $f(n)$ 必须**多项式地小于/大于** n^E $(\varepsilon > 0)$

> CLRS 3rd edition P.94
>
> Beyond this intuition, you need to be aware of some technicalities. In the first case, not only must $f(n)$ be smaller than $n^{\log_b a}$, it must be polynomially smaller.

反例：$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n \log n$

$n \log n = \Omega(n)$ 但是 $n \log n = o(n^{1+\varepsilon})$