第5章 解线性方程组的直接方法

5.1 引言与预备知识

5.1.2 向量和矩阵

定义、基本运算、单位阵、非奇异矩阵、行列式

行列式性质

① $\det(\boldsymbol{AB}) = \det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{B})$

② $\det(\boldsymbol{A}^T) = \det(\boldsymbol{A})$

③ $\det(c\boldsymbol{A}) = c^n \det(\boldsymbol{A})$

④ $\det(\boldsymbol{A}) \neq 0 \iff \boldsymbol{A}$是非奇异矩阵

5.1.3 矩阵的特征值与谱半径

定义 1 特征值、特征向量，A的全体特征值称为A的**谱**，记作$\sigma(\boldsymbol{A}) = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$，记

$$\rho(\boldsymbol{A}) = \max_{1\leq i\leq n} |\lambda_i|$$

称为矩阵A的**谱半径**.

5.2 高斯消去法

5.2.1 高斯消去法

定理 5 (1) 如果$a_{kk} \neq 0 (k = 1, 2, \cdots, n)$，则可通过高斯消去法将$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$约化为等价的三角形线性方程组，且计算方式为

①消元计算

②回代计算

(2) 如果$\boldsymbol{A}$为**非奇异矩阵**，则可通过高斯消去法（及交换两行的初等变换）将$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$约化为等价的三角形线性方程组

定理 6 约化的著元素$a_{ii}^{(i)} \neq 0 (i = 1, 2, \cdots, k)$的充要条件式矩阵$\boldsymbol{A}$的顺序主子式$D_i \neq 0 (i = 1, 2, \cdots, k)$

5.2.2 矩阵的三角分解

高斯消去法的过程相当于左乘了一系列下三角初等矩阵， 从而可以联系到矩阵分解

定理 7（矩阵的LU分解） 设$\boldsymbol{A}$为n阶矩阵，如果$\boldsymbol{A}$的顺序主子式$D_i \neq 0 (i = 1, 2, \cdots, n-1)$，则$\boldsymbol{A}$可分解为一个单位下三角矩阵$\boldsymbol{L}$和一个上三角矩阵$\boldsymbol{U}$的乘积，且这种分解是**唯一**的

5.2.3 列主元消去法

绝对值最大的元素作为主元，以使高斯消去法具有较好的数值稳定性

5.3 矩阵三角分解法

5.3.1 直接三角分解法

Doolittle分解

1. $u_{1i}=a_{1i}(i=1,2,\cdots,n), l_{i1}=a_{i1}/u_{i1}(i=2,3,\cdots,n)$
2. $u_{ri}=a_{ri}-\sum_{k=1}^{r-1}l_{rk}u_{ki}, i=r,r+1,\cdots,n$
3. $l_{ir}=(a_{ir}-\sum_{k=1}^{r-1}u_{kr})/u_{rr}, i=r+1,\cdots,n,\ \text{and}\ r\neq n$
4. $\begin{cases}y_1=b_1,\\ y_i=b_i-\sum_{k=1}^{i-1}l_{ik}y_k, i=r+1,\cdots,n;\end{cases}$
5. $\begin{cases}x_n=y_n/u_{nn},\\ x_i=(y_i-\sum_{k=i+1}^{n}u_{ik}x_k)/u_{ii}, i=n-1,n-2,\cdots,1.\end{cases}$

1, 2, 3计算L, U；4, 5解$\boldsymbol{Ly}=\boldsymbol{b},\boldsymbol{Ux}=\boldsymbol{y}$

形象化记忆

就是U一行，L一列这么算，联系合同变换

1中先将A的第一行赋值给U第一行，L每行乘以U第一列等于L每行第一个乘以u11（因为U第一列只有一个元素非零），从而有了1后半个式子

2是给U的第r行赋值，ari就是L的第r行乘以U的第i列（都是到r-1，所以是之前已经计算好的值，当$r<k$时, $l_{rk}=0$），又有lii=1，对照**分解式**（见课本/课件），有$a_{ri}=\sum_{k=1}^{n}l_{rk}u_{ki}=\sum_{k=1}^{r-1}l_{rk}u_{ki}+1\cdot u_{ri}, i=r,r+1,\cdots,n$，移项得出2式。再intuitive一点就是A(r, i)减去L和U对应行(r)和列(i)的乘积扣出来一个$1\times u_{ri}$得到扣出来的这个uri

3类似地，对照**分解式**有$a_{ri}=\sum_{k=1}^{n}l_{rk}u_{ki}=\sum_{k=1}^{r-1}l_{rk}u_{ki}+l_{kr}u_{rr}$

4，5两步同高斯消元法的回代计算，容易理解。

5.3.2 平方根法

> **线代知识**
>
> **定理 5.2.1** 若$\boldsymbol{A}$为n阶的实对称矩阵，则下列条件互为等价：

1. $\boldsymbol{A}$为正定矩阵；
2. $\boldsymbol{A}$的特征值均为正
3. $\boldsymbol{A}$的正惯性指数为n；
4. $\boldsymbol{A}$的各阶顺序主子式均为正.

定理 9（对称阵的三角分解定理）设$\boldsymbol{A}$为n阶对称矩阵，且$\boldsymbol{A}$的所有顺序主子式均不为零，则$\boldsymbol{A}$可唯一分解为

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{LDL}^T,$$

其中$\boldsymbol{L}$为单位下三角矩阵，$\boldsymbol{D}$为对角矩阵.

单位矩阵

定理 10（对称正定矩阵的三角分解或Cholesky分解） 如果$\boldsymbol{A}$为n阶对称正定矩阵，则存在一个实的非奇异下三角矩阵$\boldsymbol{L}$使得$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^T$，当限定$\boldsymbol{L}$的对角元素为正时，这种分解时唯一的

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & \cdots & l_{n1} \\ & l_{22} & \cdots & l_{n2} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & l_{nn} \end{pmatrix}$$

其中$l_{ii}>0(i=1,2,\cdots,n)$.由矩阵乘法及$l_{jk}=0(j<k)$得

$$a_{ij}=\sum_{k=1}^{n}l_{ik}l_{jk}=\sum_{k=1}^{n-1}l_{ik}l_{jk}+l_{jj}l_{ii}$$

于是有解对称正定方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$的平方根法计算公式：

对于$j=1,2,\cdots,n$

1. $l_{jj}=(a_{jj}-\sum_{k=1}^{j-1}l_{jk}^2)^{\frac{1}{2}}$
2. $l_{ij}=(a_{ij}-\sum_{k=1}^{j-1}l_{ik}l_{jk})/l_{jj}, i=j+1,\cdots,n$
3. $y_i=(b_i-\sum_{k=1}^{i-1}l_{ik}y_i)/l_{ii}, i=1,2,\cdots,n$
4. $x_i=(b_i-\sum_{k=i+1}^{n}l_{ki}x_k)/l_{ii}, i=n,n-1,\cdots,1$

形象化记忆

首先有a_{jj}是L的第j行和L^T的第j列两个向量的内积，即L的第j行的模的平方，$a_{jj}=\sum_{k=1}^{n}l_{jk}^2=\sum_{k=1}^{j}l_{jk}^2$（其余乘积为0） $=\sum_{k=1}^{j-1}l_{jk}^2+l_{jj}^2$（剥离），稍作调整即获得1式

对于2式要注意当$j<k$时，$l_{jk}=0$，所以a_{ij}作为L的两个行向量内积只会乘到非零元素较小的数量那么多次，同样扣除$l_{ij}\times l_{jj}$这一项出来，移项处以l_{jj}（1式算过），就可以算出l_{ij}

3，4式同样是回代计算解$\boldsymbol{L}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b},\boldsymbol{L}^T\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$

改进的平方根法没讲

5.3.3 追赶法

对角占优的三对角线方程组

归纳法证明 见课本

追赶法公式

1. 计算$\{\beta_i\}$的递推公式

$$\beta_1=c_1/b_1$$

$$\beta_i=c_i/(b_i-a_i\beta_{i-1}), i=2,3,\cdots,n-1$$

2. 解$\boldsymbol{L}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}$

$$y_1=f_1/b_1$$

$$y_i=(f_i-a_iy_{i-1})/(b_i-a_i\beta_{i-1}),i=2,3,\cdots,n$$

3. 解$\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$

$$x_n=y_n$$

$$x_i=y_i-\beta_ix_{i+1},i=n-1,n-2,\cdots,2,1$$

5.4 向量和矩阵的范数

5.4.1 向量范数

向量线性无关

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=0 \iff k_1=k_2=\cdots=k_n=0$$

定义3 （向量的范数）

(1) $\|x\|\geq 0$（正定条件）

(2) $\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|$

(3) $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$（三角不等式）

常用范数

∞

1

2

p

$$\|x\|_p=(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$$

连续性

定理 14（向量范数的等价性）

$$\exists c_1,c_2>0,\forall x\in\mathbb{R}^n,\ c_1||x||_s\leq||x||_t\leq c_2||x||_s$$

证明见课本。

5.4.2 矩阵范数

定义 5（矩阵的范数）

(1) 正定条件

(2) $|c\boldsymbol{A}| = |c|\|\boldsymbol{A}\|$（齐次条件）

(3) 三角不等式

(4) $\|\boldsymbol{AB}\| \le \|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{B}\|$

定义 6（矩阵的算子范数）

$$\|\boldsymbol{A}\|_v = \max_{x\neq 0} \frac{\|\boldsymbol{A}x\|_v}{\|\boldsymbol{x}\|_v}$$

称为**算子范数/从属范数**

定理 16 向量范数，生成矩阵范数，且满足相容条件

$$\|\boldsymbol{A}x\|_v \le \|\boldsymbol{A}\|_v \|\boldsymbol{x}\|_v$$

定理 17 行范数（∞）、列范数（1）、2-范数

定理 18

$$\rho(\boldsymbol{A}) \le \|\boldsymbol{A}\|$$

对任意算子范数成立

定理 19 对称矩阵，

$$\|\boldsymbol{A}\|_2 = \rho(\boldsymbol{A})$$

定理 20 好像课堂没涉及

5.5 误差分析

5.5.1 矩阵的条件数

定义 7 病态良态

定义 8 非奇异阵，条件数$cond(\boldsymbol{A})_v = \|\boldsymbol{A}^{-1}\|_v \|\boldsymbol{A}\|_v (v = 1, 2 \text{ or } \infty)$

性质

(1) $cond(\boldsymbol{A}) \ge 1$

(2) $cond(c\boldsymbol{A})_v = cond(\boldsymbol{A})_v$

(3) 正交矩阵A，$cond(\boldsymbol{A})_2$；如果A为非奇异矩阵，R为正交矩阵，则

$$cond(\boldsymbol{RA})_2 = cond(\boldsymbol{AR})_2 = cond(\boldsymbol{A})_2$$

发现病态

算cond

课件中讲的是**“一般由经验得出”**

缓解病态

1. 高精度
2. 预处理，$cond(\boldsymbol{PAQ}) < cond(\boldsymbol{A})$
3. 平衡方法——乘一个Diag，**归一化**

5.5.2 迭代改善法（课上没讲）