Tutorial 1

数学归纳法溯源与公理化思维

集合论 $\Rightarrow$ 自然数 $\mathbb{N}$ $\Rightarrow$ 良序原理 $\Rightarrow$ 数学归纳法

集合论

> ZFC.7 无穷公理 Axiom of infinity
>
> 即存在一个集合 $\mathbb{N}$ ，使得空集为 $\mathbb{N}$ 的成员，并且若 x 是 $\mathbb{N}$ 的成员，则 $x \cup \{x\}$ 也是 $\mathbb{N}$ 的成员。这样的集合也叫做归纳集

由公理化的集合论可得出自然数的集合论定义

自然数

> 自然数的集合论定义
>
> 1. 定义 $\varnothing$ 为 0
> 2. 定义 n 的后继为 $n \cup \{n\}$

无穷公理确保了自然数集 $\mathbb{N}$ 存在，而上述定义也满足皮亚诺算数公理，在该定义下，自然数 n 即是包含了 n 之前所有自然数的集合

> 皮亚诺公理的非形式化叙述
>
> 1. 0 是自然数
> 2. 每个确定的自然数 x 都有一个确定的后继 x' ，x' 也是自然数
> 3. 对于每个自然数 x, y ，$x = y \iff x' = y'$
> 4. 0 不是任何数的后继
> 5. 任意关于自然数的命题，如果证明了它对自然数 0 是对的，又假定它对自然数 n 为真时，可以证明它对 n' 也真，那么，命题对所有自然数都真。
>
> 或：一个 **Dedekind–Peano** 结构为满足下列条件的三元组 (X, x, f)
>
> - X 是一个集合，x 为 X 中一个元素，f 是 X 到自身的映射

> - x 不在 f 的值域
> - f 为单射
> - 若 A 为 X 的子集且
>   - x 属于 A 且若 a 属于 A， $f(a)$ 也属于 A
>
> 则 $A = X$

良序原理

> ZFC.9 良序定理 Well-ordering theorem
>
> 即对任意集合 X，总存在一个可良好排序 X 的二元关系 R，即 R 是 X 上的全序关系，且 X 内每个非空子集在 R 下都有一个最小元素

> **定义 A.1** 良序原理：任意非空的自然数集合必然有最小元素

良序原理对于有穷集合和无穷集合均成立

基于良序原理，即可推出数学归纳法

数学归纳法

> 超限归纳法
>
> 在良序集合中，若有一性质可从小于给定序数 α 的序数的集合传递到 α 自身，则此性质对所有序数都成立。

从良序原理可得出数学归纳法

设一组关于自然数的命题 $P(n)$

假设 $P(n)$ 不是对于所有自然数均成立，则 $P(n)$ 的反例集合非空，基于良序原理，存在一个最小反例 a，不妨设 $a \geqslant 2$ （即 $P(1) = \text{TRUE}$），则下列命题成立

即 存在自然数不满足 $P(n) \Rightarrow$ 断言 1

考虑其逆否命题，即对所有 $a \geqslant 2$，断言 1 均不成立 $\Rightarrow$ 所有自然数，$P(n)$ 成立

根据 $\neg(p \wedge \neg q) \equiv p \rightarrow q$

则若断言 3 成立，则 $P(n)$ 对所有自然数成立

由此从良序原理推出了数学归纳法

一个错误的数学归纳法证明

命题：所有的马颜色都是一样的。转换为关于自然数的命题，$P(n)$：n 匹马的颜色是一样的

- Base case：$P(1)$，1 匹马颜色是一样的
- Induction：设 $P(n)$ 成立，对于 $P(n+1)$
  - 将 $n+1$ 匹马编号为 $h_0, h_1, h_2, \ldots, h_n$
  - 对于 $h_0, h_1, \ldots, h_{n-1}$，由 $P(n)$，他们颜色相同
  - 对于 $h_1, h_2, \ldots, h_n$，由 $P(n)$，他们颜色相同
  - 则 $h_0, h_1, h_2, \ldots, h_n$ 颜色相同，$P(n+1)$ 成立

证明错误：$P(1) \rightarrow P(2)$ 不成立

Further reading

[Zermelo–Fraenkel set theory]

[Ordinal number]

[Peano axioms]

[Set-theoretic definition of natural numbers]

极限，实数与 $\varepsilon - N$ 语言

代数系统：集合和集合上定义的封闭的二元运算

$\mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{Z} \Rightarrow \mathbb{Q} \Rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{C}$

自然数集的定义即包含了 **后继** 操作，根据后继即可定义加法

设自然数 a 的后继为 a^+，则可定义加法 $a + b^+ = (a+b)^+$

若想使减法封闭，则需将自然数集 $\mathbb{N}$ 扩展至整数集 $\mathbb{Z}$

整数集上加法，减法，乘法封闭

若想使除法封闭，则需将整数集 $\mathbb{Z}$ 扩展至有理数集 $\mathbb{Q}$

有理数集对极限不封闭

e.g.，无穷级数和

故将有理数集 $\mathbb{Q}$ 扩展至实数集 $\mathbb{R}$

而在实数集上 $x^2+1=0$ 的求解不封闭，扩展至复数集 $\mathbb{C}$

从算法的角度重新审视数学的概念

基本数学概念

自变量与单调性

对于算法分析中出现的函数，一般自变量是自然数，单调性是单调非减

取整

对于任意有理数 x，有

对于任意整数 n，有

且对于任意实数 $x \geqslant 0$ 和整数 $a, b > 0$，有

取整函数可以使算法分析时的输出更加严格，如划分时中点的选择，树的高度，递归的次数等

取模

对于任意整数 a 和正整数 n，定义取模

显然有

> 同余
>
> 两个整数 a, b 和正整数 m，若 $a \bmod m = b \bmod m$，则称 a, b 对于模 m **同余**，记作

多项式

> CRLS 3rd edition P.55
>
> Given a nonnegative integer d ,a **polynomial in** n **of degree** d is a function $p(n)$ of the form

一个多项式是渐近正的 $\iff a_d > 0$，对于任何渐近正的 d 阶多项式 $p(n)$，有 $p(n) = \Theta(n^d)$

对于任意实数 $a \geqslant 0, n^a$ 单调增，对于任意实数 $a \leqslant 0, n^a$ 单调减

对数

计算机科学中的对数一般默认以 2 为底，有三类算法操作与对数 $\log n$ 有密切的联系

- 折半：划分规模为 n 的问题（D&C recursion）一般经过 $\log n$ 次划分可将问题降至常数规模
- 二叉树：
  - n 个结点的完美二叉树高度为 $\lfloor \log n \rfloor$
  - 完美二叉树与折半的关系：叶结点层的结点数是结点树的一半，折半相当于减少一层
  - 二叉树的层数划分是对正整数的等价类划分，划分依据是 $\lfloor \log n \rfloor$
- 二进制编码：整数 n 转换成二进制的比特数为 $\lfloor \log n \rfloor + 1$

阶乘

对于自然数 n

> Stirling's approximation

与阶乘相关的函数渐近增长率：

阶乘常常与排序算法的分析有关，一个 n 个元素的输入所有排列的种数即为 $n!$

常用级数求和

多项式级数：

几何级数：

算数几何级数：

调和级数：

期望值，指标随机变量，期望的线性特征

> **定义 2.1** 指标随机变量

显然指标随机变量的期望值就等于事件发生的概率

算法的代价可用 critical operation 的指标随机变量和表示，而算法的平均情况时间复杂度即是算法代价的数学期望。基于期望的线性特征，可以显著的简化求数学期望的过程

> 期望的线性特征：给定任意随机变量 $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_k$ 及其线性函数 $h(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_k)$ ，则有

蛮力算法

重点：如何从蛮力的解法到优化的解法

具体细节涉及课后习题答案故不在此处给出

微博名人问题

给定 n 个人，不关注所有人且被其他所有人关注的人称为名人，能够做的操作只有询问两个人其中一个是否关注另一个人，得到是或否的答案

- 蛮力算法：关注是一种**二元关系**，关于二元关系的问题总能得到一个时间复杂度为 $O(n^2)$ 的算法（即遍历所有的二元关系）
- 线性时间解：提示：每次询问操作可排除一个“非名人”

常见项问题特例

给定 n 个元素，求其中出现次数至少为 $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ 的元素

- 蛮力算法：遍历数组，检查每个元素，时间复杂度 $O(n^2)$
- 线性时间解：提示：常见项的出现次数不会少于其他所有元素的出现次数之和