1) определить значения x, для которых производная $y' = f'(x)$ равна нулю или бесконечности (или, по крайней мере, существуют бесконечные односторонние производные), и подвергнуть их исследованию на экстремум;

2) вычислить значения самой функции $y = f(x)$, отвечающие всем этим значениям x, а также концам a, b рассматриваемого промежутка.

Результаты удобно расположить в виде таблицы (см. ниже примеры) с непременным указанием особенности вычисленной точки графика: *максимум*, *минимум*, *перегиб*, $y' = 0, y' = +\infty, y' = -\infty$ и, наконец, $y' = \pm\infty$ или $y' = \mp\infty$ (так мы условно обозначаем случай, когда существуют бесконечные односторонние производные разных знаков). К названным точкам графика при желании присоединяют ещё некоторые другие, например точки пересечения графика с осями.

После нанесения на чертёж всех найденных точек (число которых обычно не велико), через них через них проводят самый график, учитывая при этом все упомянутые их особенности. Следует помнить, что в промежутках между ними, как разъяснено в n° **113**, производная сохраняет знак, и график идёт всё время вверх или всё время вниз.

Вычисления и проведение кривой упрощаются, если функция не изменяет своего значения при изменении знака x (четная функция), так что график симметричен относительно вертикальной оси. Аналогичную услугу может оказать и симметрия относительно начала координат, которая аналитически выражается в том, что функция при изменении знака x также лишь меняет знак (нечетная функция).

Построенный подобным образом график - не претендуя на точность отдельных ординат - уже довольно полно отображает ход изменения функции (что и было нашей целью), точно отмечая промежутки её возрастания и убывания, а также точки, где скорость изменения функции падает до нуля или возрастает до бесконечности.

116. Примеры. 1) Найти экстремумы функции

$$f(x) = sin^3 x + cos^3 x$$

и построить её график.

Ввиду того что функция имеет период 2π, достаточно ограничиться промежутком $[0, 2\pi]$ изменения x. Производная

$$f'(x) = 3sin^2 x \cdot cosx - 3sinx \cdot cos^2 x = 3sinx \cdot cosx \cdot (sinx - cosx).$$

Корни производной (стационарные точки) в этом случае будут:

$$0,\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{5\pi}{4},\ \frac{3\pi}{2},\ 2\pi$$

При переходе через $x = 0$ множитель $sinx$ меняет знак на минус на плюс, а вся производная меняет знак плюс на минус, ибо последние два множителя сохраняют вблизи $x = 0$ знак минус; налицо максимум. Множитель $sinx - cosx$, обращающийся в нуль при $x = \frac{\pi}{4}$, при переходе через эту точку меняет знак минус на плюс. То же будет и с производной, так как первые два множителя положительны; следовательно, здесь будет минимум. Аналогично исследуются и остальные стационарные точки: все они поочередно доставляют функции максимумы и минимумы.

Вместо исследования перемены знака первой производной можно было бы вычислить вторую производную

$$f''(x) = 3(sinx + cosx)(3sinx\ cosx - 1)$$

и в неё попросту подставить испытуемые значения x. Например, при $x = 0$ получим $f''(0) = -3$, что отвечает максимуму, при $x = \frac{\pi}{4}$ имеем $f''(\frac{\pi}{4}) = \frac{3}{2}\sqrt{2}$, значит - минимум, и т.д.

Определим ещё абсциссы точек пересечения графика с осью x, т.е. решим уравнение $sin^3x + cos^3x = 0$, откуда $cosx = -sinx$, так что $x = \frac{3\pi}{4}$ или $\frac{7\pi}{4}$.

Вычислим теперь значения функции, отвечающие найденным значениям x, и составим таблицу:

$x =$	0 $(2\pi = 6,28)$	$\frac{\pi}{4} = 0,78$	$\frac{\pi}{2} = 1,57$	$\frac{3\pi}{4} = 2,36$	$\pi = 3,14$	$\frac{5\pi}{4} = 3,94$	$\frac{3\pi}{2} = 4,71$	$\frac{7\pi}{4} = 5,50$
$y =$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2} = 0,71$	1	0	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2} = -0,71$	-1	0
	$y' = 0$	$y' = 0$	$y' = 0$		$y' = 0$	$y' = 0$	$y' = 0$	
	макс.	***мин.***	***макс.***		***мин.***	***макс.***	***мин.***	

По этой таблице и построен график, изображённый на рис.45.

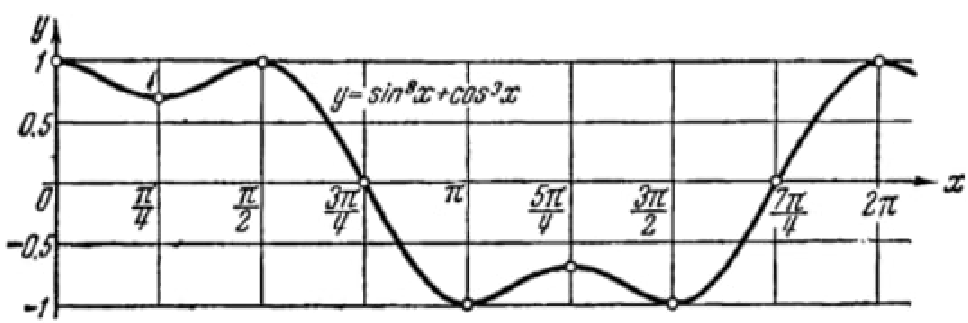

Рис.45.

2) Найти экстремумы и построить график функции

$$f(x) = x^{\frac{2}{3}} - (x^2 - 1)^{\frac{1}{3}}.$$

На этот раз конечная производная

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}(x^2 - 1)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2x = \frac{2}{3}\frac{(x^2-1)^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{4}{3}}}{x'^{\frac{1}{3}}(x^2-1)^{\frac{2}{3}}}$$

существует везде, исключая точки $x = 0$ и $x = \pm 1$. При приближении к ним как слева, так и справа производная имеет бесконечные пределы, значит, в этих точках обе односторонние производные бесконечны **[103]**.