高等数学 I　习题课 08

闭区间上的连续函数，导数

上海科技大学

2025.11.6

Quiz

18:00 - 18:40

习题课 07 反馈

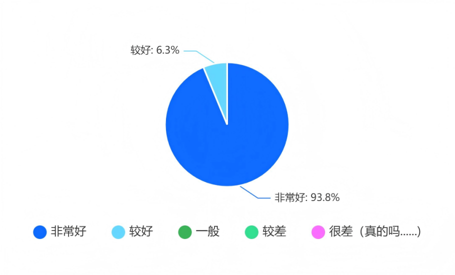

Figure: 课程质量

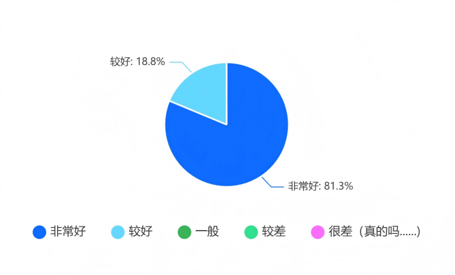

Figure: 课堂氛围

习题课 07 反馈

- 找一些往年题目进行讲解，熟悉考试风格
  - 目前学到的内容太少，暂时找不到合适的题目
- 证明题多留点时间思考
  - OK

目录

目录

性质

若 $f \in C[a,b]$, 则：

1. 【有界性定理】f 在 $[a,b]$ 上有界
2. 【最大值最小值定理】
   $\exists \xi, \eta \in [a,b]$, s.t. $f(\xi) = M = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x), f(\eta) = m = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$
3. 【介值定理】
   若 $f(a) \neq f(b)$，则 $\forall c \in [f(a), f(b)], \exists \xi \in [a,b]$ s.t. $f(\xi) = c$.

连续函数将闭区间映射为闭区间

例 (习题 2 补充题 7)

设函数 $f(x) \in C(\mathbb{R})$，证明：$f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上取到它的最小值.

目录

引

So far as the theories of mathematics are about reality, they are not certain; so far as they are certain, they are not about reality.

– Albert Einstein

Borrowed from 3Blue1Brown, Essence of Calculus

思考

- 导数在实际应用中的含义是?
- “瞬时变化率”?

例

- 对于一个物理问题，考察：
- 距离函数 $s(t)$ 与速度函数 $v(t)$ 的关系
- ...速度函数 $v(t)$?
- “速度”作为一个变化量，为何可以在只有一个时刻的信息的前提下，得到具体的值?

例

- 汽车仪表盘能测量“瞬时速度”吗？显然不能。
- 真实世界中，能做的只有：
  - 记录两组数据 $(t_1, s_1), (t_1 + \mathrm{d}t, s_1 + \mathrm{d}s)$
  - 其中，$\mathrm{d}t$ 是一个很小的时间间隔
  - 计算出长度为 $\mathrm{d}t$ 的时间间隔中的平均速率
- 不妨试试用到函数分析当中?

例

考察函数 $f(x) = x^2$...

Reality

- 在现实中，我们无法令 $\mathrm{d}t$ 的值小到完全可忽略；我们能做的仅有进行有限范围内的近似

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{s(t+\mathrm{d}t) - s(t)}{\mathrm{d}t}$$

$\mathrm{d}t$ 不是**无穷小**；$\mathrm{d}t$ 也不是 0.

Theory

- 但我们可以令 $\mathrm{d}t$ 非常接近 0.

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t) = \lim_{\mathrm{d}t \to 0} \frac{s(t + \mathrm{d}t) - s(t)}{\mathrm{d}t}$$

- 如此，在某个时刻的“变化率”就有了含义.
- 切线斜率？某一点附近的最佳直线近似！
  (回顾：习题课 07 泰勒公式的几何理解)

Theory

- 我们可以用数学的方法计算出这个极限的值：

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t)=\lim_{\mathrm{d}t\to 0}\frac{s(t+\mathrm{d}t)-s(t)}{\mathrm{d}t}$$

- 因此，导数不是一个简单的分数，而是当我们选择的 $\mathrm{d}t$ 值无限逼近于 0 时，这个比值的极限.
- 从图像上如何理解?

Note

- $\mathrm{d}t, \mathrm{d}s$ 都是**有大小**的量
- 当我们使用符号 d 时，我们默认想要求该符号后附的变量趋近于 0 时的结果

例

再次考察函数 $f(x) = x^2$，计算其在 $x = 2$ 处的导数

投票

Note

- 探讨一个物体在某个具体时刻是否在运动是没有意义的；
- 同样的，探讨一个函数在某个具体的点 x_0...

因此：

- 使用导数计算出速度为 0，并不表示物体就是静止的。导数是**某一点附近的最佳直线近似**，速度只是近似为 0.
- 扩展到函数性态的研究...

目录

例

尝试对函数 $f(x) = x^2$ 求导?

例

利用几何，求函数 $f(x) = \dfrac{1}{x}\ (x > 0)$ 的导数

例

利用几何，求函数 $f(x) = \sqrt{x}$ 的导数

例

利用几何，求函数 $f(x) = \sin x$ 的导数

目录

例

尝试用几何的方法，证明导数的加法与乘法法则

链式法则

求函数

$$f(x) = \sin(x^2)$$

的导函数.

链式法则

求函数

$$I(x) = f(g(x))$$

的导函数.