高等数学 I　习题课 11

微分中值定理

上海科技大学

2025.11.27

目录

目录

费马定理

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 取得极值，且 $f(x)$ 在 x_0 可导，则 $f'(x_0) = 0$.

- 导数值为 0 的点称为函数的**驻点**.
- 驻点一定是极值点吗?

罗尔定理

设函数 $f(x)$ 满足：

- 在闭区间 $[a,b]$ 上连续
- 在开区间 (a,b) 上可导
- $f(a)=f(b)$

则 $\exists \xi \in (a,b)$，使得

$$f'(\xi)=0.$$

- 尝试用数学语言，一句话写出罗尔定理

推论

若 $f(x) \in C[a,b] \cap D(a,b)$，且在开区间 (a,b) 内，$f'(x) \neq 0$，则 $y = f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上是单射函数，从而必存在反函数.

例

设函数 $f(x) \in C[a,b]$，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=0$，试证：

$$\exists\ \xi \in (a,b),\ \text{s.t. } f'(\xi)=f(\xi)$$

思路

设函数 $f(x) \in C[a,b]$，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=0$，试证 $\exists\, \xi \in (a,b)$, s.t. $f'(\xi)=f(\xi)$.

- 导数与原函数之间的性质可以通过中值定理连接
- $f(a)=f(b)=0$，满足罗尔定理的使用条件，而 $f'(\xi)-f(\xi)=0$
- 若能找到某个函数 $F(x)$，使得 $F'(x)=0 \Leftrightarrow f'(\xi)-f(\xi)=0$，得证
- $f'-f$ 并不像某个函数的导数，但可能是形如 $f'g+fg'$ 进行约简后的结果... $\Rightarrow$ 找 $g(x)$，使得 $g'(x)=-g(x)$
- $g(x)=e^{-x} \Rightarrow F(x)=f(x)e^{-x}$.

练习

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续，在开区间 $(a,+\infty)$ 内可导，a 是常数，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(a)$. 证明：

$$\exists\, \xi \in (a,+\infty),\ \text{s.t. } f'(\xi) = 0.$$

思考题 1：课本例 4.6

设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上可导，且 $f(x)$ 有界，$f(1)=0$，证明：

$$\exists\, \xi \in (1,+\infty),\ \text{s.t. } \xi f'(\xi) - f(\xi) = 0.$$

- 提示：
  - 题目只给了 $f(1)=0$，而既没有给出某处 $f(x_0)=0$，也没有给出 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$，反而是给出了 $f(x)$ 有界. 这个条件要怎么利用？
  - $\xi f'(\xi) - f(\xi)$ 看起来像某个函数的导数吗？不像的话，该怎么变换？

拉格朗日定理

设函数 $f(x)$ 满足:

- 在闭区间 $[a, b]$ 连续
- 在开区间 (a, b) 可导

则

$$\exists\ \xi \in (a, b),\ \text{s.t. } f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

不难看出，罗尔定理是拉格朗日定理的特殊形式.

几何理解

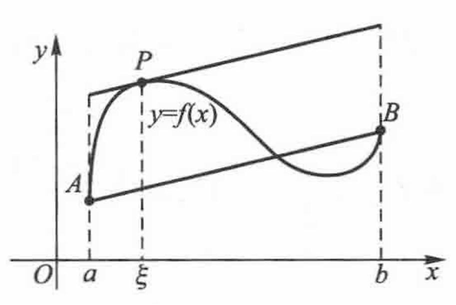


Figure: 课本 P159 图 4.4

证明

构造

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

则

$$F(a) = F(b) = f(a) \Rightarrow \exists\, \xi \in (a, b),\ F'(\xi) = 0.$$

怎么想到的?

几何理解... 不止于此!

一辆小车从 $(a, f(a))$ 点出发，最终达到 $(b, f(b))$ 点.

- 小车沿 AB 运动，则以上定理对所有 $\xi \in (a, b)$ 成立.
- 小车不完全沿 AB 运动：
  - 记小车在 y 方向上偏离直线 AB 的距离为 $h(x)$.
  - $h(x)$ 可能会随着小车行驶增加或减少，但一定有 $h(a) = h(b) = 0$.
  - 同时，$h(x)$ 在小车行驶过程中一定会取到极（最）值：**最值定理**

依照以上思路，可以完成拉格朗日定理的证明.

其他形式

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$$

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta\Delta x)\Delta x, \quad \theta \in (0,1)$$

推论

1. 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上可导，且 $f'(x) \equiv 0$，则 $f(x)$ 在 I 上等于一常数.
2. 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 I 上导数处处相等，则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 I 上相差一常数.

例

设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，且 $0 < f(x) < 1$，又 $\forall\, x \in (0,1)$，$f'(x) \neq 1$，试证：在 $(0,1)$ 内函数 $f(x)$ 有**唯一**的不动点，即方程

$$f(x) = x$$

有**唯一**的实根.

思考题 2: 课本例 4.11

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上可导，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = A > 0$，试证：

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

- 提示：
  - 命题在直觉上成立. 如何进行导数向函数值的变换?
  - 当想不到能做些什么时，先尝试能如何将手边的条件利用起来：凑项，定义展开，...

柯西定理

设函数 $f(t)$ 和 $g(t)$ 满足：

- 在闭区间 $[a,b]$ 连续
- 在开区间 (a,b) 可导，且 $\forall\, t \in (a,b),\ g'(t) \neq 0$

则

$$\exists\, \xi \in (a,b),\ \text{s.t. } \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

不难看出，拉格朗日定理是柯西定理的特殊形式.

几何理解

- 记 $x = g(t), y = f(t)$ 为以 t 为参数的参数方程定义的曲线.
- 等式左端等价于 $(y_b - y_a)/(x_b - x_a)$，其几何意义为 $A = (x_a, y_a), B = (x_b, y_b)$ 两点间连线的斜率
- 等式右端等价于 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} / \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 在 $t = \xi$ 处的取值，其几何意义为 (x_ξ, y_ξ) 处的切线斜率

$\Rightarrow$ 割线与切线斜率相等

例

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导 $(a>0)$，证明：

$$\exists\ \xi,\eta\in(a,b),\ \text{s.t. } abf'(\xi)=\eta^2 f'(\eta)$$

- 提示：
  - 找找 $g(x)$?

达布定理

若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可导，且 $f'_+(a) < f'_-(b)$，则

$$\forall\, c \in (f'_-(a), f'_+(b)),\ \exists\, \xi \in (a,b),\ \text{s.t. } f'(\xi) = c.$$

导函数即使不连续，也有介值性

导函数的极限

设 $\delta > 0$，函数 $f(x)$ 在 $[x_0, x_0+\delta)$ 上连续，在 $(x_0, x_0+\delta)$ 内可导，若 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x) = A$ 存在，则 $f(x)$ 在点 x_0 有右导数，且 $f'_+(x_0) = A$.

- 修改所有与右导数相关的内容为左导数，命题依然成立.
- 即，若函数在某点的单侧邻域内连续且可导，则该点的单侧导数存在且等于到函数的极限.

目录

洛必达法则

设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域 $\dot{U}(x_0,\delta)$ 内有定义，且满足：

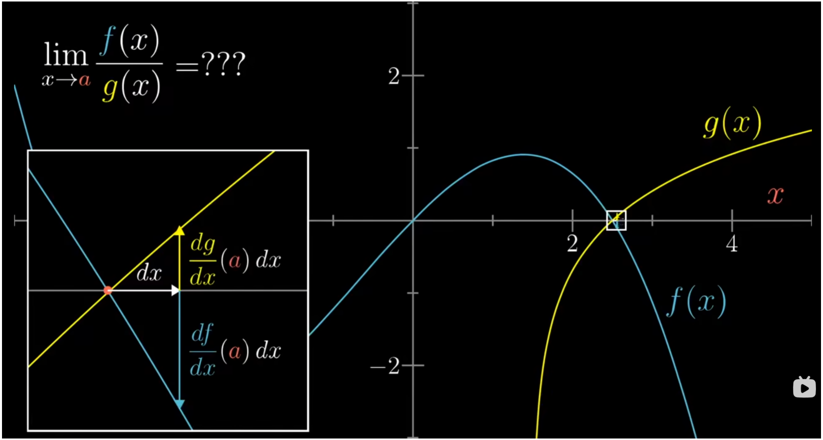
- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$
- $f(x)$，$g(x)$ 在该去心邻域内可导，且 $g'(x)\neq 0$
- $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$（$A$ 为常数或 ∞）

则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$$

几何理解

https://www.bilibili.com/video/BV1qW411N7FU/?p=7



几何理解

- 函数可导，意味着在该点附近，函数可以近似地被视为直线
- 取一小段距离 $\mathrm{d}x$，得到函数值对应的变化 $\mathrm{d}f, \mathrm{d}g$
- $\mathrm{d}f/\mathrm{d}g$ 可以作为一个 $f(x)/g(x)$ 在该点附近的近似值
- 取 $\mathrm{d}x \to 0$，极限即为该处 $f(x)/g(x)$ 的极限值

思考

洛必达法则的第二项条件：

- $f(x)$，$g(x)$ 在该去心邻域内可导，且 $g'(x) \neq 0$

那么，为什么在进行一次洛必达法则运用后，若依然得到 $0/0$ 式，还可以继续运用？此时难道不是 $g(x) = 0$ 吗？

- 此时仅有 $g(x_0) = 0$，而 x_0 不在极限运算的定义域内.

洛必达法则

设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域 $\dot{U}(x_0, \delta)$ 内有定义，且满足：

- $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$
- $f(x)$，$g(x)$ 在该去心邻域内可导，且 $g'(x) \neq 0$
- $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$（$A$ 为常数或 ∞）

则

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

例

求

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

“典”例

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x} &= \lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}}{\cos x}-\lim_{x\to 0}\frac{\cos\frac{1}{x}}{\cos x}\end{aligned}$$

第一项极限为 0，第二项极限不存在，故该极限不存在.

投票

使用原则

- 洛必达法则的本质：
    - 函数在 $x = x_0$ 处的比值 等价于
      函数在 $\dot{U}(x_0)$ 内近似直线斜率的比值在 $x \to x_0$ 时的极限
    - 与泰勒公式等价
- 使用原则：
    - 使用前先尽可能化简
    - 确保条件均成立：
      $0/0$ 或 ∞/∞，去心邻域内可导，上下求导后极限存在

目录

泰勒定理 1

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的邻域内有定义，且在 x_0 有 n 阶导数，那么

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

其中 $o((x - x_0)^n)$ 称为佩亚诺余项，定理结论称为 $f(x)$ 的带佩亚诺余项的 n 阶泰勒公式.

一个确定函数的泰勒公式中，多项式的系数是确定的.

几何意义

对 e^x 进行 0 处的多项式估计

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n)$$

泰勒定理 2

设函数 $f(x)$ 在包含点 x_0 的开区间 (a,b) 内具有 $n+1$ 阶导数，则 $\forall x \in (a,b)$，有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

其中 ξ 介于 x_0 与 x 之间.

$\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ 称为拉格朗日余项.

麦克劳林公式

在 0 处的泰勒公式. 课本 P176∼177

例 (23Fall, Midterm)

求 $\sqrt{1+\sin x}$ 带佩亚诺余项的 3 阶麦克劳林公式.

思考题 3：课本例 4.36

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $\max\limits_{0<x<1} f(x) = 1/4$，$|f''(x)| \leq 1$，试证：

$$|f(0)| + |f(1)| < 1.$$

- 提示：
  - 当你没有思路的时候，尝试利用手边的条件做点什么（随便什么）
  - 要证 $|f(0)| + |f(1)| < 1$，需要对函数值的绝对值进行限制．题目给定的条件要如何与函数值联系起来？