高等数学 I　习题课 12

函数性态的研究，不定积分

上海科技大学

2025.12.4

关于后续习题课

- 根据期中考试成绩反馈，我们会在习题课上尽可能地增加基础运算的练习
- 关于几何直观，请大家观看 3Blue1Brown 的视频：
- https://www.bilibili.com/video/BV1qW411N7FU
- 如果时间足够，我们会尽可能地提供几何直观的讲解

目录

目录

定理 4.11,4.12

设函数 $f(x) \in C[a,b] \cap D(a,b)$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 上单调增加的充分必要条件是：

$$\forall x \in (a,b), \quad f'(x) \geq 0$$

若要求 $f(x)$ 在 (a,b) 上严格单调增加，则还要求在 (a,b) 的任何子区间上，$f'(x)$ 不恒等于 0.

例 4.37

求 $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$ 的单调区间.

例 4.40

证明：当 $x > 0$ 时，$x - \dfrac{x^3}{6} < \sin x < x$.

极值第一判别法

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内 $U(x_0,\delta)$ 连续，且在去心邻域内可导，

(1) 若在 x_0 左侧 $f'(x_0)<0$，x_0 右侧 $f'(x_0)>0$，则 x_0 是 $f(x)$ 的极小值点；

(2) 若在 x_0 左侧 $f'(x_0)>0$，x_0 右侧 $f'(x_0)<0$，则 x_0 是 $f(x)$ 的极大值点；

(3) 若在 x_0 两侧 $f'(x_0)$ 同号，则 x_0 不是 $f(x)$ 的极值点.

极值第二判别法

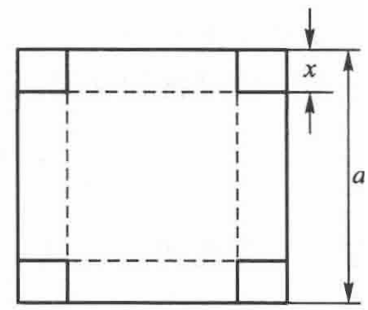
设函数 $f(x)$ 在点 x_0 有二阶导数，且 $f'(x_0) = 0$，则

(1) 若 $f'(x_0) < 0$，则 x_0 是 $f(x)$ 的极大值点;

(2) 若 $f'(x_0) > 0$，则 x_0 是 $f(x)$ 的极小值点;

例 4.45

设有一块边长为 a m 的正方形铁皮，在它的四个角上各剪去一个相同边长的小正方形，然后将它沿虚线折起（如图），做成一个无盖的铁盒子. 问剪去的小正方形边长 x 为多少米时，能使盒子的容积最大，并求其最大容积.



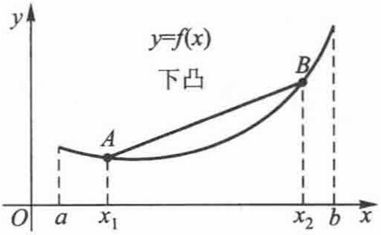
定义

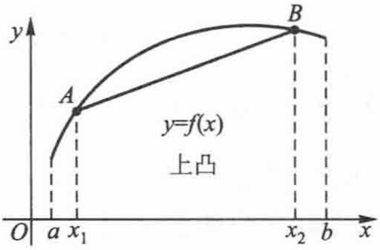
设函数 $f(x)$ 在区间 I 连续，若

$$\forall x_1, x_2 \in I, \theta \in (0,1), \quad f\Big(\theta x_1 + (1-\theta)x_2\Big) \leq \theta f(x_1) + (1-\theta) f(x_2),$$

则称函数 f 在该区间上是下凸的 (*convex*).
若将 $\leq$ 换为 $\geq$，则称 f 在该区间上是上凸的 (*concave*).
若将 $\leq$ 换为 $<$，则称 f 是严格下凸的.

图解





应用

思考：如果一个函数在整个定义域上都是下凸的，那么这个函数有几个极值点?

第一判别法

设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内可导，若导函数 $f'(x)$ 在 (a,b) 内严格单调增加（减少），则该函数在 (a,b) 内是严格下凸（上凸）的.

一阶条件

$$f(x) \text{ convex} \quad \Leftrightarrow \quad \forall x, y \in I, f(y) \geq f(x) + f'(x)(y-x)$$

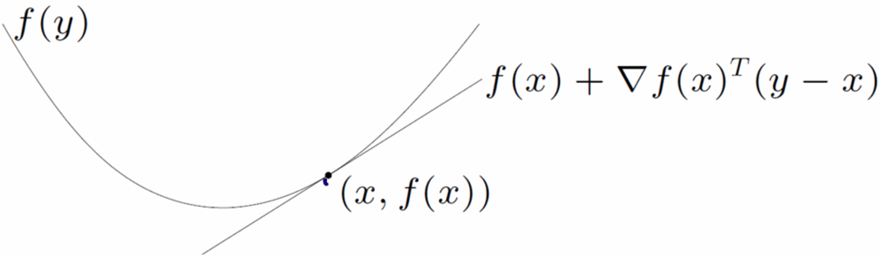


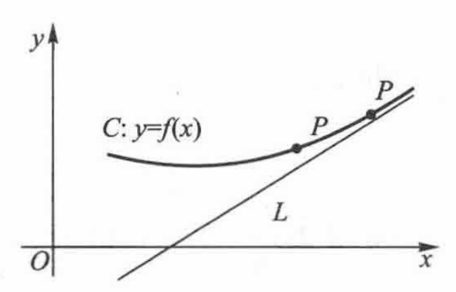
Image from SI251, Convex Optimization

二阶条件

设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内二阶可导，则当 $f''(x)>0$ 时，$f(x)$ 在 (a,b) 内下凸；当 $f''(x)<0$ 时，$f(x)$ 在 (a,b) 内上凸.

定义

若连续曲线 C 上的点 P 沿着曲线无限地远离原点 O 时，点 P 与某一定直线 L 的距离趋于零，即 $\lim\limits_{|OP|\to\infty} \text{dist}(P, L) = 0$，则称直线 L 为曲线 C 的渐近线



分类

- 铅直渐近线
- 水平渐近线
- 斜渐近线

铅直渐近线

若当 $x \to x_0$（或 x_0^+, x_0^-）时，$f(x) \to \infty$，即

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty,$$

则称 $x = x_0$ 是曲线 $y = f(x)$ 的铅直渐近线.

水平渐近线

若当 $x \to \infty$（或 $+\infty, -\infty$）时，$f(x) \to b$，即

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b,$$

则称直线 $y = b$ 是曲线 $y = f(x)$ 的水平渐近线.

斜渐近线

若当 $x \to \infty$（或 $+\infty, -\infty$）时，曲线 $y = f(x)$ 与直线 $y = ax + b$ 的距离趋于 0，即

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - ax - b) = 0,$$

则 $y = ax + b$ 是曲线 $y = f(x)$ 的斜渐近线

例 (24Fall Midterm, 14)

全面讨论函数

$$f(x) = (x+2)e^{1/x}$$

的性态（定义域与值域、间断点、零点、单调区间、极值点、上下凸区间、拐点、渐近线）

并作草图.

目录

Motivation

先前我们利用导数做了：

- 给定汽车行驶的距离，得到车的“瞬时速度”

现在我们关心这个问题的逆过程：

- 假设你坐在车里，看不到外界的情况，但是能看到仪表盘
- 你要怎样通过已有的信息，得到汽车已经行驶过的距离？

数学原理分析

已知速度函数 $v(t)$，希望找到距离函数 $s(t)$.

已知关系：

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

原函数的定义

课本 P232, 定义 5.2

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，若存在函数 $F(x)$ 使得

$$F'(x) = f(x),$$

则称函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 I 上的**一个**原函数.

若一个函数有原函数，则其必有无穷多个原函数. 我们称 $F(x) + C$（C 为任意常数）为 $f(x)$ 的全体原函数.

不定积分的定义

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上存在原函数，则称 $f(x)$ 在 I 上的**全体**原函数为 $f(x)$ 在 I 上的不定积分，记作

$$\int f(x)\mathrm{d}x$$

其中记号 $\int$ 称为不定积分号，$f(x)$ 为被积函数，x 称为积分变量.
由原函数的定义立即得

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$$

其中 C 为任意常数，也称为不定积分常数.

重要定理 1 (不定积分的导数)

若函数 $f(x)$ 在区间 I 上存在原函数，则

$$\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = f(x)$$

或，等价地，

$$\mathrm{d}\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right) = f(x)$$

重要定理 2 (导数的不定积分)

若函数 $f(x)$ 在区间 I 上可导，则

$$\int f'(x)\mathrm{d}x = f(x) + C$$

或，等价地，

$$\int \mathrm{d}f(x) = f(x) + C$$

重要定理 3 (线性)

若函数 $f(x), g(x)$ 在区间 I 上都存在原函数，$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 且不同时为零，则

$$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)] \mathrm{d}x = \alpha \int f(x) \mathrm{d}x + \beta \int g(x) \mathrm{d}x$$

基本积分表，课本 P241

背，或者学会如何推导

(1) $\int k\mathrm{d}x = kx + C\ (k \in \mathbf{R})$;

(2) $\int x^{\alpha}\mathrm{d}x = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C\ (\alpha \neq -1)$, $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C$;

(3) $\int a^{x}\mathrm{d}x = \dfrac{a^{x}}{\ln a} + C\ (a>0, a\neq 1)$, $\int \mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{x} + C$;

(4) $\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$;

(5) $\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$;

(6) $\int \sec^2 x\mathrm{d}x = \tan x + C$;

(7) $\int \csc^2 x\mathrm{d}x = -\cot x + C$;

(8) $\int \sec x\tan x\mathrm{d}x = \sec x + C$;

(9) $\int \csc x\cot x\mathrm{d}x = -\csc x + C$.

(10) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C\ (a>0)$;

(11) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a} + C\ (a\neq 0)$;

(12) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C\ (a\neq 0)$;

(13) $\int \sec x\mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x| + C$;

(14) $\int \csc x\mathrm{d}x = \ln|\csc x - \cot x| + C$;

(15) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C\ (a>0)$;

(16) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2-a^2}| + C\ (a>0)$.

简例

求不定积分

$$\int (3\sqrt{x} - 2e^x + \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{1-x^2})\mathrm{d}x$$

简例

求不定积分

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2(x^2+1)}$$

第一换元法：链式法则

设函数 $F(u)$ 是 $f(u)$ 在区间 I 上的一个原函数，又 $u=\varphi(x)$ 在区间 I 上可导且其值域为 $R(\varphi)\subset I$，则有

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x = F[\varphi(x)]+C.$$

例

求

$$\int \frac{1}{\arctan x(1+x^2)}\mathrm{d}x$$

第二换元法：反函数求导

设函数 $x=\varphi(t)$ 在区间 I 上可导且导数 $\varphi'(t)\neq 0$，且 $\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t=F(t)+C$，则

$$\int f(x)\mathrm{d}x=F[\varphi^{-1}(x)]+C$$

不好理解?

例

求

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x \quad (a>0)$$

例

求

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\mathrm{d}x \quad (a > 0)$$

例

求

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+1}}$$

分部积分法：导数的乘法法则

设函数 $u(x), v(x)$ 在区间 I 上可导，且 $\int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$ 存在，则

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$$

用于 $u(x)v'(x)$ 不易积分，但 $v'(x)u(x)$ 易求出的情况

例

求

$$\int xe^{-x}\mathrm{d}x$$

例

求

$$\int \arcsin x \mathrm{d}x$$

例

求

$$\int e^{ax}\sin bx\mathrm{d}x \quad (a\neq 0)$$