ShanghaiTech University

GEMA1001 Calculus I
Fall 2022

Midterm Exam

Answer composed by Yixuan Liu

November 17, 2025

If you have any questions about the answers, feel free to contact through email(liuyx2023@shanghaitech.edu.cn) or QQ(2987221272).

1. (20 pts) 单项选择题

(a) (4') 若当 $x \to 0$ 时，$(\cos x - 1)\ln(1+x^2)$ 是比 $x\sin^n x$ 高阶的无穷小，且 $x\sin^n x$ 是比 $3^{x^2}-1$ 高阶的无穷小，则正整数 n 的值为（　　）

A. 1.　　B. 2.　　C. 3.　　D. 4.

Solution: B.

$(\cos x - 1)\ln(1+x^2) \sim (-x^2/2)x^2$ 是 x 的 4 阶无穷小；$3^{x^2}-1 \sim x^2\ln 3$ 是 x 的 2 阶无穷小. 因此 $x\sin^n x \sim x^{n+1}$，$n \in \mathbb{N}^+$ 是 x 的 3 阶无穷小，故 $n=2$.

(b) (4') 已知平面曲线的极坐标方程为 $r = \cos\theta + \sin\theta$，则该曲线在对应于 $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ 的点处的切线方程为（　　）

A.$y = x$.　　B.$y = -x$.　　C.$y = x - 2$.　　D. $y = -x + 2$.

Solution: D.

$\theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow r = \sqrt{2}$. 因此直角坐标下对应的点是 $(1,1)$.

由于 $x = r\cos\theta = \cos^2\theta + \sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}(\cos 2\theta + 1 + \sin 2\theta)$,

$y = r\sin\theta = \sin\theta\cos\theta + \sin^2\theta = \frac{1}{2}(\sin 2\theta + 1 - \cos 2\theta)$,

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = -\sin 2\theta + \cos 2\theta, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = \cos 2\theta + \sin 2\theta.$$

代入 $\theta = \pi/4$ 得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = -1.$$

因此，曲线在 $\theta = \pi/4$ 处的切线是一条过点 1, 1，斜率为 -1 的直线，方程为 $y = -x + 2$.

(c) (4') 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^4+n}} + \dfrac{2}{\sqrt{n^4+2n}} + \cdots + \dfrac{n}{\sqrt{n^4+n^2}}\right) =$（　　）

A.$\dfrac{1}{2}$.　　B.$\dfrac{1}{3}$.　　C.$\dfrac{1}{6}$.　　D.1.

Solution: A.

$$\forall i \in \{1,2,3,\cdots,n\}, \frac{i}{\sqrt{n^4+n^2}} \le \frac{i}{\sqrt{n^4+ni}} \le \frac{i}{\sqrt{n^4}}.$$

因此

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{\sqrt{n^4+n^2}} \le \sum_{i=1}^{n}\frac{i}{\sqrt{n^4+ni}} \le \sum_{i=1}^{n}\frac{i}{\sqrt{n^4}}.$$

其中

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{\sqrt{n^4+n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2\sqrt{n^4+n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+1/n)}{2\sqrt{1+1/(n^2)}}=\frac{1+0}{2\sqrt{1+0}}=\frac{1}{2}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{\sqrt{n^4}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2\sqrt{n^4}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+1/n)}{2\sqrt{1}}=\frac{1+0}{2}=\frac{1}{2}.$$

由夹逼定理得原极限为 $\frac{1}{2}$.

(d) (4') 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 满足: $f(a)f(b)<0$, 且 $f'(x)>-f(x)$, $x\in(a,b)$, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的零点个数为（　　）

A.3.　　B.2.　　C.1.　　D.0.

Solution: C.

首先，由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，则其在 $[a,b]$ 上连续. 据零点存在定理，由于 $f(a)f(b)<0$，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上至少存在一个零点.

考虑条件 $f'(x)+f(x)>0$. 构造辅助函数 $g(x)=e^xf(x)$，$g'(x)=e^x(f'(x)+f(x))>0$. 因此 $g(x)$ 是严格单调增函数. 由于 $f(a)f(b)<0$，$g(a)g(b)=e^af(a)e^bf(b)<0$. 由零点存在定理，$g(x)$ 在 (a,b) 上有且仅有一个零点.

假设 $f(x)$ 存在两个不同的零点 $a<x_1<x_2<b$，那么:

$$g(x_1)=e^{x_1}f(x_1)=0,g(x_2)=e^{x_2}f(x_2)=0$$

而 $g(x)$ 的零点是唯一的，因此 $x_1=x_2$，故 $f(x)$ 的零点也是唯一的.

(e) (4') 设 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有定义，在去心邻域 $\dot{U}(x_0)$ 内可导，则对于下列论断:

（1） 若 $\lim_{x\to x_0}f'(x)=\infty$，则 $f'(x_0)$ 不存在;

（2） 若 $f'(x_0)$ 存在且等于常数 A，则 $\lim_{x\to x_0}f'(x)$ 也存在且等于 A;

（3） 若 $f'(x_0)$ 不存在，则 $\lim_{x\to x_0}f'(x)$ 不存在.

正确论断的个数是（　　）

A.0.　　B.1.　　C.2.　　D.3.

Solution: B.

(1) 直觉上我们可以认为该命题成立：既然导函数趋向于无穷，那么该点的导数应当也等于无穷. 下面给出严谨的证明：

采用反证法. 假设 $f'(x_0)$ 存在并且为有限实数 L. 由于导数在 x_0 存在，则 f 在 x_0 连续，因此可在任意小闭区间上应用拉格朗日中值定理.

因为

$$\lim_{x\to x_0} f'(x) = +\infty,$$

所以对任意 $M>0$，存在 $\delta>0$，使得

$$0<|x-x_0|<\delta \quad\Longrightarrow\quad f'(x)>M. \tag{1}$$

另一方面，由 $f'(x_0)=L$ 可知

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=L.$$

因此存在 $0<\eta\le\delta$，当 $0<|x-x_0|<\eta$ 时，

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-L\right|<1,$$

从而

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|<|L|+1.$$

选取 $M>|L|+1$，则对所有 $0<|x-x_0|<\eta$ 有

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|<M. \tag{2}$$

对任意 $0<|x-x_0|<\eta$，f 在区间 $[x_0,x]$（或 $[x,x_0]$）上连续，在开区间可导，因此由拉格朗日中值定理可知存在 ξ 介于 x 与 x_0 之间，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

根据 (2)，$f'(\xi)<M$；但根据 (1)，又必须有 $f'(\xi)>M$. 矛盾.

因此 $f'(x_0)$ 不可能为有限实数，即 $f'(x_0)$ 不存在.

(2) 该命题等价于：$f(x)$ 的导函数在 x_0 的邻域内连续. 反例：

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0. \end{cases}$$

$f(x)$ 在 0 处的导数

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0.$$

而 $f(x)$ 的导函数

$$f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$$

在 $x=0$ 处不存在.

(3) 任意一个被挖去定义域上 x_0 该点的函数都可以作为反例. 例如

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x\neq 0,\\ 1, & x=0. \end{cases}$$

该函数在 $x=0$ 处导数不存在，但导函数的极限存在，因为 $x=0$ 是导函数的可去间断点.

2. (20 pts) 填空题

(a) (4') 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2n} =$ ______________________________.

> **Solution:** e^{-4}.
>
> $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n+1}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{-\frac{n+1}{2}}\right)^{2n\cdot\frac{n+1}{-2}\cdot\frac{-2}{n+1}}$$
> $$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-\frac{n+1}{2}}\right)^{\cdot\frac{n+1}{-2}}\right]^{2n\cdot\frac{-2}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{-4n}{n+1}} = e^{-4}.$$

(b) (4') 函数 $f(x) = \frac{x^3+4x+5}{x^2-1}$ 的第一类间断点是：____________________.

> **Solution:** -1.
>
> 函数的间断点是 $x=1, x=-1$.
>
> $$\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1}\frac{1+4+5}{x^2-1} = \infty,\ \lim_{x\to-1} f(x) = \lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x^2-x+5)}{(x+1)(x-1)} = -\frac{7}{2}$$
>
> 因此函数的第一类间断点是 -1.

(c) (4') 函数 $y=f(x)$ 由 $\begin{cases} x(t) = 1+t, \\ y(t) = 2t+3t^2 \end{cases}$ 确定，则 $\mathrm{d}f|_{x=2} =$ ____________.

> **Solution:** $8\mathrm{d}x$
>
> $$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 1,\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 6t+2 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 6t+2 = 6(x-1)+2.$$
>
> 代入 $t=1$ 或 $x=2$ 得
>
> $$\mathrm{d}f|_{x=2} = 6\times1+2\mathrm{d}x = 8\mathrm{d}x.$$

(d) (4') 已知 $f(a)=2, f'(a)=3$,则极限 $\lim\limits_{h\to0}\frac{f^2(a+2h)-f^2(a-h)}{h} =$ __________.

> **Solution:** 36.
>
> $$\lim_{h\to0}\frac{f^2(a+2h)-f^2(a-h)}{h} = 3(f^2(a))' = 3\cdot2f(a)f'(a) = 36.$$

(e) (4') 设函数 $f(x) = (1+x)^x$，则 $f(x)$ 带皮亚诺余项的二阶麦克劳林展开式为 ________.

Solution: $f(x) = 1 + x^2 + o(x^2)$.

$$f(x) = e^{x\ln(1+x)}$$
$$f'(x) = e^{x\ln(1+x)}(\ln(1+x) + \frac{x}{1+x})$$
$$f''(x) = e^{x\ln(1+x)}(\ln(1+x) + \frac{x}{1+x})^2 + e^{x\ln(1+x)}(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2})$$

代入 $x = 0$:

$$f(0) = 1, f'(0) = 1(0 + \frac{0}{1}) = 0, f''(0) = 1 \cdot (0)^2 + 1(\frac{1}{1} + \frac{1}{1^2}) = 2$$

因此

$$f(x) = 1 + x^2 + o(x^2).$$

3. (8 pts) 极限定义证明题

用极限定义证明：$\lim_{x\to 3}\left(1 - \frac{3}{x}\right) = 0.$

Solution:

需证：

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \text{s.t. } \forall 0 < |x-3| < \delta, |1 - \frac{3}{x}| < \varepsilon.$$

当 $\delta \le 1$ 时，有 $2 \le x \le 4$

$$|1 - \frac{3}{x}| = |\frac{x-3}{x}| \le \frac{1}{2}|x-3|$$

当 $\delta \le 2\varepsilon$ 时，$\frac{1}{2}|x-3| < \frac{1}{2} \cdot 2\varepsilon = \varepsilon$

因此，取 $\delta = \min\{1, 2\varepsilon\}$. 此时有

$$|1 - \frac{3}{x}| = \frac{|x-3|}{|x|} \le \frac{2\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

4. (16 pts) 极限计算

(a) (8') 求极限 $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{-x}(x-\arcsin x)}{\sin x\ln(1+x^2)}$.

Solution:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}(x-\arcsin x)}{\sin x\ln(1+x^2)} &= \lim_{x\to 0}\frac{x-\arcsin x}{\sin x\ln(1+x^2)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x-(x+\frac{1}{6}x^3+o(x^3))}{x^3}\\ &= -\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

(b) (8') 已知函数满足：$f(0)=f'(0)=0$，$f''(0)=6$，求 $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x)}{x^4}$.

Solution:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin^2 x)}{x^4} &= \lim_{x\to 0}\frac{f'(\sin^2 x)2\sin x\cos x}{4x^3}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{f'(\sin^2 x)}{2x^2}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{f''(\sin^2 x)2\sin x\cos x}{4x}\\ &= \frac{6\times 2}{4} = 3.\end{aligned}$$

5. (18 pts) 导数计算

(a) (9') 已知函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y+6xy+x^2-1=0$ 所确定，求 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$，$\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}$.

Solution:

首先求 $y|_{x=0}$： $e^{y(0)}-1=0 \Leftrightarrow y(0)=0$.

两边求导：

$$y'e^y+6(y+xy')+2x=0 \quad \Leftrightarrow \quad y'(0)e^0+6(0+0)+0=0$$

因此 $y'(0)=$. 再次两边求导：

$$y''e^y+(y')^2e^y+6(y'+y'+xy'')+2=0 \quad \Leftrightarrow \quad y''(0)+(0)^2+6\cdot(0)+2=0$$

因此 $y''(0)=-2$. 综上所述，

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=0,\ \left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}=-2.$$

(b) (9') 设函数 $f(x)=(x+1)^2\sin x+\ln x$，求 $f^{(2022)}(\pi)$.

Solution:

$$(\ln x)^{(2022)}=(-1)^{2022-1}(2022-1)!x^{-2022}=-\frac{2021!}{x^{2022}}.$$

$$\begin{aligned}
[(x+1)^2\sin x]^{(2022)} &= \sum_{i=0}^{2022}\binom{2022}{i}[(x+1)^2]^{(i)}(\sin x)^{(2022-i)} \\
&= \sum_{i=0}^{2}\binom{2022}{i}[(x+1)^2]^{(i)}(\sin x)^{(2022-i)} \\
&= (x+1)^2(\sin x)^{(2022)}+2022\cdot 2(x+1)(\sin x)^{2021} \\
&\qquad +\binom{2022}{2}2(\sin x)^{2020} \\
&= (x+1)^2(-\sin x)+4044(x+1)\cos x+2\binom{2022}{2}\sin x
\end{aligned}$$

代入 $x=\pi$

$$f^{(2022)}(\pi)=4044(\pi+1)-\frac{2021!}{\pi^{2022}}.$$

6. (8 pts) 解答题

(a) (8') 设 $-\dfrac{3}{2} < x_0 < 3$，$x_{n+1} = \sqrt{2x_n + 3}$，$n \in \mathbb{N}$. 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求其极限.

Solution: 首先使用数学归纳法证明 $\{x_n\}$ 有界. 由于 $x_0 \in (-\frac{3}{2}, 3)$，可知 $x_1 \in (0, 3)$.

假设 $0 < x_k < 3$，则 $0 < 3 < 2x_k + 3 < 9$，从而 $x_{k+1} = \sqrt{2x_n + 3} \in (0, 3)$. 因此 $\{x_n\}$ 有界. 同时，

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\sqrt{2x_n + 3}}{x_n} = \sqrt{\frac{2}{x_n} + \frac{3}{x_n^2}} > \sqrt{\frac{2}{3} + \frac{3}{9}} = 1.$$

又 $x_n > 0$，可得 $\{x_n\}$ 单调递增. 因此数列 $\{x_n\}$ 收敛，设其极限为 L. 则

$$L = \sqrt{2L + 3} \quad \Leftrightarrow \quad L = 3$$

因此，数列 $\{x_n\}$ 的极限是 3.

7. (10 pts) 证明题

设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 上可导，且 $f(0)=f(1)=0$，$\max\limits_{x\in[0,1]} = M > 0$.
证明：

(a) (4') 存在 $x_0 \in (0,1)$，使得 $f'(x_0)=0$；

> **Solution:**
>
> 由罗尔定理，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，在 $(0,1)$ 可导，且 $f(0)=f(1)$，则 $\exists \xi \in (0,1)$，使得 $f'(\xi)=0$.□

(b) (6') 对于大于 1 的任意正整数 n，存在 $\xi_1, \xi_2 \in (0,1)$，且 $\xi_1 \neq \xi_2$，使得 $\dfrac{1}{f'(\xi_1)} - \dfrac{1}{f'(\xi_2)} = \dfrac{n}{M}$.

> **Solution:**
>
> 设 $f(x)$ 在 $x=m$ 处取得最值 M. 则据拉格朗日中值定理，
>
> - $\exists x_1 \in (0,m)$，$f'(x_1) = M/m$.
> - $\exists x_2 \in (m,1)$，$f'(x_2) = -M/(1-m)$.
>
> 取 $\xi_2 = x_2$. 问题转化为证明
>
> $$\exists \xi_1,\ \frac{1}{f'(\xi_1)} = \frac{n}{M} + \frac{1-m}{M} = \frac{n+1-m}{M}.$$
>
> 据达布定理，
>
> $$\forall c \in \left(\frac{-M}{1-m}, \frac{M}{m}\right),\ \exists \xi \in (x_1, x_2),\ f'(\xi) = c.$$
>
> 同时，
>
> $$\frac{M}{m} - \frac{M}{n+1-m} = M\frac{n+1-2m}{m(n+1-m)} > 0$$
>
> $$\frac{M}{n+1-m} - \frac{-M}{1-m} = M\frac{n+2-2m}{(n+1-m)(1-m)} > 0$$
>
> 因此 $\dfrac{M}{n+1-m} \in \left(\dfrac{-M}{1-m}, \dfrac{M}{m}\right)$. 故 $\exists \xi_1 \in (x_1, \xi_2)$，$f'(\xi_1) = \dfrac{M}{n+1-m}$. 即
>
> $$\exists \xi_1, \xi_2 \in (0,1),\ \xi_1 \neq \xi_2,\ \text{s.t.}\ \frac{1}{f'(\xi_1)} - \frac{1}{f'(\xi_2)} = \frac{n}{M}.$$
>
> □