

高等数学 I 习题课 07

等价无穷小，函数的连续性

上海科技大学

2025.10.30

习题课 06 反馈

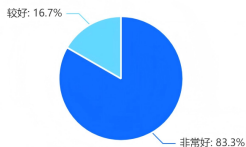


Figure: 课程质量

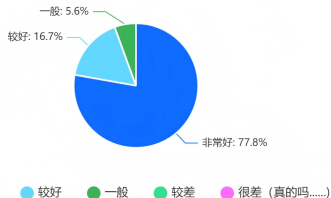


Figure: 课堂氛围

Reminder

- 在完全了解定理背后的原理之前，不要轻易使用这些定理（非常容易出错）
- HW3, HW4 大量出现洛必达，导数...
- 初等分析方法的练习对于日后进行复杂问题的分析是非常有必要的（有利于建立数学直观）
- 你可以：
 - 先使用高阶方法，得到问题的答案
 - 再根据高阶方法的求解过程，思考如何使用初等方法解决问题

目录

- ① 函数极限
- ② 无穷小
- ③ 函数的连续性

目录

- 1 函数极限
- 2 无穷小
- 3 函数的连续性

23 Fall, ch.2 Quiz (Revisited)

用 $\varepsilon - \delta$ 语言证明:

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$$

思路

- 目标：找到 δ ，使得对于所有 $0 < |x - a| < \delta$ ，都有 $|f(x) - A| < \varepsilon$
- 不可避免地，需要凑出 $|x - a|$ 以将 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 变为 $g(x)\delta < \varepsilon$
- 善用放缩，避免硬解

两个重要极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

怎么用？

用法

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$: 用于三角函数向线性函数的拟合
(今日内容: 泰勒展开的几何理解)
- $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$: 用于 $(1 + 0)^\infty$ 形极限, 且 0 项与 ∞ 项互为倒数

典型错误

求

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1 + \frac{1}{x})^{x^2}}{e^x}$$

投票

注意事项

- 对某个表达式取极限时，该表达式内被取极限的变量的趋近于同一个值

目录

- 1 函数极限
- 2 无穷小**
- 3 函数的连续性

定义

若 $x \rightarrow a$ 时, $f(x) \rightarrow 0, g(x) \rightarrow 0$, 考虑 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R}$:

- $l = 0 \Leftrightarrow$

$x \rightarrow a$ 时, $f(x)$ 是比 $g(x)$ 高阶的无穷小, 记作 $f(x) = o(g(x))$

- $l \neq 0 \Leftrightarrow$

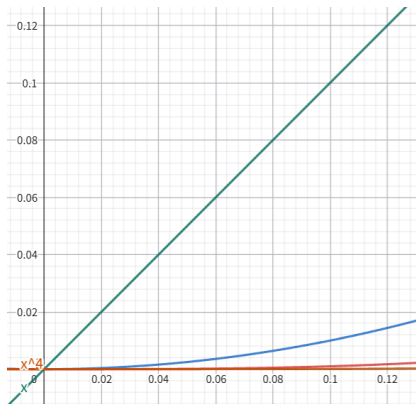
$x \rightarrow a$ 时, $f(x)$ 是与 $g(x)$ 同阶的无穷小, 记作 $f(x) = O(g(x))$.

若 $l = 1$ 则称 $x \rightarrow a$ 时, $f(x)$ 与 $g(x)$ 是等价无穷小, $f(x) \sim g(x)$.

我们将在第四章更详细地讲解等价无穷小的概念。

几何理解

$y = x, x^2, x^3, x^4$ 在 $x = 0$ 附近的图像:



无穷小之间的大小亦有差别

定义

若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, 且存在常数 $c \neq 0, k > 0$, 使得

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{(x - a)^k} = c,$$

则称 $x \rightarrow a$ 时, $f(x)$ 是**标准无穷小** $x - a$ 的 k 阶无穷小, 简称 $f(x)$ 是 k 阶无穷小, $c(x - a)^k$ 是 $f(x)$ 的主部

泰勒定理 1

教材定理 4.9

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的邻域内有定义，且在 x_0 处有 n 阶导数，那么

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

$\cos(x)$ 在 0 处的多项式估计

- 尝试使用 $g(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots$ 拟合函数 $\cos(x)$
- 基本想法：0 处的函数值至少要相等 $\Rightarrow g(0) = 1 \Rightarrow c_0 = 1$
- 切线斜率相等 $\Rightarrow g'(x)|_{x=0} = \cos'(x)|_{x=0} \Rightarrow c_1 = 0$
- 继续？

$\cos(x)$ 在 0 处的多项式估计

- 尝试使用 $g(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots$ 拟合函数 $\cos(x)$
- $c_0 = 1, c_1 = 0$
- 对 $\cos(x)$ 的切线斜率在 $x = 0$ 附近的微小变动进行拟合
 $\Rightarrow \cos''(x)|_{x=0} = g''(x)|_{x=0} \Rightarrow c_2 = -\frac{1}{2}$
- $\cos(x) \approx 1 + 0x - \frac{1}{2}x^2$

常用无穷小

$$\sin x \sim x$$

$$\ln(1+x) \sim x$$

$$\arcsin x \sim x$$

$$\tan x \sim x$$

$$e^x - 1 \sim x$$

$$\arctan x \sim x$$

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$$

$$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$$

使用方法

- 乘除：等价无穷小可以替换
- 加减：等价无穷小**有条件地**替换

简例

$f(x) = x + 2x^2, g(x) = x - 3x^2$, 计算

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - g(x)}{x^2}$$

注意事项

- 乘除运算不会导致无穷小的主部消失；
- 加减运算可能会导致无穷小主部恰好抵消，则此时剩余的更高阶无穷小**不可忽略**.

例 (24Fall Midterm 7.)

设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + f(x)}{x^3} = 1$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sin^2 x}$

目录

- 1 函数极限
- 2 无穷小
- 3 函数的连续性**

思考

如果一个函数连续，那么它应该满足什么性质？

- 当自变量的值变动很小的时候？
- 函数值也应当只变动了一点

数学语言

- 自变量的值变动很小：原本为 x_0 ，变为 $x_0 + \delta$ ($\delta > 0$)
 \Rightarrow 对所有在区间 $(x_0, x_0 + \delta)$ 的值，都应有...
- 函数值只变动**很小一点**:

$$\forall \varepsilon > 0, |f(x_0 + \delta) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

- 若将 δ 的取值范围限制为 \mathbb{R} , 则得到 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

定义

设函数 f 在点 x_0 的某邻域内有定义, 若

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0),$$

则称函数 $f(x)$ 在 x_0 处**连续**, 称 x_0 是 $f(x)$ 的**连续点**; 否则称 $f(x)$ 在 x_0 处**间断**, 称 x_0 是 $f(x)$ 的**间断点**.

- 类似地, 将 $x \rightarrow x_0$ 修改为 x_0^+ 或 x_0^- 时, 我们分别得到右连续、左连续的定义。
- 因此, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$

例 (课本习题 2 补充题 5)

设函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上满足 $f(2x) = f(x)$, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ (有限值), 证明:

$$f(x) \equiv A.$$

例 (课本习题 2 补充题 6)

设在 \mathbb{R} 上定义的函数 $f(x)$ 满足:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad (x, y \in \mathbb{R}),$$

且在 $x=0$ 处连续. 证明: $f(x) \in C(\mathbb{R})$

间断点

- 第一类间断点：左、右极限都存在
 - 左右极限相等：可去间断点，表现为从完整的函数图像上挖去了一个点
 - 左右极限不相等：跳跃间断点，表现为函数图像上出现了不连续的函数值变化（且变化前后都为有限值）
- 第二类间断点：左、右极限不都存在
 - 其中之一为无穷：无穷间断点
 - 极限都不为无穷，但极限也不存在：振荡间断点（典例： $\sin \frac{1}{x}$ ）

学会求间断点的值、判断间断点的类型

投票

函数 $g(x) = x \sin \frac{1}{x}$ 在 $x = 0$ 处的间断点类型为?
可去间断点

连续函数的运算

给定两个在 x_0 处连续的函数 $f(x), g(x)$, c 是常数, 则:

- $f(x) + g(x), f(x) - g(x), cf(x), f(x) \cdot g(x)$ 在 x_0 处连续
- 当 $g(x)$ 在 x_0 处不为 0, $\frac{f(x)}{g(x)}$ 在 x_0 处连续

复合函数的连续性

与复合函数的极限类似，设函数 $\varphi(x)$ 在点 x_0 处连续，而函数 $f(x)$ 在点 $u_0 = \varphi(x_0)$ 处连续，则复合函数 $f \circ \varphi = f(\varphi(x))$ 在点 x_0 连续.