

高等数学 I 习题课 04

数列的极限

上海科技大学

2025.10.9

目录

1 杂项

2 数列的极限

- 定义
- 存在判别法

目录

1 杂项

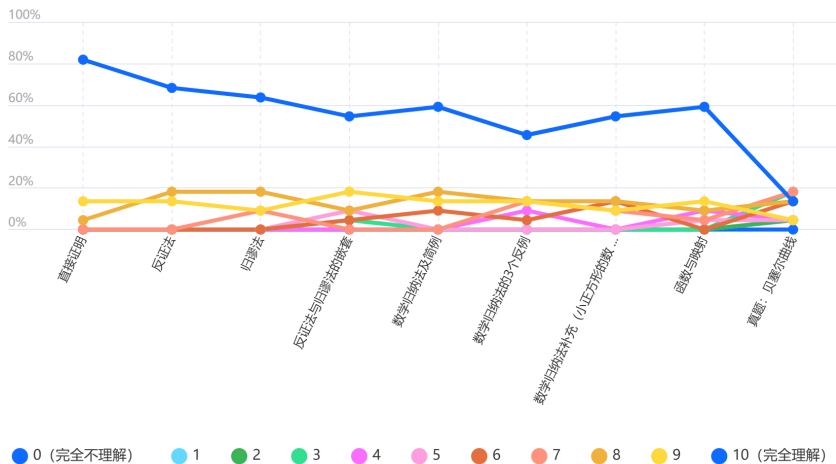
2 数列的极限

- 定义
- 存在判别法

及时总结

- 数学学习类似于一场魂类游戏
- 每一个版块，都有自己的难点，一个需要攻克 Boss
 - 在不断的尝试与失败中积累经验
 - 对过去的经验加以总结，重新出发
- 每一个板块结束后，找到自己的“赐福”，总结所学到的知识，进行“存档”
- 注意**难度曲线**

难度曲线



难度曲线

- 游戏：先难后易
 - 难点通过后，只要再一点就能成功
- 课业：先易后难
 - 从简单的小知识点积累经验与信心
 - 从大量的小板块中提炼核心以应对大的难点

关于习题课 02 反馈

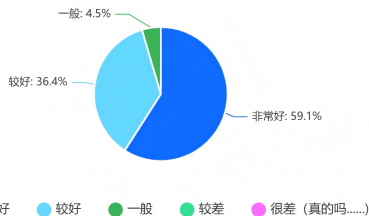


Figure: 课程质量

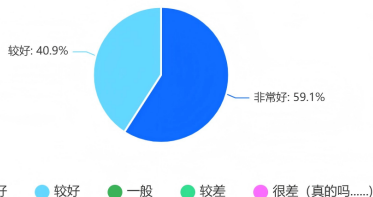


Figure: 课堂氛围

关于习题课 02 反馈

- PPT 空白多留一些方便记笔记
 - 可以使用笔记软件内的增加页面功能
- 覆盖面再广一些
 - 各人教学风格各有不同，个人倾向于增加内容深度而非广度

贝塞尔曲线

贝塞尔曲线是设计与工程上常用的参数曲线.

平面上一条 n 次贝塞尔曲线由 $n + 1$ 个互不相同的控制点

$$P_0(x_0, y_0), P_1(x_1, y_1), \cdots, P_n(x_n, y_n)$$

决定. 其参数方程 $B_{P_0 P_1 \dots P_n}(t)$ 可以用下面的递推式表达:

$$B_{P_0}(t) = P_0$$

$$B_{P_0 P_1 \dots P_n}(t) = (1 - t)B_{P_0 P_1 \dots P_{n-1}}(t) + tB_{P_1 \dots P_n}(t), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

贝塞尔曲线

- (1) 写出一条一次贝塞尔曲线的参数方程，并用文字准确地描述这条曲线.
- (2) 计算一条二次贝塞尔曲线对参数 t 的二阶导函数（用其三个控制点的坐标表示）.
- (3) 对三个不共线的控制点 P_0, P_1, P_2 ，论证二次贝塞尔曲线是一条抛物线（提示：可将上一问的结果与某物理场景对比）.
- (4) 证明

$$B_{P_0 P_1 \dots P_n}(t) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i P_i.$$

目录

1 杂项

2 数列的极限

- 定义
- 存在判别法

定义

对数列 $\{x_n\}$, 若存在数 $A, \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$, 使得当 $n > N$ 时,

$$|x_n - A| < \epsilon$$

则称数列 $\{x_n\}$ 的**极限**为 A , 或称数列 $\{x_n\}$ **收敛**, 且收敛于 A , 记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A \text{ 或者 } x_n \rightarrow A \quad (n \rightarrow \infty)$$

?

定义

对数列 $\{x_n\}$, 若存在数 $A, \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$, 使得当 $n > N$ 时,

$$|x_n - A| < \epsilon$$

则称数列 $\{x_n\}$ 的**极限**为 A , 或称数列 $\{x_n\}$ **收敛**, 且收敛于 A , 记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A \text{ 或者 } x_n \rightarrow A \quad (n \rightarrow \infty)$$

数列极限的定义, 究竟在描述什么?

Game

Alice 和 Bob 在玩一个与数列有关的游戏. 给定数列 $\{a_n\}$, 实数 L

- ① Alice 选定一个正数 ϵ
- ② Bob 选定一个自然数 N
- ③ Alice 选定一个大于 N 的自然数 n .

如果 $|a_n - L| < \epsilon$, 则 Bob 赢, 否则 Alice 赢.

- 思考: 双方会为了赢采取什么策略?

Game - Strategy

- Alice
 - 希望 $|a_n - L| \geq \epsilon$. 因此, ϵ 越小越有利于 Alice 取胜.
- Bob
 - 希望 $|a_n - L| < \epsilon$. 选择越大的 N 越能限制 Alice 选择 n 的范围, 进而防止 Alice 选出使得 $|a_n - L| < \epsilon$ 不成立的 n .
 - 因此, N 越大越有利于 Bob 获胜.

Game - 必胜策略

- 分别在什么条件下, Alice 和 Bob 各有必胜策略?
- 对于 Bob...
 - 对于**任意的** $\epsilon > 0$, 总能找到一个自然数 N , 使得对于所有的 $n > N$, $|a_n - L| < \epsilon$ 都成立.
 - $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, s.t. \forall n > N, |a_n - L| < \epsilon. \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$
- 对于 Alice...
 - 对于**任意的** N , 总能找到一个实数 $\epsilon > 0$, 使得存在一个 $n > N$, $|a_n - L| \geq \epsilon$ 成立.
 - $\forall N \in \mathbb{N}, \exists \epsilon > 0, s.t. \exists n > N, |a_n - L| \geq \epsilon.$
 - ?

Game - 必胜策略

- 分别在什么条件下, Alice 和 Bob 各有必胜策略?
- 对于 Bob...
 - 对于**任意的** $\epsilon > 0$, 总能找到一个自然数 N , 使得对于所有的 $n > N$, $|a_n - L| < \epsilon$ 都成立.
 - $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, s.t. \forall n > N, |a_n - L| < \epsilon. \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$
- 对于 Alice...
 - 存在一个实数 $\epsilon > 0$, 使得对于**任意的** N , 存在一个 $n > N$, $|a_n - L| \geq \epsilon$ 成立.
 - $\forall N \in \mathbb{N}, \exists \epsilon > 0, s.t. \exists n > N, |a_n - L| \geq \epsilon.$
 - $\exists \epsilon > 0, s.t. \forall N \in \mathbb{N}, \exists n > N, |a_n - L| \geq \epsilon. \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq L$

思考

因此，为何我们总要求一个足够小的 ϵ 和一个足够大的 N ？

- 我们希望 Alice 能够有更小的机会、甚至没有机会赢。
为了确保 Alice 无法获胜（即 Bob 有必胜策略， $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ ），
Bob 需要在任意 ϵ 的限制下，都能找到一个满足条件的 N .
- Alice 为了获胜一定会选取尽可能小的 ϵ .
- Bob 为了获胜一定会选取尽可能大的 N .

Back to math

剖析定义：

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{ s.t. } \forall n > N, |a_n - L| < \epsilon.$$

结尾

$$|a_n - L| < \epsilon \Leftrightarrow L - \epsilon < a_n < L + \epsilon \Leftrightarrow a_n \in (L - \epsilon, L + \epsilon)$$

“ a_n 与 L 的距离足够近” / “ a_n 落在 L 的邻域里”

条件

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{ s.t. } \forall n > N, \dots$$

- $\forall \epsilon > 0$: 给定一个任意小的范围 $(L - \epsilon, L + \epsilon)$
- $\exists N \in \mathbb{N}$: 存在数列中的某一项
- $\forall n > N, \dots$: 对此项以后的所有项, 都满足条件...

含义

给定一个任意小的范围 $(L - \epsilon, L + \epsilon)$ ，存在数列中的某一项 a_N ，使得对于这一项后的每一项 $a_{N+1}, a_{N+2}, \dots, a_n (n > N), \dots$ ，都能确保 a_n 的值落在这个任意小的范围中.

当 ϵ 足够小， a_n 的值几乎就落在 L 这个点上.

例 (HW2.T7)

用极限的定义**严格证明**:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + 7}{2n + 13} = \frac{3}{2}$$

放缩

对于数列的极限：

- 直接计算出的 N 通常恰好比满足条件的最小值小一些
- 需要的 N : 足够大即可
- 大胆放缩！

无穷大与无穷小

无穷小:

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{ s.t. } \forall n > N, |a_n - 0| < \epsilon.$$

无穷大:

$$\forall G > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{ s.t. } \forall n > N, |a_n| > G.$$

- 无穷大与无穷小都是**数列**，而不是一个数.

例 (HW2.T9)

用定义证明

$$a_n = \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2}$$

是无穷小.

放缩

对于数列的极限：

- 直接计算出的 N 通常恰好比满足条件的最小值小一些
- 需要的 N : 足够大即可
- 大胆放缩，但要注意不能将数列放成常数甚至无穷大

目录

1 杂项

2 数列的极限

- 定义
- 存在判别法

夹逼定理

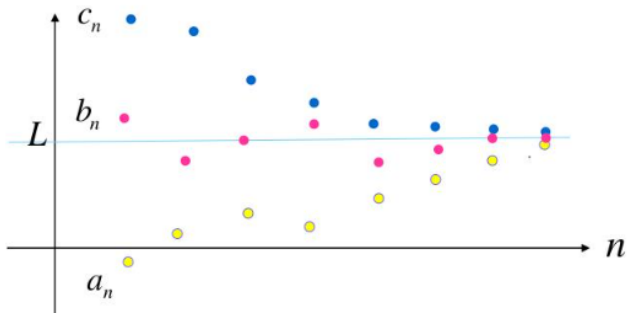
若对数列 $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$, $\exists N \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时,

$$z_n \leq x_n \leq y_n,$$

且 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = A$, 则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A.$$

夹逼定理



例

求

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2 + n + 1} + \frac{2}{n^2 + n + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n + n} \right)$$