

ShanghaiTech University

**GEMA1001 Calculus I**

**Fall 2023**

Midterm Exam

Answer composed by Yixuan Liu

November 16, 2025

# 1. (20 pts) 单项选择题

(a) (4') 已知函数  $f(x) = |x|$ ,  $g(x) = \operatorname{sgn}(x)$ , 则  $g(f(x)) = ( \quad )$

A.  $\begin{cases} -1 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$  B.  $\begin{cases} 1 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$  C.  $\begin{cases} -1 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0. \end{cases}$  D.  $\begin{cases} 1 & x \neq 0 \\ -1 & x = 0. \end{cases}$

(b) (4') 设函数  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上有定义, 且对  $\forall x \in \mathbb{R}$ , 均有  $x + \cos x \leq f(x) \leq x + 1$ , 则  $f(x)$  在点  $x = 0$  处 ( )

- A. 不存在极限. B. 有极限但不连续.  
C. 连续但不可导. D. 可导.

(c) (4') 若曲线  $C$  的参数方程为  $\begin{cases} x = 2 \sin t + \cos t, \\ y = \sin t - 2 \cos t, \end{cases}$  则  $C$  在  $t = 0$  处的切线方程为 ( )

A.  $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}.$  B.  $y = 2x - 4.$

C.  $y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}.$  D.  $y = -2x.$

(d) (4') 设函数  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上可导, 则 “ $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上有界” 是 “ $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$  存在” 的 ( )

- A. 充分但非必要条件. B. 必要但非充分条件.  
C. 充分且必要条件. D. 既非充分又非必要条件.

(e) (4') 设函数  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上连续,  $a_1 \in \mathbb{R}$ ,  $a_{n+1} = f(a_n)$ ,  $n \in \mathbb{Z}^+$ . 关于下列两个结论:

- (1) 若  $f(x)$  严格单调增加且有上界, 则数列  $\{a_n\}$  收敛;  
(2) 若  $f(x)$  严格单调减少且有界, 则数列  $\{a_n\}$  收敛;

正确的选项是 ( )

- A. (1) (2) 都正确 B. (1) (2) 都错误.  
C. (1) 正确 (2) 错误. D. (1) 错误 (2) 正确.

## 2. (20 pts) 填空题

- (a) (4') 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{n^2+1} + \frac{n+2}{n^2+2} + \cdots + \frac{n+n}{n^2+n} \right) =$  \_\_\_\_\_.
- (b) (4') 函数  $f(x) = \frac{\ln|x|}{x-2} \sin \frac{1}{x-1}$  的第二类间断点的个数是: \_\_\_\_\_.
- (c) (4') 已知函数  $f(x) = x^{\sin x}$ , 则  $df \Big|_{x=\frac{\pi}{2}} =$  \_\_\_\_\_.
- (d) (4') 若可微函数  $y = y(x)$  由方程  $y = -ye^x + 2e^y \sin x - 7x$  所确定, 则  $y'(0) =$  \_\_\_\_\_.
- (e) (4') 曲线  $x = y^4 + 2y^3 - 1$  在点  $(2, 1)$  处的法线方程为 \_\_\_\_\_.

## 3. (8 pts) 极限定义证明题

用极限定义证明:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2 - x + 1} = 2$ .

## 4. (16 pts) 极限计算

- (a) (8') 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\ln(1+x)}{x} \right)^{\frac{1}{e^x-1}}$ .
- (b) (8') 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 \in (0, 1]$ ,  $a_{n+1} = \frac{a_n + a_n^3}{2}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ . 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  存在并求之.

## 5. (16 pts) 导数计算

- (a) (8') 已知函数  $f(x) = \begin{cases} \ln(1+x^2), & x \leq 0, \\ x^2 \sin \frac{1}{x}, & x > 0, \end{cases}$  求  $f'(x)$ .
- (b) (8') 设函数  $f(x) = (x+1)^2 \ln x$ , 求  $f^{(n)}(2)$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ).

## 6. (10 pts) 解答题

- (a) (2') 写出  $(1+x)^\alpha$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ) 带佩亚诺余项的  $n$  阶麦克劳林公式.
- (b) (8') 求  $\sqrt{1+\sin x}$  带佩亚诺余项的 3 阶麦克劳林公式.

## 7. (10 pts) 证明题

已知函数  $g(x) = \begin{cases} \frac{\sin \pi x}{x(x-1)}, & x \neq 0, 1, \\ 2, & x = 0, 1. \end{cases}$  证明:

- (a) (4')  $x = 0$  和  $x = 1$  是  $g(x)$  的可去间断点.
- (b) (6') 若函数  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上可导, 且  $f(x)g(x)$  连续, 则存在  $\xi \in \mathbb{R}$ , 使得  $1 + \xi f'(\xi) = e^{-f(\xi)}$ .