

# 高等数学 I 习题课 05

## 数列与函数的极限

上海科技大学

2025.10.16

18:00 - 18:40

# 讨论

- 往年期中考卷的发布时间一般为考前 1-2 周，用以帮助进行自我检测、巩固练习.
- 提前在习题课讲解的优势有：
  - 逐步对考试祛魅，消除过度焦虑
  - 省去试卷评讲课，增加内容深度
- 缺点有：
  - 失去系统模拟完整考试流程机会
  - 若未先尝试解题就听讲解，会失去独立思考“是什么，为什么，怎么做”的机会  
(解决办法：每次讲解以前都提前查看 slides 并花 10-20 分钟先做一遍题目)

## 习题课 04 反馈

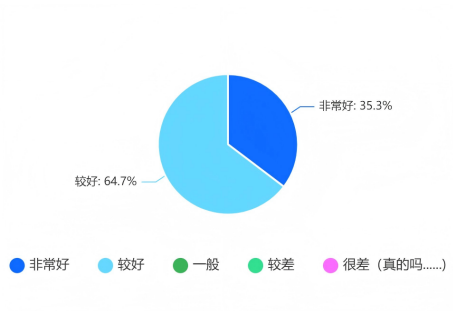


Figure: 课程质量

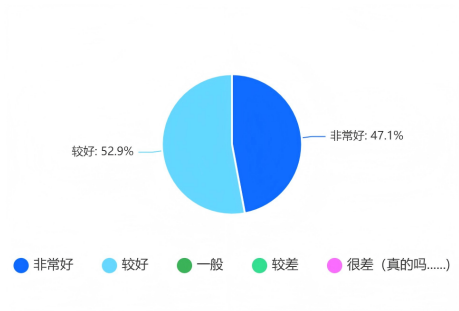


Figure: 课堂氛围

## 习题课 04 反馈

- 后续习题课会减少对于简单概念的讨论，重点关注复杂细节的处理、解决问题的思路
- 比起计算技巧会更注重于分析方法

# 目录

- ① 数列的极限
  - 存在判别法
  - 区间套定理
  
- ② 函数的极限

# 目录

- 1 数列的极限
  - 存在判别法
  - 区间套定理

- 2 函数的极限

# 夹逼定理

若对数列  $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ ,  $\exists N \in \mathbb{N}$ , 当  $n > N$  时,

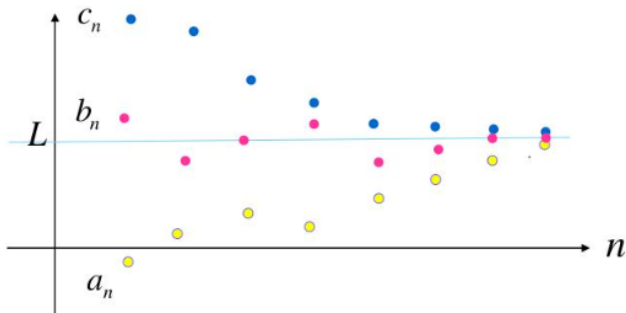
$$z_n \leq x_n \leq y_n,$$

且  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = A$ , 则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A.$$



# 夹逼定理



例

求

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2 + n + 1} + \frac{2}{n^2 + n + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n + n} \right)$$

# 反例

求

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \cdots + \frac{2n+1}{n^2} \right)$$

# 思路

- 欲求极限的数列形如  $\sum_{i=1}^n \frac{f(i)}{g(i)}$ ，且不便通分
- 使用极限的定义：需要先知道极限的值
- 使用极限的四则运算法则：无穷个无穷小相加的值是不确定的
- 因此，考虑将  $g(i)$  放缩，将数列转化为容易计算的  $\frac{1}{g(n)} \sum_{i=1}^n f(i)$ ，再对其求极限。如此，可分别得到原数列极限的上限与下限。
- 上下限相同  $\Rightarrow$  数列的极限 = 上限 = 下限

## 典例

求

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2 - 2}} - \frac{1}{\sqrt{n^2 - 3}} - \cdots - \frac{1}{\sqrt{n^2 - n}} \right)$$

# 目录

- 1 数列的极限
  - 存在判别法
  - 区间套定理

- 2 函数的极限

# 区间套定理

若  $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n], \forall n \in \mathbb{N}_+$ , 且有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0,$$

则存在唯一实数  $\xi, \forall n \in \mathbb{N}_+$ , 有  $a_n \leq \xi \leq b_n$ . 换言之,

$$\xi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n].$$

?

# 思考

实数是如何定义的？

- 有理数：两个互质的整数  $p, q$  之商
- 无理数：？



# $\pi$ 的表示

- 无理数都是“无限不循环小数”，例如  $\pi, e, \sqrt{2}$ .
- 尝试以小数形式表示  $\pi$ :

$$\pi = 3.14159265358 \dots$$

- 只要这个小数只被写出来了有限项，那么它就是一个有理数.
- 只有当  $\pi$  所对应的小数的所有项，无限项都被写出，它才表示  $\pi$ .

# 尝试

- 让我们尝试用有理数慢慢接近  $\pi$ .
- 只看整数部分,  $\pi \in [3, 4]$ .
- 我们可以怎样让这个区间以一个稳定的方式不断缩小?

# 尝试

- 让我们尝试用有理数慢慢接近  $\pi$ .
- 只看整数部分,  $\pi \in [3, 4]$ .
- 二分, 将  $[3, 4]$  这个区间分成  $[3, 3.5], [3.5, 4]$  两个部分.
  - 如果  $\pi$  落在左半边, 则继续对左半边进行细分; 右半边同理.
  - 如果  $\pi$  同时落在两个区间内, 那么它一定是两个区间所重合的那个数. 这个数是一个有理数 (为什么?)
- 如此, 第  $n$  次二分后得到的区间大小是  $2^{-n}$ .
- 当  $n \rightarrow \infty$ ? 区间的大小趋近于 0.

# 回到定义

若  $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n], \forall n \in \mathbb{N}_+$ , 且有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0,$$

则存在唯一实数  $\xi, \forall n \in \mathbb{N}_+$ , 有  $a_n \leq \xi \leq b_n$ .

- $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n], \forall n \in \mathbb{N}_+$ : 所取的区间长度不断缩小, 且新区间总是前一个区间的子集.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$ : 区间长度最终趋近于 0.

这样的**无穷个**区间套, 共同定义着一个**实数**.

# 证明

不难发现, 对于每一次取子区间, 总有:

$$a_n \leq a_{n+1} < \xi < b_{n+1} \leq b_n$$

- $\{a_n\}$  单调递增, 且有上界  $b_1$ ;
- $\{b_n\}$  单调递减, 且有下界  $a_1$ ;

设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0 \Leftrightarrow A = B$

夹逼定理  $a_n \leq \xi \leq b_n$  得证.  $\square$

# 思考：0.9 和 1 相等吗？

- 利用区间套定理
- $[a_1, b_1] = [0, 1]$
- 此后不断将  $a_n$  增大至 0.9 的小数点后  $n$  位
- $a_n = 1 - \frac{1}{10^n}, b_n = 1$
- 所逼近的数  $0.\dot{9} = 1$ .

# 思考：0.9 和 1 相等吗？

直观理解：

- 0.9 等价于  $\lim_{n \rightarrow \infty} 0.\underbrace{999 \dots}_{n \uparrow 9} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{10^n}) = 1$

# 目录

- 1 数列的极限
  - 存在判别法
  - 区间套定理
- 2 函数的极限



# 思考

当我们讨论“极限”和“趋近于”时，我们在描述什么？

## 引

从数列的极限中，我们知道：

- 对“无限趋近”、“极限”，可以使用  $\epsilon - N$  语言进行精确的表述.
- 含义：不论给定任意小的区间  $(A - \epsilon, A + \epsilon)$ ，都能找到数列中的某一项  $a_N$ ，使得这一项之后的所有项都落在这个区间内. 当  $\epsilon$  足够小， $a_n$  的值就几乎落在  $A$  这个点上.
- 核心是什么？
- 1. 任意小的区间； 2. 能够使所有后续项落在该区间的  $N$ .

# 从 $n \rightarrow +\infty$ 开始

- ① 任意小的区间:  $\forall \epsilon > 0, \dots, |f(x) - A| < \epsilon$
- ② 能使所有后续函数值都满足该条件的  $X$ :  
 $\exists X \in D, \text{s.t. } \forall x > X, \dots$

连接起来:

$$\forall \epsilon > 0, \exists X \in D, \text{ s.t. } \forall x > X, |f(x) - A| < \epsilon$$

推广到  $n \rightarrow -\infty$ 

$$+\infty : \quad \forall \epsilon > 0, \exists X \in D, \text{ s.t. } \forall x > X, |f(x) - A| < \epsilon$$

$$-\infty : \quad \forall \epsilon > 0, \exists X \in D, \text{ s.t. } \forall x < X, |f(x) - A| < \epsilon$$

# 推广到 $n \rightarrow \infty$

- 极限有唯一性.

若  $\lim_{x \rightarrow \infty}$  存在, 则极限应当同时存在于  $+\infty$  和  $-\infty$  处且相等.

- 为什么在数列极限中, 只有  $n \rightarrow \infty$  而没有特别标明  $+\infty$ ?
- 要求在正负无穷处取到同一极限值, 那么值域应该是?

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

设函数  $f(x)$  在  $(-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$  ( $a > 0$ ) 内有定义, 若存在实数  $A$ ,  $\forall \epsilon > 0$ ,  $\exists X > 0$  ( $X > a$ ), 使得当  $|x| > X$  时,

$$|f(x) - A| < \epsilon,$$

则称当  $x$  趋向于无穷时, 函数  $f(x)$  的极限为  $A$  或  $f(x)$  收敛于  $A$ , 记为

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow \infty) \quad \text{或} \quad f(\infty) = A$$