

# 高等数学 I 习题课 02

## 数学证明

上海科技大学

2025.9.25

18:00 - 18:20

# 目录

- 1 简介
- 2 直接证明 / Direct Proofs
- 3 间接证明 / Indirect Proofs
- 4 数学归纳法 / Induction
- 5 函数

# 目录

- 1 简介
- 2 直接证明 / Direct Proofs
- 3 间接证明 / Indirect Proofs
- 4 数学归纳法 / Induction
- 5 函数

# Late Welcome

- 高数（乃至几乎所有其他课程）的节奏都很快...
- 调整好自己的节奏，及时向他人寻求帮助
- **Participate, Ask, Try.**

*“Better late than never!”*

# 关于本人

- 刘燚轩 / Yixuan Liu
  - 信息学院 / CS - Computer Graphics - Rendering / 大三
  - 联系方式: liuyx2023@shanghaitech.edu.cn QQ:2987221272
  - Office Hour by appointment
  - 欢迎发邮件/QQ 约 Office Hour, 8 小时内没回复就是没看见

# 习题课?

- 作为高等数学 I 课程的一部分
- Quiz 将利用习题课时间进行，会提前通知
- 讲以下内容：
  - 作业，Quiz
  - 课堂知识回顾与拓展
  - etc.
- 习题课是对课堂、课本内容的**补充**而非重复



# 目录

- 1 简介
- 2 直接证明 / Direct Proofs**
- 3 间接证明 / Indirect Proofs
- 4 数学归纳法 / Induction
- 5 函数



# 简例

定理：如果  $n$  是偶数，那么  $n^2$  也是偶数.

证明：令  $n$  为偶数，则其可写为  $n = 2k$ ，其中  $k$  为整数.

则  $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ .

$2k^2$  是整数，故存在一个整数  $m = 2k^2$ ，使得  $n^2 = 2m$ .

因此  $n^2$  是偶数.  $\square$

# 直接证明法

- 为了证明命题  $P \Rightarrow Q$ ，我们：
  - 假设  $P$  成立
  - 运用逻辑推理从  $P$  推导得到  $Q$
  - 成功了！
- 但是一定只能直接证明  $P \Rightarrow Q$  吗？

# 目录

- 1 简介
- 2 直接证明 / Direct Proofs
- 3 间接证明 / Indirect Proofs**
- 4 数学归纳法 / Induction
- 5 函数

# 等价命题

- 考虑  $P \Rightarrow Q$  的等价命题:

$$P \Rightarrow Q = \neg P \vee Q = \neg(\neg Q) \vee (\neg P) = \neg Q \Rightarrow \neg P$$

- 因此, 证明  $\neg Q \Rightarrow \neg P$  也可证明欲证命题.

# 简例

定理：如果  $n^2$  是偶数，那么  $n$  也是偶数.

证明：反证法. 尝试证明：若  $n$  是奇数，那么  $n^2$  也是奇数.

$$n = 2k + 1, k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{故 } n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

$$2k^2 + 2k \in \mathbb{Z}, \text{ 故 } \exists m \in \mathbb{Z}, m = 2k^2 + 2k, \text{ 使得 } n^2 = 2m + 1.$$

因此  $n^2$  是奇数.  $\square$

# 反证法

- ① 声明该证明使用反证法
- ② 写出逆否命题
- ③ 证明逆否命题

思考：可否在反证法里嵌套反证法？

## 典例： $\sqrt{2}$ 是无理数

假设  $\sqrt{2}$  是有理数，则其可以表示为两个互质的正整数  $p, q$  之比

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Rightarrow p^2 = 2q^2$$

则  $p^2$  是偶数（因为  $q^2$  是整数），因此  $p$  也是偶数（反证法）。因此可有  $p = 2k, k \in \mathbb{Z}$ 。代回，有  $4k^2 = 2q^2$ ，则  $q$  也是偶数。

$p, q$  均为偶数，与最初的假设**矛盾**，故  $\sqrt{2}$  是无理数。□

# 反证法的分类

- ① 证明逆否命题法 *Proof by Contrapositive*
  - 证明与原命题完全等价的逆否命题，从而证明原命题
- ② 归谬法 *Proof by Contradiction*
  - 假设命题不成立
  - 通过推理得到矛盾
  - $\Rightarrow$  最初的假设错误，则欲证命题成立



# 目录

- 1 简介
- 2 直接证明 / Direct Proofs
- 3 间接证明 / Indirect Proofs
- 4 数学归纳法 / Induction**
- 5 函数

# 科学归纳与数学归纳

- 科学归纳法：

→ 进行一系列实验，找出能解释所有结果的规律.

即使所有数据都正确，**结论也可能错误**.

- 数学归纳法：

→ 从一系列被假定为真的陈述开始，运用逻辑推理证明某个结论必然成立.

若所有初始假设均正确，则结论**必然正确**.

# 数学归纳法

- 一种证明技巧

- 基础步骤：证明命题在某个初始值（常为  $n = 1$  或  $n = 0$ ）成立
- 归纳假设： $\forall k \in \mathbb{D}$ ，假设命题在  $n = k$  时成立
- 归纳步骤：证明命题在  $n = k + 1$  时成立

# 数学归纳法

- 多米诺骨牌



# 数学归纳法

- ① 确保骨牌之间架设合理（前一张倒下能够使得后一张也倒下）
- ② 推倒第一张骨牌

⇒ 所有骨牌都可倒下

在实际证明中，我们常常将这两个步骤顺序进行调换.

# 流程

- 对于一个命题  $P(n)$ ，想要证明其对所有 **(有限的)** 自然数  $n$  均成立  
(思考：为什么一定要是有限的?)
- 分别证明：
  - ①  $P(0)$  或  $P(1)$  成立 (即初始情况成立)
  - ② 假设  $P(k)$  成立，则  $P(k) \Rightarrow P(k+1)$

## 例

## • 证明:

对于所有的  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\sum_{i=1}^n n^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

# 思考

以这样的方式归纳，一定能得到正确的结论吗？



# 反例 1: 所有的马的颜色都相同

命题：一个人观察到的前  $n$  匹马都是同一个颜色的

- 基本情况：1 匹马 *Trivial*
- 归纳假设：假设有  $n$  匹马都是同一个颜色
- 归纳证明：对任意  $n + 1$  匹马：
  - 排除第 1 匹马，剩余的  $n$  匹马都是同一个颜色
  - 排除第  $n + 1$  匹马，剩余的  $n$  匹马都是同一个颜色

⇒ 所有马都是同一个颜色

- 错在哪里？

# 反例 1: 所有的马的颜色都相同

命题：一个人观察到的前  $n$  匹马都是同一个颜色的

- 基本情况：1 匹马 *Trivial*
- 归纳假设：假设有  $n$  匹马都是同一个颜色
- 归纳证明：对任意  $n + 1$  匹马：
  - 排除第 1 匹马，剩余的  $n$  匹马都是同一个颜色
  - 排除第  $n + 1$  匹马，剩余的  $n$  匹马都是同一个颜色

⇒ 所有马都是同一个颜色

- 从 1 匹马至 2 匹马的推论不成立

## 反例 2：调和级数是收敛的

- 调和级数： $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  （发散性证明：第零章讲义 p8）
- 错证：
  - 初始情况： $n = 1$   $S = 1$ ，极限存在
  - 假设  $n = k$  时，调和级数的部分和  $(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n})$  极限存在
  - 那么这个部分和再加  $\frac{1}{n+1}$  的极限一定也存在
  - 因此对于所有的  $n$ ，调和级数的值都确定且不为无穷. 收敛！
- 错在哪里？

## 反例 2

- 调和级数:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  (发散性证明: 第零章讲义 p8)
- 错证:
  - 初始情况:  $n = 1$   $S = 1$ , 极限存在
  - 假设  $n = k$  时, 调和级数的部分和  $(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n})$  极限存在
  - 那么这个部分和再加  $\frac{1}{n+1}$  的极限一定也存在
  - 因此对于所有的  $n$ , 调和级数的值都确定且不为无穷. 收敛!
- 使用数学归纳法证明一个命题在  $n = \infty$  处的性质时, 需要额外证明该命题在无穷处不失效.

### 反例 3: 数列 $a_n = 2^n$ 的前 $n$ 项和是 $2^{n+1}$

- 假设当  $n = k$  时,  $\sum_{n=1}^k 2^n = 2^{n+1}$  即命题成立.
- 当  $n = k + 1$  时, 有:

$$\sum_{n=1}^{k+1} 2^n = \sum_{n=1}^k 2^n + 2^{n+1} = 2^{n+1} + 2^{n+1} = 2^{n+2}. \square$$

错在哪里?

### 反例 3: 数列 $a_n = 2^n$ 的前 $n$ 项和是 $2^{n+1}$

- 假设当  $n = k$  时,  $\sum_{n=1}^k 2^n = 2^{n+1}$  即命题成立.
- 当  $n = k + 1$  时, 有:

$$\sum_{n=1}^{k+1} 2^n = \sum_{n=1}^k 2^n + 2^{n+1} = 2^{n+1} + 2^{n+1} = 2^{n+2}. \square$$

- 仅进行了归纳证明, 没有对基本情况的正确性进行证明.

# 总结

- 数学归纳法的一般步骤：
  - 证明命题  $P(k_0)$ ，即初值成立
  - 证明若  $P(k)$  成立，则  $P(k+1)$  成立  
... 一定只能是  $k+1$  吗？

## 例

试讨论一个正方形可以被恰好切割成多少个小正方形.



# 例

试讨论一个正方形可以被恰好切割成多少个小正方形.

- 可以切割成的个数: 1, 4, 6, 7, 8
- 不能切割成的个数: 2, 3, 5
- 还要继续数吗?

# 例

试讨论一个正方形可以被恰好切割成多少个小正方形.

- 可以切割成的个数: 1, 4, 6, 7, 8
- 不能切割成的个数: 2, 3, 5
- 每个正方形都可以被切分成四个完全相等的小正方形, 数量  $+3$

## 例

$\forall n \geq 6$ , 可以将一个正方形恰好切分成  $n$  个小正方形.

- 基础情况: ?

## 例

$\forall n \geq 6$ , 可以将一个正方形恰好切分成  $n$  个小正方形.

- 基础情况:  $n = 6, 7, 8$  时, 可以将正方形切割成  $n$  个小正方形.
- 假设  $n = k, k \geq 6$  时命题成立; 此时正方形被切分成  $k$  个小正方形. 任意一个小正方形都可以进一步被切分成 4 个小正方形, 故  $n = k + 3$  时命题也成立.  $\square$

# 总结 (新)

- 数学归纳法的一般步骤：
  - 证明命题  $P(k_0)$ ，即初值成立
  - 证明若  $P(k)$  成立，则  $P(k+1)$  成立
- 也可以：
  - 证明一系列命题  $P(k_0), P(k_0+1), \dots, P(k_0+(c-1))$  成立
  - 证明若  $P(k)$  成立，则  $P(k+c)$  成立
  - 如果令  $c=1$ ?

# 目录

- 1 简介
- 2 直接证明 / Direct Proofs
- 3 间接证明 / Indirect Proofs
- 4 数学归纳法 / Induction
- 5 函数**

# 定义 (高中)

一般地, 设  $A, B$  是非空的实数集, 如果对于集合  $A$  中的任意一个数  $x$ , 按照某种确定的对应关系  $f$ , 在集合  $B$  中都有唯一确定的数  $y$  和它对应, 那么就称  $f: A \rightarrow B$  为从集合  $A$  到集合  $B$  的一个函数 (function), 记作

$$y = f(x), x \in A.$$

其中,  $x$  叫做自变量,  $x$  的取值范围  $A$  叫做函数的定义域 (domain); 与  $x$  的值相对应的  $y$  值叫做函数值, 函数值的集合  $\{f(x)|x \in A\}$  叫做函数的值域 (range) .

# 思考

- $A, B$  只能是实数集吗？能不能是别的东西？
- 因此， $x$  只能是一个数吗？可不可以是点，线，（一个苹果）？
- $y$  一定要是一个数吗？



## 例

- $A = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}, B = \mathbb{R}, f(x, y) = x + y$
- $A = \mathbb{R}, B = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}, f(x) = (x, x)$

# 映射

设  $A, B$  是两个非空集合, 若对  $A$  中的任一元素  $x$ , 依照某种规律或法则  $f$ , 恒有  $B$  中唯一确定的元素  $y$  与之对应, 则称此对应规律或法则  $f$  为一个从  $A$  到  $B$  的映射. 记作:

$$f: A \rightarrow B \text{ 或 } f: x \mapsto y$$

我们也有  $y = f(x)$ .

不难看出, 函数是特殊的映射.

## 真题：贝塞尔曲线

贝塞尔曲线是设计与工程上常用的参数曲线.

平面上一条  $n$  次贝塞尔曲线由  $n + 1$  个互不相同的控制点

$$P_0(x_0, y_0), P_1(x_1, y_1), \cdots, P_n(x_n, y_n)$$

决定. 其参数方程  $B_{P_0 P_1 \cdots P_n}(t)$  可以用下面的递推式表达:

$$B_{P_0}(t) = P_0, B_{P_0 P_1 \cdots P_n}(t) = (1-t)B_{P_0 P_1 \cdots P_{n-1}}(t) + tB_{P_1 \cdots P_n}(t), 0 \leq t \leq 1.$$

## 真题：贝塞尔曲线

- (1) 写出一条一次贝塞尔曲线的参数方程，并用文字准确地描述这条曲线.
- (2) 计算一条二次贝塞尔曲线对参数  $t$  的二阶导函数（用其三个控制点的坐标表示）.
- (3) 对三个不共线的控制点  $P_0, P_1, P_2$ ，论证二次贝塞尔曲线是一条抛物线（提示：可将上一问的结果与某物理场景对比）.
- (4) 证明

$$B_{P_0 P_1 \dots P_n}(t) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i P_i.$$

# Office Hour