

高等数学 I 习题课 06

函数的极限，等价无穷小

上海科技大学

2025.10.23

习题课 05 反馈

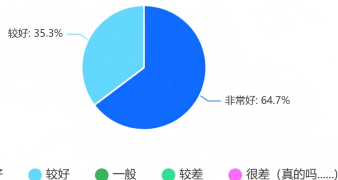


Figure: 课程质量

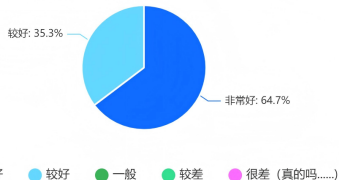


Figure: 课堂氛围

Quiz1 T4

考察函数：

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}; \\ n, & |x| = m/n \in \mathbb{Q} (m, n \text{ 为互质的正整数}). \end{cases}$$

证明：在任何开区间 $I \subset (0, 1)$ 上， f 的取值范围 $R = \{f(x) \mid x \in I\}$ 无上界.

目录

- 1 函数的极限
- 2 重要函数极限
- 3 无穷小

目录

- 1 函数的极限
- 2 重要函数极限
- 3 无穷小

定义

设 $f(x)$ 在点 a 的一个去心邻域 $\dot{U}(a)$ 内有定义, 若存在实数 A ,
 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得当 $0 < |x - a| < \delta$ 时,

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

则称当 x 趋向于点 a 时, 函数 $f(x)$ 的极限为 A , 或 $f(x)$ 收敛于 A ,
记为

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \quad \text{或者} \quad f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow a)$$

分析

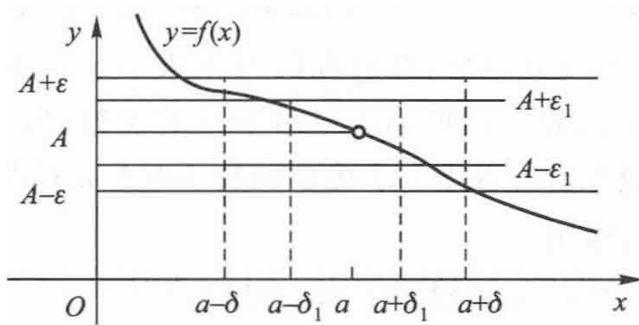
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ s.t. } \forall x \mid 0 < |x - a| < \delta, |f(x) - A| < \varepsilon$$

- $\forall \varepsilon > 0, \dots, |f(x) - A| < \varepsilon$: 给定一个任意小的范围 $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$
- $\exists \delta > 0, 0 < |x - a| < \delta$: 对定义域的一部分 $(a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$
- $|f(x) - A| < \varepsilon$: 该范围内的所有函数值均落在这个范围中

练习 (1). 尝试写出函数在 a 点的左极限、右极限等于 A 的定义.

教材习题 2 T23

几何理解



注意事项

- 函数在某点的极限的 $\varepsilon - \delta$ 定义中, 定义域是 a 的**去心邻域**
- 因此, 函数在 $x = a$ 点是否有定义**不重要**, 此处函数值的情况可以是:
 - 无定义或不存在
 - 有定义 (思考: 函数值在此处有定义是否影响极限?)

思考

考察函数

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

在 0 处的极限 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

讨论

当我们谈论函数在**某点**的极限时，我们讨论的范围是？

- 仅包含该点的去心邻域
- 函数在某处的极限，与该点的函数值无关

例（教材例 2.25）

证明：

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{3(x - 1)} = \frac{2}{3}$$

Try it yourself! (23 Fall, ch.2 Quiz)

用 $\varepsilon - \delta$ 语言证明:

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$$

放缩

- 在使用定义证明极限值的时候，我们要尤其注意适时、适度的放缩.
- 使用如下方法：
 - 某些函数的**有界性**
 - 取部分上界，留下 $|x - a|$ 项

例

用极限的定义证明函数

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 1, & x < 0 \\ x^2 + 1, & x > 0 \end{cases}$$

在 $x = 0$ 处的极限不存在.

定理

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ 的充分必要条件为

$$f(a-0) = A \quad \text{且} \quad f(a+0) = A$$

例 (课本例 2.36)

设函数

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} \sin \frac{1}{x}, & x > 0, \\ x^2 + a, & x \leq 0. \end{cases}$$

求常数 a , 使得 $f(x)$ 在 $x \rightarrow 0$ 时极限存在.

海涅定理: 数列与函数极限的联系

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ 的充分必要条件为: 对任一满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 且 $x_n \neq a$ 的数列 $\{x_n\}$ 均有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A.$$

(推荐学有余力的同学尝试证明这个定理)

例

求：

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$$

极限的性质

- 唯一性
- (局部) 有界性
- (局部) 保序性 \Rightarrow (局部) 保号性
- 夹逼定理
- **复合函数极限运算定理**

复合函数极限运算定理

若 $\lim_{u \rightarrow b} f(u) = A$, $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = b$, 且当 $x \in \dot{U}(a)$ 时, $\varphi(x) \neq b$, 则

$$\lim_{x \rightarrow a} f[\varphi(x)] = A.$$

意味着我们可以进行如下调换

$$\lim_{x \rightarrow a} f[\varphi(x)] \stackrel{u=\varphi(x)}{=} \lim_{u \rightarrow b} f(u) = A.$$

思考：为什么一定要求 $\varphi(x) \neq b$?

思考

函数 $f(x), g(x)$ 满足

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}, \quad g(x) = 0$$

求 $\lim_{x \rightarrow 0} f(g(x))$

目录

- 1 函数的极限
- 2 重要函数极限**
- 3 无穷小

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

课本 P75:

首先证明一个不等式: $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad \left(0 < |x| < \frac{\pi}{2}\right)$.

当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, x 可用单位圆上的弧长 AB (或弧 AB 对应的圆心角) 表示, 如

图 2.7. 显然有

$\triangle OAB$ 的面积 $<$ 扇形 OAB 的面积 $<$ $\triangle OAC$ 的面积,

即有

$$\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \tan x,$$

从而得到

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

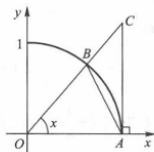


图 2.7

注意上式所示的各项均为偶函数, 故当 $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ 时, 此不等式也成立.

此方法涉及循环论证 (将在第三章讲到)

例

求

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\sqrt{n} \left(\tan\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) - \sin\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) \right)$$

e

与数列极限中 e 的定义类似:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

进行 $t = 1/x$ 代换:

$$\lim_{t \rightarrow 0} (1 + t)^{\frac{1}{t}} = e$$

注意:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = 1$$

例

求

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin x}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x-a}}$$

目录

- 1 函数的极限
- 2 重要函数极限
- 3 无穷小**

定义

若 $x \rightarrow a$ 时, $f(x) \rightarrow 0, g(x) \rightarrow 0$, 考虑 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R}$:

- $l = 0 \Leftrightarrow$

$x \rightarrow a$ 时, $f(x)$ 是比 $g(x)$ 高阶的无穷小, 记作 $f(x) = o(g(x))$

- $l \neq 0 \Leftrightarrow$

$x \rightarrow a$ 时, $f(x)$ 是与 $g(x)$ 同阶的无穷小, 记作 $f(x) = O(g(x))$.

若 $l = 1$ 则称 $x \rightarrow a$ 时, $f(x)$ 与 $g(x)$ 是等价无穷小, $f(x) \sim g(x)$.

定义

若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, 且存在常数 $c \neq 0, k > 0$, 使得

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{(x-a)^k} = c,$$

则称 $x \rightarrow a$ 时, $f(x)$ 是**标准无穷小** $x-a$ 的 k 阶无穷小, 简称 $f(x)$ 是 k 阶无穷小, $c(x-a)^k$ 是 $f(x)$ 的主部

使用方法

- 乘除：等价无穷小可以替换
- 加减：等价无穷小**有条件地**替换

简例

$f(x) = x + 2x^2, g(x) = x - 3x^2$, 计算

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - g(x)}{x^2}$$

注意事项

- 乘除运算不会导致无穷小的主部消失；
- 加减运算可能会导致无穷小主部恰好抵消，则此时剩余的更高阶无穷小**不可忽略**.

例 (24Fall Midterm 7.)

设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + f(x)}{x^3} = 1$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sin^2 x}$