高等数学 I　习题课 09

导数，期中复习

上海科技大学

2025.11.13

习题课 08 反馈

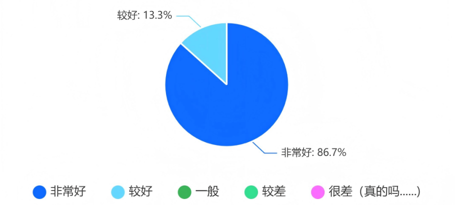

Figure: 课程质量

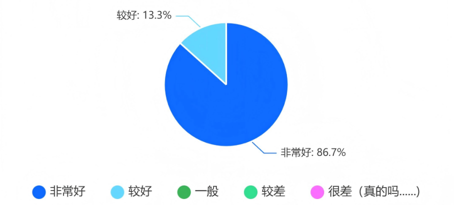

Figure: 课堂氛围

目录

目录

思考

考虑如何数值拟合 $e^{0.01}$ 的值，误差不超过 0.01.

拟合方法

- 导数：函数在某点附近的最佳线性拟合
- **函数可导**：在足够小的范围之内，函数可以近似地被视为直线
  $\Rightarrow$ 使用导数计算出函数的近似值，进行**非线性函数的局部线性化**

微分

例 3.13

- 一个半径为 r 的金属球，因温度改变，半径变为 $r+\Delta r$，求体积的改变量

$$\begin{aligned}\Delta V &= \frac{4}{3}\pi[(r+\Delta r)^3 - r^3] = 4\pi r^2 \Delta r + 4\pi r(\Delta r)^2 + \frac{4}{3}\pi(\Delta r)^3 \\ &= 4\pi r^2 \Delta r + o(\Delta r)\end{aligned}$$

- ΔV 由关于 Δr 的线性函数与 Δr 的高阶无穷小（因为 $|\Delta r|$ 很小）组成. 后者在 Δr 足够小时可以忽略不计

微分

一般地，若函数 $y = f(x)$ 可导，且在点 x_0 附近，自变量发生了一段微小改变 Δx, 则因变量 y 随之发生的改变满足关系

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$$

当 $\Delta x \to 0$，$o(\Delta x)$ 可忽略不计，此时我们可以使用 $f'(x_0)\Delta x$ 来估计 Δy 的值，且误差不大于 Δx.
(如何进一步增加精度？)

一阶微分形式不变性

对于可微函数 $y=f(x)$，记其微分为 $\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$. 将 x 换成任一可微函数 $\varphi(x)$，公式仍成立：

$$\mathrm{d}y=f'(\varphi(x))\mathrm{d}\varphi(x)$$

目录

导数的多种记号

Leibniz	$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$	(Recommended)
Lagrange	$f'(x)$	
Newton	$\dot{y}$	

链式法则

设函数 $u=\varphi(x)$ 在 x 处可导，函数 $y=f(u)$ 在对应 x 的点 u 处可导，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 x 处可导，且

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}y)\cdot(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u)$$

或

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'[\varphi(x)]\varphi'(x)$$

链式法则

求函数

$$f(x) = \sin(x^2)$$

的导函数.

对数求导法

求函数

$$y = \frac{e^{2x}\sin^4 x}{\sqrt[3]{2x-1}(4x+3)^2}$$

的导函数.

$\Rightarrow$ 对数求导法不仅可以用于指数的求导，也可以用于复杂因式的求导

反函数求导

考虑两个函数的图像关系：

$$y = x^2 (x > 0), y = \sqrt{x}$$

互为反函数的两个函数，图像关于 $y = x$ 对称.

$\Rightarrow$ 对应点的切线斜率互为倒数

反函数求导

函数 $x=f(y)$ 时区间 I 上的严格单调可导函数，且 $f'(y)\neq 0$，则它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 在对应点 x 处可导，且

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}.$$

证明：考虑复合函数 $f^{-1}(f(x))$ 的导函数.

例

求函数 $y = \arcsin x$ 的导数.

目录

从相关变化率开始...

一把 5 米长的梯子直靠在墙壁上，底端距离墙面 0 米. 现在梯子在墙上的一端以 $1\mathrm{m/s}$ 的速度下滑，求梯子底端速度随时间变化的关系式. (不允许使用速度关联)

思路

存在方程 $x(t)^2 + y(t)^2 = 5.$

1. 既然 $x > 0, y > 0$，不妨记 $x(t) = \sqrt{5 - y(t)^2}$，再使用链式法则
2. 对等式两边求导：
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x(t)^2 + y(t)^2) = 0$$
"当 x 和 y 分别都变动一点的时候，函数值会变动多少？"$\Rightarrow 0.$
那么，Δx 与 Δy 必然满足如下关系...

$$2x\Delta x + 2y\Delta y = 0.$$

隐函数求导

- 隐函数表征了多个变量之间的固定关系. 不论这个关系如何改变，隐函数的等式始终成立.
  $\Rightarrow$ 将隐函数化为 $f(x,y)=0$ 的形式，则左边函数的变化率始终为 0.
- 对 $f(x,y)$ 求微分，即可得到 $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y$ 之间的关系
- (这一部分的知识在学习了第 8 章-多元微分学后会有更深刻的理解...现在先接受它!)

参数方程求导

对于参数方程决定的函数

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases},$$

若 $\varphi(t), \psi(t)$ 可导，则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y\right) \Big/ \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x\right)$$

又一次回到相关变化率

一把 5 米长的梯子直靠在墙壁上，底端距离墙面 0 米. 现在梯子在墙上的一端以 $1\mathrm{m/s}$ 的速度下滑，求梯子底端速度随时间变化的关系式.

参数方程求导

再一次考虑

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \xi(t) \end{cases},$$

“当 t 变动一点的时候，x 和 y 分别会变动多少?”

目录

定理

设函数 $u(x), v(x)$ 在区间 I 上 n 阶可导，$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$，则：

- $\alpha u(x) + \beta v(x), u(x)v(x)$ 在 I 上均 n 阶可导
- $[\alpha u(x) + \beta v(x)]^{(n)} = \alpha u^{(n)}(x) + \beta v^{(n)}(x)$
- $[u(x)v(x)]^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)}(x) v^{(n-k)}(x)$

证明：数学归纳法