高等数学 I　习题课 10

期中复习

上海科技大学

2025.11.18

目录

目录

集合

- 集合 (set) 指一些**互不相同**的事物构成的整体.
  一个集合的成员称为这个集合的元素 (element).
  一个没有任何成员的集合称为空集，记为 $\emptyset$.
- 为了定义一个集合，可以采用枚举法或描述法

逻辑量词

- $\forall$: 全称量词 (for each)
- $\exists$: 存在量词 (exists)
- 思考：$\exists x, \forall y, P(x, y)$ 与 $\forall y, \exists x, P(x, y)$ 是否相同?

命题逻辑

- 命题的否定 $(\neg)$，与 $(\wedge)$，或 $(\vee)$，推出 $(\Rightarrow)$，等价 $(\Leftrightarrow)$
- 对于一个命题 $P \Rightarrow Q$:
  - 逆命题 $Q \Rightarrow P$
  - 否命题 $\neg P \Rightarrow \neg Q$ （与 $\neg(P \Rightarrow Q)$ 比较）
  - **逆否命题** $\neg Q \Rightarrow \neg P$ *Contrapositive*
- $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$. 为什么?
- 为什么不推荐用 $\because$ 和 $\therefore$?

等价关系

- $P \Leftrightarrow Q$ 等价于 $P \Rightarrow Q \land Q \Rightarrow P$
- 当 P 成立，有 $Q \cdots P \Rightarrow Q$
- P 成立，仅当 Q 成立 $\cdots Q \Rightarrow P$
- 证明**当且仅当**类命题时，一定既要证明充分性，也要证明必要性
- More in SI120 / Discrete Mathematics ...

反证法

- 证明逆否命题法 *Proof by contrapositive*
  - 通过证明 $\neg Q \Rightarrow \neg P$ 来证明 $P \Rightarrow Q$
- 归谬法 *Proof by contradiction*
  - 作出假设，通过数学推断得到矛盾

数学归纳法

为了证明一个命题 $P(n)$ 对**有限的**整数 $n \geq n_0$ 成立，只需证明：

- $P(n_0)$ 成立　　(大多数时候，$n_0 = 0$ 或 1)
- $\forall k \geq n_0, P(k) \Rightarrow P(k+1)$

理解：多米诺骨牌

复习：习题课 02

定义（高中）

一般地，设 A, B 是非空的**实数集**，如果对于集合 A 中的任意一个**数** x，按照某种确定的对应关系 f，在集合 B 中都有唯一确定的**数** y 和它对应，那么就称 $f: A \to B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个**函数**（function），记作

$$y = f(x), x \in A.$$

其中，x 叫做自变量，x 的取值范围 A 叫做函数的定义域（domain）；与 x 的值相对应的 y 值叫做函数值，函数值的集合 $\{f(x)|x \in A\}$ 叫做函数的值域（range）.

映射

设 A, B 是两个非空集合，若对 A 中的任一元素 x，依照某种规律或法则 f，恒有 B 中唯一确定的元素 y 与之对应，则称此对应规律或法则 f 为一个从 A 到 B 的映射. 记作：

$$f : A \to B \text{ 或 } f : x \mapsto y$$

我们也有 $y = f(x)$.

不难看出，函数是特殊的映射.

映射分类

- f 是**单射** (*Injection*) 当且仅当 $\forall a, b \in X, a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$
- f 是**满射** (*Surjection*) 当且仅当 $\forall y \in Y, \exists x \in X, f(x) = y$
- f 是**双射** (*Bijection*) 当且仅当 f 既是单射又是满射，此时 f 构建了一个 X 和 Y 之间的**完全一一对应**关系

数集

- 自然数集 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$
- 整数集 $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$
- 有理数集 $\mathbb{Q} = \{p/q | q \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}_+, \text{且} p, q \text{互质}\}$

有理数的稠密性

$$\forall a, b \in \mathbb{Q},\ a < b \Rightarrow \exists c \in \mathbb{Q}, a < c < b.$$

可以拓展到实数集 $\mathbb{R}$

邻域

一个点 x_0 的**邻域**指包含这个点的某个开区间.
考虑“任意邻域”时，对开区间的具体大小并不关心，记为 $U(x_0)$.

$$U(x_0,\delta) = (x_0-\delta, x_0+\delta)$$

$$\dot{U}(x_0,\delta) = U(x_0,\delta)\backslash\{x_0\} = (x_0-\delta, x_0)\cup(x_0, x_0+\delta)$$

$\dot{U}(x_0,\delta)$ 称为 x_0 的去心邻域.

界

对于非空实数集 $E \in \mathbb{R}$

- M 是 E 的**上界** $\Leftrightarrow \forall x \in E, x \leq M$.
- m 是 E 的**下界** $\Leftrightarrow \forall x \in E, x \geq m$.

既有上界也有下界的集合是有界的.

确界

- M 是 E 的**上确界** $\Leftrightarrow M$ 是 E 的上界且 $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in E, x \geq M - \epsilon$.
- m 是 E 的**下确界** $\Leftrightarrow m$ 是 E 的下界且 $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in E, x \leq m + \epsilon$.

- 思考：集合 E 中的最大、最小元素 $\max E, \min E$ 与上、下确界 $\sup E, \inf E$ 有什么不同？是否一致？

单调性

记 D 为函数的定义域

- 函数单调递增 $\Leftrightarrow \forall x, y \in D, x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$
- 函数**严格**单调递增 $\Leftrightarrow \forall x, y \in D, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$

注意与其他教材的区别

周期性

函数 $f(x)$ 是周期函数，当且仅当

$$\exists T \in \mathbb{R}, T > 0, \forall x \in \mathbb{D}, f(x) = f(x+T)$$

思考：T 一定在函数的定义域（$\mathbb{D}$）内吗？最小正周期一定存在吗？

初等函数

常函数，幂函数，指数函数，对数函数

三角函数，反三角函数，双曲三角函数

方程与隐函数

- 如果方程 $F(x,y)=0$ 定义了函数 $y=f(x)$，我们称 $F(x,y)=0$ 为 $y=f(x)$ 的**隐性定义**或**隐函数方程**.
- 一个方程通常不能定义一个隐函数（例:$x^2+y^2=1$），但是方程经常在一个点的邻域定义一个隐函数.
- 方程中 x 和 y 的地位是**平等**的，因此隐函数的自变量可以选 x 或 y
- 方程是否局部定义了一个函数，是重要的**隐函数定理**的内容.

参数方程与极坐标

- 有些图形可以使用 $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ 的方程组来描述，此时，x, y 都是一个参数 t 的函数，给定一个确定的参数 t，能够找到唯一一组 (x, y).
- 消去参数 t 得到一个方程，可能定义了一个隐函数.

- 极坐标系：使用 r 表示点到原点的距离，θ 表示点与原点连线和 $x+$ 的夹角
- 唯一确定一个点 $(r, \theta) \Rightarrow (x = r\cos\theta, y = r\sin\theta)$
- 一般地，约定 $0 \le r < +\infty, 0 \le \theta < 2\pi$

目录

数列极限的定义

对数列 $\{x_n\}$，若

$$\exists L \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n > N,\ |x_n - L| < \varepsilon$$

则称数列 $\{x_n\}$ 的**极限**为 L，或 $\{x_n\}$ **收敛**于 L，记

$$\lim_{n\to\infty} x_n = L \qquad \text{或} \qquad x_n \to L(n \to \infty)$$

无穷小量与无穷大量

对数列 $\{x_n\}$，若

$$\forall M > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n > N,\ |x_n| > M$$

则称数列 $\{x_n\}$ 为**无穷大量**，记 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$，但实际上是**发散**到无穷大.

若数列 $\{x_n\}$ 的极限为 0，称其为无穷小量.

性质

- 唯一性：收敛数列的极限唯一
- 有界性：收敛数列是有界的
- 改变/删除/增加有限个项，数列的收敛性不变
- 保序性：若 $\lim_{n\to\infty} x_n = A > B = \lim_{n\to\infty} y_n$，
  则 $\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n > N,\ x_n > y_n$
- 保号性：保序性中取 $y_n = 0$
- 归并性：$\lim_{n\to\infty} x_n = L \Leftrightarrow \forall$单增数列$\{n_k\} \subset \mathbb{N},\ \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = L$
- 极限和四则运算的顺序可以交换

判定

- 夹逼定理
- 单调有界数列收敛定理
- 区间套定理

函数极限的定义

设函数在一点 a 的**去心邻域** $\dot{U}(a)$ 有定义，若

$$\exists L \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in \dot{U}(a, \delta),\ |f(x) - L| < \varepsilon$$

则称当 x 趋近于 a 时，函数 $f(x)$ 的**极限为** L 或函数 $f(x)$ **收敛**于 L，记为

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \qquad \text{或} \qquad f(x) \to L(x \to a)$$

无穷情况

若函数在 $|x| > X$ 区间内有定义，且

$$\exists L \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists X_0 > X,\ \forall |x| > X_0,\ |f(x) - L| < \varepsilon$$

则称当 x 趋近于 ∞ 时，函数 $f(x)$ 的**极限**为 L 或函数 $f(x)$ **收敛**于 L，记为

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \qquad \text{或} \qquad f(x) \to L(x \to a)$$

类似地，我们可以给出左极限、右极限、发散的定义.

理解

- 函数在 a 点的极限**不需要**函数在 a 点有定义（数列在 ∞ 也没有定义）
- 数列的极限可以看作是 $x \to +\infty$ 的单侧函数极限
- 讨论函数的极限，一定要说明 x 趋近于 a 或 ∞ 的方式（左右？正负?）

性质

- 唯一性：在一点收敛的函数在该点的极限唯一
- 局部有界性：在一点收敛的函数在该点的某邻域有界
- 局部保序性：若 $\lim_{x\to a} f(x) = A > B = \lim_{x\to a} g(x)$，
  则 $\exists\delta > 0,\ \forall x \in \dot{U}(a,\delta),\ f(x) > g(x).$
- 局部保号性：$g(x) = 0$

判定

- 夹逼定理
- 单调有界单侧极限存在定理
- 海涅定理：

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \forall\{x_n\}, (\lim_{n\to\infty} x_n = a, x_n \neq a) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$$

- 海涅定理适合用于证明极限不存在，不便用于证明极限存在

无穷小的定义

若 $x \to a$ 时（a 可能是 ∞），$f(x) \to 0$ 且 $g(x) \to 0$，则：

- $f(x)$ 是 $g(x)$ 的**高阶无穷小**，记 $f(x) = o(g(x))$, 当且仅当
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$
- $f(x)$ 是 $g(x)$ 的**同阶无穷小**，记 $f(x) = O(g(x))$, 当且仅当
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = c, c \neq 0$$
- $f(x)$ 是 $g(x)$ 的**等价无穷小**，记 $f(x) \sim (g(x))$, 当且仅当
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

无穷小的阶数

若 $x \to a$ 时，$f(x)$ 是与 $(x-a)^k (k>0)$ 同阶的无穷小，我们称 $f(x)$ 是 $(x-a)$ 的 k **阶无穷小**.

若 $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{(x-a)^k} = c \neq 0$，则称 $c(x-a)^k$ 是 $f(x)$ 的**主部**，此时我们有

$$f(x) = c(x-a)^k + o((x-a)^k)$$

乘除中的等价无穷小可以替换，加减中的等价无穷小**有条件地**替换（主部不抵消）

截至目前

极限的计算方法：

- 定义法（放缩!）
- 等价无穷小替换
- 夹逼（什么时候用?）
- 单调有界

使用复杂的方法之前，先尽可能地**化简**!

函数连续性的定义

若函数 $f(x)$ 在一点 x_0 的邻域内有定义，则 f 在该点**连续**，当且仅当函数在该点的极限存在且等于该点的函数值，即

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

或

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta),\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

将极限换为左、右极限，则得到左、右连续的定义

所有初等函数在其定义域区间内连续，在区间的端点处单侧连续

间断点的分类

- 第一类间断点：左、右极限都存在
  - 左右极限相等：可去间断点，表现为从完整的函数图像上挖去了一个点
  - 左右极限不相等：跳跃间断点，表现为函数图像上出现了不连续的函数值变化（且变化前后都为有限值）
- 第二类间断点：左、右极限不都存在
  - 其中之一为无穷：无穷间断点
  - 极限都不为无穷，但极限也不存在：振荡间断点（典例：$\sin\frac{1}{x}$）

学会求间断点的值、判断间断点的类型

闭区间上连续函数的性质

- 有界性：闭区间上的连续函数有界
- 最值存在：闭区间上的连续函数在区间上能取到最值
- 介值性：最大最小值之间的任何实数都可以在区间上取到

连续函数将闭区间映射为闭区间

目录

导数

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域有定义，若极限

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

存在，则称 $f(x)$ 在 x_0 可导，上述极限称为该函数在 x_0 处的**导数**，记作：

$$f'(x_0)\,\textit{(Lagrange)} \qquad \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}\,\textit{(Leibniz)} \qquad \dot{f}(x_0)\,\textit{(Newton)}$$

将上述极限换为左、右极限，得到左、右导数的定义.

可导 $\Rightarrow$ 连续，反之不一定.（魏尔斯特拉斯函数）

导函数

若函数 $f(x)$ 在区间 I 内的每一点上都可导，且在区间闭端点处单侧可导，则称函数在区间上可导，记 $f \in D(I)$. 此时，称

$$x \in I,\ f(x) \in \mathbb{R}; \qquad x \mapsto f'(x)$$

$f'(x)$ 为 $f(x)$ 的**导函数**，常简称为导数

微分的定义

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域有定义，若 $\Delta x \to 0$ 时，有常数 A 使得

$$f(x_0+\Delta x) = f(x_0) + A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$$

则称 $f(x)$ 在 x_0 处**可微**，将 $f(x)$ 在 x_0 处的微分记作 $\mathrm{d}f|_{x=x_0} = A\mathrm{d}x.$

- 可微 $\Leftrightarrow$ 可导，且 $\mathrm{d}f|_{x=x_0} = f'(x_0)\mathrm{d}x$
- 微分与导数有区别，但对于一元实函数，类似于一个数与一个 1×1 矩阵的区别.

高阶导数

若导函数在一点可导，称函数在该点**二阶可导**，且导函数在该点的导数为**二阶导数**. 如果在区间上每一点都二阶可导，就有**二阶导函数**.
依此类推可以定义 n 阶可导 $(f \in D^{(n)}(I))$、n 阶导函数 $f^{(n)}$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$

导数的计算

- 四则运算
- 复合函数 $y = f(u(x))$ 的链式法则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$
- 反函数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$
- 导数表（背，或者对如何推导非常熟练）
- 隐函数求导
- 参数方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$

科学应用

- 切线斜率，曲率
- 线性近似
- 变化率问题

函数性态

设函数 f 在 x_0 的邻域有定义，若

$$\exists\delta > 0,\ \forall x \in U(x_0, \delta),\ f(x) \leq f(x_0)$$

则称 $f(x_0)$ 为函数的**极大值**，x_0 是函数的**极大值点**. 将 $\leq$ 换为 $<$ 得到**严格极大值**的定义. 换为 $\geq$ $(>)$ 得到（严格）极小值的定义.

- 极值点是局部概念，最值是全局概念.

函数性态

使导数等于 0 的点称为函数的**驻点**.

费马定理：

- x_0 是 $f(x)$ 的极值点，且 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则 x_0 是 $f(x)$ 的驻点.

单调性

设 $f(x) \in C[a,b] \cap D(a,b)$，则

- $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上**单调增（减）**当且仅当 $f'(x)$ 在区间内处处非负（正），且在任何子区间上不恒为 0.

极值

设函数 f 在 x_0 某邻域上连续，在去心邻域上可导，

- 若 $f'(x)$ 在 x_0 左邻域为负，右邻域为正，x_0 是**极小值点**；
- 若 $f'(x)$ 在 x_0 左邻域为正，右邻域为负，x_0 是**极大值点**；
- 若 $f'(x)$ 在 x_0 左右邻域同号，x_0 不是极值点.

设函数 f 在 x_0 有二阶导数，且 $f'(x_0) = 0$，

- 若 $f''(x_0) > 0, x_0$ 是**极小值点**；
- 若 $f''(x_0) < 0, x_0$ 是**极大值点**.

凸性

设函数 $f \in C(I)$，若

$$\forall x_1, x_2 \in I,\ \forall t \in (0,1),\ f[tx_1 + (1-t)x_2] \le tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$$

则称函数在区间 I 上是**下凸**的. 若将 $\le$ 换成 $\ge$，则称函数是**上凸**的.

凸性

- 设 $f(x) \in D(a,b)$，若 $f'(x)$ 在 (a,b) 上严格单调增（减），则函数在 (a,b) 上是下（上）凸的.
- 设 $f(x)$ 在 (a,b) 上二阶可导，若 $f''(x) > 0 (< 0)$，则函数在 (a,b) 上是下（上）凸的.

连续函数上凸和下凸区间的分界处称为**拐点**，该处函数的二阶导数为 0.

More in SI251 / Convex Optimization...

渐近线

- 若 $\lim\limits_{x\to x_0^{\pm}} f(x)=\infty$, $x=x_0$ 是函数图像的**垂直渐近线**. (x_0^+ 或 x_0^-)
- 若 $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=b$, $y=b$ 是函数图像的**水平渐近线**
- 若 $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x)-ax-b)=0$, $y=ax+b$ 是函数图像的**斜渐近线**.

斜渐近线可以通过 $a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}, b=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-ax)$ 计算

画图

- 定义域！！！
- 奇偶性，周期性
- 特殊点
- （一阶导数）单调区间、极值点与极值
- （二阶导数）上下凸区间、拐点与拐点处函数值
- 渐近线

Good luck!