

ShanghaiTech University

GEMA1001 Calculus I
Fall 2023

Midterm Exam

Answer composed by Yixuan Liu

November 16, 2025

1. (20 pts) 单项选择题

2. (20 pts) 填空题

- (a) (4') 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n^2+1} + \frac{n+2}{n^2+2} + \cdots + \frac{n+n}{n^2+n} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$.
- (b) (4') 函数 $f(x) = \frac{\ln|x|}{x-2} \sin \frac{1}{x-1}$ 的第二类间断点的个数是: $\underline{\hspace{2cm}}$.
- (c) (4') 已知函数 $f(x) = x^{\sin x}$, 则 $df \Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = \underline{\hspace{2cm}}$.
- (d) (4') 若可微函数 $y = y(x)$ 由方程 $y = -ye^x + 2e^y \sin x - 7x$ 所确定, 则 $y'(0) = \underline{\hspace{2cm}}$.
- (e) (4') 曲线 $x = y^4 + 2y^3 - 1$ 在点 $(2, 1)$ 处的法线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

3. (8 pts) 极限定义证明题

用极限定义证明: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2 - x + 1} = 2$.

4. (16 pts) 极限计算

- (a) (8') 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+x)}{x} \right)^{\frac{1}{e^x-1}}$.

- (b) (8') 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 \in (0, 1]$, $a_{n+1} = \frac{a_n + a_n^3}{2}$, $n = 1, 2, 3, \dots$. 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在并求之.

5. (16 pts) 导数计算

- (a) (8') 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \ln(1+x^2), & x \leq 0, \\ x^2 \sin \frac{1}{x}, & x > 0, \end{cases}$ 求 $f'(x)$.

- (b) (8') 设函数 $f(x) = (x+1)^2 \ln x$, 求 $f^{(n)}(2)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$).

6. (10 pts) 解答题

- (a) (2') 写出 $(1+x)^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) 带佩亚诺余项的 n 阶麦克劳林公式.

- (b) (8') 求 $\sqrt{1+\sin x}$ 带佩亚诺余项的 3 阶麦克劳林公式.

7. (10 pts) 证明题

已知函数 $g(x) = \begin{cases} \frac{\sin \pi x}{x(x-1)}, & x \neq 0, 1, \\ 2, & x = 0, 1. \end{cases}$ 证明:

- (a) (4') $x=0$ 和 $x=1$ 是 $g(x)$ 的可去间断点.

- (b) (6') 若函数 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上可导, 且 $f(x)g(x)$ 连续, 则存在 $\xi \in \mathbb{R}$, 使得 $1 + \xi f'(\xi) = e^{-f(\xi)}$.