ShanghaiTech University

# GEMA1001 Calculus I
# Fall 2022

## Midterm Exam

Answer composed by Yixuan Liu

November 17, 2025

If you have any questions about the answers, feel free to contact through email(liuyx2023@shanghaitech.edu.cn) or QQ(2987221272).

**1. (20 pts) 单项选择题**

(a) (4') 若当 $x \to 0$ 时，$(\cos x - 1)\ln(1+x^2)$ 是比 $x \sin^n x$ 高阶的无穷小，且 $x\sin^n x$ 是比 $3^{x^2} - 1$ 高阶的无穷小，则正整数 $n$ 的值为（　　）

A. 1.　　B. 2.　　C. 3.　　D. 4.

**Solution:** B.

$(\cos x - 1)\ln(1+x^2) \sim (-x^2/2)x^2$ 是 $x$ 的 4 阶无穷小；$3^{x^2} - 1 \sim x^2 \ln 3$ 是 $x$ 的 2 阶无穷小. 因此 $x \sin^n x \sim x^{n+1}$，$n \in \mathbb{N}^+$ 是 $x$ 的 3 阶无穷小，故 $n = 2$.

(b) (4') 已知平面曲线的极坐标方程为 $r = \cos\theta + \sin\theta$，则该曲线在对应于 $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ 的点处的切线方程为（　　）

A. $y = x$.　　B. $y = -x$.　　C. $y = x - 2$.　　D. $y = -x + 2$.

**Solution:** D.

$\theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow r = \sqrt{2}$. 因此直角坐标下对应的点是 $(1, 1)$.

由于 $x = r\cos\theta = \cos^2\theta + \sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}(\cos 2\theta + 1 + \sin 2\theta)$,

$y = r\sin\theta = \sin\theta\cos\theta + \sin^2\theta = \frac{1}{2}(\sin 2\theta + 1 - \cos 2\theta)$,

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = -\sin 2\theta + \cos 2\theta, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = \cos 2\theta + \sin 2\theta.$$

代入 $\theta = \pi/4$ 得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = -1.$$

因此，曲线在 $\theta = \pi/4$ 处的切线是一条过点 $1, 1$，斜率为 $-1$ 的直线，方程为 $y = -x + 2$.

(c) (4') 极限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^4+n}} + \frac{2}{\sqrt{n^4+2n}} + \cdots + \frac{n}{\sqrt{n^4+n^2}}\right) =$（　　）

A. $\dfrac{1}{2}$.　　B. $\dfrac{1}{3}$.　　C. $\dfrac{1}{6}$.　　D. 1.

**Solution:** A.

$$\forall i \in \{1, 2, 3, \cdots, n\}, \frac{i}{\sqrt{n^4+n^2}} \le \frac{i}{\sqrt{n^4+ni}} \le \frac{i}{\sqrt{n^4}}.$$

因此

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{\sqrt{n^4+n^2}} \le \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{\sqrt{n^4+ni}} \le \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{\sqrt{n^4}}.$$

其中

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{\sqrt{n^4+n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2\sqrt{n^4+n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+1/n)}{2\sqrt{1+1/(n^2)}}=\frac{1+0}{2\sqrt{1+0}}=\frac{1}{2}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{\sqrt{n^4}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2\sqrt{n^4}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+1/n)}{2\sqrt{1}}=\frac{1+0}{2}=\frac{1}{2}.$$

由夹逼定理得原极限为 $\frac{1}{2}$.

(d) (4') 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 满足: $f(a)f(b)<0$, 且 $f'(x)>-f(x), x\in(a,b)$, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的零点个数为（　　）

A. 3. B. 2. C. 1. D. 0.

**Solution:** C.

首先，由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，则其在 $[a,b]$ 上连续. 据零点存在定理，由于 $f(a)f(b)<0$，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上至少存在一个零点.

考虑条件 $f'(x)+f(x)>0$. 构造辅助函数 $g(x)=e^xf(x)$，$g'(x)=e^x(f'(x)+f(x))>0$. 因此 $g(x)$ 是严格单调增函数. 由于 $f(a)f(b)<0$，$g(a)g(b)=e^af(a)e^bf(b)<0$. 由零点存在定理，$g(x)$ 在 $(a,b)$ 上有且仅有一个零点.

假设 $f(x)$ 存在两个不同的零点 $a<x_1<x_2<b$，那么:

$$g(x_1)=e^{x_1}f(x_1)=0, g(x_2)=e^{x_2}f(x_2)=0$$

而 $g(x)$ 的零点是唯一的，因此 $x_1=x_2$，故 $f(x)$ 的零点也是唯一的.

(e) (4') 设 $f(x)$ 在 $x_0$ 的某邻域 $U(x_0)$ 内有定义，在去心邻域 $\dot{U}(x_0)$ 内可导，则对于下列论断:

（1） 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)=\infty$，则 $f'(x_0)$ 不存在;

（2） 若 $f'(x_0)$ 存在且等于常数 $A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$ 也存在且等于 $A$;

（3） 若 $f'(x_0)$ 不存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$ 不存在.

正确论断的个数是（　　）

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

**Solution:** B.

(1) 直觉上我们可以认为该命题成立：既然导函数趋向于无穷，那么该点的导数应当也等于无穷. 下面给出严谨的证明：

采用反证法. 假设 $f'(x_0)$ 存在并且为有限实数 $L$. 由于导数在 $x_0$ 存在，则 $f$ 在 $x_0$ 连续，因此可在任意小闭区间上应用拉格朗日中值定理.

因为

$$\lim_{x\to x_0} f'(x) = +\infty,$$

所以对任意 $M>0$，存在 $\delta>0$，使得

$$0<|x-x_0|<\delta \quad\Longrightarrow\quad f'(x)>M. \tag{1}$$

另一方面，由 $f'(x_0)=L$ 可知

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=L.$$

因此存在 $0<\eta\le\delta$，当 $0<|x-x_0|<\eta$ 时，

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-L\right|<1,$$

从而

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|<|L|+1.$$

选取 $M>|L|+1$，则对所有 $0<|x-x_0|<\eta$ 有

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|<M. \tag{2}$$

对任意 $0<|x-x_0|<\eta$，$f$ 在区间 $[x_0,x]$（或 $[x,x_0]$）上连续，在开区间可导，因此由拉格朗日中值定理可知存在 $\xi$ 介于 $x$ 与 $x_0$ 之间，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

根据 (2)，$f'(\xi)<M$；但根据 (1)，又必须有 $f'(\xi)>M$. 矛盾.

因此 $f'(x_0)$ 不可能为有限实数，即 $f'(x_0)$ 不存在.

(2) 该命题等价于：$f(x)$ 的导函数在 $x_0$ 的邻域内连续. 反例：

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0. \end{cases}$$

$f(x)$ 在 0 处的导数

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0.$$

而 $f(x)$ 的导函数

$$f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$$

在 $x=0$ 处不存在.

(3) 任意一个被挖去定义域上 $x_0$ 该点的函数都可以作为反例. 例如

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x\neq 0,\\ 1, & x=0. \end{cases}$$

该函数在 $x=0$ 处导数不存在，但导函数的极限存在，因为 $x=0$ 是导函数的可去间断点.

**2. (20 pts) 填空题**

(a) (4') 极限 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2n} =$ ____________________________.

**Solution:** $e^{-4}$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n+1}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{-\frac{n+1}{2}}\right)^{2n\cdot\frac{n+1}{-2}\cdot\frac{-2}{n+1}}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-\frac{n+1}{2}}\right)^{\cdot\frac{n+1}{-2}}\right]^{2n\cdot\frac{-2}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{-4n}{n+1}} = e^{-4}.$$

(b) (4') 函数 $f(x) = \frac{x^3+4x+5}{x^2-1}$ 的第一类间断点是：____________________.

**Solution:** $x=-1$.

函数的间断点是 $x=1, x=-1$.

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{1+4+5}{x^2-1} = \infty,\ \lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2-x+5)}{(x+1)(x-1)} = -\frac{7}{2}$$

因此函数的第一类间断点是 $x=-1$.

(c) (4') 函数 $y=f(x)$ 由 $\begin{cases} x(t) = 1+t, \\ y(t) = 2t+3t^2 \end{cases}$ 确定，则 $\mathrm{d}f|_{x=2} =$ ______________.

**Solution:** $8\mathrm{d}x$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 1,\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 6t+2 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 6t+2 = 6(x-1)+2.$$

代入 $t=1$ 或 $x=2$ 得

$$\mathrm{d}f|_{x=2} = 6\times 1 + 2\mathrm{d}x = 8\mathrm{d}x.$$

(d) (4') 已知 $f(a)=2, f'(a)=3$,则极限 $\lim_{h\to 0}\frac{f^2(a+2h)-f^2(a-h)}{h} =$ ____________.

**Solution:** 36.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f^2(a+2h)-f^2(a-h)}{h} = 3(f^2(a))' = 3\cdot 2f(a)f'(a) = 36.$$

注：此处是将 $f^2(a+2h)-f^2(a-h)$ 拆成了 $f^2(a+2h)-f^2(a+h)+f^2(a+h)-f^2(a)+f^2(a)-f^2(a-h)$，再进行结合，从而得到 $3(f^2(a))'$.

(e) (4') 设函数 $f(x)=(1+x)^x$，则 $f(x)$ 带皮亚诺余项的二阶麦克劳林展开式为 ________.

**Solution:** $f(x)=1+x^2+o(x^2)$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^{x\ln(1+x)} \\
f'(x) &= e^{x\ln(1+x)}(\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}) \\
f''(x) &= e^{x\ln(1+x)}(\ln(1+x)+\frac{x}{1+x})^2+e^{x\ln(1+x)}(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{(1+x)^2})
\end{aligned}$$

代入 $x=0$：

$$f(0)=1, f'(0)=1(0+\frac{0}{1})=0, f''(0)=1\cdot(0)^2+1(\frac{1}{1}+\frac{1}{1^2})=2$$

因此

$$f(x)=1+x^2+o(x^2).$$

**3. (8 pts) 极限定义证明题**

用极限定义证明：$\lim\limits_{x\to 3}\left(1-\frac{3}{x}\right)=0$.

**Solution:**

需证：

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \text{s.t. } \forall 0<|x-3|<\delta, |1-\frac{3}{x}|<\varepsilon.$$

当 $\delta\le 1$ 时，有 $2<x<4$

$$|1-\frac{3}{x}|=|\frac{x-3}{x}|<\frac{1}{2}|x-3|$$

当 $\delta\le 2\varepsilon$ 时，$\frac{1}{2}|x-3|<\frac{1}{2}\cdot 2\varepsilon=\varepsilon$

因此，取 $\delta=\min\{1,2\varepsilon\}$. 此时有

$$|1-\frac{3}{x}|=\frac{|x-3|}{|x|}<\frac{2\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

□

**4. (16 pts) 极限计算**

(a) (8') 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x}(x-\arcsin x)}{\sin x\ln(1+x^2)}$.

**Solution:**

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}(x-\arcsin x)}{\sin x\ln(1+x^2)}&=\lim_{x\to 0}\frac{x-\arcsin x}{\sin x\ln(1+x^2)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{x-(x+\frac{1}{6}x^3+o(x^3))}{x^3}\\&=-\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

(b) (8') 已知函数满足：$f(0)=f'(0)=0$，$f''(0)=6$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x)}{x^4}$.

**Solution:**

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin^2 x)}{x^4}&=\lim_{x\to 0}\frac{f'(\sin^2 x)2\sin x\cos x}{4x^3}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{f'(\sin^2 x)}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(\sin^2 x)}{2\sin^2 x}\\&=\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{f'(t)}{t}=\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{f'(t)-f'(0)}{t-0}\\&=\frac{1}{2}f''(0)=3.\end{aligned}$$

此处能洛第一次，但是不能洛第二次的原因：

题目条件并未声明导函数的存在性. 如果补充条件 $f$ 二阶可导，那么可以使用两次洛必达法则.

此处可以洛第一次是因为，由于 0 处二阶**导数** $f''(0)$ 的存在性，极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x-0}$ 是存在的, 而极限的定义域是 $x_0$（在这里是 0）的去心邻域，因此函数 $f(x)$ 的**导函数** $f'(x)$ 在 0 的去心邻域内一定存在，故可使用洛必达法则；

而题目条件并没有给出 $f''(x)$，也就是 $f(x)$ 的二阶**导函数**的存在性，而使用洛必达法则后会出现如下式子：

$$\lim_{x\to 0}\frac{f''(\sin^2 x)2\sin x\cos x}{4x}$$

该式要求 $f''(x)$ 在 0 的去心邻域内有定义，而这是不可保证的，因此不可在此使用洛必达法则，只能使用**导数**的定义求解.

**5. (18 pts) 导数计算**

(a) (9') 已知函数 $y = y(x)$ 由方程 $e^y + 6xy + x^2 - 1 = 0$ 所确定，求 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$，$\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}$.

**Solution:**

首先求 $y|_{x=0}$：$e^{y(0)} - 1 = 0 \Leftrightarrow y(0) = 0$.

两边求导：

$$y'e^y + 6(y + xy') + 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad y'(0)e^0 + 6 \cdot 0 + 0 = 0$$

因此 $y'(0) = 0$. 再次两边求导：

$$y''e^y + (y')^2e^y + 6(y' + y' + xy'') + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y''(0)e^0 + 0^2e^0 + 6 \cdot 0 + 2 = 0$$

因此 $y''(0) = -2$. 综上所述，

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = 0,\ \left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0} = -2.$$

(b) (9') 设函数 $f(x) = (x+1)^2 \sin x + \ln x$，求 $f^{(2022)}(\pi)$.

**Solution:**

$$(\ln x)^{(2022)} = (-1)^{2022-1}(2022-1)!x^{-2022} = -\frac{2021!}{x^{2022}}.$$

$$\begin{aligned}
[(x+1)^2 \sin x]^{(2022)} &= \sum_{i=0}^{2022} \binom{2022}{i} [(x+1)^2]^{(i)} (\sin x)^{(2022-i)} \\
&= \sum_{i=0}^{2} \binom{2022}{i} [(x+1)^2]^{(i)} (\sin x)^{(2022-i)} \\
&= (x+1)^2 (\sin x)^{(2022)} + 2022 \cdot 2(x+1)(\sin x)^{2021} \\
&\qquad + \binom{2022}{2} 2(\sin x)^{2020} \\
&= (x+1)^2(-\sin x) + 4044(x+1)\cos x + 2\binom{2022}{2}\sin x
\end{aligned}$$

代入 $x = \pi$

$$f^{(2022)}(\pi) = -4044(\pi + 1) - \frac{2021!}{\pi^{2022}}.$$

**6. (8 pts) 解答题**

设 $-\dfrac{3}{2} < x_0 < 3$，$x_{n+1} = \sqrt{2x_n + 3}$，$n \in \mathbb{N}$. 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求其极限.

**Solution:** 首先使用数学归纳法证明 $\{x_n\}$ 有界. 由于 $x_0 \in (-\frac{3}{2}, 3)$，可知 $x_1 \in (0, 3)$. 假设 $0 < x_k < 3$，则 $0 < 3 < 2x_k + 3 < 9$，从而 $x_{k+1} = \sqrt{2x_n + 3} \in (0, 3)$. 因此 $\{x_n\}$ 有界. 同时，

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\sqrt{2x_n + 3}}{x_n} = \sqrt{\frac{2}{x_n} + \frac{3}{x_n^2}} > \sqrt{\frac{2}{3} + \frac{3}{9}} = 1.$$

又 $x_n > 0$，可得 $\{x_n\}$ 单调递增. 因此数列 $\{x_n\}$ 收敛，设其极限为 $L$. 则

$$L = \sqrt{2L + 3} \quad \Leftrightarrow \quad L = 3$$

因此，数列 $\{x_n\}$ 的极限是 3.

**7. (10 pts) 证明题**

设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 上可导，且 $f(0)=f(1)=0$，$\max\limits_{x\in[0,1]} = M > 0$. 证明：

(a) (4') 存在 $x_0 \in (0,1)$，使得 $f'(x_0)=0$；

**Solution:**

由罗尔定理，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，在 $(0,1)$ 可导，且 $f(0)=f(1)$，则 $\exists\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=0.\square$

(b) (6') 对于大于 1 的任意正整数 $n$，存在 $\xi_1,\xi_2\in(0,1)$，且 $\xi_1\neq\xi_2$，使得 $\dfrac{1}{f'(\xi_1)}-\dfrac{1}{f'(\xi_2)}=\dfrac{n}{M}$.

**Solution:**

设 $f(x)$ 在 $x=m$ 处取得最值 $M$. 则据拉格朗日中值定理，

- $\exists x_1\in(0,m)$，$f'(x_1)=M/m$.
- $\exists x_2\in(m,1)$，$f'(x_2)=-M/(1-m)$.

取 $\xi_2=x_2$. 问题转化为证明

$$\exists\xi_1,\ \frac{1}{f'(\xi_1)}=\frac{n}{M}+\frac{1-m}{M}=\frac{n+1-m}{M}.$$

据达布定理，

$$\forall c\in(\frac{-M}{1-m},\frac{M}{m}),\ \exists\xi\in(x_1,x_2),\ f'(\xi)=c.$$

同时，

$$\frac{M}{m}-\frac{M}{n+1-m}=M\frac{n+1-2m}{m(n+1-m)}>0$$

$$\frac{M}{n+1-m}-\frac{-M}{1-m}=M\frac{n+2-2m}{(n+1-m)(1-m)}>0$$

因此 $\dfrac{M}{n+1-m}\in(\dfrac{-M}{1-m},\dfrac{M}{m})$. 故 $\exists\xi_1\in(x_1,\xi_2)$，$f'(\xi_1)=\dfrac{M}{n+1-m}$. 即

$$\exists\xi_1,\xi_2\in(0,1),\ \xi_1\neq\xi_2,\ \text{s.t. }\frac{1}{f'(\xi_1)}-\frac{1}{f'(\xi_2)}=\frac{n}{M}.$$

$\square$

**Solution:**

另:

由于 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数，且 $\exists\xi$，$f(\xi)=M>0$，由连续函数的介值定理得

$$\forall n\in\mathbb{N}^+,\ \exists\ \xi_0\in(0,1),\ f(\xi_0)=\frac{M}{n}.$$

据拉格朗日定理

- $\exists\ x_1\in(0,\xi_0)$，$f'(x_1)=\dfrac{M/n-0}{\xi_0-0}=\dfrac{M}{n\xi_0}$.
- $\exists\ x_2\in(\xi_0,1)$，$f'(x_2)=\dfrac{0-M/n}{1-\xi_0}=\dfrac{M}{n(1-\xi_0)}$.

则

$$\frac{1}{f'(x_1)}+\frac{1}{f'(x_2)}=\frac{n\xi_0}{M}+\frac{n(1-\xi_0)}{M}=\frac{n}{M}.$$

□