ShanghaiTech University

GEMA1001 Calculus I
Fall 2023

Midterm Exam

Answer composed by Yixuan Liu

November 16, 2025

If you have any questions about the answers, feel free to contact through email(liuyx2023@shanghaitech.edu.cn) or QQ(2987221272).

1. (20 pts) 单项选择题

(a) (4') 已知函数 $f(x)=|x|$，$g(x)=\mathrm{sgn}(x)$，则 $g(f(x))=$（　　）

A. $\begin{cases}-1 & x\neq 0\\ 0 & x=0.\end{cases}$ B. $\begin{cases}1 & x\neq 0\\ 0 & x=0.\end{cases}$ C. $\begin{cases}-1 & x\neq 0\\ 1 & x=0.\end{cases}$ D. $\begin{cases}1 & x\neq 0\\ -1 & x=0.\end{cases}$

Solution: B.

$f(x)=|x|\geq 0$，因此在所有非零点，$g(f(x))=g(|x|)=1$. 注意 $g(x)$ 在 0 处的定义为 0，

(b) (4') 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有定义，且对 $\forall x\in\mathbb{R}$，均有 $x+\cos x\leq f(x)\leq x+1$，则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处（　　）

A. 不存在极限.　　B. 有极限但不连续.

C. 连续但不可导.　　D. 可导.

Solution: D.

首先，根据夹逼定理，函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的极限存在：

$$1=\lim_{x\to 0}(x+\cos x)\leq \lim_{x\to 0}f(x)\leq \lim_{x\to 0}(x+1)=1.$$

对不等式直接取 $x=0$，得 $1\leq f(0)\leq 1$，因此 $f(0)=1=\lim\limits_{x\to 0}f(x)$. 故 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续.

假设 $f(x)$ 在 0 处可导，根据导数的定义：

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}$$

据不等式

$$x+\cos x-1\leq f(x)-1\leq x$$

当 $x>0$，有 $1+\dfrac{\cos x-1}{x}\leq\dfrac{f(x)-1}{x}\leq 1$. 据夹逼定理，$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-1}{x}=1$.

故 $f(x)$ 的右导数存在. 同理可得左导数也存在，且左右导数相等，故 $f(x)$ 可导.

(c) (4') 若曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=2\sin t+\cos t,\\ y=\sin t-2\cos t,\end{cases}$ 则 C 在 $t=0$ 处的切线方程为（　　）

A. $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$.

B. $y = 2x - 4$.

C. $y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$.

D. $y = -2x$.

Solution: A.

首先求 $t = 0$ 时的点：$x = 1, y = -2$. 根据参数方程求导法则，

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2\cos t - \sin t, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \cos t + 2\sin t.$$

代入 $t = 0$ 得 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 1$. 故 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}$.

将点 $(1, -2)$ 和斜率 $\frac{1}{2}$ 代入直线方程，得答案为 A.

(d) (4') 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可导，则 “$f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有界” 是 “$\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$ 存在” 的 (　　)

A. 充分但非必要条件.

B. 必要但非充分条件.

C. 充分且必要条件.

D. 既非充分又非必要条件.

Solution: D.

反例：$\sin x$ 在 $\mathbb{R}$ 上可导且有界，但 $x \to \infty$ 时导函数极限不存在.

$f(x) = x$ 在 $\mathbb{R}$ 上可导且 $x \to \infty$ 时 $f'(x) \equiv 1$ 极限存在，但其在 $\mathbb{R}$ 上无界.

(e) (4') 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续，$a_1 \in \mathbb{R}$，$a_{n+1} = f(a_n)$，$n \in \mathbb{Z}^+$. 关于下列两个结论：

(1) 若 $f(x)$ 严格单调增加且有上界，则数列 $\{a_n\}$ 收敛；

(2) 若 $f(x)$ 严格单调减少且有界，则数列 $\{a_n\}$ 收敛；

正确的选项是 (　　)

A. (1) (2) 都正确

B. (1) (2) 都错误.

C. (1) 正确 (2) 错误.

D. (1) 错误 (2) 正确.

Solution: B.

对 (1)，考虑 $a_{k+1} = f(a_k)$ 和 a_k 的关系.

- 若 $a_{k+1} > a_k$，则 $a_{k+2} = f(a_{k+1}) > f(a_k) = a_{k+1}$. 由数学归纳法易得数列 $\{a_n\}$ 单调递增，又 $\{a_n\}$ 有上界，故 a_n 收敛；

- 若 $a_{k+1} < a_k$，则 $a_{k+1} = f(a_{k+1}) < f(a_k) = a_{k+1}$. 由数学归纳法易得数列 $\{a_n\}$ 单调递减，而无下界，则 $\{a_n\}$ 不一定收敛；

- 若 $a_{k+1} = a_k$，则显然数列 $\{a_n\}$ 收敛.

因此，(1) 错误.

对 (2)，考虑函数

$$f(x) = \begin{cases} -e^x + 2, & x < 0; \\ -x + 1, & 0 \leq x < 1; \\ e^{-x+1} - 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

可以验证 $f(x)$ 单调递减且有界. 取 $a_1 = 1$，则 a_k 的值持续在 0 与 1 之间震荡，极限不存在，故 (2) 错误

2. (20 pts) 填空题

(a) (4') 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n^2+1}+\dfrac{n+2}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n+n}{n^2+n}\right)=$ ________________.

Solution: 3/2.

考虑放缩

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{n+i}{n^2+n}\le\sum_{i=1}^{n}\frac{n+i}{n^2+i}\le\sum_{i=1}^{n}\frac{n+i}{n^2}$$

则

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{n+i}{n^2+n}=\frac{n^2}{n^2+n}+\frac{n(n+1)}{2(n^2+n)}$$

当 $n\to\infty$，该式极限为 $\frac{3}{2}$. 同理，右式极限也为 $\frac{3}{2}$. 由夹逼定理，原极限为 $\frac{3}{2}$.

(b) (4') 函数 $f(x)=\dfrac{\ln|x|}{x-2}\sin\dfrac{1}{x-1}$ 的第二类间断点的个数是：____________.

Solution: 2.

$f(x)$ 的定义域为：

$$|x|>0,\ x-2\neq 0,\ x-1\neq 0\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\backslash\{0,1,2\}.$$

- 0 是无穷间断点，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\ln|x|\cdot\frac{\sin(-1)}{-2}$，有界量乘以无穷大量仍是无穷大量.
- 1 是可去间断点，$\lim\limits_{x\to 1}|f(x)|\le\lim\limits_{x\to 1}|-\ln|x||=0$，左右极限存在且相等.
- 2 是无穷间断点，$\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\ln 2\cdot\sin 1\cdot(x-2)^{-1}$，有界量乘以无穷大量仍是无穷大量.

(c) (4') 已知函数 $f(x)=x^{\sin x}$，则 $\mathrm{d}f\Big|_{x=\frac{\pi}{2}}=$ ________________.

Solution: $\mathrm{d}x$.

法 1：

$$f'(x)=(e^{\ln x\cot\sin x})'=e^{\ln x\cdot\sin x}\cdot(\sin x/x+\ln x\cos x)$$

故

$$f'(\frac{\pi}{2})=(\frac{\pi}{2})^1\cdot(1/(\frac{\pi}{2})+0)=1.$$

法 2:

$$\ln f(x) = \sin x \cdot \ln x \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \cos x \cdot \ln(x) + \frac{\sin x}{x}$$

故

$$f'(\frac{\pi}{2}) = f(\frac{\pi}{2})(\cos\frac{\pi}{2} \cdot \ln\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2} \cdot \frac{2}{\pi}) = \frac{\pi}{2} \cdot (0 + \frac{2}{\pi}) = 1.$$

因此结果为 $1\mathrm{d}x = \mathrm{d}x$.

(d) (4') 若可微函数 $y = y(x)$ 由方程 $y = -ye^x + 2e^y \sin x - 7x$ 所确定，则 $y'(0) =$ ____________.

Solution: $-5/2$.

两边求导

$$y' = -(y'e^x + ye^x) + 2(y'e^y \sin x + e^y \cos x) - 7$$

将 $x = 0$ 代回原方程

$$y|_{x=0} = -y|_{x=0}e^0 + 2e^y|_{x=0} \sin 0 - 7 \cdot 0 = -y|_{x=0} \Leftrightarrow y|_{x=0} = 0.$$

因此 (以下省略 $x = 0$)

$$y' = -(y'e^0 + ye^0) + 2(y'e^y \sin 0 + e^y \cos 0) - 7 = -(y' + 0) + 2(0 + 1) - 7$$

即 $y'(0) = -\dfrac{5}{2}$.

(e) (4') 曲线 $x = y^4 + 2y^3 - 1$ 在点 $(2, 1)$ 处的法线方程为 ____________________.

Solution: $y = -10x + 21$.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = 4y^3 + 6y^2 \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{4y^3 + 6y^2}.$$

代入 $x = 2, y = 1$ 得

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=2} = \frac{1}{4+6} = \frac{1}{10}.$$

故切线斜率为 $1/10$，则法线斜率为 -10. 因此法线方程为

$$y - 1 = -10(x - 2) \Leftrightarrow y = -10x + 21.$$

3. (8 pts) 极限定义证明题

用极限定义证明：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2}{x^2-x+1}=2.$

Solution: 已知，当 $|x|>1$ 时，

$$\Big|\frac{2x^2}{x^2-x+1}-2\Big|=\Big|\frac{2x-2}{x^2-x+1}\Big|<2|\frac{x-1}{x^2-x}|=\frac{2}{|x|}$$

取 $X=\max\left\{1,\dfrac{2}{\epsilon}\right\}$，则

$$\forall\varepsilon>0,|x|>X,\Big|\frac{2x^2}{x^2-x-1}-2\Big|<\frac{2}{|x|}<2\cdot\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

即得结果，证毕. □

4. (16 pts) 极限计算

(a) (8') 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{e^x-1}}$.

Solution:

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{e^x-1}}=\lim_{x\to0}e^{\ln(\frac{\ln(1+x)}{x})\frac{1}{e^x-1}}$$

问题转化为求 $\lim\limits_{x\to0}\ln(\dfrac{\ln(1+x)}{x})\dfrac{1}{e^x-1}$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\ln(\frac{\ln(1+x)}{x})\frac{1}{e^x-1}&=\lim_{x\to0}\ln(\frac{x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{x})\frac{1}{e^x-1}\\&=\lim_{x\to0}\ln(1-\frac{1}{2}x+o(x))\frac{1}{e^x-1}\\&=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x+o(x)}{x+o(x)}=-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

故原极限

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{e^x-1}}&=\lim_{x\to0}e^{\ln(\frac{\ln(1+x)}{x})\frac{1}{e^x-1}}\\&=e^{\lim\limits_{x\to0}\ln(\frac{\ln(1+x)}{x})\frac{1}{e^x-1}}\\&=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}.\end{aligned}$$

(b) (8') 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 \in (0,1]$，$a_{n+1} = \dfrac{a_n + a_n^3}{2}$，$n = 1,2,3,\cdots$. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在并求之.

Solution: 先使用数学归纳法证明 a_n 有界. 已知 $a_1 \in (0,1]$，假设 $a_k \in (0,1]$. 那么:

$$a_{k+1} = \frac{1}{2}a_k(a_k^2+1) \le \frac{1}{2}\cdot 2 = 1; \quad 显然 a_{k+1} > 0$$

因此，$\forall n \in N^+$，$a_n \in (0,1]$. 另，

$$a_{k+1} - a_k = \frac{a_k + a_k^3}{2} - a_k = \frac{a_k^3 - a_k}{2} = \frac{1}{2}a_k(a_k^2 - 1) \le 0.$$

因此，数列 $\{a_n\}$ 单调递减有下界，极限存在. 设极限为 L，则

$$L = \frac{L + L^3}{2}$$

解得 $L = 0$ 或 $L = 1$. 可以看出，当 $a_1 \neq 1$ 时，极限为 0；当 $a_1 = 1$ 时，极限为 1.

5. (16 pts) 导数计算

(a) (8') 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \ln(1+x^2), & x \le 0, \\ x^2 \sin\dfrac{1}{x}, & x > 0, \end{cases}$ 求 $f'(x)$.

Solution: $x = 0$ 为该函数的间断点. 由于该点左右极限都存在且相等 0，函数是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数.

- $x < 0$，$f'(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.
- $x > 0$，$f'(x) = 2x\sin\dfrac{1}{x} + x^2\cos\dfrac{1}{x}\cdot(-\dfrac{1}{x^2})$

导函数在 $x = 0$ 以外的所有点连续. 考虑 $x = 0$，该处的左导数为 $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{2x}{1+x^2} = 0$，右导数 $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} -\cos\frac{1}{x}$，极限不存在.
故函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的导数为 0. 综上所述，

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{1+x^2}, & x \le 0 \\ 2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}, & x > 0. \end{cases}$$

(b) (8') 设函数 $f(x)=(x+1)^2\ln x$，求 $f^{(n)}(2)$（$n=1,2,3,\cdots$）.

Solution: 根据 Leibniz 公式，当 $n\geq 3$,

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x^2+2x+1)^{(k)}(\ln x)^{(n-k)}\\
&= \sum_{k=0}^{2}\binom{n}{k}(x^2+2x+1)^{(k)}(\ln x)^{(n-k)}+\sum_{k=3}^{n}\binom{n}{k}(x^2+2x+1)^{(k)}(\ln x)^{(n-k)}\\
&= \sum_{k=0}^{2}\binom{n}{k}(x^2+2x+1)^{(k)}(\ln x)^{(n-k)}+0\\
&= (x^2+2x+1)\cdot(-1)^{n+1}(n-1)!x^{-n}+n\cdot 2(x+1)(-1)^n(n-2)!x^{-(n-1)}\\
&\quad + n(n-1)(-1)^{n-1}(n-3)!x^{-(n-2)}
\end{aligned}$$

当 $n=1$，$f'(x)=2(x+1)\ln x+(x+1)^2\frac{1}{x}$. 综上所述，

$$f^{(n)}(x)=\begin{cases}(2x+2)\ln x+\dfrac{x^2+2x+1}{x}, & n=1\\ -\dfrac{x^2+2x+1}{x^2}+\dfrac{4x+4}{x}+2\ln x, & n=2\\ (x^2+2x+1)\cdot(-1)^{n+1}(n-1)!x^{-n} & \\ \quad +n\cdot 2(x+1)(-1)^n(n-2)!x^{-(n-1)} & \\ \quad +n(n-1)(-1)^{n-1}(n-3)!x^{-(n-2)}, & n\geq 3.\end{cases}$$

$$f^{(n)}(2)=\begin{cases}6\ln 2+\dfrac{9}{2}, & n=1\\ 2\ln 2+\dfrac{15}{4}, & n=2\\ (-1)^n\dfrac{n!}{2^n}\Big(-\dfrac{9}{n}+\dfrac{12}{n-1}-\dfrac{4}{n-2}\Big), & n\geq 3\end{cases}$$

6. (10 pts) 解答题

(a) (2') 写出 $(1+x)^\alpha$ （$\alpha \in \mathbb{R}$）带佩亚诺余项的 n 阶麦克劳林公式.

Solution:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

注意：由于 α 不一定是正整数，不可以写成阶乘.

(b) (8') 求 $\sqrt{1+\sin x}$ 带佩亚诺余项的 3 阶麦克劳林公式.

Solution:

记 $f(x) = \sqrt{1+\sin x}$. $\qquad f(0) = \sqrt{1+0} = 1$.

$f'(0) = [\frac{1}{2}(1+\sin x)^{-1/2}\cos(x)]|_{x=0} = \frac{1}{2}$.

$f''(0) = -\frac{1}{4}(1+\sin x)^{-3/2}\cos x - \frac{1}{2}(1+\sin x)^{-1/2}\sin x|_{x=0} = -\frac{1}{4}$.

$f^{(3)}(0) = \frac{3}{8}(1+\sin x)^{-5/2}\cos x + 0 + 0 - \frac{1}{2}(1+\sin x)^{-1/2}\cos x|_{x=0} = -\frac{1}{8}$.

故

$$\sqrt{1+\sin x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{48}x^3 + o(x^3).$$

7. (10 pts) 证明题

已知函数 $g(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin\pi x}{x(x-1)}, & x\neq 0,1,\\ 2, & x=0,1.\end{cases}$ 证明:

(a) (4’) $x=0$ 和 $x=1$ 是 $g(x)$ 的可去间断点.

Solution:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\pi x}{x(x-1)}=-\lim_{x\to 0}\frac{\pi\sin\pi x}{\pi x}=-\pi;$$
$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin\pi x}{x(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{-\pi\sin\pi(x-1)}{\pi(x-1)}=-\pi.$$

因此 $x=0$ 和 $x=1$ 是 $g(x)$ 的可去间断点.

(b) (6’) 若函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可导, 且 $f(x)g(x)$ 连续, 则存在 $\xi\in\mathbb{R}$, 使得 $1+\xi f'(\xi)=e^{-f(\xi)}$.

Solution: 首先分析 $f(x)$ 的性质. 不难发现，$g(x)$ 在 $x=0,x=1$ 两点是不连续的, 在其它点是连续的，因此 $f(x)g(x)$ 在 $x=0,x=1$ 两点外也是必然连续的. 要使 $f(x)g(x)$ 在 $x=0,x=1$ 处连续，需有

$$\lim_{x\to x_0}f(x)g(x)=f(0)g(0),\quad x_0=0\text{或}x_0=1.$$

则，因为 $f(x)$ 连续，$g(x)$ 在 $x=0,x=1$ 两点的极限存在，

$$\lim_{x\to x_0}f(x)g(x)=\lim_{x\to x_0}f(x)\lim_{x\to x_0}g(x)=f(x_0)\cdot(-\pi)=2f(x_0)$$

因此 $f(x_0)=0$，即 $f(0)=f(1)=0$.

构造辅助函数 $F(x)=xe^{f(x)}$. $F(0)=0,F(1)=1$. 则

$$\exists\xi\in(0,1),\ \text{s.t.}F'(\xi)=\frac{F(1)-F(0)}{1-0}=1.$$

而

$$F'(x)=e^{f(x)}+xe^{f(x)}f'(x)$$

因此

$$\exists\xi\in(0,1),\ F'(\xi)=e^{f(\xi)}(1+\xi f'(\xi))\text{ 即 }1+\xi f'(\xi)=e^{-f(\xi)}.$$

□