

ShanghaiTech University

GEMA1001 Calculus I
Fall 2023

Midterm Exam

Answer composed by Yixuan Liu

November 16, 2025

1. (20 pts) 单项选择题

- (a) (4') 已知函数 $f(x) = |x|$, $g(x) = \text{sgn}(x)$, 则 $g(f(x)) = (\quad)$

A. $\begin{cases} -1 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$ B. $\begin{cases} 1 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$ C. $\begin{cases} -1 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0. \end{cases}$ D. $\begin{cases} 1 & x \neq 0 \\ -1 & x = 0. \end{cases}$

Solution: B.

$f(x) = |x| \geq 0$, 因此在所有非零点, $g(f(x)) = g(|x|) = 1$. 注意 $g(x)$ 在 0 处的定义为 0,

- (b) (4') 设函数 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上有定义, 且对 $\forall x \in \mathbb{R}$, 均有 $x + \cos x \leq f(x) \leq x + 1$, 则 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处 ()

 - A. 不存在极限.
 - B. 有极限但不连续.
 - C. 连续但不可导.
 - D. 可导.

Solution: D.

首先，根据夹逼定理，函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的极限存在：

$$1 = \lim_{x \rightarrow 0} (x + \cos x) \leq \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow 0} (x + 1) = 1.$$

对不等式直接取 $x = 0$, 得 $1 \leq f(0) \leq 1$, 因此 $f(0) = 1 = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. 故 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处连续.

假设 $f(x)$ 在 0 处可导，根据导数的定义：

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x}$$

据不等式

$$x + \cos x - 1 \leq f(x) - 1 \leq x$$

当 $x > 0$, 有 $1 + \frac{\cos x - 1}{x} \leq \frac{f(x) - 1}{x} \leq 1$. 据夹逼定理, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - 1}{x} = 1$.

故 $f(x)$ 的右导数存在. 同理可得左导数也存在, 且左右导数相等, 故 $f(x)$ 可导.

- (c) (4') 若曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 \sin t + \cos t, \\ y = \sin t - 2 \cos t, \end{cases}$ 则 C 在 $t = 0$ 处的切线方程为 ()

$$A.y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}.$$

$$B.y = 2x - 4.$$

$$C.y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}.$$

$$D.y = -2x.$$

Solution: A.

首先求 $t = 0$ 时的点: $x = 1, y = -2$. 根据参数方程求导法则,

$$\frac{dx}{dt} = 2 \cos t - \sin t, \quad \frac{dy}{dt} = \cos t + 2 \sin t.$$

代入 $t = 0$ 得 $\frac{dx}{dt} = 2, \frac{dy}{dt} = 1$. 故 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$.

将点 $(1, -2)$ 和斜率 $\frac{1}{2}$ 代入直线方程, 得答案为 A.

- (d) (4') 设函数 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上可导, 则 “ $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上有界” 是 “ $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$ 存在”的 ()

- A. 充分但非必要条件. B. 必要但非充分条件.
C. 充分且必要条件. D. 既非充分又非必要条件.

Solution: D.

反例: $\sin x$ 在 \mathbb{R} 上可导且有界, 但 $x \rightarrow \infty$ 时导函数极限不存在.

$f(x) = x$ 在 \mathbb{R} 上可导且 $x \rightarrow \infty$ 时 $f'(x) \equiv 1$ 极限存在, 但其在 \mathbb{R} 上无界.

- (e) (4') 设函数 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上连续, $a_1 \in \mathbb{R}, a_{n+1} = f(a_n), n \in \mathbb{Z}^+$. 关于下列两个结论:

- (1) 若 $f(x)$ 严格单调增加且有上界, 则数列 $\{a_n\}$ 收敛;
(2) 若 $f(x)$ 严格单调减少且有界, 则数列 $\{a_n\}$ 收敛;

正确的选项是 ()

- A. (1) (2) 都正确 B. (1) (2) 都错误.
C. (1) 正确 (2) 错误. D. (1) 错误 (2) 正确.

Solution: B.

对 (1), 考虑 $a_{k+1} = f(a_k)$ 和 a_k 的关系.

- 若 $a_{k+1} > a_k$, 则 $a_{k+2} = f(a_{k+1}) > f(a_k) = a_{k+1}$. 由数学归纳法易得数列 $\{a_n\}$ 单调递增, 又 $\{a_n\}$ 有上界, 故 a_n 收敛;

- 若 $a_{k+1} < a_k$, 则 $a_{k+1} = f(a_{k+1}) < f(a_k) = a_k$. 由数学归纳法易得数列 $\{a_n\}$ 单调递减, 而无下界, 则 $\{a_n\}$ 不一定收敛;
- 若 $a_{k+1} = a_k$, 则显然数列 $\{a_n\}$ 收敛.

因此, (1) 错误.

对 (2), 考虑函数 $f(x) = -x + 1$, 取 $a_1 = 1$, 则 a_k 的值持续在 0 与 1 之间震荡, 极限不存在, 故 (2) 错误

2. (20 pts) 填空题

(a) (4') 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n^2+1} + \frac{n+2}{n^2+2} + \cdots + \frac{n+n}{n^2+n} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$.

Solution: 3/2.

考虑放缩

$$\sum_{i=1}^n \frac{n+i}{n^2+n} \leq \sum_{i=1}^n \frac{n+i}{n^2+i} \leq \sum_{i=1}^n \frac{n+i}{n^2}$$

则

$$\sum_{i=1}^n \frac{n+i}{n^2+n} = \frac{n^2}{n^2+n} + \frac{n(n+1)}{2(n^2+n)}$$

当 $n \rightarrow \infty$, 该式极限为 $\frac{3}{2}$. 同理, 右式极限也为 $\frac{3}{2}$. 由夹逼定理, 原极限为 $\frac{3}{2}$.

(b) (4') 函数 $f(x) = \frac{\ln|x|}{x-2} \sin \frac{1}{x-1}$ 的第二类间断点的个数是: $\underline{\hspace{2cm}}$.

Solution: 2.

$f(x)$ 的定义域为:

$$|x| > 0, x-2 \neq 0, x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2\}.$$

- 0 是无穷间断点, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln|x| \cdot \frac{\sin(-1)}{-2}$, 有界量乘以无穷大量仍是无穷大量.
- 1 是可去间断点, $\lim_{x \rightarrow 1} |f(x)| \leq \lim_{x \rightarrow 1} |- \ln|x|| = 0$, 左右极限存在且相等.
- 2 是无穷间断点, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \ln 2 \cdot \sin 1 \cdot (x-2)^{-1}$, 有界量乘以无穷大量仍是无穷大量.

(c) (4') 已知函数 $f(x) = x^{\sin x}$, 则 $df \Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

Solution: dx .

法 1:

$$f'(x) = (e^{\ln x \cot \sin x})' = e^{\ln x \cdot \sin x} \cdot (\sin x/x + \ln x \cos x)$$

故

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^1 \cdot \left(1/\left(\frac{\pi}{2}\right) + 0\right) = 1.$$

法 2:

$$\ln f(x) = \sin x \cdot \ln x \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \cos x \cdot \ln(x) + \frac{\sin x}{x}$$

故

$$f'(\frac{\pi}{2}) = f(\frac{\pi}{2})(\cos \frac{\pi}{2} \cdot \ln \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2}{\pi}) = \frac{\pi}{2} \cdot (0 + \frac{2}{\pi}) = 1.$$

因此结果为 $1dx = dx$.

- (d) (4') 若可微函数 $y = y(x)$ 由方程 $y = -ye^x + 2e^y \sin x - 7x$ 所确定, 则 $y'(0) = \underline{\hspace{2cm}}$.

Solution: $-5/2$.

两边求导

$$y' = -(y'e^x + ye^x) + 2(y'e^y \sin x + e^y \cos x) - 7$$

将 $x = 0$ 代回原方程

$$y|_{x=0} = -y|_{x=0}e^0 + 2e^y|_{x=0} \sin 0 - 7 \cdot 0 = -y|_{x=0} \Leftrightarrow y|_{x=0} = 0.$$

因此 (以下省略 $x = 0$)

$$y' = -(y'e^0 + ye^0) + 2(y'e^y \sin 0 + e^y \cos 0) - 7 = -(y' + 0) + 2(0 + 1) - 7$$

$$\text{即 } y'(0) = -\frac{5}{2}.$$

- (e) (4') 曲线 $x = y^4 + 2y^3 - 1$ 在点 $(2, 1)$ 处的法线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

Solution: $y = -10x + 21$.

$$\frac{dx}{dy} = 4y^3 + 6y^2 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{4y^3 + 6y^2}.$$

代入 $x = 2, y = 1$ 得

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=2} = \frac{1}{4+6} = \frac{1}{10}.$$

故切线斜率为 $1/10$, 则法线斜率为 -10 . 因此法线方程为

$$y - 1 = -10(x - 2) \Leftrightarrow y = -10x + 21.$$

3. (8 pts) 极限定义证明题

用极限定义证明: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2 - x + 1} = 2$.

Solution: 已知, 当 $|x| > 1$ 时,

$$\left| \frac{2x^2}{x^2 - x + 1} - 2 \right| = \left| \frac{2x^2 - 2x^2 + 2x - 2}{x^2 - x + 1} \right| < 2 \left| \frac{x - 1}{x^2 - x} \right| = \frac{2}{|x|}$$

取 $X = \max \left\{ 1, \frac{2}{\epsilon} \right\}$, 则

$$\forall \varepsilon > 0, |x| > X, \left| \frac{2x^2}{x^2 - x + 1} - 2 \right| < \frac{2}{|x|} < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

即得结果, 证毕. □

4. (16 pts) 极限计算

(a) (8') 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+x)}{x} \right)^{\frac{1}{e^x - 1}}$.

Solution:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+x)}{x} \right)^{\frac{1}{e^x - 1}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln(\frac{\ln(1+x)}{x}) \frac{1}{e^x - 1}}$$

问题转化为求 $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(\frac{\ln(1+x)}{x}) \frac{1}{e^x - 1}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \ln(\frac{\ln(1+x)}{x}) \frac{1}{e^x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \ln(\frac{x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{x}) \frac{1}{e^x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1 - \frac{1}{2}x + o(x)) \frac{1}{e^x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x + o(x)}{x + o(x)} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

故原极限

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+x)}{x} \right)^{\frac{1}{e^x - 1}} &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln(\frac{\ln(1+x)}{x}) \frac{1}{e^x - 1}} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \ln(\frac{\ln(1+x)}{x}) \frac{1}{e^x - 1}} \\ &= e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}. \end{aligned}$$

(b) (8') 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 \in (0, 1]$, $a_{n+1} = \frac{a_n + a_n^3}{2}$, $n = 1, 2, 3, \dots$. 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在并求之.

Solution: 先使用数学归纳法证明 a_n 有界. 已知 $a_1 \in (0, 1]$, 假设 $a_k \in (0, 1]$. 那么:

$$a_{k+1} = \frac{1}{2}a_k(a_k^2 + 1) \leq \frac{1}{2} \cdot 2 = 1; \quad \text{显然 } a_{k+1} > 0$$

因此, $\forall n \in N^+$, $a_n \in (0, 1]$. 另,

$$a_{k+1} - a_k = \frac{a_k + a_k^3}{2} - a_k = \frac{a_k^3 - a_k}{2} = \frac{1}{2}a_k(a_k^2 - 1) \leq 0.$$

因此, 数列 $\{a_n\}$ 单调递减有下界, 极限存在. 设极限为 L , 则

$$L = \frac{L + L^3}{2}$$

解得 $L = 0$ 或 $L = 1$. 可以看出, 当 $a_1 \neq 1$ 时, 极限为 0; 当 $a_1 = 1$ 时, 极限为 1.

5. (16 pts) 导数计算

(a) (8') 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \ln(1+x^2), & x \leq 0, \\ x^2 \sin \frac{1}{x}, & x > 0, \end{cases}$ 求 $f'(x)$.

Solution: $x = 0$ 为该函数的间断点. 由于该点左右极限都存在且相等 0, 函数是 \mathbb{R} 上的连续函数.

- $x < 0$, $f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.
- $x > 0$, $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} \cdot (-\frac{1}{x^2})$

导函数在 $x = 0$ 以外的所有点连续. 考虑 $x = 0$, 该处的左导数为 $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x}{1+x^2} = 0$, 右导数 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\cos \frac{1}{x}$, 极限不存在.

故函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的导数不存在. 综上所述,

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x}{1+x^2}, & x < 0 \\ 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x > 0. \end{cases}$$

(b) (8') 设函数 $f(x) = (x+1)^2 \ln x$, 求 $f^{(n)}(2)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) .

Solution: 根据 Leibniz 公式, 当 $n \geq 3$,

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x^2 + 2x + 1)^{(k)} (\ln x)^{(n-k)} \\
&= \sum_{k=0}^2 \binom{n}{k} (x^2 + 2x + 1)^{(k)} (\ln x)^{(n-k)} + \sum_{k=3}^n \binom{n}{k} (x^2 + 2x + 1)^{(k)} (\ln x)^{(n-k)} \\
&= \sum_{k=0}^2 \binom{n}{k} (x^2 + 2x + 1)^{(k)} (\ln x)^{(n-k)} + 0 \\
&= (x^2 + 2x + 1) \cdot (-1)^{n+1} (n-1)! x^{-n} + n \cdot 2(x+1)(-1)^n (n-2)! x^{-(n-1)} \\
&\quad + n(n-1)(-1)^{n-1} (n-3)! x^{-(n-2)}
\end{aligned}$$

当 $n = 1$, $f'(x) = 2(x+1) \ln x + (x+1)^2 \frac{1}{x}$. 综上所述,

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} (2x+2) \ln x + \frac{x^2 + 2x + 1}{x}, & n = 1 \\ -\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2} + \frac{4x + 4}{x} + 2 \ln x, & n = 2 \\ (x^2 + 2x + 1) \cdot (-1)^{n+1} (n-1)! x^{-n} \\ \quad + n \cdot 2(x+1)(-1)^n (n-2)! x^{-(n-1)} \\ \quad + n(n-1)(-1)^{n-1} (n-3)! x^{-(n-2)}, & n \geq 3. \end{cases}$$

$$f^{(n)}(2) = \begin{cases} 6 \ln 2 + \frac{9}{2}, & n = 1 \\ 2 \ln 2 + \frac{15}{4}, & n = 2 \\ (-1)^n \frac{n!}{2^n} \left(-\frac{9}{n} + \frac{12}{n-1} - \frac{4}{n-2} \right), & n \geq 3 \end{cases}$$

6. (10 pts) 解答题

(a) (2') 写出 $(1+x)^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) 带佩亚诺余项的 n 阶麦克劳林公式.

Solution:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

注意: 由于 α 不一定是正整数, 不可以写成阶乘.

(b) (8') 求 $\sqrt{1+\sin x}$ 带佩亚诺余项的 3 阶麦克劳林公式.

Solution:

$$\text{记 } f(x) = \sqrt{1+\sin x}. \quad f(0) = \sqrt{1+0} = 1.$$

$$f'(0) = [\frac{1}{2}(1+\sin x)^{-1/2} \cos(x)]|_{x=0} = \frac{1}{2}.$$

$$f''(0) = -\frac{1}{4}(1+\sin x)^{-3/2} \cos x - \frac{1}{2}(1+\sin x)^{-1/2} \sin x|_{x=0} = -\frac{1}{4}.$$

$$f^{(3)}(0) = \frac{3}{8}(1+\sin x)^{-5/2} \cos x + 0 + 0 - \frac{1}{2}(1+\sin x)^{-1/2} \cos x|_{x=0} = -\frac{1}{8}.$$

故

$$\sqrt{1+\sin x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{48}x^3 + o(x^3).$$

7. (10 pts) 证明题

已知函数 $g(x) = \begin{cases} \frac{\sin \pi x}{x(x-1)}, & x \neq 0, 1, \\ 2, & x = 0, 1. \end{cases}$ 证明:

(a) (4') $x = 0$ 和 $x = 1$ 是 $g(x)$ 的可去间断点.

Solution:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \pi x}{x(x-1)} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi \sin \pi x}{\pi x} = -\pi;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\pi \sin \pi(x-1)}{\pi(x-1)} = -\pi.$$

因此 $x = 0$ 和 $x = 1$ 是 $g(x)$ 的可去间断点.

- (b) (6') 若函数 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上可导, 且 $f(x)g(x)$ 连续, 则存在 $\xi \in \mathbb{R}$, 使得 $1 + \xi f'(\xi) = e^{-f(\xi)}$.

Solution: 首先分析 $f(x)$ 的性质. 不难发现, $g(x)$ 在 $x = 0, x = 1$ 两点是不连续的, 在其它点是连续的, 因此 $f(x)g(x)$ 在 $x = 0, x = 1$ 两点外也是必然连续的. 要使 $f(x)g(x)$ 在 $x = 0, x = 1$ 处连续, 需有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = f(0)g(0), \quad x_0 = 0 \text{ 或 } x_0 = 1.$$

则, 因为 $f(x)$ 连续, $g(x)$ 在 $x = 0, x = 1$ 两点的极限存在,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = f(x_0) \cdot (-\pi) = 2f(x_0)$$

因此 $f(x_0) = 0$, 即 $f(0) = f(1) = 0$.

构造辅助函数 $F(x) = xe^{f(x)}$. $F(0) = 0, F(1) = 1$. 则

$$\exists \xi \in (0, 1), \text{ s.t. } F'(\xi) = \frac{F(1) - F(0)}{1 - 0} = 1.$$

而

$$F'(x) = e^{f(x)} + xe^{f(x)}f'(x)$$

因此

$$\exists \xi \in (0, 1), F'(\xi) = e^{f(\xi)}(1 + \xi f'(\xi)) \text{ 即 } 1 + \xi f'(\xi) = e^{-f(\xi)}.$$

□