高等数学 I　习题课 13

不定积分与定积分

上海科技大学

2025.12.11

习题课 12 反馈

- 后续章节解题技巧性提高，希望能涉及更多方法、技巧
  - 会进行相关讲解，尤其是积分的多种计算方法

目录

目录

回顾

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x = F[\varphi(x)] + C$$

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F[\varphi^{-1}(x)] + C$$

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$$

例

求

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{e^x - e^{-x}}$$

例

求

$$\int \frac{x\tan\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$$

例 (重访，教材例 5.39)

求

$$\int e^{ax}\sin bx\mathrm{d}x \quad (a\neq 0)$$

有理函数

有理函数是指两个实系数多项式的商，一般形式为

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

其中 P, Q 分别是 n, m 次实系数多项式.

由定义知：n 与 m 可以相等也可以不等；虽然称为“有理”函数，但多项式的系数可以是无理数.

当 $n < m$，称 $R(x)$ 是真分式，否则为假分式.

代数基本定理

一个真分式 $R(x)$ 必定能分解为以下四种分式之和：

$$\frac{A}{x-a}, \frac{A}{(x-a)^k}, \frac{Bx+D}{x^2+px+q}, \frac{Bx+D}{(x^2+px+q)^k}$$

则可以逐项进行积分. 前两者的积分是显然的；后两者的积分需要多加练习，学会自行推导.

本定理要求熟练掌握，但不要求理解其原理.

例 5.44

求

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^{10}+1)}$$

注意

- 使用有理函数积分做部分分式展开时，分母的次数不宜过高，否则拆得的项太多、过于复杂，此时应使用拆项法

例

求

$$\int \frac{x^2+2}{(x+1)^4}\mathrm{d}x$$

三角函数有理式的积分

三角函数有理式指形如 $R(\sin x, \cos x)$ 的函数，其中 $R(u, v)$ 是将 (u, v) 经有理运算所得的表达式. 可分为以下类型：

- $R(\sin x)\cos x\mathrm{d}x$ 或 $R(\cos x)\sin x\mathrm{d}x$
- $R(\sin^2 x, \cos^2 x)\mathrm{d}x$
- $\cos mx\cos nx\mathrm{d}x, \sin mx\sin nx\mathrm{d}x, \ldots$

三角函数有理式的积分

- $R(\sin x)\cos x\mathrm{d}x$ 或 $R(\cos x)\sin x\mathrm{d}x$：转化为 $R(\sin x)\mathrm{d}\sin x, R(\cos x)\mathrm{d}\cos x$
- $R(\sin^2 x, \cos^2 x)\mathrm{d}x$：作代换 $\tan x = u$
- $\cos mx\cos nx\mathrm{d}x, \sin mx\sin nx\mathrm{d}x, \ldots$：和差化积（学会推导!）

万能代换

令 $t=\tan(x/2)$，则

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\mathrm{d}x=\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

将关于三角函数的有理函数转化为关于单变量 t 的有理函数，便于积分.

简单无理函数

若被积函数含有根式 $\sqrt[n]{ax+b}$, $\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$，常采取第二换元法化为有理函数的积分.

例 5.50

求

$$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x}}\mathrm{d}x$$

例 5.51

求

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\sqrt{x}-1}}$$

21Fall, Final Exam, 13

求

$$\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\mathrm{d}x$$

目录

定义

若函数 f 在区间 $[a,b]$ 上由定义且有界，若 $\exists I\in\mathbb{R},\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，使得对任意 $[a,b]$ 的划分 (*partition*)

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b,$$

及任意 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i],1\le i\le n$，有 1

$$\lambda=\max\{x_i-x_{i-1}\}<\delta \quad\Rightarrow\quad |\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})-I|<\varepsilon$$

则称 f 在 $[a,b]$ **上黎曼可积**，记 $f\in R[a,b]$. 极限 I 叫做 f 在 $[a,b]$ 上的定积分，记为 $I=\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$

理解

- 定义中，划分与 ξ_i 的选取都是任意的
- 几何意义：曲线与 x 轴围成的区域的（有符号）面积
- 函数可以有有限个间断点：分段进行积分.
- 充分条件：f 在 $[a, b]$ 上满足以下条件之一：
    - 连续
    - 有界且有有限个间断点
    - 单调

例 5.2

使用定义计算定积分

$$\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x$$

例 5.3

使用定义计算定积分

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

例 5.4

已知 $\int_0^1 x^p \mathrm{d}x = \dfrac{1}{p+1}$，计算极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}}$$

定积分的性质

- 上下限交换

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x, \int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$$

定积分的性质

- 线性性：

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

- 区间可加性：设函数 $f \in R[a,b], c \in (a,b)$，则 $f \in R[a,c], f \in R[c,b]$ 且

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

定积分的性质

- 保号性：设函数 $f \in R[a,b]$，且在 $[a,b]$ 上 $f(x) \geq 0$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0.$$

保号性推论

- 保序性：设函数 $f, g \in R[a,b]$，且在 $[a,b]$ 上 $f(x) \leq g(x)$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

- 估值不等式：设函数 $f, g \in R[a,b]$，且在 $[a,b]$ 上 $m \leq f(x) \leq M$，则

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq M(b-a)$$

- 绝对值不等式：设函数 $f \in R[a,b]$，且 $|f| \in R[a,b]$，则

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$$

例 5.5

估计定积分

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{1-x^2+x^3}\mathrm{d}x$$

的值.

例 5.6

设函数 $f(x) \in C[a,b]$，且在 $[a,b]$ 上，$f(x) \geq 0$. 若 $\displaystyle\int_a^b f(x) = 0$，求证 $f(x) \equiv 0$.

定积分的性质（Schwarz 不等式）

设函数 $f(x), g(x) \in C[a,b]$，则

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$$

积分中值定理

设函数 $f \in C[a,b], g \in R[a,b]$，且 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号，则

$$\exists \xi \in [a,b],\ \text{s.t.}\ \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

例 5.8

求极限

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$$

例 5.9

设函数 $f \in C[0,1]$，且 $f \in D(0,1)$，又 $f(1) = 2\int_0^{\frac{1}{2}} xf(x)\mathrm{d}x$，证明：

$$\exists \xi \in (0,1), \text{ s.t. } f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0.$$