高等数学 I　习题课 17

期末复习

上海科技大学

2026.1.6

目录

目录

等价关系

逻辑基础

- $P \Leftrightarrow Q$ 等价于 $P \Rightarrow Q \wedge Q \Rightarrow P$
- 当 P 成立，有 $Q \cdots P \Rightarrow Q$
- P 成立，仅当 Q 成立 $\cdots Q \Rightarrow P$

注意

- 证明**当且仅当**类命题时，一定既要证明充分性，也要证明必要性

More in SI120 / Discrete Mathematics ...

反证法

常用证明方法

- 证明逆否命题法 *Proof by contrapositive*
    - 通过证明 $\neg Q \Rightarrow \neg P$ 来证明 $P \Rightarrow Q$
- 归谬法 *Proof by contradiction*
    - 作出假设，通过数学推断得到矛盾

数学归纳法

基本思想

为了证明一个命题 $P(n)$ 对**有限的**整数 $n \geq n_0$ 成立，只需证明：

- $P(n_0)$ 成立　　(大多数时候，$n_0 = 0$ 或 1)
- $\forall k \geq n_0, P(k) \Rightarrow P(k+1)$

理解：多米诺骨牌

复习：习题课 02

单调性

Definition (单调性定义)

记 D 为函数的定义域

- 函数单调递增 $\Leftrightarrow \forall x, y \in D, x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$
- 函数**严格**单调递增 $\Leftrightarrow \forall x, y \in D, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$

注意与其他教材的区别

周期性

Definition (周期函数)

函数 $f(x)$ 是周期函数，当且仅当

$$\exists T \in \mathbb{R}, T > 0, \forall x \in \mathbb{D}, f(x) = f(x+T)$$

方程与隐函数

隐函数概念

- 如果方程 $F(x,y)=0$ 定义了函数 $y=f(x)$，我们称 $F(x,y)=0$ 为 $y=f(x)$ 的**隐性定义**或**隐函数方程**.
- 一个方程通常不能定义一个隐函数（例:$x^2+y^2=1$），但是方程经常在一个点的邻域定义一个隐函数.
- 方程中 x 和 y 的地位是**平等**的，因此隐函数的自变量可以选 x 或 y

隐函数定理

- 方程是否局部定义了一个函数，是重要的**隐函数定理**的内容.

参数方程与极坐标

参数方程

- 有些图形可以使用 $x=\varphi(t), y=\psi(t)$ 的方程组来描述，此时，x, y 都是一个参数 t 的函数，给定一个确定的参数 t，能够找到唯一一组 (x, y).
- 消去参数 t 得到一个方程，可能定义了一个隐函数.

极坐标

- 极坐标系：使用 r 表示点到原点的距离，θ 表示点与原点连线和 $x+$ 的夹角
- 唯一确定一个点 $(r, \theta) \Rightarrow (x=r\cos\theta, y=r\sin\theta)$
- 一般地，约定 $0 \le r < +\infty, 0 \le \theta < 2\pi$

目录

数列极限的定义

Definition (数列极限)

对数列 $\{x_n\}$，若

$$\exists L \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n > N,\ |x_n - L| < \varepsilon$$

则称数列 $\{x_n\}$ 的**极限**为 L，或 $\{x_n\}$ **收敛**于 L，记

$$\lim_{n\to\infty} x_n = L \qquad \text{或} \qquad x_n \to L (n \to \infty)$$

性质

数列极限的性质

- 唯一性：收敛数列的极限唯一
- 有界性：收敛数列是有界的
- 改变/删除/增加有限个项，数列的收敛性不变
- 保序性：若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A > B = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$，
  则 $\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n > N,\ x_n > y_n$
- 保号性：保序性中取 $y_n = 0$
- 归并性：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L \Leftrightarrow \forall$单增数列$\{n_k\} \subset \mathbb{N},\ \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = L$
- 极限和四则运算的顺序可以交换

判定

判定方法

- 夹逼定理
- 单调有界数列收敛定理
- 区间套定理

函数极限的定义

Definition (函数极限)

设函数在一点 a 的**去心邻域** $\dot{U}(a)$ 有定义，若

$$\exists L \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in \dot{U}(a, \delta),\ |f(x) - L| < \varepsilon$$

则称当 x 趋近于 a 时，函数 $f(x)$ 的**极限**为 L 或函数 $f(x)$ **收敛**于 L，记为

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \qquad \text{或} \qquad f(x) \to L (x \to a)$$

无穷情况

无穷远处的极限

若函数在 $|x| > X$ 区间内有定义，且

$$\exists L \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists X_0 > X,\ \forall |x| > X_0,\ |f(x) - L| < \varepsilon$$

则称当 x 趋近于 ∞ 时，函数 $f(x)$ 的**极限**为 L 或函数 $f(x)$ **收敛**于 L，记为

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \qquad \text{或} \qquad f(x) \to L(x \to a)$$

类似地，我们可以给出左极限、右极限、发散的定义.

性质

函数极限的性质

- 唯一性：在一点收敛的函数在该点的极限唯一
- 局部有界性：在一点收敛的函数在该点的某邻域有界
- 局部保序性：若 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A > B = \lim\limits_{x\to a} g(x)$，
  则 $\exists\delta > 0,\ \forall x \in \dot{U}(a,\delta),\ f(x) > g(x)$.
- 局部保号性：$g(x) = 0$

判定

判定方法

- 夹逼定理
- 单调有界单侧极限存在定理
- 海涅定理：

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \forall \{x_n\}, (\lim_{n\to\infty} x_n = a, x_n \neq a) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$$

- 海涅定理适合用于证明极限不存在，不便用于证明极限存在

无穷小的定义

若 $x \to a$ 时（a 可能是 ∞）,$f(x) \to 0$ 且 $g(x) \to 0$，则：

- $f(x)$ 是 $g(x)$ 的**高阶无穷小**，记 $f(x) = o(g(x))$, 当且仅当

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

- $f(x)$ 是 $g(x)$ 的**同阶无穷小**，记 $f(x) = O(g(x))$, 当且仅当

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = c, c \neq 0$$

- $f(x)$ 是 $g(x)$ 的**等价无穷小**，记 $f(x) \sim g(x)$, 当且仅当

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

无穷小的阶数

阶数与主部

若 $x \to a$ 时，$f(x)$ 是与 $(x-a)^k (k>0)$ 同阶的无穷小，我们称 $f(x)$ 是 $(x-a)$ 的 k **阶无穷小**.

若 $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{(x-a)^k} = c \neq 0$，则称 $c(x-a)^k$ 是 $f(x)$ 的**主部**，此时我们有

$$f(x) = c(x-a)^k + o((x-a)^k)$$

替换规则

- 乘除中的等价无穷小可以替换，加减中的等价无穷小**有条件地**替换（主部不抵消）

函数连续性的定义

Definition (连续性)

若函数 $f(x)$ 在一点 x_0 的邻域内有定义，则 f 在该点**连续**，当且仅当函数在该点的极限存在且等于该点的函数值，即

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

或

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta),\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

备注

- 将极限换为左、右极限，则得到左、右连续的定义
- 所有初等函数在其定义域区间内连续，在区间的端点处单侧连续

间断点的分类

分类

- 第一类间断点：左、右极限都存在
  - 左右极限相等：可去间断点，表现为从完整的函数图像上挖去了一个点
  - 左右极限不相等：跳跃间断点，表现为函数图像上出现了不连续的函数值变化（且变化前后都为有限值）
- 第二类间断点：左、右极限不都存在
  - 其中之一为无穷：无穷间断点
  - 极限都不为无穷，但极限也不存在：振荡间断点（典例：$\sin\frac{1}{x}$）

要求

- 学会求间断点的值、判断间断点的类型

闭区间上连续函数的性质

三大性质

- 有界性：闭区间上的连续函数有界
- 最值存在：闭区间上的连续函数在区间上能取到最值
- 介值性：最大最小值之间的任何实数都可以在区间上取到

结论

- 连续函数将闭区间映射为闭区间

目录

导数

Definition (导数定义)

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域有定义，若极限

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

存在，则称 $f(x)$ 在 x_0 可导，上述极限称为该函数在 x_0 处的**导数**，记作：

$$f'(x_0)_{\textit{(Lagrange)}} \qquad \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} \textit{(Leibniz)} \qquad \dot{f}(x_0)_{\textit{(Newton)}}$$

备注

- 将上述极限换为左、右极限，得到左、右导数的定义.
- 可导 $\Rightarrow$ 连续，反之不一定.（魏尔斯特拉斯函数）

导函数

Definition (导函数)

若函数 $f(x)$ 在区间 I 内的每一点上都可导，且在区间闭端点处单侧可导，则称函数在区间上可导，记 $f \in D(I)$. 此时，称

$$x \in I,\ f(x) \in \mathbb{R}; \qquad x \mapsto f'(x)$$

$f'(x)$ 为 $f(x)$ 的**导函数**，常简称为导数

微分的定义

Definition (微分)

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域有定义，若 $\Delta x \to 0$ 时，有常数 A 使得

$$f(x_0+\Delta x) = f(x_0) + A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$$

则称 $f(x)$ 在 x_0 处**可微**，将 $f(x)$ 在 x_0 处的微分记作 $\mathrm{d}f|_{x=x_0} = A\mathrm{d}x$.

可微与可导

- 可微 $\Leftrightarrow$ 可导，且 $\mathrm{d}f|_{x=x_0} = f'(x_0)\mathrm{d}x$
- 微分与导数有区别，但对于一元实函数，类似于一个数与一个 1×1 矩阵的区别.

高阶导数

定义

若导函数在一点可导，称函数在该点**二阶可导**，且导函数在该点的导数为**二阶导数**. 如果在区间上每一点都二阶可导，就有**二阶导函数**.

依此类推可以定义 n 阶可导 $(f \in D^{(n)}(I))$、n 阶导函数 $f^{(n)}$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$

期中考前内容 结束

目录

费马定理

Theorem (费马定理)

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 取得极值，且 $f(x)$ 在 x_0 可导，则 $f'(x_0) = 0$.

驻点

- 导数值为 0 的点称为函数的**驻点**.
- 驻点一定是极值点吗?

罗尔定理

Theorem (罗尔定理)

设函数 $f(x)$ 满足：

- 在闭区间 $[a,b]$ 上连续
- 在开区间 (a,b) 上可导
- $f(a)=f(b)$

则 $\exists \xi \in (a,b)$，使得

$$f'(\xi)=0.$$

思考

- 尝试用数学语言，一句话写出罗尔定理

拉格朗日定理

Theorem (拉格朗日定理)

设函数 $f(x)$ 满足：

- 在闭区间 $[a,b]$ 连续
- 在开区间 (a,b) 可导

则

$$\exists\ \xi \in (a,b),\ \textsf{s.t.}\ f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

不难看出，罗尔定理是拉格朗日定理的特殊形式.

柯西定理

Theorem (柯西定理)

设函数 $f(t)$ 和 $g(t)$ 满足：

- 在闭区间 $[a, b]$ 连续
- 在开区间 (a, b) 可导，且 $\forall\, t \in (a, b)$, $g'(t) \neq 0$

则

$$\exists\, \xi \in (a, b),\ \textit{s.t.}\ \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

不难看出，拉格朗日定理是柯西定理的特殊形式.

达布定理

Theorem (达布定理)

若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可导，且 $f'_+(a) < f'_-(b)$，则

$$\forall\ c \in (f'_-(a), f'_+(b)),\ \exists\ \xi \in (a,b),\ \textit{s.t.}\ f'(\xi) = c.$$

结论

- 导函数即使不连续，也有介值性

导函数的极限

结论

设 $\delta > 0$，函数 $f(x)$ 在 $[x_0, x_0 + \delta)$ 上连续，在 $(x_0, x_0 + \delta)$ 内可导，若 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f'(x) = A$ 存在，则 $f(x)$ 在点 x_0 有右导数，且 $f'_+(x_0) = A$.

备注

- 修改所有与右导数相关的内容为左导数，命题依然成立.
- 即，若函数在某点的单侧邻域内连续且可导，则该点的单侧导数存在且等于到函数的极限.

洛必达法则

Theorem (洛必达法则 (0/0))

设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域 $\dot{U}(x_0,\delta)$ 内有定义，且满足：

- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$
- $f(x)$，$g(x)$ 在该去心邻域内可导，且 $g'(x)\neq 0$
- $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$ （A 为常数或 ∞）

则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$$

洛必达法则

Theorem (洛必达法则 (∞/∞))

设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域 $\dot{U}(x_0,\delta)$ 内有定义，且满足：

- $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$
- $f(x)$，$g(x)$ 在该去心邻域内可导，且 $g'(x)\neq 0$
- $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$（$A$ 为常数或 ∞）

则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=A$$

使用原则

洛必达法则的本质

- 函数在 $x = x_0$ 处的比值 等价于
  函数在 $\dot{U}(x_0)$ 内近似直线斜率的比值在 $x \to x_0$ 时的极限
- 与泰勒公式等价

使用原则

- 使用前先尽可能化简
- 确保条件均成立：
  0/0 或 ∞/∞，去心邻域内可导，上下求导后极限存在

泰勒定理 1

Theorem (佩亚诺余项)

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的邻域内有定义，且在 x_0 有 n 阶导数，那么

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$$

其中 $o((x-x_0)^n)$ 称为佩亚诺余项，定理结论称为 $f(x)$ 的带佩亚诺余项的 n 阶泰勒公式.

一个确定函数的泰勒公式中，多项式的系数是确定的.

泰勒定理 2

Theorem (拉格朗日余项)

设函数 $f(x)$ 在包含点 x_0 的开区间 (a,b) 内具有 $n+1$ 阶导数，则 $\forall x\in(a,b)$，有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

其中 ξ 介于 x_0 与 x 之间.

$\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ 称为拉格朗日余项.

麦克劳林公式

定义

在 0 处的泰勒公式. 课本 P176~177

函数性态

Definition (驻点)

使导数等于 0 的点称为函数的**驻点**.

Theorem (费马定理)

- x_0 是 $f(x)$ 的极值点，且 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则 x_0 是 $f(x)$ 的驻点.

单调性

Theorem (单调性判定)

设 $f(x) \in C[a,b] \cap D(a,b)$，则

- $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上**单调增（减）**当且仅当 $f'(x)$ 在区间内处处非负（正），且在任何子区间上不恒为 0.

极值

第一充分条件

设函数 f 在 x_0 某邻域上连续，在去心邻域上可导，

- 若 $f'(x)$ 在 x_0 左邻域为负，右邻域为正，x_0 是**极小值点**；
- 若 $f'(x)$ 在 x_0 左邻域为正，右邻域为负，x_0 是**极大值点**；
- 若 $f'(x)$ 在 x_0 左右邻域同号，x_0 不是极值点.

第二充分条件

设函数 f 在 x_0 有二阶导数，且 $f'(x_0) = 0$，

- 若 $f''(x_0) > 0, x_0$ 是**极小值点**；
- 若 $f''(x_0) < 0, x_0$ 是**极大值点**.

凸性

Definition (凸性定义)

设函数 $f \in C(I)$，若

$$\forall x_1, x_2 \in I,\ \forall t \in (0,1),\ f[tx_1 + (1-t)x_2] \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$$

则称函数在区间 I 上是**下凸**的. 若将 $\leq$ 换成 $\geq$，则称函数是**上凸**的.

凸性

Theorem (凸性判定)

- 设 $f(x) \in D(a,b)$，若 $f'(x)$ 在 (a,b) 上严格单调增（减），则函数在 (a,b) 上是下（上）凸的.
- 设 $f(x)$ 在 (a,b) 上二阶可导，若 $f''(x) > 0 (< 0)$，则函数在 (a,b) 上是下（上）凸的.

拐点

连续函数上凸和下凸区间的分界处称为**拐点**，该处函数的二阶导数为 0.

More in SI251 / Convex Optimization...

渐近线

定义

- 若 $\lim_{x\to x_0^{\pm}} f(x)=\infty$, $x=x_0$ 是函数图像的**垂直渐近线**. (x_0^+ 或 x_0^-)
- 若 $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=b$, $y=b$ 是函数图像的**水平渐近线**
- 若 $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-ax-b)=0$, $y=ax+b$ 是函数图像的**斜渐近线**.

计算

斜渐近线可以通过 $a=\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}, b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-ax)$ 计算

画图

步骤

- 定义域！！！
- 奇偶性，周期性
- 特殊点
- （一阶导数）单调区间、极值点与极值
- （二阶导数）上下凸区间、拐点与拐点处函数值
- 渐近线

目录

不定积分的定义

Definition (原函数与不定积分)

对函数 $f: I \to \mathbb{R}$，若存在函数 F 使得在区间上有 $F'(x) = f(x)$，称 F 是 f 的**原函数**.

f 在区间上全体原函数称为 $f(x)$ 的**不定积分**，记为：

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$$

注意

- 不定积分不是一个函数，而是一族函数.C 称为积分常数.

积分方法

基本积分法

- **查积分表**：背?
- **换元法**：

$$\int f(u(x))u'(x)\mathrm{d}x = \int f(u)\mathrm{d}u$$

  - 从左到右：第一换元法（凑微分）；从右到左：第二换元法.
  - 关键：跳出符号思维定式，活用“语言的任意性”.
- **分部积分法**：

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$$

积分方法

常见套路

- 有理函数积分：化为多个一次与二次分式之和
- 三角函数有理式积分
  - $R(\sin x)\cos x\mathrm{d}x$ 或 $R(\cos x)\sin x\mathrm{d}x$：转化为 $R(\sin x)\mathrm{d}\sin x, R(\cos x)\mathrm{d}\cos x$
  - $R(\sin^2 x, \cos^2 x)\mathrm{d}x$：作代换 $\tan x = u$
  - $\cos mx\cos nx\mathrm{d}x, \sin mx\sin nx\mathrm{d}x, \ldots$：和差化积（学会推导！）

定积分的定义

Definition (黎曼积分)

若函数 f 在 $[a,b]$ 上有界，对任意划分 $a = x_0 < \cdots < x_n = b$ 及任意标记点 ξ_i，当 $\lambda = \max\{x_i - x_{i-1}\} \to 0$ 时，黎曼和的极限存在：

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = I$$

则称 f 在 $[a,b]$ **上可积**，记为 $I = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

几何意义

- 曲线与 x 轴围成的（有号）面积.x 轴上方为正，下方为负.

可积性条件

黎曼可积的充分条件

f 在 $[a,b]$ 上满足下列条件之一：

1. 连续；
2. 有界，且只有有限个间断点（分段连续）；
3. 单调.

特殊例子：黎曼函数

$$f(x)=\begin{cases}1/n & x=m/n\in\mathbb{Q}\ \text{(既约分数)}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

该函数有无穷多个间断点，处处不单调，但在闭区间上**可积**（积分为 0）.

定积分的性质

基本性质

- 线性性质；区间可加性；保号性与保序性.

不等式性质

- **估值不等式：**

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq M(b-a)$$

- **绝对值不等式：**

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$$

积分中值定理

Theorem (积分中值定理)

设 $f \in C[a,b], g \in R[a,b]$ 且 $g(x)$ 保号，则存在 $\xi \in [a,b]$，使得：

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

解读： $f(\xi)$ 可视为 $f(x)$ 以 $g(x)$ 为权重的加权平均值.

变上限积分与 Newton-Leibniz 公式

变上限积分函数 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$

- **连续性**：f 可积 $\Rightarrow F$ 连续.
- **可导性**：若 f 连续，则 $F'(x)=f(x)$.
- 意义：变上限积分提供了为连续函数寻找原函数的方法.

Theorem (Newton-Leibniz 公式)

若 f 可积且 F 是 f 的一个原函数（F 连续），则：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$$

定积分计算技巧

技巧与注意

- **先画图！** 几何直观往往能简化问题.
- **利用对称性：**
  - 奇偶性：奇函数在对称区间积分为 0，偶函数加倍.
  - 周期性.
- **换元注意事项：**
  - 使用换元法时，**积分上下限**也要相应改变.

思考题

1. 举例：可积但是没有原函数的函数.
2. 举例：有原函数但是不可积的函数.

反常积分定义

无穷区间上的反常积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

无界函数的反常积分（瑕积分）

若 f 在 b 点附近无界：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\to0^+}\int_a^{b-\epsilon} f(x)\mathrm{d}x$$

注意

- 对于在多个点反常的积分，**必须**拆分为多个仅在一个端点反常的积分之和.

反直觉的例子

直觉误区： 函数在正无穷远处极限不为 0，或函数无界，积分一定发散吗?

反例 1：无穷远处震荡/非零

构造一个连续正函数 $g(x)$，在正无穷处极限不为 0，但 $\int_1^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.（通常构造为一系列变窄变高的“尖峰”叠加）

反例 2：无界函数

构造函数 $f(x)$ 使得其无界，但 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 存在.

$$\text{例如：}\quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2 \quad \text{（虽在 0 处无界，但收敛）}$$

微元法 (Method of Element)

核心思想

定积分适用于大多数“无穷多个无穷小量相加”的情景.

$$\text{总量} = \int \text{微元}\, \mathrm{d}x$$

几何应用

- 平面图形的面积微元
- 立体图形的截面体积微元
- 旋转体的薄壳微体积元
- 曲线的弧长微元

注意事项

- 难点在于找到正确的微元.
- 需掌握直角坐标、极坐标、参数方程下的不同表达形式.

目录

数项级数

Definition (无穷级数)

给定数列 $\{a_n\}$，称和式

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

为**无穷级数**，简称**级数**. 和式中的每一项称为级数的项，a_n 称为级数的通项或一般项.

有限项和

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

称为级数的前 n 项部分和.

敛散性

Definition (敛散性定义)

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛，且 $\lim_{n\to\infty} S_n = S$，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，且收敛到 S.

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

若 $\{S_n\}$ 发散则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

敛散性的不变性

性质

- 增、删、改有限项，级数的敛散性不变
- 若级数收敛到 S，则对其相邻若干项加括号并为一项后，级数仍然收敛到 S （逆命题不成立）
- 若级数收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

正项级数及其收敛原理

Definition (正项级数)

- 正项级数：$\forall n$，$a_n \geq 0$ 的级数

Theorem (收敛原理)

- 正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充要条件是其部分和数列 $\{S_n\}$ 有上界
- 推论：若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 满足：$\exists\ N > 0$，使得当 $n > N$ 时，有 $a_n \geq 0$，那么级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充要条件是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 有上界.

回忆：p 级数

比较判别法

Theorem (比较判别法)

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 均为正项级数，且 $\exists N \in \mathbb{Z}^+$，使得当 $n > N$ 时，

$$a_n \leq b_n$$

那么：

- 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛；
- 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 也发散.

比较判别法的极限形式

Theorem (极限形式)

设 $a_n \geq 0$ 且 $b_n > 0$ $(n \in \mathbb{N}^+)$，又 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = l$（或 $+\infty$），那么

(1) 当 $0 < l < +\infty$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 有相同的敛散性；

(2) 当 $l = 0$ 时，由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛可得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；

(3) 当 $l = +\infty$ 时，由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散可得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散.

p-判别法

Theorem (p-判别法)

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 是正项级数，且 $\lim\limits_{n\to\infty} n^p a_n = l$（或 $+\infty$），那么

(1) 当 $0 \leq l < +\infty$，且 $p > 1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；

(2) 当 $0 < l \leq +\infty$，且 $p \leq 1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

比值判别法

Theorem (比值判别法)

设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是正项级数，且 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$（或 $+\infty$），那么

(1) 当 $0 \le l < 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；

(2) 当 $1 < l < +\infty$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

注意

- $l = 1$ 则不可用此方法判断

根值判别法

Theorem (根值判别法)

设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是正项级数，且 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$（或 $+\infty$），那么

(1) 当 $0 \leq l < 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；

(2) 当 $1 < l < +\infty$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

注意

- $l = 1$ 则不可用此方法判断

积分判别法

Theorem (积分判别法)

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 是正项级数，若非负函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调减少，且 $\forall n \in \mathbb{Z}^+$，$a_n = f(n)$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与反常积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 的敛散性相同.

交错级数

Definition (交错级数)

各项正负相间，即形如 $\pm\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n\ (a_n>0)$ 的级数称为交错级数.

交错级数的 Leibniz 判别法

Theorem (Leibniz 判别法)

若交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 满足：

(1) $0 < a_{n+1} \le a_n \ (n \in \mathbb{Z}^+)$

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛，且其余项级数满足

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n\right| \le a_{n+1}$$

绝对收敛与条件收敛

Definition (绝对与条件收敛)

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 是任意项级数. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛，则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛；若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛.

性质

- 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

绝对收敛级数的性质

交换律

- 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛，那么任意交换其各项的次序所得的新级数仍绝对收敛，且其和不变.

注意

- 条件收敛的级数无此性质.

Good luck!