

# 高等数学 I 习题课 16

## 级数

上海科技大学

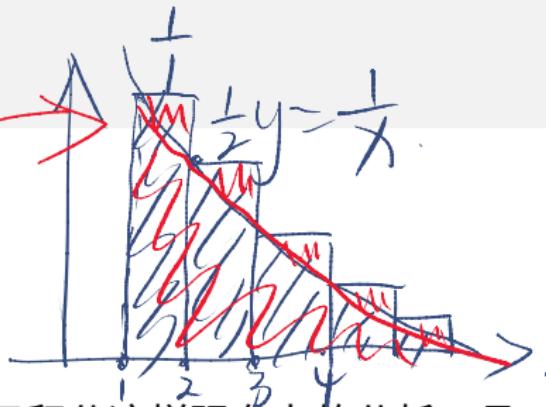
2025.12.30

# 目录

- 1 数项级数
- 2 正项级数
- 3 交错级数

在开始之前...

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$



- 既然我们已经有了积分这样强有力的分析工具，为什么还需要级数这样一种间断的求和方法？
- 电子设备只能将实时信号转化为离散形式，再进行处理与分析

# 目录

1 数项级数

2 正项级数

3 交错级数

# 定义

给定数列  $\{a_n\}$ , 称和式

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \quad \xrightarrow{\text{lim}} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n a_i$$

$\int_1^{+\infty} f(x) dx$

为**无穷级数**, 简称**级数**. 和式中的每一项称为级数的项,  $a_n$  称为级数的通项或一般项.

**有限项和**

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

称为级数的前  $n$  项部分和.

## 敛散性

$$n \rightarrow \infty, \ln n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} > \ln n.$$

若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  的部分和数列  $\{S_n\}$  收敛，且  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ ，则称级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛，且收敛到  $S$ .

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

若  $\{S_n\}$  发散则称级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散.

# 级数的线性运算

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S, c \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} c a_n = cS$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = T \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = S + T$$

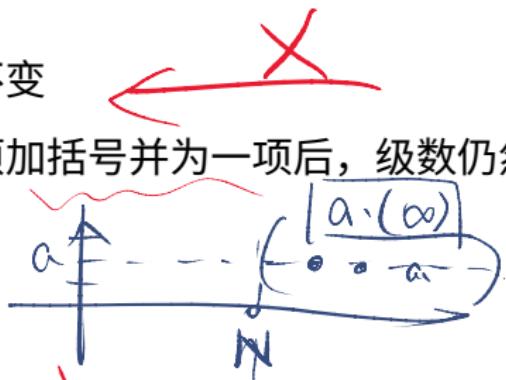
# 敛散性的不变性

$$(1, -1)(1, +), (1, -1)(\quad)$$

- 增、删、改有限项，级数的敛散性不变

- 若级数收敛到  $S$ ，则对其相邻若干项加括号并为一项后，级数仍然收敛到  $S$

- 若级数收敛，则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$



$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1} \left( -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \left( \frac{1}{3} + \dots \right) + \frac{1}{n} \frac{1}{n+1}$$

## 例

判断以下级数的敛散性，并求收敛级数的和

$$\frac{3}{2}$$

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{6^n}$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} \rightarrow \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n}{n+1}$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^n$$

$$\text{U}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{6^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{6^n} = \sum \left( \frac{1}{2} \right)^n + \sum \left( -\frac{1}{3} \right)^n$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} \left( 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^n \right)}{1 - \frac{1}{2}} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left( -\frac{1}{3} \right) \cdot \left( 1 - \left( -\frac{1}{3} \right)^n \right)}{1 - \left( -\frac{1}{3} \right)} = \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{4}$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n}{n+1} = \ln \frac{1}{2} + \ln \frac{2}{3} + \dots \\ = \ln \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{1}{n+1} = \ln \left( \frac{1}{n+1} \right) \rightarrow -\infty 0$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^n \rightarrow \text{diverge.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^n = \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right)^{(n+1)}}_{\downarrow} \cdot \underbrace{(-1)}_{e^{-1}} \\ = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

# 目录

1 数项级数

2 正项级数

3 交错级数

# 收敛原理

- 正项级数:  $\forall n, a_n \geq 0$  的级数
- 正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛的充要条件是其部分和数列  $\{S_n\}$  有上界
- 推论: 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  满足:  $\exists N > 0$ , 使得当  $n > N$  时, 有  $a_n \geq 0$ , 那么级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛的充要条件是  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  的部分和数列  $\{S_n\}$  有上界.

$p$  级数

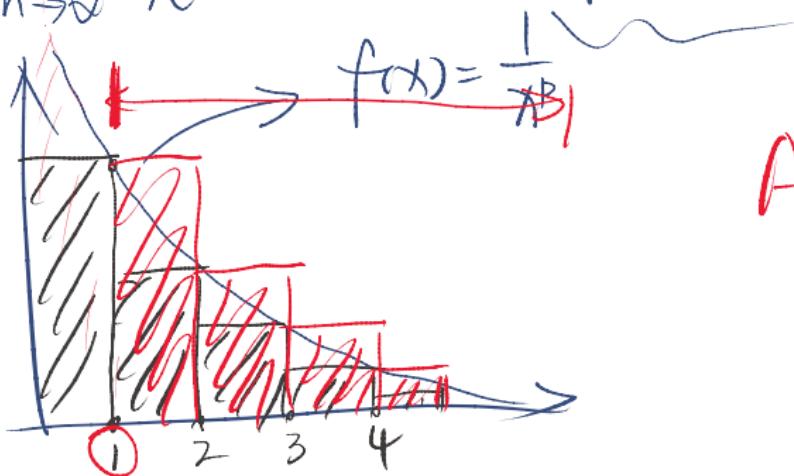
讨论  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  的敛散性.

当  $p > 1$  收敛. 当  $p \leq 1$  发散.

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = 0 \Leftrightarrow p > 0$$

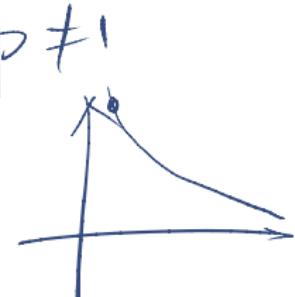
$$A < \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$$



$$A > \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$$

$$\int x^{-p} dx = \frac{x^{-p+1}}{-p+1} + C$$

$p \neq 1$



$$A < F(+\infty) - \boxed{F(0)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} p < 1 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{x^{-p+1}}{-p+1}}_{\sim} = +\infty \quad F(0) = 0 \\ p > 1 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1} = 0. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} p > 1 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1} = 0. \end{array} \right.$$

$$A > F(+\infty) - F(1) = \underbrace{F(+\infty)}_{\sim} - \frac{1}{-p+1}$$

$\boxed{p > 1}$

# 比较判别法

若  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  均为正项级数，且  $\exists N \in \mathbb{Z}^+$ ，使得当  $n > N$  时，

$$a_n \leq b_n$$

那么：

- 当  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛时， $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  也收敛；
- 当  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散时， $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  也发散.

## 比较判别法的极限形式

$$(1-\delta)s \sim (1+\delta)s$$

~~如果~~  $b_n > 0$

$$k_1 b_n < a_n < k_2 b_n \cdot (1-\delta + \frac{a_n}{b_n}) < (1+\delta)$$

设  $a_n \geq 0$  且  $b_n > 0$  ( $n \in \mathbb{N}^+$ ), 又  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l$  (或  $+\infty$ ), 那么

(1) 当  $0 < l < +\infty$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  有相同的敛散性;

(2) 当  $l = 0$  时, 由  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛可得  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛;

(3) 当  $l = +\infty$  时, 由  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散可得  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  发散.

*p*-判别法

$$b_n \rightarrow \frac{1}{n^p} \quad \frac{a_n}{b_n}$$

设  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  是正项级数，且  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p a_n = l$  (或  $+\infty$ )，那么

(1) 当  $0 \leq l < +\infty$ , 且  $p > 1$  时,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛;

(2) 当  $0 < l \leq +\infty$ , 且  $p \leq 1$  时,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散.

$b_n$  发散

## 例 11.9, 11.10

判断下列级数的敛散性：

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 - n + 1}} a_n$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} a^{\ln \frac{1}{n}} \quad (a > 0)$$

1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 - n + 1}} \cdot n^{\frac{3}{2}} = 1 \quad \ell = 1 \quad p = \frac{3}{2}$ .

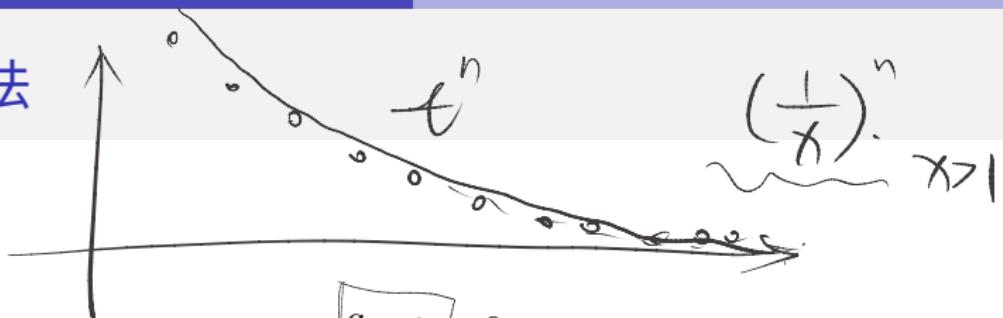
$$a_n \sim \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

$$(2) \underbrace{a^{\ln \frac{1}{n}}}_{= e^{\ln a \cdot \ln \frac{1}{n}}} = e^{\ln a \cdot \ln \frac{1}{n}} = \left( \frac{1}{n^{\ln a}} \right) \cdot n^{\ln a}$$

$$\begin{cases} \ln a > 1 \\ a > e \end{cases} \text{收敛.}$$

$$\begin{cases} \ln a < 1 \\ 0 < a < e \end{cases} \text{发散.}$$

## 比值判别法



设  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  是正项级数，且  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$  (或  $+\infty$ )，那么

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$$

(1) 当  $0 \leq l < 1$  时，级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛；

$$a_{n+1} = l a_n$$

$$a_{n+2} = l a_{n+1} = l^2 a_n.$$

(2) 当  $1 < l < +\infty$  时，级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散。

注意： $l = 1$  则不可用此方法判断

$$a_{n+k} = l^k a_n$$

$$a_n = 1$$

$$l = 1$$

$$\frac{1}{n^2}$$

# 根值判别法

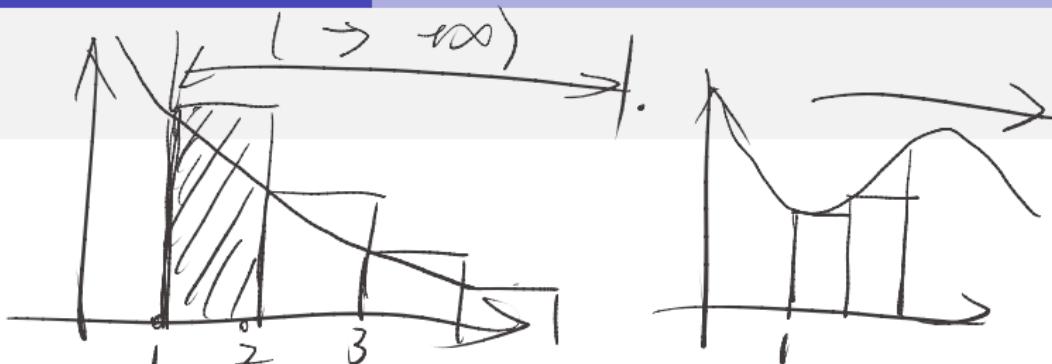
设  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  是正项级数，且  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$  (或  $+\infty$ )，那么

(1) 当  $0 \leq l < 1$  时，级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛；

(2) 当  $l > 1$  时，级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散.

注意： $l = 1$  则不可用此方法判断

# 积分判别法



设  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  是正项级数，若非负函数  $f(x)$  在  $[1, +\infty)$  上单调减少，且

$\forall n \in \mathbb{Z}^+$ ,  $a_n = f(n)$ , 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  与反常积分  $\int_1^{+\infty} f(x)dx$  的敛散性相同.

## 例

判断下列级数的敛散性：

(1)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}$

(3)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( 2n \arcsin \frac{1}{n} \right)^{n/2}$

(5)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!}$

(4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left( \frac{n+1}{n} \right)^3 = \frac{1}{3} < 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^3}{3^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\ln \frac{n^3}{3^n} \cdot \frac{1}{n}} = \frac{1}{3} < 1$$

$$\text{arctan } n > 1$$

$n > 1$

(2)  $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \left( \frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$

(4)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2 + 1}$

$$\frac{1 - 2n \cdot \arctan n}{(n^2 + 1)^2}$$

(6)  $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n^2}$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{3}{e} > 1$$

$$\begin{aligned} (3) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(2n \arcsin \frac{1}{n}\right)^{n^2}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2n \arcsin \frac{1}{n}} \\ &= \sqrt{2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arcsin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}} = \sqrt{2} > 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2 + 1} dx &= \int_1^{+\infty} \arctan x d \arctan x = \frac{(\arctan x)^2}{2} \Big|_1^{+\infty} \\ &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} - \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3\pi^2}{32} < 1. \end{aligned}$$

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-1)!!}{n!} \cdot \frac{(n-1)!}{(2n-3)!!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n} = 2 > 1.$$

$$\text{习题 11 T10 (6)} \int_1^{+\infty} -e^{-x^2} dx^2 = -\frac{1}{2} \cdot e^{-x^2} \Big|_1^{+\infty}$$

证明:

(1) 若  $a_n \geq 0$ , 且  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  收敛

$$\begin{aligned}
 S^2 &= \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right)^2 = \left( a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2 + 2a_1a_2 + \dots + 2a_{n-1}a_n \right) \\
 &\geq \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \Rightarrow S^2 \geq \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2.
 \end{aligned}$$

## 习题 11 T10

证明：

(2) 若  $a_n \geq 0$ , 且数列  $\{na_n\}$  收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  收敛

$$\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = l. \quad \exists N, s.t. \forall n > N, \quad 0 < na_n < l + \delta$$

$$a_n < \frac{M}{n} \quad a_n^2 < \frac{M^2}{n^2}$$

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n^2 < M^2 \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

## 习题 11 T10

证明：

(3) 若  $a_n \geq 0, b_n \geq 0$ , 且  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  都收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  和

$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$  都收敛;

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}_{A} \cdot \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} b_n}_{B} = \left( a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n + \overbrace{a_1 b_2 + a_1 b_3 + \dots}^{> 0} \right)$$

$$\geq \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n}_{\text{C}}$$

## 习题 11 T10

证明：

(4) 若  $a_n \geq 0$ , 且  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$  收敛

$$\left( \sum \frac{1}{n^2} \right)$$

$$a_n^2 + \frac{1}{n^2} \geq 2 \frac{a_n}{n}$$

$\sum a_n^2$  收敛.  $\sum \frac{1}{n^2}$  收敛

$$\underbrace{\sum \frac{a_n}{n}}_{\Delta} \leq \frac{1}{2} \left( \underbrace{\sum a_n^2}_{D} + \sum \frac{1}{n^2} \right).$$

## 习题 11 T10

证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = l$$

(5) 若数列  $\{na_n\}$  收敛, 且  $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n-1})$  收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛

$$\begin{aligned}
 & \lim_{n \rightarrow \infty} \left( a_1 - a_0 + 2a_2 - 2a_1 + 3a_3 - 3a_2 + \cdots + na_n - na_{n-1} \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( -a_0 - a_1 - a_2 - \cdots - a_{n-1} + na_n \right) \\
 &\quad \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} n a_n
 \end{aligned}$$

# 目录

1 数项级数

2 正项级数

3 交错级数

## Leibniz 判别法



各项正负相间，即形如  $\pm \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$  ( $a_n > 0$ ) 的级数称为交错级数.

若交错级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$  满足：

- (1)  $0 < a_{n+1} \leq a_n$  ( $n \in \mathbb{Z}^+$ )
- (2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

↓ 单减. 趋于 0 .

则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$  收敛，且其余项级数满足

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \right| \leq a_{n+1}$$

0

# 绝对收敛与条件收敛

设  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  是任意项级数. 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  收敛, 则称  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  绝对收敛;

若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  发散而  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 则称级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  条件收敛.

若  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  绝对收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛.

# 绝对收敛级数的性质

若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  绝对收敛，那么任意交换其各项的次序所得的新级数仍绝对收敛，且其和不变。

条件收敛的级数无此性质。

## 例

考察交错级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$  的敛散性.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad p = \frac{1}{2}, \text{发散.}$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \underline{n \rightarrow \infty} \Rightarrow \text{收敛.}$$

## 例

判断下列级数的敛散性，并说明是绝对收敛还是条件收敛

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \ln \frac{n}{n+1}$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n+3)!!}{(2n)!!}$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1-3n}{3+4n} \right)^n$$

$$(4) \sum_{n=2}^{\infty} \sin \left( n\pi + \frac{1}{\ln n} \right)$$

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n} \Rightarrow \text{不绝对收敛. } \ln(1+\frac{1}{n}). \text{ 条件收敛.}$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}$$

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{(2n-2)!!}{(2n-5)!!} = \frac{2n-3}{2n} \\ & = 1 - \frac{3}{2n} < 1 \quad \text{收敛} \end{aligned}$$

$$(3) \left( \frac{1-3n}{3+4n} \right)^n = \underbrace{\left( \frac{3n-1}{3+4n} \right)^n}_{\text{绝对值}} (-1)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{3n-1}{3+4n} \right|^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-1}{4n+3} = \frac{3}{4} < 1 \quad \text{收敛}$$

$$(4) \sum_{n=2}^{\infty} \sin(n\pi + \frac{1}{nn}) = \sum_{n=2}^{\infty} \left( \sin(n\pi) \cdot \cos \frac{1}{nn} + \cos(n\pi) \cdot \sin \left( \frac{1}{nn} \right) \right).$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \cdot \sin \left( \frac{1}{nn} \right). \quad \text{条件收敛.}$$

$$\frac{\infty}{2} \sin\left(\frac{1}{\ln n}\right) \cdot n=2 \quad \frac{1}{\ln 2} < \frac{\pi}{2}$$

