

高等数学 I 习题课 17

2023 秋期末卷讲评

上海科技大学

2025.1.6

1. 函数 $f(x) = \frac{|x|}{1 + e^{-x}}$ 有 ()

- A. 一条斜渐近线
- B. 两条斜渐近线
- C. 一条水平渐近线和一条斜渐近线
- D. 两条水平渐近线

2. 以下反常积分中收敛的是 ()

A. $\int_0^e \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)}$

B. $\int_0^e \frac{dx}{x(\ln x)^3}$

C. $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)}$

D. $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^3}$

3. 考察两个函数

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

和 $g(x) = xf(x)$. 则 $x = 0$ ()

- A. 是 $g(x)$ 的极值点
- B. 不是 $g(x)$ 的极值点, 但是 $f(x)$ 的极值点
- C. 无法确定是否 $g(x)$ 的极值点
- D. 不是 $g(x)$ 的极值点, 也不是 $f(x)$ 的极值点

4. 定义函数 $f(x) = \int_0^x \sin t^2 dt$. 则 ()

- A. $f(\sqrt{2\pi}) < 0, f(-\sqrt{2\pi}) < 0$
- B. $f(\sqrt{2\pi}) < 0, f(-\sqrt{2\pi}) > 0$
- C. $f(\sqrt{2\pi}) > 0, f(-\sqrt{2\pi}) < 0$
- D. $f(\sqrt{2\pi}) > 0, f(-\sqrt{2\pi}) > 0$

5. 若 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可导. 考虑以下四个关于其导函数 $f'(x)$ 的判断:

- (i) $f'(x)$ 有原函数;
- (ii) $f'(x)$ 可积;
- (iii) $f'(x)$ 连续;
- (iv) $f'(x)$ 没有第一类间断点.

其中一定正确的有 () 个.

- A. 1
- B. 2
- C. 3
- D. 4

6. 函数 $y = \cos^2 x + \sec x$ 在区间 $[-\pi/3, \pi/3]$ 的最大值为 _____.

7. 函数 $y = \frac{1}{1+x^2}$ 的上凸区间为 _____.

8. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2 + 1^2} + \frac{n}{n^2 + 2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n^2} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$.

9. 微分方程

10. 曲线 $y = e^{-ax^2}$ 与坐标轴所围成的第一象限的图形绕 y 轴旋转一周所得到的旋转体体积为 1. 则 $a = \underline{\hspace{10em}}$.

11. 求极限

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\int_0^{\sin x} \sqrt{\tan t} dt}{\int_0^{\tan x} \sqrt{\sin t} dt}.$$

12. 计算定积分

$$\int_0^\pi \frac{dx}{\sin^2 x + 4 \cos^2 x}.$$

13. 计算不定积分

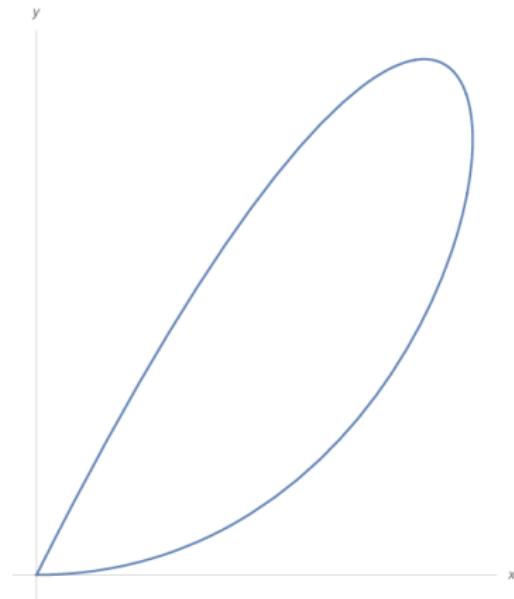
$$\int \frac{x \, dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}.$$

15. 参数方程

$$\begin{cases} x(t) = 2t - t^2 \\ y(t) = 2t^2 - t^3 \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2)$$

围成一条封闭曲线（见右图）.

- (1) 求曲线最右侧点的坐标；
- (2) 求曲线所围区域的面积.



17. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续可导且 $f(a) = 0$. 设 M 为 $|f(x)|$ 在区间 $[a, b]$ 上的最大值.

证明不等式:

$$M^2 \leq (b - a) \int_a^b (f'(x))^2 dx.$$

18. 考察函数

$$f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt.$$

这个函数叫作「正弦积分函数」.

- (1) 证明 $x_k = k\pi, k \neq 0$ 是 $f(x)$ 的所有极值点，并指出其中哪些是极大值点，哪些是极小值点.

18. 考察函数

$$f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt.$$

这个函数叫作「正弦积分函数」.

- (2) 设 $\{x_{k_i}\}$ 为 x 正半轴的极大值点从小到大排列构成的数列, 证明相应的极大值 $f(x_{k_i})$ 是单调递减数列. 类似的, 将 x 正半轴的极小值点从小到大排列, 证明相应的极小值构成单调递增数列.

18. 考察函数

$$f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt.$$

这个函数叫作「正弦积分函数」.

- (3) 写出 $f(x)$ 的拐点所要满足的等式，并证明任意两个相邻的极值点之间都有且仅有一个拐点（不用写出拐点的具体数值!）.

18. 考察函数

$$f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt.$$

这个函数叫作「正弦积分函数」.

(4) 我们不加证明的承认以下等式

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^\infty \frac{1}{y^2 + 1} dy.$$

利用此等式写出 $f(x)$ 的渐近线公式.

18. 考察函数

$$f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt.$$

这个函数叫作「正弦积分函数」.

(5) 根据之前的答案, 大致作图画出 $f(x)$ 的曲线.