

# 高等数学 I 习题课 17

2022 秋期末卷讲评

上海科技大学

2025.1.6

1. 设函数  $f(x)$  是  $\sin x$  的一个原函数, 则  $f(x)$  的一个原函数是 ( )

- A.  $-\cos x + 1$     B.  $\cos x + 1$     C.  $\sin x + x$     D.  $-\sin x + x$

2. 函数  $f(x) = (x^2 - 3) \cdot e^{-x}$  的单调增加区间为 ( )

- A.  $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$     B.  $(-\infty, -1)$     C.  $(-1, 3)$     D.  $(3, +\infty)$

3. 曲线  $y = \frac{1}{x} + \ln(1 + e^x)$  有几条渐近线? ( )

A. 3

B. 2

C. 1

D. 4

4. 下列反常积分中收敛的是 ( )

A.  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + x}} dx$

B.  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + x}} dx$

C.  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + 1} dx$

D.  $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$



5. 设函数  $f(x)$  为连续函数, 对于两个命题:

(I) 若  $F(x) = \int_0^x (\int_0^u [f(t) - f(-t)] dt) du$ , 则  $F(x)$  为奇函数;

(II) 若  $f(x)$  为奇函数, 则  $G(x) = \int_0^x [\int_x^y f(t^3) dt] dy$  为奇函数。

下列选项正确的是 ( )

A. (I)、(II) 均正确

B. (I)、(II) 均错误

C. 仅 (I) 正确

D. 仅 (II) 正确



6. 曲线  $y = (x - 5) \cdot \sqrt[3]{x^2}$  的下凸区间为: \_\_\_\_\_.

7. 设函数  $f(x) = (1+x) \arctan x$ , 则  $f(x)$  带皮亚诺余项的三阶麦克劳林展开式为: \_\_\_\_\_.

8.  $\int_0^{2\pi} \sin^3 x \cdot e^{\cos x} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

## 9. 微分方程

10. 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}}{n + \frac{1}{n}} + \frac{\sqrt{1 + \frac{2}{n}}}{n + \frac{2}{n}} + \cdots + \frac{\sqrt{1 + \frac{n}{n}}}{n + \frac{n}{n}} \right) = \underline{\hspace{2cm}}.$



11. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x [t - \ln(1+t)] dt}{(1+e^{-x})(x - \arctan x)}.$

12. 计算不定积分  $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x} dx$ .

13. 设函数  $f(x) = \int_{-1}^1 |x - t|e^{t^2} dt$ , 求  $f''(x)$ .

14. 设

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3-2x-x^2}}, & 0 \leq x \leq 1 \\ xe^{-x}, & 1 < x \leq 2 \end{cases},$$

计算  $\int_1^3 f(x-1)dx$ .



15. 计算反常积分  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} \arcsin \frac{1}{x} dx$ .

16. 微分方程

17. 函数性态

18. 设抛物线  $y = ax^2 + bx$  在  $0 \leq x \leq 1$  时  $y \geq 0$ , 且该抛物线与  $x$  轴及直线  $x = 1$  所围图形的面积为  $\frac{1}{3}$ , 试确定  $a, b$ , 使此图形绕  $x$  轴旋转一周而成的旋转体的体积最小.



19. 设函数  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 且  $1 < f(x) < 2$ , 证明:

$$1 \leq \int_0^1 f(x) dx \cdot \int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx < \frac{9}{8}.$$



