高等数学 I 习题课 17

2024 秋期末卷讲评

上海科技大学

2025.1.6

1. 设 $f(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的函数，下列说法正确的是（　）

A. 若 $f(x)$ 连续，则一定存在函数 $F(x)$ 使得 $F'(x)=f(x)$

B. 即便 $f(x)$ 存在可去间断点，依然可能存在函数 $F(x)$ 使得 $F'(x)=f(x)$

C. 即便 $f(x)$ 存在跳跃间断点，依然可能存在函数 $F(x)$ 使得 $F'(x)=f(x)$

D. 即便 $f(x)$ 存在第二类间断点，也一定存在函数 $F(x)$ 使得 $F'(x)=f(x)$

2. 下列说法错误的是（　）

A. 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在该区间上可积

B. 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上单调，则 $f(x)$ 在该区间上可积

C. 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积，且令 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$，则 $F'(x)=f(x)$

D. 若函数 $F(x)$ 在区间 (a,b) 有连续导数，令 $c\in(a,b)$ 为一个常数，则 $F(x)-\int_c^x F'(t)dt$ 有任意阶导数

3. 下列反常积分中收敛的是（　）

A. $\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x}dx$

B. $\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}dx$

C. $\int_{-1}^{1} xe^{\frac{1}{x}}dx$

D. $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}e^{x}dx$

4. 设 $\{a_n\},\{b_n\}$ 为两个数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$。则（　）

A. 当 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ 收敛时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ 收敛

B. 当 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |b_n|$ 收敛时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ 收敛

C. 当 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n^2$ 收敛时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ 收敛

D. 当 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ 发散时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ 发散

5. 假设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇连续函数，而 $g(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的偶连续函数。考虑下列函数：

$$F(x) = \int_{-x}^{x} f(t)dt, \qquad G(x) = \int_{-x}^{x} g(t)dt$$

则下列说法错误的是（　）

A. $F(x)$ 是偶函数

B. $F(x)$ 是奇函数

C. $G(x)$ 是偶函数

D. $G(x)$ 是奇函数

6. 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)=\underline{\qquad\qquad\qquad}$$

7. 设 $f(x)=1+x+2x^2+3x^3$，则 $f(x)$ 在 $x_0=1$ 处的 Taylor 级数是 ____________________。

8. 函数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(n^2+1)e^n}$ 的收敛域是 ______________。

9. 令 $a, b \in \mathbb{R}$，计算定积分

$$\int_0^{\pi} \left[a\cos^2 x + b(\sin x + \cos x)^2\right] dx = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

10. 设 $f(t)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上以 $\tau > 0$ 为周期的连续函数。令

$$F(x) = e^x \int_{x^2}^{x^2+\tau} f(t)dt$$

则 $F'(x) - F(x) =$ ____________。

11. 计算极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}(e^{t^2}-1)dt}{x[\ln(1+x)]^2\sin(x^2)}$$

12. 计算不定积分：

$$\int \frac{x^3 + 5x^2 + x + 5}{(x^2+1)(x^2-4)} dx$$

13. 计算不定积分 $(x > 0)$：

$$\int e^{2x} \arctan \sqrt{e^x - 1} dx$$

14. 设 D 为由曲线 $y=-(x-1)^2+1$ 和 $y=x^2$ 围成的区域。求 D 绕 x 轴一周所得旋转体的体积。

15. 假设 $\{a_n\},\{b_n\}$ 是各项均为正的数列。并且满足：

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{n}=0$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}b_n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lambda>0$

基于条件 (i)(ii)，完成以下证明：

(a) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=+\infty$

(b) 证明存在一个正整数 N，使得当 $n\geq N$ 时有 $\frac{a_{n+1}}{a_n}\leq\left(\frac{n}{n+1}\right)^2$

(提示: 用反证法。假设存在一个无穷子列 $\{a_{n_i}\}$ 使得 $\frac{a_{n_i+1}}{a_{n_i}}>\left(\frac{n_i}{n_i+1}\right)^2$，试估计 $\lim\limits_{i\to\infty}n_i\left(\frac{a_{n_i}}{a_{n_i+1}}-1\right)$)

(c) 证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛。

16. 设函数 f 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且对于任意 $0<a<b$ 满足

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

记 $F(x)=\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt$。求证：

$$F\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{F(a)+F(b)}{2}$$

17. 令 $1 < a < b$，且令 $f(x)$ 为区间 $[a, b]$ 上的连续函数。证明：存在 $\xi \in (a, b)$ 满足

$$\xi^2 f(\xi) = \frac{ab}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

(提示: 可尝试柯西中值定理)