高等数学 I　习题课 16

级数

上海科技大学

2025.12.30

目录

在开始之前...

- 既然我们已经有了积分这样强有力的分析工具，为什么还需要级数这样一种间断的求和方法?
- 电子设备只能将实时信号转化为离散形式，再进行处理与分析

目录

定义

给定数列 $\{a_n\}$，称和式

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

为**无穷级数**，简称**级数**. 和式中的每一项称为级数的项，a_n 称为级数的通项或一般项.

有限项和

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

称为级数的前 n 项部分和.

敛散性

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛，且 $\lim_{n\to\infty} S_n = S$，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，且收敛到 S.

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

若 $\{S_n\}$ 发散则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

级数的线性运算

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S, c \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} c\ a_n = cS$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S,\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n = T \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = S + T$$

敛散性的不变性

- 增、删、改有限项，级数的敛散性不变
- 若级数收敛到 S，则对其相邻若干项加括号并为一项后，级数仍然收敛到 S　　　（逆命题不成立）
- 若级数收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

例

判断以下级数的敛散性，并求收敛级数的和

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{6^n}$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n}{n+1}$

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

目录

收敛原理

- 正项级数：$\forall n$，$a_n \geq 0$ 的级数
- 正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充要条件是其部分和数列 $\{S_n\}$ 有上界
- 推论：若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 满足：$\exists\ N > 0$，使得当 $n > N$ 时，有 $a_n \geq 0$，那么级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充要条件是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 有上界.

p 级数

讨论 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 的敛散性.

比较判别法

若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 均为正项级数，且 $\exists N \in \mathbb{Z}^+$，使得当 $n > N$ 时，

$$a_n \leq b_n$$

那么：

- 当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛；
- 当 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散时，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 也发散.

比较判别法的极限形式

设 $a_n \geq 0$ 且 $b_n > 0$ $(n \in \mathbb{N}^+)$，又 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = l$（或 $+\infty$），那么

(1) 当 $0 < l < +\infty$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 有相同的敛散性；

(2) 当 $l = 0$ 时，由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛可得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；

(3) 当 $l = +\infty$ 时，由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散可得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散.

p-判别法

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 是正项级数，且 $\lim\limits_{n\to\infty} n^p a_n = l$（或 $+\infty$），那么

(1) 当 $0 \leq l < +\infty$，且 $p > 1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；

(2) 当 $0 < l \leq +\infty$，且 $p \leq 1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

例 11.9, 11.10

判断下列级数的敛散性：

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 - n + 1}}$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a^{\ln \frac{1}{n}} \ (a > 0)$

比值判别法

设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是正项级数，且 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$（或 $+\infty$），那么

(1) 当 $0 \le l < 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；

(2) 当 $1 < l < +\infty$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

注意：$l = 1$ 则不可用此方法判断

根值判别法

设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是正项级数，且 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$（或 $+\infty$），那么

(1) 当 $0 \le l < 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；

(2) 当 $1 < l < +\infty$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

注意：$l = 1$ 则不可用此方法判断

积分判别法

设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是正项级数，若非负函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调减少，且 $\forall n \in \mathbb{Z}^+$，$a_n = f(n)$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与反常积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 的敛散性相同.

例

判断下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(2n \arcsin \frac{1}{n}\right)^{n/2}$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2+1}$

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!}$

(6) $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n^2}$

习题 11 T10

证明:

(1) 若 $a_n \geq 0$，且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛

习题 11 T10

证明:

(2) 若 $a_n \geq 0$，且数列 $\{na_n\}$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛

习题 11 T10

证明:

(3) 若 $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$ 都收敛;

习题 11 T10

证明:

(4) 若 $a_n \geq 0$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ 收敛

习题 11 T10

证明:

(5) 若数列 $\{na_n\}$ 收敛，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n-1})$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛

目录

Leibniz 判别法

各项正负相间，即形如 $\pm\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n\ (a_n>0)$ 的级数称为交错级数.

若交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 满足：

(1) $0<a_{n+1}\leq a_n\ (n\in\mathbb{Z}^+)$

(2) $\lim_{n\to\infty}a_n=0$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛，且其余项级数满足

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n\right|\leq a_{n+1}$$

绝对收敛与条件收敛

设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是任意项级数. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛，则称 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛；若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛.

若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

绝对收敛级数的性质

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛，那么任意交换其各项的次序所得的新级数仍绝对收敛，且其和不变.

条件收敛的级数无此性质.

例

考察交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 的敛散性.

例

判断下列级数的敛散性，并说明是绝对收敛还是条件收敛

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\ln\frac{n}{n+1}$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2n+3)!!}{(2n)!!}$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-3n}{3+4n}\right)^{n}$

(4) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\sin\left(n\pi+\frac{1}{\ln n}\right)$