高等数学 I　习题课 14

定积分

上海科技大学

2025.12.18

目录

1 定积分

2 微积分基本定理

3 综合练习

目录

1 定积分

2 微积分基本定理

3 综合练习

回到两周前，不定积分

- 情景：人坐在车内，只能看见速度表 $v(t)$，试图找出当前已经行驶过的距离 $S(t)$
- 做法：每隔固定间隔 Δt，记录速度 v_i，认为在该时间段内，汽车匀速行驶，距离 $S_i = v_i \Delta t$，$S_0 = \sum_n v_i \Delta t$.
- 随着 Δt 不断减小，S_0 越来越接近真实的距离 S，即

$$S = \lim_{\mathrm{d}t \to 0} \sum_n v_i \mathrm{d}t = \int_a^b v(t) \mathrm{d}t$$

dt?

dt 代表?

1. 图像中，每个矩形的宽度（显式的 dt 项）
2. 记录速度的时间步长（藏在 v_i 中），决定 n 的大小

注意：矩形的高度可以在 $[n\Delta T, n\Delta t + \Delta t]$ 区间上函数的值域内任意选取. 由函数的可积性，可知当区间大小 Δt 足够小，最终取值都将收缩到一个点上，因此多个小矩形面积之和也都将拟合为曲线下面积.

课后题 1.(2)

使用定义计算定积分

$$\int_0^1 e^x \mathrm{d}x$$

Schwarz 不等式

设函数 $f(x), g(x) \in C[a,b]$，则

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$$

可以证明，当条件由 $C[a,b]$ 减弱到 $R[a,b]$ 时，不等式依然成立.

积分中值定理

设函数 $f \in C[a,b], g \in R[a,b]$，且 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号，则

$$\exists \xi \in [a,b],\ \text{s.t.}\ \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

目录

1 定积分

2 微积分基本定理

3 综合练习

问题

- 之前对问题的转换，似乎只是把“根据仪表盘显示求距离”这样一个复杂的问题，转换为了“求 $v(t)$ 曲线下面积”一个同样复杂的问题
- 当我们考虑这个问题的更多性质时...

变上限积分?

设 $v(t) = t(8-t)$. 考虑函数

$$S(T) = \int_0^T v(t)\mathrm{d}t$$

它的几何意义？它的导数?

变上限积分的导数

从两个不同角度：

1. $S(T)$ 是当前行驶过的距离，其导函数自然应当等于 $v(t)$；
2. 考虑 $\mathrm{d}S$，当 $\mathrm{d}t$ 足够小，$\mathrm{d}S = v(t)\mathrm{d}t$，即 $S'(t) = v(t)$

变上限积分

设函数 $f \in R[a,b]$，则称函数

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t, \quad x \in [a,b]$$

为 f 在 $[a,b]$ 上的**变上限积分函数**，简称为变上限积分.

性质

- $\Phi(x) \in C[a,b]$
- 若 $f(x) \in C[a,b]$，则 $\Phi(x) \in D[a,b]$，且它的导函数

$$\Phi'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_a^x f(t)\mathrm{d}t = f(x)$$

例 5.10

求

$$\int_{2x}^{0} xe^{-t}\mathrm{d}t$$

的导函数.

例 5.11

求

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^2}\arctan\sqrt{t}\mathrm{d}t}{\ln(1+x^3)}$$

再次回到情景

设 $v(t) = t(8-t)$. 考虑函数

$$S(T) = \int_0^T v(t)\mathrm{d}t$$

想要求出自 a 时刻至 b 时刻，汽车行驶的距离

理解

1. 两处行驶的总距离之差即为所求，$S(b)-S(a)$
2. $[a,b]$ 区间上曲线下的面积即为行驶过的距离：$\displaystyle\int_a^b v(t)\mathrm{d}t$

$\Rightarrow$

$$\int_a^b v(t)\mathrm{d}t = S(b) - S(a)$$

牛顿-莱布尼茨公式

设函数 $f \in C[a,b]$，且 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) =: F(x)\Big|_a^b$$

目录

1 定积分

2 微积分基本定理

3 综合练习

例 5.9

设函数 $f \in C[0,1]$，且 $f \in D(0,1)$，又 $f(1) = 2\int_0^{\frac{1}{2}} xf(x)\mathrm{d}x$，证明：

$$\exists \xi \in (0,1),\ \text{s.t. } f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0.$$

例 5.57 (奇函数、偶函数的对称性)

设函数 $f(x) \in R[-a,a]$，证明：

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & f\text{为奇函数} \\ 2\displaystyle\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x, & f\text{为偶函数} \end{cases}$$

例 5.58 （周期函数的积分性质）

设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 以 T 为周期的连续函数，证明：

$$\forall a \in \mathbb{R}, \int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\mathrm{d}x$$

例 5.60 （三角函数的对称性）

计算：

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1+\tan x}, \qquad I_2 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x\sin x\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x}$$

练习

求

(1) $\displaystyle\int_1^2 x\ln x\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \arctan x\mathrm{d}x$

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi^2/4} \sin\sqrt{x}\mathrm{d}x$

(4) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^4 x\cos^2 x\mathrm{d}x$

(5) $\displaystyle\int_0^{2\pi} x\cos^2 x\mathrm{d}x$

(6) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sec^3 x\mathrm{d}x$

(7) $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{(1-x^4)^3}\mathrm{d}x$

(8) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{x\mathrm{d}x}{1+\cos 2x}$