

# Minecraft 实体运动公式拓展推导

Revethere Neverland

2025 年 12 月 14 日

## 前言

本文内容包含大量数学与物理公式，需要具备一定的数理基础阅读。为更好地理解本文中涉及的概念，建议先阅读『低版本 pvp 中玩家最优 kb 的点击频率下限分析』一文。

更多内容见我的博客：[revethere.github.io](http://revethere.github.io)。

## 实体基本运动公式

### 一些必要参数及定义

- 速度： $v_H$ 、 $v_Y$ ，表示实体在水平、垂直上的速度。
- 初始垂直速度： $v_{Y,1}$ ，取决于跳跃速度或服务器垂直击退参数。
- 方块滑度系数：

$$f_S = \begin{cases} 0.6 & \text{普通方块} \\ 0.8 & \text{粘液块} \\ 0.98 & \text{冰和浮冰} \\ 0.989 & \text{蓝冰} \end{cases}$$

- 移动乘数：

$$k_M = \begin{cases} 0.0 & \text{停止} \\ 0.3 & \text{潜行} \\ 1.0 & \text{行走} \\ 1.3 & \text{疾跑} \end{cases} \times \begin{cases} 0.98\sqrt{2} & 45^\circ \text{潜行} \\ 0.98 & \text{正常} \\ 1.0 & 45^\circ \text{斜跑} \end{cases}$$

特别地，当且仅当实体在疾跑状态并含有向前移动输入时使用 1.3 作为乘数。

$$k_{M-fly} = \begin{cases} 1 & \text{移动} \\ 2 & \text{疾跑} \end{cases} \times \begin{cases} 0.98 & \text{正常} \\ 1.0 & 45^\circ \text{斜飞} \end{cases}$$

空中的移动乘数没有考虑潜行的情况，因为意义不大。

- 效果乘数：

$$k_E = (1 + 0.2 \times \text{速度等级}) \times (1 - 0.15 \times \text{缓慢等级}) \geq 0$$

当缓慢等级大于等于 7 时，玩家会停在原地不动。

- 速度阈值:  $v_{th} = 0.005$  m/tick, 当实体在某条轴上的速度经衰减后小于该值时, 对应轴上的速度归零, 仅保留加速度 (1.9 及以上版本阈值变为 0.003 m/tick)。

## 水平运动递推公式

水平地面速度公式:

$$v_{H,t} = \underbrace{v_{H,t-1} \times f_{s,t-1} \times 0.91}_{\text{动量保留}} + \underbrace{0.1 \times \left(\frac{0.6}{f_{s,t}}\right)^3 \times k_M \times k_E}_{\text{加速度}} \quad (1.2.1)$$

水平空中速度公式:

$$v_{H,t} = \underbrace{v_{H,t-1} \times 0.91}_{\text{动量保留}} + \underbrace{0.02 \times k_M}_{\text{加速度}} \quad (1.2.2)$$

水平空中飞行公式:

$$v_{H,t} = \underbrace{v_{H,t-1} \times 0.91}_{\text{动量保留}} + \underbrace{0.05 \times k_{M-fly}}_{\text{加速度}} \quad (1.2.3)$$

## 垂直运动递推公式

垂直速度公式:

$$v_{Y,t} = \left( v_{Y,t-1} - \frac{0.08}{\text{重力}} \right) \times 0.98 \quad (1.3.1)$$

为了方便表示, 后文中设公式 (1.2.1)、公式 (1.2.2)、公式 (1.2.3) 中所有动量保留项的系数为  $\alpha$ , 加速度项为  $\beta$ 。公式 (1.3.1) 展开后同理。

## 稳态 (渐进) 速度推导

### 经典力学下的运动

$$\frac{dv}{dt} = a - fv \quad (2.1.1)$$

$$v = v_0 e^{-ft} + \frac{a}{f} (1 - e^{-ft}) \quad (2.1.2)$$

$$\frac{v}{v_0} = \lim_{t_0 \rightarrow 0} (1 - ft_0)^{\frac{t}{t_0}}, a = 0 \quad (2.1.3)$$

公式 (2.1.1) 描述了物体在恒定驱动力和正比于速度的阻力共同作用下, 速度从变化逐渐达到稳定平衡的动态过程。这也是后续所有公式推导的基础。

公式 (2.1.2) 是通过求解公式 (1.1.1) 得到的精确解 (通解)。其描述了在任何初始速度  $v_0$  和任何驱动力  $a$  的情况下, 速度随时间变化的完整规律。

公式 (2.1.3) 则是将驱动力  $a = 0$  时的特殊情况代入公式 (1.1.2) 得到的结果。表明物体仅在阻力作用下, 速度从初值  $v_0$  开始指数衰减到零的过程。

## 水平稳态（渐进）速度

### 水平地面稳态（渐进）速度

假设实体在运动过程中所有状态不变 ( $f_s$  为常数), 原递推式为一阶线性差分方程:

$$v_t = \alpha v_{t-1} + \beta \quad (2.2.1)$$

已知齐次方程  $v_t^{(h)} = \alpha v_{t-1}^{(h)}$  的解为  $v_t^{(h)} = C\alpha^t$ 。非齐次项  $\beta$  为常数, 设其特解为  $K$ , 代入原方程 (2.2.1) 得:

$$K = \alpha K + \beta$$

即  $K = \frac{\beta}{1-\alpha}$ ,  $\alpha \neq 1$ , 特解为:

$$v_t^{(p)} = \frac{\beta}{1-\alpha}$$

方程 (2.2.1) 的通解为齐次解与特解之和:

$$v_t = C\alpha^t + \frac{\beta}{1-\alpha}$$

当  $t = 0$ :

$$v_0 = C + \frac{\beta}{1-\alpha}$$

将  $C = v_0 - \frac{\beta}{1-\alpha}$  代入通解得:

$$v_t = \left(v_0 - \frac{\beta}{1-\alpha}\right)\alpha^t + \frac{\beta}{1-\alpha} = v_0\alpha^t + \beta \frac{1-\alpha^t}{1-\alpha} \quad (2.2.2)$$

公式 (2.2.2) 表示的是速度与时间的关系, 后文的推导中会多次用到该公式。

由于  $|\alpha| < 1$  恒成立, 该方程收敛。当  $t \rightarrow \infty$ , 稳态速度:

$$v_\infty = \frac{\beta}{1-\alpha}$$

代入  $\alpha = 0.91f_s$  和  $\beta = 0.1 \left(\frac{0.6}{f_s}\right)^3 k_M k_E$  得:

$$v_\infty = \frac{0.1 \left(\frac{0.6}{f_s}\right)^3 k_M k_E}{1 - 0.91f_s}$$

(2.2.3)

## 水平飞行稳态（渐进）速度

这里提供另一种的推导方法。

已知每刻 (tick) 的时间长度  $\Delta t = 0.05s$ , 对于连续的时间  $t$  与刻数  $n$ :

$$t = n\Delta t, v(t) \approx v_n$$

将原递推方程移项得到:

$$v_n - v_{n-1} = (\alpha - 1)v_{n-1} + \beta$$

同时除以  $\Delta t$ :

$$\frac{v_n - v_{n-1}}{\Delta t} = \frac{(\alpha - 1)v_{n-1}}{\Delta t} + \frac{\beta}{\Delta t}$$

令:

$$f = \frac{1 - \alpha}{\Delta t}, \quad a = \frac{\beta}{\Delta t}$$

得到微分方程 (2.1.1), 其积分因子  $\mu(t) = e^{ft}$ 。两边同时乘以  $\mu(t)$ :

$$e^{ft} \frac{dv}{dt} + fe^{ft}v = ae^{ft}$$

$$\frac{d}{dt}(e^{ft}v) = ae^{ft}$$

对  $t$  积分:

$$e^{ft}v = \int ae^{ft} dt = \frac{a}{f}e^{ft} + C$$

两边除以  $e^{ft}$ , 得到:

$$v = \frac{a}{f} + Ce^{-ft}$$

初始时  $v(0) = v_0$ , 则将常数  $C = v_0 - \frac{a}{f}$  代入通解得到公式 (2.1.2)。当  $t \rightarrow \infty$ , 稳态速度:

$$v_\infty = \frac{a}{f} = \frac{\beta}{1 - \alpha}$$

代入  $\alpha = 0.91$  和  $\beta = 0.05k_{M-fly}$  得:

$$v_\infty = \frac{0.05k_{M-fly}}{0.09}$$

(2.2.4)

### 部分状态下的稳态速度

状态	$k_M$	$k_{M-fly}$	$k_E$	$f_S$	$v_\infty$ (m/s)
地面正常移动	$1.0 \times 0.98$	/	$1.0 \times 1.0$	0.6	4.317
地面正常疾跑	$1.3 \times 0.98$	/	$1.0 \times 1.0$	0.6	5.612
地面斜 45° 疾跑	$1.3 \times 1.0$	/	$1.0 \times 1.0$	0.6	5.727
地面正常疾跑 (速度 II)	$1.3 \times 0.98$	/	$1.4 \times 1.0$	0.6	7.857
地面斜 45° 疾跑 (速度 II)	$1.3 \times 1.0$	/	$1.4 \times 1.0$	0.6	8.018
空中正常移动飞行	/	1	/	/	10.889
空中正常疾跑飞行	/	2	/	/	21.778

### 垂直稳态 (渐进) 速度

#### 自由落体终端速度

前文的推导过程已经很详细了, 因此这部分只给出结论。

根据公式 (1.3.1) 得到终端速度:

$$v_\infty = -3.920 \text{ m/tick} = -78.400 \text{ m/s} \quad (2.4.1)$$

## 位移相关公式推导

### 单一方向位移与时间关系推导

位移  $s(t)$  为前  $t$  个速度之和:

$$s(t) = \sum_{i=0}^{t-1} v_i$$

根据位移与速度关系式 (2.2.2), 代入  $v_i$ :

$$s(t) = \sum_{i=0}^{t-1} \left( \alpha^i v_0 + \beta \frac{1-\alpha^i}{1-\alpha} \right) = v_0 \sum_{i=0}^{t-1} \alpha^i + \frac{\beta}{1-\alpha} \sum_{i=0}^{t-1} (1-\alpha^i)$$

分别计算两个求和:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{t-1} \alpha^i &= \frac{1-\alpha^t}{1-\alpha} \\ \sum_{i=0}^{t-1} (1-\alpha^i) &= \sum_{i=0}^{t-1} 1 - \sum_{i=0}^{t-1} \alpha^i = t - \frac{1-\alpha^t}{1-\alpha} \end{aligned}$$

即:

$$s(t) = v_0 \frac{1-\alpha^t}{1-\alpha} + \frac{\beta}{1-\alpha} \left( t - \frac{1-\alpha^t}{1-\alpha} \right)$$

整理并化简:

$$s(t) = \left( \frac{v_0}{1-\alpha} - \frac{\beta}{(1-\alpha)^2} \right) (1-\alpha^t) + \frac{\beta}{1-\alpha} t \quad (3.1.1)$$

### 跳跃过程中水平与垂直位移关系函数推导

疾跑跳跃时水平速度会增加 0.2, 但在这里不讨论初速度的问题。

将公式 (1.3.1) 中对应的  $\alpha$  和  $\beta$  代入公式 (3.1.1) 中:

$$y(t) = \left( \frac{v_0}{1-0.98} - \frac{0.0784}{(1-0.98)^2} \right) (1-0.98^t) + \frac{0.0784}{1-0.98} t$$

化简后得到:

$$y(t) = \left( \frac{v_0}{0.98} + 4 \right) 0.98^t - 3.92$$

令  $K = \frac{v_0}{0.98} + 4$ ,  $i = 0.98^t$ :

$$y = Ki - 3.92$$

则:

$$i = \frac{y + 3.92}{K}$$

$$t = \log_{0.98} i = \frac{\ln i}{\ln 0.98}$$

若公式 (3.1.1) 表示水平移动的速度与时间关系, 令:

$$\gamma = \frac{v_0}{1-\alpha} - \frac{\beta}{(1-\alpha)^2}, \quad \delta = \frac{\beta}{1-\alpha}$$

则:

$$x(t) = \gamma(1 - \alpha^t) + \delta t \quad (3.2.1)$$

将  $\alpha^t$  用  $i$  表示:

$$\alpha^t = e^{t \ln \alpha} = e^{\frac{\ln i \ln \alpha}{\ln 0.98}} = i^{\frac{\ln \alpha}{\ln 0.98}}$$

将  $\alpha^t$  代入公式 (3.2.1) 得:

$$x = \gamma(1 - i^{\frac{\ln \alpha}{\ln 0.98}}) + \delta \frac{\ln i}{\ln 0.98}$$

再代入  $i$ :

$$x = \gamma \left( 1 - \left( \frac{y + 3.92}{K} \right)^{\frac{\ln \alpha}{\ln 0.98}} \right) + \delta \frac{\ln \left( \frac{y + 3.92}{K} \right)}{\ln 0.98} \quad (3.2.2)$$

将  $\gamma = \frac{v_0}{1-\alpha} - \frac{\beta}{(1-\alpha)^2}$ ,  $\delta = \frac{\beta}{1-\alpha}$ ,  $\alpha = 0.91$ ,  $\beta = 0.02k_M$ ,  $K = \frac{v_0}{0.98} + 4$  代入公式 (3.2.2) 得:

$$x = \left( \frac{v_0}{0.09} - \frac{0.02k_M}{0.0081} \right) \left[ 1 - \left( \frac{y + 3.92}{\frac{v_0}{0.98} + 4} \right)^{\frac{\ln 0.91}{\ln 0.98}} \right] + \frac{0.02k_M}{0.09 \ln 0.98} \ln \left( \frac{y + 3.92}{\frac{v_0}{0.98} + 4} \right)$$

还可以略微化简一下 (当然不是我弄的了):

$$x = \frac{100}{81} (9v_0 - 2k_M) \left[ 1 - 0.91 \left( \frac{y + 3.92}{v_0 + 3.92} \right)^{\frac{\ln 0.91}{\ln 0.98}} \right] + \frac{2k_M}{9} \left( 1 + \log_{0.98} \left( \frac{y + 3.92}{v_0 + 3.92} \right) \right) \quad (3.2.3)$$