Minecraft 实体运动公式拓展推导

Revethere Neverland

2025 年 12 月 14 日

前言

本文内容包含大量数学与物理公式，需要具备一定的数理基础阅读。为更好地理解本文中涉及的概念，建议先阅读『低版本 pvp 中玩家最优 kb 的点击频率下限分析』一文。

更多内容见我的博客：revethere.github.io。

实体基本运动公式

一些必要参数及定义

- 速度：v_H、v_Y，表示实体在水平、垂直上的速度。
- 初始垂直速度：$v_{Y,1}$，取决于跳跃速度或服务器垂直击退参数。
- 方块滑度系数：

$$f_S = \begin{Bmatrix} 0.6 & \text{普通方块} \\ 0.8 & \text{粘液块} \\ 0.98 & \text{冰和浮冰} \\ 0.989 & \text{蓝冰} \end{Bmatrix}$$

- 移动乘数：

$$k_M = \begin{Bmatrix} 0.0 & \text{停止} \\ 0.3 & \text{潜行} \\ 1.0 & \text{行走} \\ 1.3 & \text{疾跑} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0.98\sqrt{2} & 45^\circ\text{潜行} \\ 0.98 & \text{正常} \\ 1.0 & 45^\circ\text{斜跑} \end{Bmatrix}$$

  特别地，当且仅当实体在疾跑状态并含有向前移动输入时使用 1.3 作为乘数。

$$k_{M-fly} = \begin{Bmatrix} 1 & \text{移动} \\ 2 & \text{疾跑} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0.98 & \text{正常} \\ 1.0 & 45^\circ\text{斜飞} \end{Bmatrix}$$

  空中的移动乘数没有考虑潜行的情况，因为意义不大。

- 效果乘数：

$$k_E = (1 + 0.2 \times \text{速度等级}) \times (1 - 0.15 \times \text{缓慢等级}) \geq 0$$

  当缓慢等级大于等于 7 时，玩家会停在原地不动。

- 速度阈值：$v_{th} = 0.005\ \mathrm{m/tick}$，当实体在某条轴上的速度经衰减后小于该值时，对应轴上的速度归零，仅保留加速度（1.9 及以上版本阈值变为 $0.003\ \mathrm{m/tick}$）。

水平运动递推公式

水平地面速度公式：

$$v_{H,t} = \underbrace{v_{H,t-1} \times f_{s,t-1} \times 0.91}_{\text{动量保留}} + \underbrace{0.1 \times \left(\frac{0.6}{f_{s,t}}\right)^3 \times k_M \times k_E}_{\text{加速度}} \tag{1.2.1}$$

水平空中速度公式：

$$v_{H,t} = \underbrace{v_{H,t-1} \times 0.91}_{\text{动量保留}} + \underbrace{0.02 \times k_M}_{\text{加速度}} \tag{1.2.2}$$

水平空中飞行公式：

$$v_{H,t} = \underbrace{v_{H,t-1} \times 0.91}_{\text{动量保留}} + \underbrace{0.05 \times k_{M-fly}}_{\text{加速度}} \tag{1.2.3}$$

垂直运动递推公式

垂直速度公式：

$$v_{Y,t} = \left(v_{Y,t-1} - \underset{\text{重力}}{0.08}\right) \times \underset{\text{阻力}}{0.98} \tag{1.3.1}$$

为了方便表示，后文中设公式 (1.2.1)、公式 (1.2.2)、公式 (1.2.3) 中所有动量保留项的系数为 α，加速度项为 β。公式 (1.3.1) 展开后同理。

稳态（渐进）速度推导

经典力学下的运动

$$\frac{dv}{dt} = a - fv \tag{2.1.1}$$

$$v = v_0 e^{-ft} + \frac{a}{f}(1 - e^{-ft}) \tag{2.1.2}$$

$$\frac{v}{v_0} = \lim_{t_0 \to 0} (1 - ft_0)^{\frac{t}{t_0}}, a = 0 \tag{2.1.3}$$

公式 (2.1.1) 描述了物体在恒定驱动力和正比于速度的阻力共同作用下，速度从变化逐渐达到稳定平衡的动态过程。这也是后续所有公式推导的基础。

公式 (2.1.2) 是通过求解公式 (1.1.1) 得到的精确解（通解）。其描述了在任何初始速度 v_0 和任何驱动力 a 的情况下，速度随时间变化的完整规律。

公式 (2.1.3) 则是将驱动力 $a = 0$ 时的特殊情况代入公式 (1.1.2) 得到的结果。表明物体仅在阻力作用下，速度从初值 v_0 开始指数衰减到零的过程。

水平稳态（渐进）速度

水平地面稳态（渐进）速度

假设实体在运动过程中所有状态不变（f_S 为常数），原递推式为一阶线性差分方程：

$$v_t = \alpha\, v_{t-1} + \beta \tag{2.2.1}$$

已知齐次方程 $v_t^{(h)} = \alpha v_{t-1}^{(h)}$ 的解为 $v_t^{(h)} = C\alpha^t$。非齐次项 β 为常数，设其特解为 K，代入原方程 (2.2.1) 得：

$$K = \alpha K + \beta$$

即 $K = \frac{\beta}{1-\alpha}$，$\alpha \neq 1$，特解为：

$$v_t^{(p)} = \frac{\beta}{1-\alpha}$$

方程 (2.2.1) 的通解为齐次解与特解之和：

$$v_t = C\alpha^t + \frac{\beta}{1-\alpha}$$

当 $t = 0$：

$$v_0 = C + \frac{\beta}{1-\alpha}$$

将 $C = v_0 - \frac{\beta}{1-\alpha}$ 代入通解得：

$$v_t = \left(v_0 - \frac{\beta}{1-\alpha}\right)\alpha^t + \frac{\beta}{1-\alpha} = v_0\alpha^t + \beta\frac{1-\alpha^t}{1-\alpha} \tag{2.2.2}$$

公式 (2.2.2) 表示的是速度与时间的关系，后文的推导中会多次用到该公式。

由于 $|\alpha| < 1$ 恒成立，该方程收敛。当 $t \to \infty$，稳态速度：

$$v_\infty = \frac{\beta}{1-\alpha}$$

代入 $\alpha = 0.91 f_s$ 和 $\beta = 0.1\left(\frac{0.6}{f_s}\right)^3 k_M k_E$ 得：

$$\boxed{v_\infty = \frac{0.1\left(\frac{0.6}{f_s}\right)^3 k_M k_E}{1 - 0.91 f_s}} \tag{2.2.3}$$

水平飞行稳态（渐进）速度

这里提供另一种的推导方法。

已知每刻（tick）的时间长度 $\Delta t = 0.05s$，对于连续的时间 t 与刻数 n：

$$t = n\Delta t,\ v(t) \approx v_n$$

将原递推方程移项得到：

$$v_n - v_{n-1} = (\alpha - 1)v_{n-1} + \beta$$

同时除以 Δt：

$$\frac{v_n - v_{n-1}}{\Delta t} = \frac{(\alpha-1)v_{n-1}}{\Delta t} + \frac{\beta}{\Delta t}$$

令：

$$f = \frac{1-\alpha}{\Delta t},\ a = \frac{\beta}{\Delta t}$$

得到微分方程 (2.1.2)，其积分因子 $\mu(t) = e^{ft}$。两边同时乘以 $\mu(t)$：

$$e^{ft}\frac{dv}{dt} + fe^{ft}v = ae^{ft}$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{ft}v\right) = ae^{ft}$$

对 t 积分：

$$e^{ft}v = \int ae^{ft}\,dt = \frac{a}{f}e^{ft} + C$$

两边除以 e^{ft}，得到：

$$v = \frac{a}{f} + Ce^{-ft}$$

初始时 $v(0) = v_0$，则将常数 $C = v_0 - \frac{a}{f}$ 代入通解得到公式 (2.1.2)。当 $t \to \infty$，稳态速度：

$$v_\infty = \frac{a}{f} = \frac{\beta}{1-\alpha}$$

代入 $\alpha = 0.91$ 和 $\beta = 0.05k_{M-fly}$ 得：

$$\boxed{v_\infty = \frac{0.05k_{M-fly}}{0.09}} \tag{2.2.4}$$

部分状态下的稳态速度

状态	k_M	k_{M-fly}	k_E	f_S	v_∞ (m/s)
地面正常移动	1.0×0.98	/	1.0×1.0	0.6	4.317
地面正常疾跑	1.3×0.98	/	1.0×1.0	0.6	5.612
地面斜 45° 疾跑	1.3×1.0	/	1.0×1.0	0.6	5.727
地面正常疾跑（速度 II）	1.3×0.98	/	1.4×1.0	0.6	7.857
地面斜 45° 疾跑（速度 II）	1.3×1.0	/	1.4×1.0	0.6	8.018
空中正常移动飞行	/	1	/	/	10.889
空中正常疾跑飞行	/	2	/	/	21.778

垂直稳态（渐进）速度

自由落体终端速度

前文的推导过程已经很详细了，因此这部分只给出结论。

根据公式 (1.3.1) 得到终端速度：

$$\boxed{v_\infty = -3.920\ \mathrm{m/tick} = -78.400\ \mathrm{m/s}} \tag{2.4.1}$$

位移相关公式推导

单一方向位移与时间关系推导

位移 $s(t)$ 为前 t 个速度之和：

$$s(t) = \sum_{i=0}^{t-1} v_i$$

根据位移与速度关系式 (2.2.2)，代入 v_i：

$$s(t) = \sum_{i=0}^{t-1} \left(\alpha^i v_0 + \beta \frac{1-\alpha^i}{1-\alpha} \right) = v_0 \sum_{i=0}^{t-1} \alpha^i + \frac{\beta}{1-\alpha} \sum_{i=0}^{t-1} (1-\alpha^i)$$

分别计算两个求和：

$$\sum_{i=0}^{t-1} \alpha^i = \frac{1-\alpha^t}{1-\alpha}$$

$$\sum_{i=0}^{t-1} (1-\alpha^i) = \sum_{i=0}^{t-1} 1 - \sum_{i=0}^{t-1} \alpha^i = t - \frac{1-\alpha^t}{1-\alpha}$$

即：

$$s(t) = v_0 \frac{1-\alpha^t}{1-\alpha} + \frac{\beta}{1-\alpha} \left(t - \frac{1-\alpha^t}{1-\alpha} \right)$$

整理并化简：

$$\boxed{s(t) = \left(\frac{v_0}{1-\alpha} - \frac{\beta}{(1-\alpha)^2} \right) (1-\alpha^t) + \frac{\beta}{1-\alpha} t} \tag{3.1.1}$$

跳跃过程中水平与垂直位移关系函数推导

疾跑跳跃时水平速度会增加 0.2，但在这里不讨论初速度的问题。
将公式 (1.3.1) 中对应的 α 和 β 代入公式 (3.1.1) 中：

$$y(t) = \left(\frac{v_0}{1-0.98} - \frac{0.0784}{(1-0.98)^2} \right) (1-0.98^t) + \frac{0.0784}{1-0.98} t$$

化简后得到：

$$y(t) = \left(\frac{v_0}{0.98} + 4 \right) 0.98^t - 3.92$$

令 $K = \frac{v_0}{0.98} + 4,\ i = 0.98^t$：

$$y = Ki - 3.92$$

则：

$$i = \frac{y + 3.92}{K}$$

$$t = \log_{0.98} i = \frac{\ln i}{\ln 0.98}$$

若公式 (3.1.1) 表示水平移动的速度与时间关系，令：

$$\gamma = \frac{v_0}{1-\alpha} - \frac{\beta}{(1-\alpha)^2},\ \delta = \frac{\beta}{1-\alpha}$$

则：

$$x(t) = \gamma(1-\alpha^t) + \delta t \tag{3.2.1}$$

将 α^t 用 i 表示：

$$\alpha^t = e^{t\ln\alpha} = e^{\frac{\ln i \ln\alpha}{\ln 0.98}} = i^{\frac{\ln\alpha}{\ln 0.98}}$$

将 α^t 代入公式 (3.2.1) 得：

$$x = \gamma(1 - i^{\frac{\ln\alpha}{\ln 0.98}}) + \delta\frac{\ln i}{\ln 0.98}$$

再代入 i：

$$x = \gamma\left(1 - \left(\frac{y+3.92}{K}\right)^{\frac{\ln\alpha}{\ln 0.98}}\right) + \delta\frac{\ln\left(\frac{y+3.92}{K}\right)}{\ln 0.98} \tag{3.2.2}$$

将 $\gamma = \frac{v_0}{1-\alpha} - \frac{\beta}{(1-\alpha)^2}$，$\delta = \frac{\beta}{1-\alpha}$，$\alpha = 0.91$，$\beta = 0.02k_M$，$K = \frac{v_0}{0.98} + 4$ 代入公式 (3.2.2) 得：

$$x = \left(\frac{v_0}{0.09} - \frac{0.02k_M}{0.0081}\right)\left[1 - \left(\frac{y+3.92}{\frac{v_0}{0.98}+4}\right)^{\frac{\ln 0.91}{\ln 0.98}}\right] + \frac{0.02k_M}{0.09\ln 0.98}\ln\left(\frac{y+3.92}{\frac{v_0}{0.98}+4}\right)$$

还可以略微化简一下（当然不是我弄的了）：

$$\boxed{x = \frac{100}{81}(9v_0 - 2k_M)\left[1 - 0.91\left(\frac{y+3.92}{v_0+3.92}\right)^{\frac{\ln 0.91}{\ln 0.98}}\right] + \frac{2k_M}{9}\left(1 + \log_{0.98}\left(\frac{y+3.92}{v_0+3.92}\right)\right)} \tag{3.2.3}$$