2021 级经管类微积分 IB 期中练习解答 2021-11

一. 填空题或选择题：（ 选择题正确选项唯一 ）

1. 若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 不存在，$\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$ 存在，则必定有____B____.

$(A).\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)\cdot g(x)\right]$不存在； $(B).\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)+g(x)\right]$不存在；

$(C).\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)\cdot g(x)\right]$存在； $(D).\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)+g(x)\right]$存在.

$\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\dfrac{1}{x^2}=0$, 排除$A$; $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\cdot\dfrac{1}{x}=\infty$, 排除$C$.

2. $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\tan\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)=$ __$\dfrac{2}{\pi}$__ .

$$\lim_{x\to1}(1-x)\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)=\lim_{x\to1}\frac{1-x}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)=\lim_{x\to1}\frac{-1}{-\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\cdot\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}.$$

$$\lim_{x\to1}(1-x)\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)\overset{1-x=t}{=\!=\!=}\lim_{t\to0}t\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}t\right)=\lim_{t\to0}t\cot\left(\frac{\pi}{2}t\right)=\lim_{t\to0}\frac{t}{\tan\left(\frac{\pi}{2}t\right)}=\frac{2}{\pi}.$$

3. 设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有定义，且$\forall x,y\in(-\infty,+\infty)$有$f(x+y)=f(x)+f(y)$.

若$f(x)$在$x=0$处连续，则函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上的连续情况为__连续__.（选填：连续，不一定连续），

并可猜想$f(x)$的表达式为$f(x)=$ __$xf(1)$__ .（即不必说明理由）.

(1) $f(0+0)=f(0)+f(0)\Rightarrow f(0)=0$

对$\forall x\in R$, $\lim\limits_{\Delta x\to0}f(x+\Delta x)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\left[f(x)+f(\Delta x)\right]=f(x)+\lim\limits_{\Delta x\to0}f(\Delta x)=f(x)+f(0)=f(x)$

$\Rightarrow f(x)$连续.

(2) $0=f(0)=f(x-x)=f(x)+f(-x)\Rightarrow f(-x)=-f(x)$, 故考虑出$x>0$的情形便可窥全貌

$\to$先看，$f(1)=f\left(\dfrac{1}{n}\right)+f\left(\dfrac{n-1}{n}\right)=f\left(\dfrac{1}{n}\right)+f\left(\dfrac{1}{n}\right)+f\left(\dfrac{n-2}{n}\right)=\cdots=nf\left(\dfrac{1}{n}\right)$, 可得$f\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{n}f(1)$;

接着，m为正整数时, $f\left(\dfrac{m}{n}\right)=f\left(\dfrac{1}{n}\right)+f\left(\dfrac{m-1}{n}\right)=\cdots=mf\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{m}{n}f(1)$,

于是对$\forall x$为任意正有理数，$f(x)=xf(1)$;

$\to$若$x>0$且为无理数时，取x的n位小数的近似值x_n，可获得一有理数列$\{x_n\}$,

显然$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$, $f(x_n)=x_nf(1)$, $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_nf(1)=xf(1)$,

由f的连续性可得$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(x)$，故$f(x)=xf(1)$，

综上，$x>0$ 时，$f(x)=xf(1)$；

$x=0$ 时，$f(x)=xf(1)$显然成立；

$x<0$ 时，$f(x)=-f(-x)=xf(1)$.

所以，$\forall x\in R$，$f(x)=xf(1)$.

4. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{\dfrac{x^2-1}{x-1}-3}$ 的定义域为 $\underline{\{x|x\neq 1,2,x\in R\}}$ $\underline{\mathbb{R}/\{1,2\}}$. $\underline{\mathbb{R}-\{1,2\}}$

5. 设 $y=-(x+1)e^{-x}$，那么 $dy=\underline{xe^{-x}dx}$ ，$y''=\underline{(1-x)e^{-x}}$.

6. 下列命题中正确的命题是_____D_____.

(A). 在 $x\in(a,b)$ 时曲线 $y=f(x)$ 处处有唯一的切线，则函数$y=f(x)$在(a,b)内点点可导.

(B). 若极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在，那么 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 也存在，并且 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

(C). $\forall\ x\in(-\infty,+\infty)$,有 $\arcsin(\sin x)=x$.

(D). 如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的左右导数都存在，则函数 $f(x)$ 在 x_0 点处连续 .

A： $y=\sqrt[3]{x}$在$(0,0)$处有切线$x=0$, 切线的倾角是$\dfrac{\pi}{2}$，但导数不存在；

B： 若$\dfrac{f(x)}{g(x)}$是$\dfrac{0}{0}$或$\dfrac{\infty}{\infty}$未定型, 则该说法正确；若不是未定型，则不然；

反例: $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x+1)'}{(x-1)'}=1$，但$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+1}{x-1}=\infty$

C： $\arcsin\left(\sin\dfrac{5}{2}\pi\right)=\dfrac{\pi}{2}$

D： $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$存在$\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0^-}[f(x)-f(x_0)]=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$

同理, $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$存在$\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$，于是$f(x)$在$x_0$连续.

注意：左右导数存在时，必然$f(x)$在x_0有定义的；如果没有定义，左右导数一定不存在.

7. 半 径 为 r 的 圆 面 积 $A=\pi r^2$，$\Delta r=dr\to 0$ 时 ， $\Delta A=$ $\underline{2\pi r\Delta r+\pi(\Delta r)^2 \text{ 或 } 2\pi rdr+\pi(dr)^2}$ ，

$dA=$ $\underline{2\pi rdr}$ ，$\dfrac{dA}{dr}=$ $\underline{2\pi r}$.

8. 若 $x\to 0$，则 $n=$ $\underline{5}$ 时 $e^{x\cos(x^2)}-e^x$ 与 x^n 为同阶无穷小量 .

解： $x\to 0$时，$e^x-1\sim x, 1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$.

$$\therefore x\to 0\text{时}, e^{x\cos(x^2)}-e^x=e^x\left[e^{x\cos(x^2)-x}-1\right]\sim e^{x\cos(x^2)-x}-1\sim x\cos(x^2)-x$$

$$\sim x\left[\cos(x^2)-1\right]\sim x\left(-\frac{1}{2}x^4\right)=-\frac{1}{2}x^5,\quad \therefore n=5.$$

9. $d\left(\underline{\ln\sqrt{1+x^2}+C}\right)=d\left(\underline{\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)+C}\right)=\dfrac{x}{1+x^2}dx$.

解：$$\left[\ln\left(\sqrt{1+x^2}\right)\right]'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}=\frac{x}{1+x^2}$$

二. 解答题

10. 设 $y=\ln\sqrt{1+e^{2x}}-x-e^{-x}\arctan e^{-x}$，求 y' 并将结果化至最简，并写出 dy .

解 $$y'=\left(\ln\sqrt{1+e^{2x}}-x-e^{-x}\arctan e^{-x}\right)'=\left[\frac{1}{2}\ln(1+e^{2x})\right]'-1-\left(e^{-x}\arctan e^{-x}\right)'$$

$$=\frac{1}{2}\frac{(1+e^{2x})'}{1+e^{2x}}-1-\left[\left(e^{-x}\right)'\arctan e^{-x}+e^{-x}\left(\arctan e^{-x}\right)'\right]$$

$$=\frac{1}{2}\frac{e^{2x}\cdot 2}{1+e^{2x}}-1-\left[-e^{-x}\arctan e^{-x}+e^{-x}\frac{1}{1+e^{-2x}}\cdot\left(-e^{-x}\right)\right]$$

$$=\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}-1-\left(-e^{-x}\arctan e^{-x}-\frac{e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\right)=e^{-x}\arctan e^{-x}\ ;$$

$$\therefore\ dy=e^{-x}\arctan e^{-x}dx.$$

11.求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2x}\right)$.

解：$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2x}},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1-\frac{2}{x}}}=2,$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{4x}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-4}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1-\frac{2}{x}}}=-2,$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2x}\right)\text{不存在.}$$

12. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e-(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}$.

解1： 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e-e^{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}}}{x}=-e\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}-1}{x}=-e\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}{x}=-e\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}$

$$=-e\lim_{x\to0}\frac{x-\frac{1}{2}x^2+o\left(x^2\right)-x}{x^2}=\frac{1}{2}e$$

解2： $(1+x)^{\frac{1}{x}}=e^{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}}=e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}=e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}$,

$$\therefore \text{原式}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim_{x\to0}\frac{0-\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]'}{1}=-\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)'=-\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}$$

$$\text{其中}\lim_{x\to0}\frac{\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{1-1-\ln(1+x)}{2x+3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-\ln(1+x)}{x(2+3x)}=-\frac{1}{2},$$

$$\text{其中}\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e,$$

$$\therefore \text{原式}=\frac{1}{2}e.$$

13. 光的反射遵循反射定律:光的反射角等于入射角。
通过计算抛物线的切线与法线方程，我们可以证明抛物线的光学性质：一束平行于对称轴的光线经过抛物线的反射一定通过焦点；反之， 从焦点出发的光线经过抛物线的反射必定成为一束平行于对称轴的平行光线。

试给出抛物线 $y^2=2px\ (p>0)$ 上点 (x_0,y_0) 处的切线与法线方程.

解:(1)若 $y_0=0$ ，则点 $(0,0)$ 处的切线方程为 $x=0$ ，法线方程为 $y=0$;

(2)若 $y_0\neq0$ ，则由 $2yy'=2p\Rightarrow y'\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=\dfrac{p}{y}\Big|_{y=y_0}=\dfrac{p}{y_0}$,

故所求切线方程为 $y-y_0=\dfrac{p}{y_0}(x-x_0)$，法线方程为 $y-y_0=-\dfrac{y_0}{p}(x-x_0)$.

14. 设$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cdots\cdot\cos\dfrac{x}{2^n}\right)$,试给出函数$f(x)$不带数列极限符号的表达式，进而讨论函数$f(x)$在$x=0$处的连续性,可导性.

解： 由 $2\sin\dfrac{x}{2^n}\cos\dfrac{x}{2^n}=\sin\dfrac{x}{2^{n-1}}$可得

$$x\neq 0\text{时},\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cdot\cos\frac{x}{2^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cdot\cos\frac{x}{2^n}\sin\frac{x}{2^n}}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{x},$$

$$\therefore f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}.$$

$\because \lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1=f(0)$, $\quad\therefore$ 函数$f(x)$在$x=0$处连续

$$\because \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2}=0,$$

$\therefore$函数$f(x)$在$x=0$处可导，且$f'(0)=0$.

15. 设函数 $f(x)$ 是$(-\infty,+\infty)$上处处可导的偶(奇)函数，证明 $f'(x)$ 是$(-\infty,+\infty)$上的奇(偶)函数.

由此，对于函数 $g(x)=\ln\sqrt{1+x^2}$，求 $g^{(2021)}(0)$.

证明： 若函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上可导且为偶函数，则$f(-x)=f(x)$,

$\therefore f'(-x)(-1)=f'(x)$，即$f'(-x)=-f'(x)$，故$f'(x)$为奇函数.

同理，若$f(x)$为$(-\infty,+\infty)$上的奇函数，则$f(-x)=-f(x)\Rightarrow f'(-x)(-1)=-f'(x)$,

则$f'(-x)=f'(x)$，即$f'(x)$为偶函数.

解：$g(x)=\ln\sqrt{1+x^2}$是$(-\infty,+\infty)$上的偶函数，于是$g'(x)$为奇函数，$g''(x)$为偶函数,$\cdots$,

$\cdots$，$g^{(2020)}(x)$为偶函数，$g^{(2021)}(x)$为奇函数，$\quad\therefore g^{(2021)}(0)=0$.

用导数定义证明：

若函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上可导且为偶函数,$f(-x)=f(x)$,

$$\text{则}f'(-x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-x+h)-f(-x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{h}=-\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x+(-h)\right)-f(x)}{-h}=-f'(x),$$

$\therefore$若$f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的偶函数,则$f'(x)$为奇函数.

16. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+2^n+3^n+\cdots+2021^n\right)}$

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+2^n+3^n+\cdots+2021^n\right)}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[2021^n\left(\left(\frac{1}{2021}\right)^n+\left(\frac{2}{2021}\right)^n+\cdots+\left(\frac{2020}{2021}\right)^n+1\right)\right]^{\frac{1}{n}}$

$=2021\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{2021}\right)^n+\left(\frac{2}{2021}\right)^n+\cdots+\left(\frac{2020}{2021}\right)^n+1\right]^{\frac{1}{n}}=2021\times\left(0+\cdots+0+1\right)^0=2021.$

法二 $2021^n<1+2^n+\cdots+2021^n<2021\cdot2021^n$,

$\therefore 2021<\sqrt[n]{\left(1+2^n+\cdots+2021^n\right)}<2021\cdot\sqrt[n]{2021}$,

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2021}=1$，则由夹逼准则知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+2^n+3^n+\cdots+2021^n\right)}=2021.$

法三 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+2^x+3^x+\cdots+2021^x\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}\ln\left(1+2^x+3^x+\cdots+2021^x\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+2^x+3^x+\cdots+2021^x\right)}{x}}$,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+2^x+3^x+\cdots+2021^x\right)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{0+2^x\ln2+3^x\ln3+\cdots+2021^x\ln2021}{1+2^x+3^x+\cdots+2021^x}}{1}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\dfrac{2}{2021}\right)^x\ln2+\cdots+\left(\dfrac{2020}{2021}\right)^x\ln2020+\ln2021}{\left(\dfrac{1}{2021}\right)^x+\left(\dfrac{2}{2021}\right)^x+\cdots+\left(\dfrac{2020}{2021}\right)^x+1}=\ln2021,$$

$\therefore$ 原式 $=e^{\ln2021}=2021.$

17. 证明题

(1). 求证：$x>0$, $4x^3+1\ge 3x$.

证明1： $x>0$时，函数$\varphi(x)=4x^3+1-3x$连续、可导，

且$\varphi'(x)=12x^2-3$ ，$\varphi''(x)=24x$ ，

令$\varphi'(x)=0$，得唯一驻点$x=\frac{1}{2}$，又$\varphi''\left(\frac{1}{2}\right)=12>0$ ，

故在$x=\frac{1}{2}$处取得最小值$\varphi\left(\frac{1}{2}\right)=0$，

$\therefore 4x^3+1-3x\ge 0$，$\therefore 4x^3+1\ge 3x$.

证明2： $x>0$时，函数$\varphi(x)=4x^3+1-3x$连续、可导，$\varphi'(x)=12x^2-3=3(2x+1)(2x-1)$，

令$\varphi'(x)=0$，得驻点$x=\frac{1}{2}$，

$\left(0,\frac{1}{2}\right)$内$\varphi'(x)<0$，则$\left[0,\frac{1}{2}\right]$上$\varphi(x)$单调递减，则$\varphi(x)\ge\varphi(\frac{1}{2})=0$；

$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$内$\varphi'(x)>0$，则$\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$上$\varphi(x)$单调递增，则$\varphi(x)\ge\varphi(\frac{1}{2})=0$；

$\therefore 4x^3+1-3x\ge 0$，$\therefore 4x^3+1\ge 3x$.

证明3：由“几何平均－算术平均不等式”知

$x>0$ 时，$4x^2+\frac{1}{x}=4x^2+\frac{1}{2x}+\frac{1}{2x}\ge 3\cdot\sqrt[3]{4x^2\cdot\frac{1}{2x}\cdot\frac{1}{2x}}=3$

$\therefore x>0$时，$4x^3+1\ge 3x$.

证明4： 显然，$t=1$是多项式 $1+3t-4t^3$ 的零点,

因而,$x=-1$ 是多项式 $1-3x+4x^3$ 的零点,

所以 $1-3x+4x^3$ 必定有$x+1$ 的因子,

于是,$4x^3-3x+1=4x^3+4x^2-4x^2-4x+x+1$

$=4x^2(x+1)-4x(x+1)+(x+1)=(x+1)(4x^2-4x+1)=(x+1)(2x-1)^2$.

$\therefore$ $x>0$时，$4x^3-3x+1=(x+1)(2x-1)^2\ge 0$

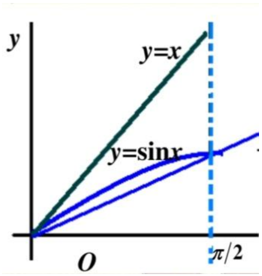
$\therefore x>0$时，$4x^3+1\ge 3x$ 显然成立.

(2). 求证$Jordan$不等式：$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$时，有 $\frac{2}{\pi}x\le\sin x\le x$.

证明1： 正弦曲线$y=\sin x$在$O(0,0)$处的切线为$y=x$. 曲线过$O(0,0)$点与点$\left(\frac{\pi}{2},1\right)$的割线为$y=\frac{2}{\pi}x$.

$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时，$(\sin x)''=-\sin x<0$，$\therefore$ 在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上时，曲线$y=\sin x$严格凸，故切线位于曲线段上方，

割线位于曲线段下方.数形结合，即得$Jordan$不等式：$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$时，有 $\frac{2}{\pi}x\le\sin x\le x$.



$Jordan$不等式：$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$时，有 $\frac{2}{\pi}x\le\sin x\le x$.

分析：$x=0$ 时，等号成立；$x=\frac{\pi}{2}$ 时，$1=\sin\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}$.$x\in(0,\pi/2]$时，$\frac{2}{\pi}x\le\sin x\le x\Leftrightarrow\frac{2}{\pi}\le\frac{\sin x}{x}\le1$.

进而将问题转化为求函数$\varphi(x)=\frac{\sin x}{x}$在$(0,\pi/2]$上的最大、小值 .

证法2：设$\varphi(x)=\frac{\sin x}{x}$，其在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$上连续，$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内可导，

$\varphi'(x)=\frac{\cos x\cdot x-\sin x\cdot1}{x^2}=\frac{\cos x}{x^2}(x-\tan x)$；

设$\psi(x)=x-\tan x$，其在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$上连续，$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内可导，$\psi'(x)=1-\sec^2x=-\tan^2x<0$，

$\therefore\psi(x)=x-\tan x$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递减，故$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时，$\psi(x)<\psi(0)=0$，

则$\varphi'(x)=\frac{\cos x}{x^2}(x-\tan x)<0$，则$\varphi(x)=\frac{\sin x}{x}$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$上单调递减，

又$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}=1$，$\varphi(\frac{\pi}{2})=\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}$，故$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$时，$\frac{2}{\pi}\le\frac{\sin x}{x}<1$，

$\therefore x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$时，$\frac{2}{\pi}x\le\sin x\le x$.

分析3：可以分成$\frac{2}{\pi}x\le\sin x$和$\sin x\le x$两个不等式，分别用单调性证明 .

17. 证明题(3). 求证：$\forall x \ge 1,\ \arctan x - \dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{2x}{1+x^2} \equiv \dfrac{\pi}{4}$.(“$\equiv$” 表示 “恒等于”)

分析：可证 $x \in [1,+\infty)$时,连续函数$\varphi(x) = \arctan x - \dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{2x}{1+x^2}$为常函数.

证明1： 设$\varphi(x) = \arctan x - \dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{2x}{1+x^2}$，其在$[1,+\infty)$上连续,$(1,+\infty)$内可导,

$$\varphi'(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}}\cdot\frac{2\left(1+x^2\right)-2x\cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)\sqrt{1-2x^2+x^4}}=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}\equiv 0,$$

$\therefore$ 当$x \in (1,+\infty)$时，$\varphi(x)=C=\varphi(\sqrt{3})=\arctan\sqrt{3}-\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{2\sqrt{3}}{1+3}=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{4}$,

当$x=1$时，$\varphi(1)=\arctan 1-\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{2}{1+1}=\dfrac{\pi}{4}-0=\dfrac{\pi}{4}$,

$\therefore \forall x \in [1,+\infty)$，$\arctan x-\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{2x}{1+x^2}\equiv\dfrac{\pi}{4}$.

分析：可证$\forall x \ge 1, 2\arctan x - \arccos\dfrac{2x}{1+x^2} \equiv \dfrac{\pi}{2}$.

证明2： 记$\arctan x = \alpha, \arccos\dfrac{2x}{1+x^2} = \beta$.

$$\cos\left(2\alpha-\beta\right)=\cos 2\alpha\cos\beta+\sin 2\alpha\sin\beta=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}\cos\beta+\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}\sin\beta=\frac{1-x^2}{1+x^2}\cdot\frac{2x}{1+x^2}+\frac{2x}{1+x^2}\cdot\sin\beta$$

$\because x \ge 1,\qquad \therefore 0<\dfrac{2x}{1+x^2}\le 1,\ \arccos\dfrac{2x}{1+x^2}=\beta\in[0,\pi/2)$.

$\therefore \sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)^2}=\dfrac{\left|x^2-1\right|}{1+x^2}=\dfrac{x^2-1}{1+x^2}$,

$\because x\ge 1, \therefore \arctan x=\alpha\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

$\therefore 2\alpha-\beta\in(0,\pi)$.

$\because \cos\left(2\alpha-\beta\right)=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\cdot\dfrac{2x}{1+x^2}+\dfrac{2x}{1+x^2}\cdot\sin\beta=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\cdot\dfrac{2x}{1+x^2}+\dfrac{2x}{1+x^2}\cdot\dfrac{x^2-1}{1+x^2}\equiv 0$,

$\therefore 2\alpha-\beta=\dfrac{\pi}{2}$,

即$\forall x\ge 1$，$\arctan x-\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{2x}{1+x^2}\equiv\dfrac{\pi}{4}$.

(4). 设函数$f(x)$在$\left(-\infty,+\infty\right)$上有定义，且$\forall x,y\in\left(-\infty,+\infty\right)$有$f(x+y)=f(x)f(y)$. 若$f'(0)=1$，证明函数$f(x)$在$\left(-\infty,+\infty\right)$上点点可导，且有$f'(x)=f(x)$，并由此证明$f(x)=e^{x}$.

证明：由已知得 $f(x+h)=f(x)f(h)$，$f(x)=f(x)f(0)$，

$\therefore$ 对$\forall x\in R, f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=f(x)\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=f(x)f'(0)\overset{f'(0)=1}{=}f(x)$，

即$f(x)$在$\left(-\infty,+\infty\right)$内点点可导，且 $f'(x)=f(x)$.

$\left[\text{猜想} f(x)=e^{x},\cdots,\text{设} f(x)-e^{x}=\varphi(x)\equiv 0\text{？不成哪！那么就设}\dfrac{f(x)}{e^{x}}\equiv 1\cdots\right]$

设$\varphi(x)=\dfrac{f(x)}{e^{x}}$,其在$\left(-\infty,+\infty\right)$内连续、可导,

$\varphi'(x)=\left(\dfrac{f(x)}{e^{x}}\right)'=\dfrac{f'(x)e^{x}-f(x)e^{x}}{e^{2x}}\equiv 0,$

$\therefore x\in\left(-\infty,+\infty\right)$时,$\dfrac{f(x)}{e^{x}}\equiv C,$

故$f(x)=Ce^{x}, f'(x)=Ce^{x},$

$\because f'(0)=1,$

$\therefore C=1,$

$\therefore f(x)=e^{x}.$