# 2018-2019 学年第 1 学期《离散数学》A 试卷答案

**一、选择题每题(2 分，共 20 分）**

1.A  2.C  3.B  4.A  5.B  6. D  7. B  8. B  9. D  10. C

**二、填空题（每空 2 分，共 30 分）**

1． p,q 均为 1； 2. $\left(\left(p\downarrow q\right)\downarrow r\right)\downarrow\left(\left(p\downarrow q\right)\downarrow r\right)$ ； 3. 001,011,100,111; $\Pi(0,2,5,6)$；

4．$(p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)$；5. 54；

6．$\neg(\exists x(P(x)\wedge\neg E(x)))$，或$\forall x(P(x)\rightarrow E(x))$；

7. $(P(a)\wedge P(b)\wedge P(c))\vee Q(a)\vee Q(b)\vee Q(C)$；8. 15,83；

9．$P(A)=\{\varnothing,\{\varnothing\},\ \{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$；10.$\{1,2,3,\{1\}\}$，$\{1,2,3,\{1\},a,c,d,\{d\}\}$；

11. $\{\langle 0,2\rangle,\langle 9,3\rangle\}$，$\{2,3\}$.

**三、解答题（本大题共 3 小题，共计 23 分）**

**1．$(p\rightarrow(q\wedge r))\wedge(\neg p\rightarrow(\neg q\wedge\neg r))\Leftrightarrow(\neg p\vee(q\wedge r))\wedge(p\vee(\neg q\wedge\neg r))$ 2 分**

**$\Leftrightarrow(\neg p\wedge p)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge r)\vee(q\wedge r\wedge\neg q\wedge\neg r)\Leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge r)$ 4 分**

**$\Leftrightarrow\sum(0,7)$ 主析取范式 5 分**

**$\Leftrightarrow\prod(1,2,3,4,5,6)$ 主合取范式 7 分**

**2．**$\forall x\forall y((\exists zF(x,y,z)\wedge\exists yG(x,y))\rightarrow\exists xH(y,x))$ 2 分

$\Leftrightarrow\forall x\forall y((\exists zF(x,y,z)\wedge\exists uG(x,u))\rightarrow\exists tH(y,t))$ 4 分

$\Leftrightarrow\forall x\forall y\forall z\ \forall u\ \exists t((F(x,y,z)\wedge G(x,u))\rightarrow H(y,t))$ 6 分

**3.** （1）关系 R 的关系表达式为 $R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,6\rangle,\langle 5,5\rangle,\langle 6,3\rangle\}$ 2 分

（2）R 的关系矩阵为 $M_R=\begin{pmatrix}0&1&0&1&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&0\end{pmatrix}$ 4 分

（3）关系 R 的自反闭包为

$r(R)=R\cup I_A=\{<1,1>,<1,2>,<1,4>,<2,2>,<2,4>,<3,3>,<3,6>,<4,4>,<5,5>,<6,3>,<6,6>\}$ 6 分

关系 R 的对称闭包为

$s(R)=R\cup R^{-1}=\{<1,2>,<2,1>,<2,4>,<4,2>,<1,4>,<4,1>,<3,6>,<6,3>,<5,5>\}$ 8 分

$R^2=\{<1,4>,<3,3>,<6,6>,<5,5>\}$ ，$R^3=\{<3,6>,<6,3>,<5,5>\}$

$R^4=\{<3,3>,<6,6>,<5,5>\}$， $R^5=\{<3,6>,<6,3>,<5,5>\}=R^3$

关系 R 的传递闭包为

$t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup R^4=\{<1,2>,<1,4>,<2,4>,<3,3>,<3,6>,<5,5>,<6,3>,<6,6>\}$ 10 分

**四、证明题（本大题共 4 小题，共计 27 分）**

**1.**（1）先将命题 0 元谓词化

设 M(x):x 是人， $F(x)$：$x$ 怕困难，$G(x)$：$x$ 获得成功，$H(x)$：$x$ 失败。

前提：$\forall x(M(x)\rightarrow(F(x)\rightarrow\neg G(x)))$，$\forall x(M(x)\rightarrow(G(x)\vee H(x)))$，$\exists x(M(x)\wedge\neg H(x))$

结论：$\exists x(M(x)\wedge\neg F(x))$ 2 分

（2）证明

① $\forall x(M(x)\rightarrow(F(x)\rightarrow\neg G(x)))$ 前提引入

② $M(y)\to(F(y)\to\neg G(y))$ ①∀-

③ $\forall x(M(x)\to(G(x)\vee H(x)))$ 前提引入

④ $M(y)\to(G(y)\vee H(y))$ ③∀-

⑤ $\neg G(y)\to(\neg M(y)\vee H(y))$ ④置换

⑥ $M(y)\wedge F(y)\to\neg G(y)$ ②置换

⑦ $(M(y)\wedge F(y))\to(\neg M(y)\vee H(y))$ ⑤⑥假言三段论

⑧ $M(y)\wedge\neg H(y)\to\neg F(y)$ ⑦置换

⑨ $M(y)\wedge\neg H(y)\to M(y)$ 化简

⑩ $(M(y)\wedge\neg H(y)\to\neg F(y))\wedge(M(y)\wedge\neg H(y)\to M(y))$ ⑧⑨合取

⑾ $M(y)\wedge\neg H(y)\to M(y)\wedge\neg F(y)$ ⑩置换

⑿ $M(y)\wedge\neg H(y)\to\exists x(M(x)\wedge\neg F(x))$ ⑾∃+

⒀ $\exists x(M(x)\wedge\neg H(x))\to\exists x((M(x)\wedge\neg F(x))$ ⑿∃-

⒁ $\exists x(M(x)\wedge\neg H(x))$ 前提引入

⒂ $\exists x(M(x)\wedge\neg F(x))$ ⒀⒁假言推理 7 分

**2．证明：**

"⇒"，即必要性

设 R∘S 是等价关系，又由 R 和 S 也是等价关系便得到

$R\circ S=(R\circ S)^{-1}=S^{-1}\circ R^{-1}=S\circ R.$ 2 分

"⇐"，即充分性

设 $R\circ S=S\circ R$. 由 R 和 S 是等价关系可得 $I_A\subseteq R$, $I_A\subseteq S$,由此可得

$I_A=I_A\circ I_A\subseteq R\circ S$, 即关系 R∘S 是自反的. 3 分

由 R 和 S 是等价关系可得 R,S 是对称的，由此可得

$(R\circ S)^{-1}=S^{-1}\circ R^{-1}=S\circ R=R\circ S$, 即关系 R∘S 是对称的. 5 分

由 R 和 S 是等价关系可得 R,S 是传递的，由此可得

$(R\circ S)\circ(R\circ S)=R\circ(S\circ R)\circ S=R\circ(R\circ S)\circ S=R^2\circ S^2\subseteq R\circ S$,即关系 R∘S 是对称的.

所以，R∘S 是 A 上的等价关系. 7 分

**3. 证明：对任意 $x$,若**

$$x\in P(A)\cap P(B)\cap P(C)\Leftrightarrow x\in P(A)\wedge x\in P(B)\wedge x\in P(C)$$ 2 分

$$\Leftrightarrow x\subseteq A\wedge x\subseteq B\wedge x\subseteq C$$ 4 分

$$\Leftrightarrow x\subseteq A\cap B\cap C$$ 5 分

$$\Leftrightarrow x\in P(A\cap B\cap C)$$ 6 分

所以 $P(A)\cap P(B)\cap P(C)=P(A\cap B\cap C)$ **7 分**

**4. 证明：(1) 对任意** $x_1,x_2\in A$，**若** $f(x_1)=f(x_2)$，则 $g(f(x_1))=g(f(x_2))$，即

$f\circ g(x_1)=f\circ g(x_2)$，又 $f\circ g:A\to C$ **是双射的，所以，** $x_1=x_2$。

故 $f:A\to B$ **是单射的。** **3 分**

**（2）对任意** $z\in C$，**由于** $f\circ g:A\to C$ **是双射的，所以存在** $x\in A$,**使得** $f\circ g(x)=z$，即

$g(f(x))=z$，又 $f$ 为 $A\to B$ 的映射，$y=f(x)\in B$，使得 $g(y)=z$，所以，$g:B\to C$ 是满射的。 **6 分**