2020~2021 学年第 1 学期 2020 级经管微积分 I B-A 卷解答与评分标准　2021-01

一. 填空题或选择题（每题 3 分，计 30 分. 选择题正确选项唯一）

1. 点$x=0$是函数$y=\arctan\dfrac{1}{x^2}$的第________类间断点.

2. 若$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2+ax-5x^2}{x^2+x-2}$存在, 则 $a=$ ________ .

3. 下列命题中正确的命题是________________.

   (A). 函数$\varphi(x)=\begin{cases}\ln x, x>0\\ 0\quad, x=0\end{cases}$ 在区间$[0,1]$上有界.

   (B). 若$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$存在,$\lim\limits_{x\to\infty}g(x)$不存在, 则$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)\cdot g(x)]$必定不存在.

   (C). 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的左右导数都存在，则函数 $f(x)$ 在 x_0 点处连续.

   (D). 如果$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0$, 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在，那么 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 也不存在.

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2-x}\right)=$ ________.

5. 函数 $y=\sin^2 x$在自变量增量$\Delta x=dx\to0$ 时的微分$dy=$ __________ .

6. 曲线 $y=\ln\left(1+x^2\right)$在$x>0$部分的拐点为________ .

7. 若 $\int f(x)dx=2e^{-x}+C$, 则 $\int f(2x)dx=$ ________ .

8. 以下论断中正确的是__________.

   (A).瑕积分$\int_{-2}^{0}\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$ 收敛 .

   (B).对于$\int_{-1}^{1}\dfrac{2}{x^3}dx$,有$\int_{-1}^{1}\dfrac{2}{x^3}dx=-\left.\dfrac{1}{x^2}\right|_{-1}^{1}=0$.

   (C).由$\dfrac{1}{x-x^2}=\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{x}$,$\int_2^{+\infty}\dfrac{dx}{1-x}$与$\int_2^{+\infty}\dfrac{dx}{x}$都发散,知$\int_2^{+\infty}\dfrac{dx}{x-x^2}$发散 .

   (D).设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续,若 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_{-b}^{b}f(x)dx=A$,则$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ 必收敛且收敛于A .

9. 微分方程 $y''+2y'+y=0$ 的通解为________________ .

10. 已知过点$(0,1)$的曲线$y=f(x)$上任意一点处的切线斜率是该点横坐标的6 倍，则该曲线与直线$x=1$ 以及两根坐标轴所围平面图形的面积为____________ .

1. _一_ ;　2. _3_ ;　3. _C_ ;　4. _2_ ;　5. _$\sin 2xdx$_ ;

6. _$(1,\ln2)$_ ;　7. _$e^{-2x}+C$_ ;　8. _A_ ;　9. _$(C_1+C_2x)e^{-x}$_ ;　10. _2_ .

二. 解答题 I .(每题 7 分，计 28 分)

11. 求极限 $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{\ln x}+\dfrac{1}{1-x}\right)$.

解 $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{\ln x}+\dfrac{1}{1-x}\right)\overset{x-1=t}{==}\lim\limits_{t\to0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+t)}-\dfrac{1}{t}\right)=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{t-\ln(1+t)}{t\ln(1+t)}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{t-\ln(1+t)}{t^2}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{1-\dfrac{1}{1+t}}{2t}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{t}{2t(1+t)}=\dfrac{1}{2}$.

…………………………………………………………7分

12. 设$y=y(x)$是由方程 $ye^{y}=e^{x+1}$ 所确定的函数,计算$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}$.

解 对$ye^{y}=e^{x+1}$两边取对数得 $y+\ln y=x+1$,两边对x求导得 $\left(1+\dfrac{1}{y}\right)y'=1$,

解得$y'=\dfrac{y}{1+y}$,$y''=\dfrac{y'(1+y)-yy'}{(1+y)^2}=\dfrac{y'}{(1+y)^2}=\dfrac{y}{(1+y)^3}$,$x=0$时$ye^{y}=e^{1}$,$y=1$满足此方程,

且$y>0$时$\left(ye^{y}\right)'_{y}=(1+y)e^{y}>0$,$ye^{y}$严格单调,$\therefore$ $x=0$时唯一地$y=1$,$\Rightarrow$ $y''|_{x=0}=\left.\dfrac{y}{(1+y)^3}\right|_{x=0}=\dfrac{1}{8}$.………7分

解二 $ye^{y}=e^{x+1}$两边对x两次求导得 $(1+y)e^{y}y'=e^{x+1}$,$e^{y}(y')^2+(1+y)e^{y}(y')^2+(1+y)e^{y}y''=e^{x+1}$……(1)

$x=0$时$y=1$,$y'=\dfrac{1}{2}$代入(1)式,得 $y''|_{x=0}=\dfrac{1}{8}$.

13. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2^x+3^x+5^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$.

解 “1^{∞}”型问题. 原式$=\lim\limits_{x\to0}\left[\left(1+\dfrac{2^x+3^x+5^x-3}{3}\right)^{\frac{3}{2^x+3^x+5^x-3}}\right]^{\frac{2^x+3^x+5^x-3}{3x}}$,

$a>0,a\neq1$ 时有 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x\ln a}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\ln a}{x}=\ln a$,

$\therefore\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2^x+3^x+5^x-3}{3x}=\dfrac{\ln2+\ln3+\ln5}{3}=\ln\left(\sqrt[3]{30}\right)$,$\therefore$ 原$=e^{\ln\left(\sqrt[3]{30}\right)}=\sqrt[3]{30}$ ………………………………7分

解2. 原式$=\lim\limits_{x\to0}e^{\ln\left(\frac{2^x+3^x+5^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{\ln\left(2^x+3^x+5^x\right)-\ln3}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\left(2^x+3^x+5^x\right)-\ln3}{x}}$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(2^x+3^x+5^x\right)-\ln3}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2^x\ln2+3^x\ln3+5^x\ln5}{2^x+3^x+5^x}=\dfrac{\ln2+\ln3+\ln5}{3}=\ln\left(30^{\frac{1}{3}}\right)$,$\therefore$ 原$=e^{\ln\left(30^{\frac{1}{3}}\right)}=\sqrt[3]{30}$.

14. 设$f(x)=x^2|x|$,计算$f''(x)$, $f'''(0)$.

解 $f(x)=\begin{cases}x^3, & x\geq0\\-x^3, & x<0\end{cases}$,$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{x^3-0}{x}=0$,$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{-x^3-0}{x}=0$,

$\therefore f'(x)=\begin{cases}3x^2, & x\geq0\\-3x^2, & x<0\end{cases}$,$f''_+(0)=\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{3x^2-0}{x}=0$,$f''_-(0)=\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{-3x^2-0}{x}=0$,

$\therefore f''(x)=\begin{cases}6x, & x\geq0\\-6x, & x<0\end{cases}$,$f'''_+(0)=\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{f''(x)-f''(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{6x-0}{x}=6$,$f'''_-(0)=\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{f''(x)-f''(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{-6x-0}{x}=-6$,

$\therefore f'''(0)$不存在. …………………………………………………………………………………………… 7分

三. 解答题 II (15~17 题每题 8 分，18,19 题每题 9 分，计 42 分)

15. 试求出由曲线$y=xe^{-\frac{1}{2}x}$,直线$x=1$以及x轴所围平面图形绕x轴旋转一周所成旋转体的体积.

解 曲线$y=xe^{-\frac{1}{2}x}$过原点,$\therefore V_x=\pi\int_0^1y^2dx=\pi\int_0^1x^2e^{-x}dx=-\pi\left(x^2+2x+2\right)e^{-x}\Big|_0^1=\pi\left(2-5e^{-1}\right)$.…………8分

16. 求解微分方程 $\left(1+x^2\right)y''+2xy'=2, y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=3.$

解 $\left(1+x^2\right)y''+2xy'=2$,记$y'=p$,则原方程化为$\left(1+x^2\right)p'+2xp=2$,标准化为$p'+\dfrac{2x}{1+x^2}p=\dfrac{2}{1+x^2}$,

$\int\dfrac{2x}{1+x^2}dx=\ln\left(1+x^2\right)+C_1, p=e^{-\int\frac{2x}{1+x^2}dx}\left(\int\dfrac{2}{1+x^2}e^{\int\frac{2x}{1+x^2}dx}dx\right)=e^{-\ln\left(1+x^2\right)}\left(\int\dfrac{2}{1+x^2}e^{\ln\left(1+x^2\right)}dx\right)$

$=\dfrac{1}{1+x^2}\left(\int 2dx\right)=\dfrac{1}{1+x^2}\left(2x+C_2\right)$,由 $y'|_{x=0}=p|_{x=0}=3$ 得 $p=y'=\dfrac{2x+3}{1+x^2}$,

$\Rightarrow y=\ln\left(1+x^2\right)+3\arctan x+C_3$,由 $y|_{x=0}=1$ 得 $C_3=1$,$\therefore y=1+\ln\left(1+x^2\right)+3\arctan x$.················8分

解2. 凑巧的是原方程即为$\left(\left(1+x^2\right)y'\right)'=2$,$\therefore\left(1+x^2\right)y'=2x+C_1$,由 $y'|_{x=0}=3$ 得 $y'=\dfrac{2x+3}{1+x^2}$,

$\Rightarrow y=\ln\left(1+x^2\right)+3\arctan x+C_2$,由 $y|_{x=0}=1$ 得 $C_2=1$,$\therefore y=1+\ln\left(1+x^2\right)+3\arctan x$.

17. 本题有两小题,请任选一题且只做一题.若两题都做,则按题(1)计分.

(1). 设$0<x<\dfrac{\pi}{2}$,求证:$\sin x+\tan x>2x$.

(2). 设函数$f(x)$在$[0,3]$上连续且有$0<f(x)<3$,在$(0,3)$内$f(x)$可导且$f'(x)\neq 1$.
求证:存在唯一的$\xi\in(0,3)$,使得$f(\xi)=\xi$.

(1).证明 设$\varphi(x)=\sin x+\tan x-2x$,$0<x<\dfrac{\pi}{2}$时有$\varphi'(x)=\cos x+\sec^2 x-2>\cos x+\sec x-2>0$,

$\therefore 0\le x<\dfrac{\pi}{2}$时$\varphi(x)$连续且严格单调递增,$\varphi(0)=0$,$\therefore 0<x<\dfrac{\pi}{2}$时有 $\sin x+\tan x-2x>0$.················8分

(2).证明 设$\varphi(x)=f(x)-x$,在$[0,3]$上连续,$\varphi(0)=f(0)-0>0$,$\varphi(3)=f(3)-3<0$,

$\therefore$由介值定理得$\exists\xi\in(0,3)$,有$\varphi(\xi)=0$.下证ξ的唯一性:设$\exists\xi_1,\xi_2\in(0,3)$,有$\varphi(\xi_1)=\varphi(\xi_2)=0$,且$\xi_1<\xi_2$.
则由*Rolle*定理知,$\exists\eta\in(\xi_1,\xi_2)\subset(0,3)$,使得$\varphi'(\eta)=0$,即$f'(\eta)=1$.而这与条件相矛盾.故假设不成立.
$\therefore$使得$\varphi(\xi)=0$成立的ξ唯一.···8分

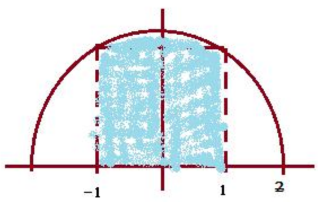
18. 计算积分$\int_{-1}^{1}\left(x^{2021}\cdot\sqrt{4+x^2}+\sqrt{4-x^2}\right)dx$.

解 $x^{2021}\cdot\sqrt{4+x^2}$是$[-1,1]$上的奇函数,$\therefore\int_{-1}^{1}x^{2021}\cdot\sqrt{4+x^2}dx=0$.

$\therefore$ 原式$=\int_{-1}^{1}\sqrt{4-x^2}dx=2\int_0^1\sqrt{4-x^2}dx\overset{x=2\sin t}{\underset{t=\pi/6时\ x=1}{=\!=\!=\!=}}2\int_0^{\pi/6}4\cos^2 t\,dt=4\int_0^{\pi/6}\left(1+\cos 2t\right)dt=\left(4t+2\sin 2t\right)\Big|_0^{\pi/6}$

$=\dfrac{2\pi}{3}+\sqrt{3}$···9分

注意:利用积分的几何意义知$\int_{-1}^{1}\sqrt{4-x^2}dx$ 表示如图阴影部分的面积,其结果是显然的.



19. 设函数$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续且单调递减.求证：当$u\ge 0$ 时,有$2\int_0^u xf(x)dx\le u\int_0^u f(x)dx$.

证明　设$\varphi(u)=u\int_0^u f(x)dx-2\int_0^u xf(x)dx, u\ge 0$.$\varphi'(u)=\int_0^u f(x)dx+uf(u)-2uf(u)=\int_0^u f(x)dx-uf(u)$,

$u\ge 0$ 时,有$\varphi'(u)=\int_0^u f(x)dx-uf(u)=uf(\xi)-uf(u),\xi\in[0,u]$ $\left(或者\varphi'(u)=\int_0^u[f(x)-f(u)]dx\right)$.

$\because f(x)$在$[0,+\infty)$上单调递减,$\therefore u\ge 0$ 时,有$\varphi'(u)\ge 0, u\ge 0$ 时,有$\varphi(u)\ge\varphi(0)=0$,不等式得证.……………9分

证法二　$\because$函数$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续且单调递减,$\therefore \forall x,y\in[0,u]$有$(x-y)(f(x)-f(y))\le 0$,

即$xf(x)+yf(y)-yf(x)-xf(y)\le 0$,视$x$为常数而$y\in[0,u]$,得$\int_0^u[yf(x)+xf(y)-xf(x)-yf(y)]dy\ge 0$,

$\therefore \frac{1}{2}u^2f(x)+x\int_0^u f(y)dy-xf(x)u-\int_0^u yf(y)dy\ge 0$,再对$x$在$[0,u]$上积分,得

$\frac{1}{2}u^2\int_0^u f(x)dx+\frac{1}{2}u^2\int_0^u f(y)dy-u\int_0^u xf(x)dx-u\int_0^u yf(y)dy\ge 0$,由于积分值与积分变量无关,

$\therefore$上式即为 $u^2\int_0^u f(x)dx-2u\int_0^u xf(x)dx\ge 0$,$\because u\ge 0$,$\therefore u\int_0^u f(x)dx-2\int_0^u xf(x)dx\ge 0$.证毕!

证法三　结论$\Leftrightarrow\int_0^u(u-2x)f(x)dx\ge 0$,在此积分中作变量代换 $x=u-t$,

$\int_0^u(u-2x)f(x)dx=\int_u^0(2t-u)f(u-t)(-dt)=\int_0^u(2t-u)f(u-t)dt=\int_0^u(2x-u)f(u-x)dx$,

$\therefore$结论$\Leftrightarrow\int_0^u(u-2x)f(x)dx+\int_0^u(2x-u)f(u-x)dx\ge 0$,即$\int_0^u(u-2x)(f(x)-f(u-x))dx\ge 0$,

$x\in[0,u/2]$时,$u-x\ge u/2\ge x$；$x\in[u/2,u]$时,$u-x\le u/2\le x$.$\because f(x)$在$[0,+\infty)$上单调递减,

$\therefore x\in[0,u]$时,$(u-2x)(f(x)-f(u-x))\ge 0$恒成立.综上所述,由积分的性质知结论成立.

另有根据积分的几何意义或物理意义所得之证明方法在此从略.