2020-2021 学年第 1 学期《离散数学》B 试卷答案

一、选择题每题(2 分，共 20 分）

1. A　2. C　3. D　4. B　5. D　6. D　7. B　8. A　9. B　10. A

二、填空题（每空 2 分，共 30 分）

1. $\neg(\neg(p\wedge\neg q)\wedge\neg r)$； **2.** 100,110,111; Σ(4,6,7)；

3. 6; **{a,c,d,e,f,h}; 3; {a,b,j}; a,b; f;** f, g, h; f;

4. ∀x(M(x)→D(x)); (M(x)→D(x))； 5. **{<1,2>,<1,3>,<3,4>}; {1,2,3}**.

三、解答题（本大题共 3 小题，共计 23 分）

1. (p↔q)→r⇔((p→q)∧(q→p))→r⇔¬((¬p∨q)∧(¬q∨p))∨r⇔(p∧¬q)∨(¬p∧q)∨r　2 分

⇔(p∧¬q∧¬r)∨(p∧¬q∧r)∨(¬p∧q∧¬r)∨(¬p∧q∧r)∨(¬p∧¬q∧r)∨(p∧¬q∧r)∨(p∧q∧r)

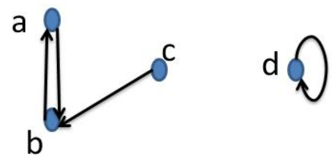
⇔Σ(1,2,3,4,5,7)(主析取范式)　5 分

⇔Π（0，6）（主合取范式）　7 分

2. ∃xF(x,y)∧(∃yG(x,y)→∀zH(x,y,z))⇔ ∃xF(x,v)∧(∃yG(u,y)→∀zH(u,v,z))　3 分

⇔∃xF(x,v)∧∀y∀z(G(u,y)→H(u,v,z))⇔ ∃x∀y∀z (F(x,v)∧ (G(u,y)→H(u,v,z)))　6 分

3. （1）关系 R 的关系矩图为



2 分

（2）关系 R 的关系矩阵为 $M_R=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$　4 分

（3）关系 R 的自反闭包为

r(R) =R∪I_A={<a,a>,<a,b>,<b,a>,<b,b>,<c,b>,<c,c>,<d,d>}　6 分

关系 R 的对称闭包为

s(R) =R∪R^{-1}={<a,b>,<b,a>,<c,b>,<b,c>,<d,d>}　8 分

关系 R 的传递闭包为

R^2={<a,a>,<b,b>,<c,a>,<d,d>}

R^3={<a,b>,<b,a>,<c,b>,<d,d>}=R

t(R) =R∪R^2 ={<a,a>,<a,b>,<b,a>,<b,b>,<c,a>,<c,b>,<d,d>}　10 分

四、证明题（本大题共 4 小题，共计 27 分）

（1）先将命题 0 元谓词化

设 M(x)：x 是人，P(x)：x 喜欢吃蔬菜，Q(x)：x 喜欢吃鱼。

前提：∀x(M(x)→P(x))，¬∀x(M(x)→Q(x))

结论：∃x(M(x)∧P(x)∧¬Q(x))　2 分

（2）证明

① ∀x(M(x)→P(x))　前提引入

② M(y)→P(y)　①∀-

③ M(y)∧¬Q(y)→M(y)　化简规则

④ $M(y)\wedge\neg Q(y)\to\neg Q(y)$ 化简规则

⑤ $M(y)\wedge\neg Q(y)\to P(y)$ ②③假言三段论

⑥ $(M(y)\wedge\neg Q(y)\to\neg Q(y))\wedge(M(y)\wedge\neg Q(y)\to P(y))\wedge(M(y)\wedge\neg Q(y)\to M(y))$ ③④⑤合取

⑦ $M(y)\wedge\neg Q(y)\to M(y)\wedge P(y)\wedge\neg Q(y)$ ⑥置换

⑧ $M(y)\wedge\neg Q(y)\to\exists x(M(x)\wedge P(x)\wedge\neg Q(x))$ ⑦∃+

⑨ $\exists x(M(x)\wedge\neg Q(x))\to\exists x(M(x)\wedge P(x)\wedge\neg Q(x))$ ⑧∃-

⑩ $\neg\forall x(M(x)\to Q(x))$ 前提引入

⑪ $\exists x(M(x)\wedge\neg Q(x))$ ⑩置换

⑫ $\exists x(M(x)\wedge P(x)\wedge\neg Q(x))$ ⑩⑪假言推理 7 分

2．证明:

任取$<x,y>$, $<x,y>\in A\times B\Rightarrow x\in A\wedge y\in B\Rightarrow xRx\wedge ySy$

$\Rightarrow <x,y>T<x,y>$， **T 是自反的.** **2 分**

任取$<x,y>,<u,v>\in A\times B$ ， $<x,y>T<u,v>\Rightarrow xRu\wedge ySv\Rightarrow uRx\wedge vSy$

$\Rightarrow <u,v>T<x,y>$，**T 是对称的.** **4 分**

任取$<x,y>,<u,v>,<w,t>\in A\times B$,

$<x,y>T<u,v>\wedge<u,v>T<w,t>\Rightarrow xRu\wedge ySv\wedge uRw\wedge vSt$

$\Rightarrow(xRu\wedge uRw)\wedge(ySv\wedge vSt)\Rightarrow xRw\wedge ySt\Rightarrow<x,y>T<w,t>$,**T 是传递的.** **6 分**

综合以上可知，**T 是** $A\times B$ 上**等价关系.** 7 分

3. 证明：$\forall<x,y>$, $x((R\circ S)\upharpoonright A)y$

$\Leftrightarrow x(R\circ S)y\wedge x\in A\Leftrightarrow\exists z(xRz\wedge zSy)\wedge x\in A$ **2 分**

$\Leftrightarrow\exists z(xRz\wedge zSy\wedge x\in A)\Leftrightarrow\exists z((xRz\wedge x\in A)\wedge zSy)\Leftrightarrow\exists z(x(R\upharpoonright A)z\wedge zSy)$ **5 分**

$\Leftrightarrow x((R\upharpoonright A)\circ S)y$. 所以 $(R\circ S)\upharpoonright A=(R\upharpoonright A)\circ S$ 7 分

4. 证明： 如果 f 是 A 到 B 的满射，则对每一个 $y\in B$,至少存在一个因此存在一个 $x\in A$ 使得

$f(x)=y$, 故 G **的定义域为 B,从而** G是B到$P(A)$ 的函数. **2 分.**

若有 $y_1,y_2\in B$ 且 $y_1\neq y_2$，$G(y_1)=\{x\mid x\in A\wedge f(x)=y_1\}$，$G(y_2)=\{t\mid t\in A\wedge f(t)=y_2\}$

因为 $y_1\neq y_2$， $f(x)\neq f(t)$，而 **f 是函数，故** $x\neq t$，所以 $G(y_1)\neq G(y_2)$，

即 G **是单射.** **6 分**