2018-2019 学年第 1 学期《离散数学》B 试卷答案

一、选择题每题(2 分，共 20 分）

1. A　2. D　3. C　4. C　5. A　6. D　7. B　8. A　9. D　10. C

二、填空题（每空 2 分，共 30 分）

1．p,q 均为 0；2. $\big((p\uparrow p)\uparrow(q\uparrow q)\big)\uparrow\big(r\uparrow r\big)$；3. 011,111; Σ (0,1,2,4,5,6)；

4. $(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge\neg r)$；

5. $\{<a,c>,<a,f>,<c,f>,<b,d>,<b,f>,<d,f>\}\cup I_A, f$;

6. ¬∀x(P(x)→Q(x)), 或∃x(P(x)∧¬Q(x))；　7. (P(a)∨P(b)∨P(c))∧(Q(a)∧Q(b)∧Q(c))；

8. 10,48；9. {2, 3, 4}，{1, 2, 3, 4}；10. {2, 3}, {<1, 3>}.

三、解答题（本大题共 3 小题，共计 23 分）

1. $(p\leftrightarrow q)\rightarrow r\Leftrightarrow\neg(p\leftrightarrow q)\vee r$　　2 分

$\Leftrightarrow(\neg p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q)\vee r$　　3 分

$\Leftrightarrow m_{01X}\vee m_{10X}\vee m_{XX1}$

$\Leftrightarrow m_{010}\vee m_{011}\vee m_{100}\vee m_{101}\vee m_{001}\vee m_{011}\vee m_{101}\vee m_{111}$

$\Leftrightarrow m_1\vee m_2\vee m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_7$

$\Leftrightarrow\sum(1,2,3,4,5,7)$（主析取范式）　　5 分

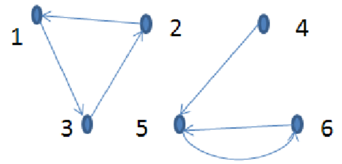
$\Leftrightarrow\prod(0,6)$（主合取范式）　　7 分

2. ∀*x*(P(*x*)→∀*y*(Q(*x*,*y*)→¬∃*z*R(*y*,*z*)))⇔ ∀*x*(P(*x*)→∀*y*(Q(*x*,*y*)→∀z¬R(*y*,*z*)))　　2 分

⇔∀*x*(P(*x*)→∀*y*∀*z*(Q(*x*,*y*)→¬R(*y*,*z*)))　　4 分

⇔∀*x*∀*y*∀*z* (P(*x*)→ (Q(*x*,*y*)→¬R(*y*,*z*)))　　6 分

3. （1）关系 R 的关系矩图为



2 分

（2）关系 R 的关系矩阵为 $M_R=\begin{pmatrix}0&0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1&0\end{pmatrix}$　　4 分

（3）关系 R 的自反闭包为

r(R)=R∪I_A={<1,3>,<2,1>,<3,2>,<4,5>,<5,6>,<6,5>,<1,1>,<2,2>,<3,3>,<4,4>,<5,5>,<6,6>} 6 分

关系 R 的对称闭包为

s(R) =R∪R^{-1}={<1,3>,<3,1>,<1,2>,<2,1>,<2,3>,<3,2>,<4,5>,<5,4>,<5,6>,<6,5>}　　8 分

关系 R 的传递闭包为

R^2={<1,2>,<2,3>,<3,2>,<4,6>,<5,5>,<6,6>}，R^3={<1,1>,<2,2>,<3,3>,<4,5>,<5,6>,<6,5>}
R^4={<1,3>,<2,1>,<3,2>,<4,6>,<5,5>,<6,6>}，R^5={<1,1>,<2,2>,<3,3>,<4,5>,<5,6>,<6,5>}=R^3
t(R) =$R\cup R^2\cup R^3\cup R^4$={<1,1>,<1,2>,<1,3>,<2,1>,<2,2>,<2,3>,<3,1>,<3,2>,<3,3>,<4,5>,
<4,6>,<5,5>,<5,6>,<6,5>,<6,6>} 10 分

五、证明题（本大题共 4 小题，共计 27 分）

1.（1）先将命题 0 元谓词化

设 Q(x)：x 是有理数，N(x)：x 是无理数，R(x)：x 是实数,C(x)：x 是虚数。

前提：∀x(Q(x)→R(x))，∀x(N(x)→R(x)),∀x(C(x) →¬R(x))

结论：∀x(C(x)→(¬Q(x)∧¬N(x))) 2 分

（2）证明:

① ∀x(Q(x)→R(x)) 前提引入
② ∀x(N(x)→R(x)) 前提引入
③ ∀x(C(x)→¬R(x)) 前提引入
④ Q(y)→R(y) ①∀-
⑤ C(y)→¬R(y) ③∀-
⑥ N(y)→R(y) ②∀-
⑦ ¬R(y)→¬Q(y) ④置换
⑧ ¬R(y)→¬N(y) ⑥置换
⑨ C(y)→¬Q(y) ⑤⑦假言三段论
⑩ C(y)→¬N(y) ⑤⑧假言三段论
(11) (C(y)→¬Q(y))∧(C(y)→¬N(y)) ⑨⑩合取
(12) C(y)→(¬Q(y)∧ ¬N(y)) (11)置换
(13)∀x(C(x)→(¬Q(x)∧¬N(x))) (12)∀+ 7 分

2．证明:

由 R 是 X 上的偏序关系，且 A⊆X,可得 $I_A\subseteq I_X\subseteq R$, $I_A\subseteq A\times A$,由此可得 $I_A\subseteq R\cap(A\times A)$, 即关系 R∩(A×A)是 A 上的自反关系. 2 分

∀x, y∈A, 若<x, y>∈R∩(A×A)且<y, x>∈R∩(A×A)，得<x, y>∈R 且<y, x>∈R,由 R 是偏序关系可知，R 为反对称的，由此可得 x=y,所以 R∩(A×A)为 A 上的反对称的关系. 4 分

∀x, y，z∈A, 若<x, y>∈R∩(A×A)且<y, z>∈R∩(A×A)，得<x, y>∈R 且<y, z>∈R,由 R 是偏序关系可知，R 为传递的，由此可得<x,z>∈R,又<x,z>∈A×A, 故<x, z>∈R∩(A×A),所以 R∩(A×A)为 A 上的传递的关系. 6 分

综合以上可知，R∩(A×A) 是 A 上的偏序关系. 7 分

3. **证明：(1)对任意** y**,若**

$$\begin{aligned} y\in f(A\cup B) &\Leftrightarrow \exists x(x\in A\cup B\wedge y=f(x)) \\ &\Leftrightarrow \exists x((x\in A\vee x\in B)\wedge y=f(x)) \\ &\Leftrightarrow \exists x((x\in A\wedge y=f(x))\vee(x\in B\wedge y=f(x))) \\ &\Leftrightarrow \exists x(x\in A\wedge y=f(x))\vee\exists x(x\in B\wedge y=f(x)) \\ &\Leftrightarrow y\in f(A)\vee y\in f(B) \\ &\Leftrightarrow y\in f(A)\cup f(B) \end{aligned}$$

所以 $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$ 3 分

(2)对任意 y**,若**

$$\begin{aligned} y\in f(A\cap B) &\Leftrightarrow \exists x(x\in A\cap B\wedge y=f(x)) \\ &\Leftrightarrow \exists x((x\in A\wedge x\in B)\wedge y=f(x)) \\ &\Leftrightarrow \exists x((x\in A\wedge y=f(x))\wedge(x\in B\wedge y=f(x))) \\ &\Rightarrow \exists x(x\in A\wedge y=f(x))\wedge\exists x(x\in B\wedge y=f(x)) \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow y \in f(A) \wedge y \in f(B)$

$\Leftrightarrow y \in f(A) \cap f(B)$

所以 $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ **7分**

4. 证明：(1) 对任意 $x_1, x_2 \in A$，若 $f \circ g(x_1) = f \circ g(x_2)$，即 $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$，又 $g: B \to C$ 是双射，所以 $f(x_1) = f(x_2)$，又由 $f: A \to B$ 是双射，从而得 $x_1 = x_2$，故 $f \circ g: A \to C$ 是单射的。 3分

（**2**）对任意 $z \in C$，由于 $g: B \to C$ 是双射的，所以存在 $y \in B$, 使得 $g(y) = z$，又 f 为 $A \to B$ 的双射，存在 $x \in A$, 使得 $y = f(x) \in B$，从而有，存在 $x \in A$, 使得 $f \circ g(x) = g(f(x)) = g(y) = z$，所以，$f \circ g: A \to C$ 是满射的。

故 $f \circ g: A \to C$ 是双射的.