2020-2021 学年第 1 学期《离散数学》A 试卷答案

一、选择题每题(2 分，共 20 分）

1. D　2. C　3. C　4. B　5. C　6. D　7. B　8. A　9. D　10. A

二、填空题（每空 2 分，共 30 分）

1. $\neg(p \wedge q \wedge \neg r)$; 2. 000,001,101,111; Σ(0,1,5,7); 3. π_1、π_2、π_5, π_2, π_1;

4. 2、3,36; 5. $\exists x \exists y\,(M(x) \wedge G(x) \wedge F(x,y))$; 6. 138, 68,120;

7. {a, c, d, {d}}, {<2, d>, <3, {d}>}, {a, c, {d}}.

三、解答题（本大题共 3 小题，共计 23 分）

1. $(p\to q)\wedge(q\to r)\Leftrightarrow(\neg p\vee q)\wedge(\neg q\vee r)\Leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge r)\vee(q\wedge r)$　　4 分

$\Leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge r)$

$\Leftrightarrow m_0\vee m_1\vee m_3\vee m_7\Leftrightarrow\sum(0,1,3,7)$　　(主析取范式）　　6 分

$\Leftrightarrow M_2\wedge M_4\wedge M_5\wedge M_6\Leftrightarrow\prod(2,4,5,6)$　　(主合取范式）　　6 分

2. $\neg\exists x(P(x)\to Q(x,y))\to\exists yR(y)\Leftrightarrow\forall x(\neg(\neg P(x)\vee Q(x,y))\to\exists tR(t)$　　2 分

$\Leftrightarrow\forall x(P(x)\wedge\neg Q(x,y))\to\exists tR(t)$　　4 分

$\Leftrightarrow\exists x\exists t((P(x)\wedge\neg Q(x,y))\to R(t))$　　6 分

3. （1）关系 R 的关系表达式为 R={<a,b>, <b,c>, <c,a>, <d,e>, <e,d>}　　2 分

（2）R 的关系矩阵为 $M_R=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}$　　4 分

（3）关系 R 的自反闭包为

$r(R)=R\cup I_A$={<a,a>,<a,b>,<b,b>,<b,c>,<c,a>,<c,c>,<d,d>,<d,e>,<e,d>,<e,e>}　　6 分

关系 R 的对称闭包为

$s(R)=R\cup R^{-1}$={<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,b>,<c,a>,<a,c>,<d,e>,<e,d>}　　8 分

R^2={<a,c>,<b,a>,<c,b>,<d,d>,<e,e>}，R^3={<a,a>,<b,b>,<c,c>,<d,e>,<e,d>}

R^4={<a,b>,<b,c>,<c,a>,<d,d>,<e,e>}，R^5={<a,c>,<b,a>,<c,b>,<d,e>,<e,d>}

R^6={<a,a>,<b,b>,<c,c>,<d,d>,<e,e>},R^7={<a,b>, <b,c>, <c,a>, <d,e>, <e,d>}= R

关系 R 的传递闭包为

$t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup R^4\cup R^5\cup R^6$={<a,a>,<a,b>,<a,c>,<b,a>,<b,b>,<b,c>,<c,a>,<c,b>,<c,c>, <d,d>, <d,e>,<e,d>,<e,e>}　　10 分

四、证明题（本大题共 4 小题，共计 27 分）

1. 证明:

① $\exists xF(x)\to\forall y((F(y)\vee G(y))\to R(y))$　　前提引入

② $\exists xF(x)$　　前提引入

③ $\forall y((F(y)\vee G(y))\to R(y))$　　①②假言推理　　**2 分**

④ $(F(y)\vee G(y))\to R(y)$ ③∀-

⑤ $(F(y)\to R(y))\wedge(G(y)\to R(y))$ ④置换

⑥ $F(y)\to R(y)$ ⑤化简 **5 分**

⑦ $F(y)\to\exists xR(x)$ ⑥∃+

⑧ $\exists xR(x)$ ②⑦∃- 7 分

2．证明:

任取 $x\in A$,由于 $x\oplus x=\varnothing\subseteq C$,因此 xRx 成立，R 是自反的. **2 分**

任取 $<x,y>,<x,y>\in R\Rightarrow x\oplus y\subseteq C\Rightarrow y\oplus x\subseteq C\Rightarrow yRx$，$R$ 是对称的. **4 分**

任取 $<x,y>,<y,z>,<x,y>\in R\wedge<y,z>\in R\Rightarrow x\oplus y\subseteq C\wedge y\oplus x\subseteq C$

$\Rightarrow x\oplus z=(x\oplus\varnothing)\oplus z=x\oplus(y\oplus y)\oplus z=(x\oplus y)\oplus(y\oplus z)\subseteq(x\oplus y)\cup(y\oplus z)\subseteq C\cup C=C$

$\Rightarrow xRz,R$ 是传递的. **6 分**

综合以上可知，R 是 A 上等价关系. 7 分

3. 证明：“⇒” $\forall x$,

$x\in P(A)\Leftrightarrow x\subseteq A \quad \Rightarrow x\subseteq B \quad (A\subseteq B) \quad \Leftrightarrow x\in P(B)$

所以 $P(A)\subseteq P(B)$ 3 分

“⇐” $\forall x$,

$x\in A \quad \Leftrightarrow \{x\}\in P(A) \quad \Rightarrow \{x\}\in P(B) \quad (P(A)\subseteq P(B)) \quad \Leftrightarrow x\in B$

因此 $A\subseteq B$. 7 分

4. 证明： 由于 $A\approx C$，$B\approx D$，因此存在双射 $f:A\to C$，$g:B\to D$，构造函数

$h:A\times B\to C\times D,\forall<a,b>\in A\times B,h(<a,b>)=<f(a),g(b)>$. **2 分**

下面证 h 是从 $A\times B$ 到 $C\times D$ 的双射.

假设 $h(<a_1,b_1>)=h(<a_2,b_2>)\Rightarrow<f(a_1),g(b_1)>=<f(a_2),g(b_2)>$

$\Rightarrow f(a_1)=f(a_2)\wedge g(b_1)=g(b_2)\Rightarrow a_1=a_2\wedge b_1=b_2\Rightarrow(a_1,b_1)=(a_2,b_2)$,即 h 是单射. **4 分**

任取 $<c,d>\in C\times D\Rightarrow(c\in C)\wedge(d\in D)\Rightarrow\exists a\in A$ 使得 $f(a)=c$ 且 $\exists b\in B$ 使得 $g(b)=d$

$\Rightarrow<a,b>\in A\times B$,使得 $h(<a,b>)=<f(a),g(b)>=<c,d>$,即 h 是满射.

综合上面两点可知 h 是从 $A\times B$ 到 $C\times D$ 的双射，由等势的定义可得 $A\times B\approx C\times D$ **6 分**