Bartłomiej Skorulski

Como desenhar uma parábola? O famoso Galileu Galilei no seu livro *Discurso e demonstração matemática, entorno de duas novas ciências* ([2]) explicou que podemos suspender uma corrente ligeira entre dois pregos numa parede, e esta corrente formaria uma parábola. Na figura 3 foi utilizado este procedimento.

O que obtemos é bastante parecido com uma parábola, mas não é. A curva chama-se *catenária* e vamos ver como podemos corrigir o erro de Galileu e encontrar a fórmula que define esta curva.

1 Forças

Em primeiro lugar, temos que fazer algumas suposições. Em lugar de considerar uma corrente, consideramos uma linha com massa distribuída uniformemente. A linha suspensa entre dois postes como na figura 1, em que a desenhámos em cor vermelha e os postes estão marcados em preto. Vamos supor que a linha está tangente à reta horizontal no ponto I do lado esquerdo onde está fixada. Podemos supor que a coordenada abscissa do ponto I é igual a 0.

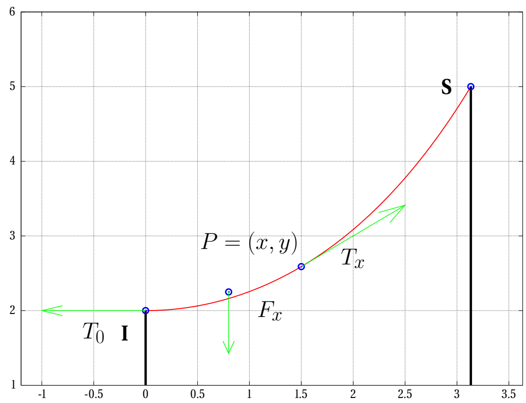


Figura 1: Forças que atuam sobre o segmento de catenária entre pontos I e P.

Porque podemos supor que no ponto I a linha é tangente a uma reta horizontal? Ilustramo-lo na foto 3. A demonstração deste facto será clara, quando se entender como atuam as forças sobre a linha.

Agora escolhemos um ponto $P = (x, y)$ na linha entre pontos de fixação I e S. Consideramos a parte de linha entre os pontos I e P. A tensão $\vec{T_0}$ da linha no ponto I é horizontal, uma vez que a linha é perpendicular ao poste neste ponto. Chamamo-la $\vec{T_0}$ para marcar que é a tensão no ponto com coordenada $x = 0$. A magnitude desta força (que é igual à longitude deste vetor) denotamo-la por T_0.

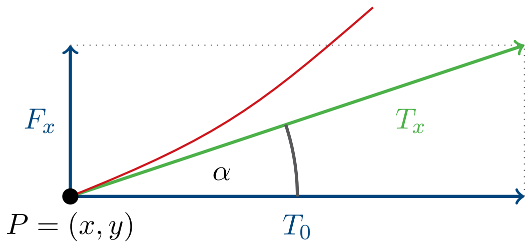


Figura 2: as forças juntos.

No outro extremo do segmento da linha, a tensão é distinta, ou seja, no ponto P na figura 1. Isso é uma consequência do facto que o segmento pesa. A tensão denotamo-la por $\vec{T_x}$, o peso por $\vec{F_x}$ e as suas magnitudes por T_x e F_x respetivamente. Na figura 1 o vetor do peso foi colocado no centro de massa da linha.

Estas são as únicas forças que atuam sobre o segmento da linha entre I e P. Como a linha não se move da segunda lei de Newton, temos que a soma vetorial das forças é igual a 0. Isto é

$$\vec{T_0} + \vec{T_x} + \vec{F} = 0.$$

Para comparar as magnitudes dos vetores em figura 2 colocamo-los no ponto P e mudamos as direções do $\vec{T_0}$ e $\vec{F}$.

(a) (b)

Figura 3: Uma corrente ligeira.

Portanto, utilizando esta figura podemos escrever as seguintes equações matemáticas.

$$\begin{cases} T_x \cos(\alpha) = T_0 \\ T_x \sin(\alpha) = F_x. \end{cases} \tag{1.1}$$

A palavra *catenária* procede da palavra *catena*, que significa *corrente* em Latim.

Se entender donde vêm estas fórmulas, parabéns. Caso contrário, por favor não se sinta mal. Entender como atuam forças sobre um segmento de linha não é fácil e requer tempo. Recomendamos-lhe analisar as figuras 1 e 2 e ler de novo esta seção.

2 A fórmula da catenária

O nosso objetivo é encontrar a fórmula da catenária. O que é que isso significa? Isso significa que queremos encontrar uma função $y = f(x)$ que o seu gráfico é a curva vermelha em figura 1. Como podemos fazê-lo? Claramente vamos utilizar as equações em (1.1). Mas em (1.1) não há nenhum y e x é um índice não variável? Portanto, a questão é procurar a derivada de f e depois integrá-la. Ah, ah, ah, mas, (1.1) também não tem derivada. Pois, tem, mas não explicitamente.

Recordamos, que a derivada de uma função f num ponto x é a pendente da reta tangente ao gráfico de f no ponto x. Podemos denotá-la por $f'(x)$ ou por dy/dx. Isto é

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}.$$

Então, dividindo a primeira equação em (1.1) pela segunda, vamos obter que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{F_x}{T_0}. \tag{2.1}$$

Na ultima equação T_0 é um valor que não depende da variável x, e portanto não complica. O que temos que averiguar é, portanto, quanto é F_x. Primeiro, vamos supor que a relação entre x e a força F_x é linear. Como vamos ver mais tarde, esta suposição não é correta, mas permite-nos chegar à mesma conclusão à qual chegaram Leonardo Da Vinci e Galileu entre outros, que a curva é uma parábola.

Então, vamos supor que F_x é proporcional a x. Isto é $F_x = kx$ em que k é uma constante que não conhecemos. Portanto, a equação (2.1) reescreve-se como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{kx}{T_0}$$

e para averiguar quanto é $y = f(x)$ é suficiente integrar esta equação. Então

$$e = \frac{x^2}{2b} + c,$$

em que $b = T_0/k$ e isto é uma parábola.

A fórmula que obtivemos em muitos casos, não está muito longe da realidade, mas não é correta. Não é certo que o peso do segmento da linha entre I e $P = (x, y)$ é proporcional a x. Se o pensarmos, o peso tem que ser proporcional à longitude l do segmento. De facto é igual a $g\lambda l$, em que λ é o valor do peso por unidade de longitude e g é a aceleração devida à gravitação. Então, a equação (2.1) dá uma fórmula um pouco diferente

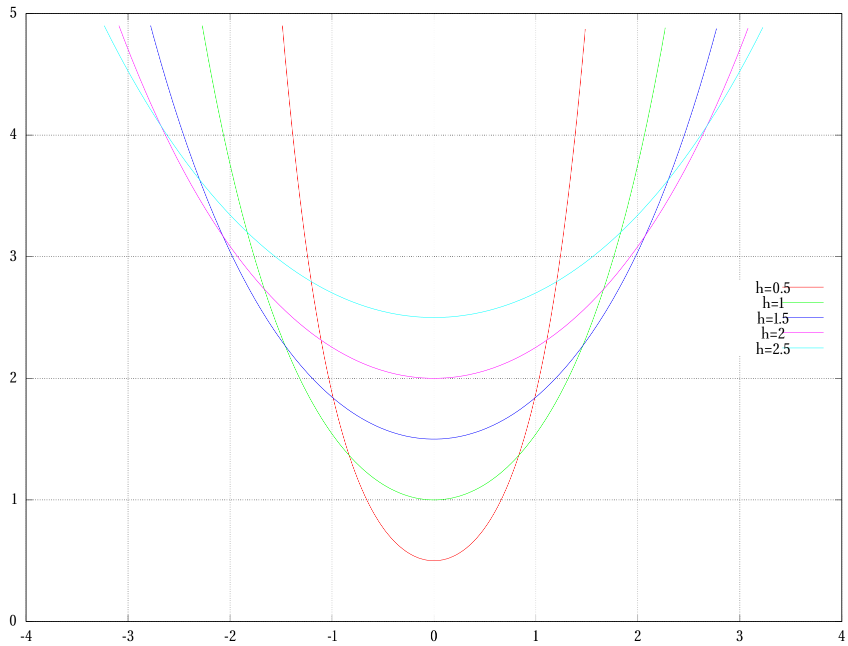


Figura 4: Função $f(x) = h\cosh(x/h)$ para $h = 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5$.

(2.2) $$\frac{dy}{dx} = \frac{g\lambda l}{T_0} = \frac{l}{a},$$

em que substituímos $\frac{T_0}{g\lambda}$ por uma constante a.

Portanto, para encontrar a fórmula para y temos que saber como calcular a longitude l. Isso vamos explicá-lo um pouco na seguinte secção. O mais importante, por enquanto, é a seguinte equação diferencial que nos permite relacionar a derivada de l com a derivada de y,

(2.3) $$\frac{dl}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Por outra parte dl/dx podemos calculá-lo diferenciando ambos os lados do (2.2) relativamente a x, isto é

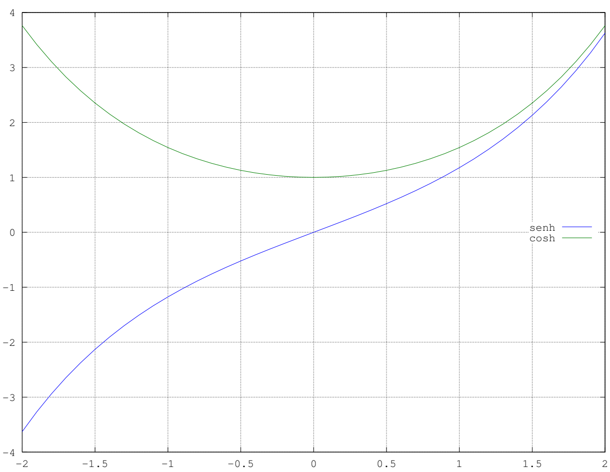
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a}\frac{dl}{dx}$$

e portanto substituindo em (2.3) temos a seguinte equação diferencial

$$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = a\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Seno e cosseno hiperbólico

$$\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
$$\operatorname{senh}'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$$
$$\cosh'(x) = \operatorname{senh}(x)$$
$$\operatorname{senh}^2(x) + \cosh^2(x) = -1.$$



Agora, para resolver esta última que pode parecer complicada, vamos introduzir uma nova variável $z = dy/dx$. Então $dz/dx = d^2y/dx^2$ e temos que

$$\sqrt{1+z^2} = a\frac{dz}{dx}.$$

Isto é uma equação diferencial que podemos resolver separando as variáveis. Com efeito, primeiro separamos x e z,

$$\frac{dx}{a} = \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}},$$

e depois integramos

$$\frac{x}{a} = \int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \operatorname{arsenh}(z) + c_1.$$

Então $z = \operatorname{senh}(x/a - c_1)$ e como $z = dy/dx$

$$y = \int \operatorname{senh}(x/a - c_1)dx = a\cosh(x/a - c_1) + c_2.$$

Esta solução reescrevemo-la como

(2.4) $$\boxed{y = a\cosh\left(\frac{x - C_1}{a}\right) + C_2.}$$

Isto é a famosa função *catenária*. Os constantes a, C_1 e C_2 são os parâmetros que, em casos particulares, podemos encontrar explicitamente. Vamos fazê-lo com a curva da figura 1. Supusemos que a linha é tangente em $x = 0$. Isso significa que em $x = 0$, $dy/dx = 0$. Como a equação (2.4) dá que

(2.5) $$\frac{dy}{dx} = \operatorname{senh}\left(\frac{x - C_1}{a}\right),$$

então em $x = 0$, $\operatorname{senh}((0 - C_1)(a)) = 0$. Portanto $C_1 = 0$. Se adicionalmente a altura do poste à esquerda fosse exatamente h, obtemos, que em $x = 0$, o valor de y é h. Então, da equação (2.4) temos que $a + C_2 = h$. Portanto a solução é

(2.6) $$e = a\cosh(x/a) + h - a.$$

É bastante comum supor que $a = h$. Então a solução tem a forma

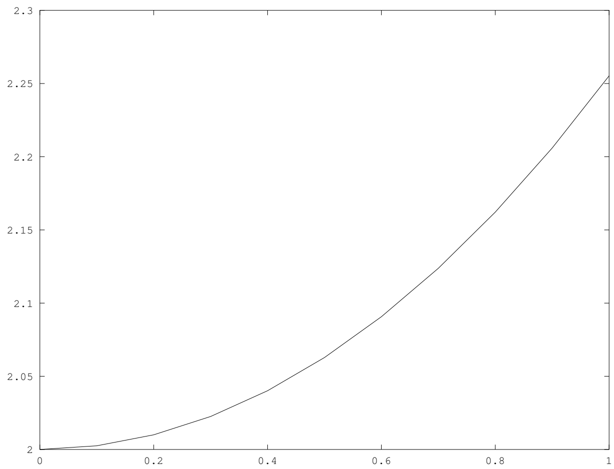
(2.7) $$e = h\cosh(x/h).$$

Na figura 4 apresentamos vários gráficos desta função para distintos h.

Octave/*Matlab*

Uma ótima ferramenta para produzir um gráfico de uma função é Octave. Os comandos para o desenho da função $f(x) = 2\cosh(x/2)$ são

```
x=[0:0.1:1];
y=2*cosh(x/2);
plot(x,y)
```



Mas, se adicionalmente conhecermos a altura do segundo poste, poderíamos experimentar a encontrar o verdadeiro valor do parâmetro a em (2.6). Vamos supor, então, que a altura no ponto $x = x_2$ é igual a y_2, isto é, em $x = x_2$, $y = y_2$. Portanto, a equação que temos que resolver é

$$e_2 = a\cosh(x_2/a) + h - a.$$

Infelizmente, a solução desta equação não é transcendental. Isso significa que não podemos expressá-la utilizando funções elementares. Por isso, necessitamos utilizar umas ferramentas computacionais para encontrar o parâmetro a em casos particulares e vamos explicá-lo depois.

3 Longitude da catenária

Se tivermos uma linha de longitude l suspensa entre dois postes, qual é a fórmula da catenária que forma a linha? Portanto, isto deveria ser fácil. Temos a fórmula geral (2.4) que tem 3 incógnitas a, C_1 e C_2. As posições dos postes e uma equação da longitude iria dar três equações. Ter três equações deveria ser suficiente para encontrar três incógnitas. E é. Portanto, agora o nosso objetivo é encontrar esta fórmula da longitude da linha que necessitamos.

Provavelmente, num curso de cálculo ensinaram-lhe o seguinte. Seja γ uma curva dada pelo gráfico da função $y = f(x)$ para $x \in [a, b]$. Então, a longitude l da curva é

$$l = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx. \tag{3.1}$$

Desta fórmula vem a equação (2.3). De facto, definimos uma variável l como a longitude de γ entre x_1 a x, isto é,

$$l = \int_{x_1}^{x} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx. \tag{3.2}$$

Derivando ambos os lados relativamente a x e utilizando o Teorema Fundamental de Cálculo, obtemos (2.3).

Agora utilizando (2.5), podemos encontrar a fórmula para l entre x_1 a x_2. De facto

$$l = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \operatorname{senh}^2\left(\frac{x - C_1}{a}\right)}\,dx = \int_{x_1}^{x_2} \cosh\left(\frac{x - C_1}{a}\right)dx$$

Então

$$\boxed{l = a\operatorname{senh}\left(\frac{x_2 - C_1}{a}\right) - a\operatorname{senh}\left(\frac{x_1 - C_1}{a}\right)} \tag{3.3}$$

e isto é a longitude.

4 Caso geral

Como já temos a fórmula para a longitude da linha (3.3), podemos voltar ao nosso problema que foi colocado na secção anterior. Vamos procurar a fórmula da catenária, quando tivermos dado os pontos de fixação e a longitude da linha.

Vamos supor que a linha está suspensa do lado direito no ponto (x_1, y_1). Então, da equação (2.4) temos que

$$y_1 = a \cosh\Big(\frac{x_1 - C_1}{a}\Big) + C_2.$$

Como do lado esquerdo o ponto denotamos por (x_2, y_2), então temos a segunda equação

$$y_2 = a \cosh\Big(\frac{x_2 - C_1}{a}\Big) + C_2.$$

Se adicionalmente denotamos a longitude da linha por l, utilizando (3.3) temos o seguinte sistema de equações

$$\left\{\begin{aligned} y_1 &= a\cosh\Big(\tfrac{x_1-C_1}{a}\Big) + C_2,\\ y_2 &= a\cosh\Big(\tfrac{x_2-C_1}{a}\Big) + C_2,\\ l &= a\,\mathrm{senh}\Big(\tfrac{x_2-C_1}{a}\Big) - a\,\mathrm{senh}\Big(-\tfrac{C_1}{a}\Big).\end{aligned}\right. \tag{4.1}$$

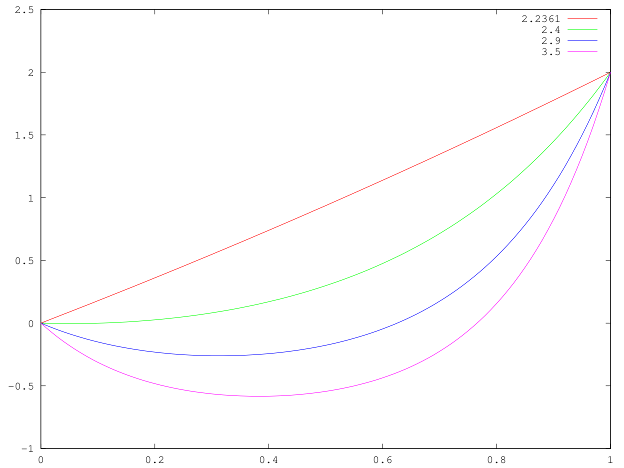


Figura 5: Linhas com diferentes longitudes.

Isto é um sistema que, em geral, não se pode resolver simbolicamente, isto é a solução transcendental. Por isso, temos que utilizar ferramentas computacionais, neste caso o programa livre Octave. Claramente, temos que transformar o nosso problema num outro que o computador pode entender. Vamos explicar como o fazemos.

Primeiro, vamos utilizar o comando `fsolve`. Este comando permite-nos encontrar zeros de uma função ou funções. Em primeiro lugar, para não repetir a mesma fórmula várias vezes definimos uma função

$$\mathrm{cata}(x,a) = a_1\Big(\cosh\big(\frac{x-a_2}{a_1}\big)\Big) + a_3.$$

Isto é a fórmula de catenária (2.4) mas alterámos a notação. A variável a é agora um vetor (a_1, a_2, a_3) em que a_1 corresponde ao parâmetro a de (2.4), a_2 ao parâmetro C_1 e a_3 ao C_2. Agora, com esta mudança, é muito fácil escrever esta função em Octave. Escrevemos simplesmente o seguinte.

```
function f = cata(x,a)
  f = a(1)*(cosh((x-a(2))/a(1)))+a(3);
endfunction
```

Fazemos o mesmo com a fórmula (3.3) da longitude da catenária. Escrevemo-la na forma

$$\mathrm{lCata}(x_1, x_2, a) = a_1\Big(\mathrm{senh}\,\big(\frac{x_2-a_2}{a_1}\big) - \mathrm{senh}\big(\frac{x_1-a_2}{a_1}\big)\Big),$$

e em Octave

```
function f = lCata(x1,x2,a)
  f = a(1)*(sinh((x2-a(2))/a(1))-sinh((x1-a(2))/a(1)));
endfunction
```

Agora o sistema (4.1) vamos reescrevê-lo na forma

```
function f=sistema1(x1,y1,x2,y2,l,a)
  f(1) = y1 - cata(x1,a);
  f(2) = y2 - cata(x2,a);
  f(3) = l - lCata(x1,x2,a);
endfunction
```

Depois para encontrar os coeficientes a_1, a_2, a_3 (`a(1)`, `a(2)`, `a(3)` em Octave) da fórmula da catenária com $x_1 = 0$, $y_1 = 1$, $x_2 = 1$, $y_2 = 1.5431$ e $l = 1.1752$. Escrevemos

```
a0=[1; 1; 1];
fsolve(@(a) sistema1(0,1,1,1.5431,1.1752,a),a0)
```

em que `a0=[1; 1; 1]` é uma condição inicial. O que obtemos é o seguinte.

```
ans =

   1.0001e+00
  -8.8204e-05
  -1.3329e-04
```

Nas definições de Octave das funções `cata`, `lCata` e `sistema1` o parâmetro `a` é um vetor coluna. Por exemplo, se a nossa catenária tiver a fórmula

$$f(x) = 2\Big(\cosh\big(\frac{x-1}{2}\big)\Big) + 5,$$

então os parâmetros a_1, a_2 e a_3 são respetivamente igual a 2, 1 e 5. Portanto, para calcular o valor da função no ponto $x = 3$ em otave escrevemos o seguinte.

```
a=[2;1;5];
cata(3,a)
```

o resultado é

```
ans =   8.0862
```

que são os parâmetros perto de $a_1 = 1$, $a_2 = 0$ e $a_3 = 0$. Então, a fórmula de catenária neste caso é quase

$$f(x) = \cosh(x).$$

A figura 5 era feita utilizando este programa com distintos l.

Utilizando Octave podemos agora facilmente encontrar a fórmula da catenária que passa por três pontos (x_1, y_1), (x_2, y_2) e (x_3, y_3) dados. Neste caso, temos o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} y_1 = a_1 \cosh\left(\frac{x_1 - a_2}{a_1}\right) + a_3, \\ y_2 = a_1 \cosh\left(\frac{x_2 - a_2}{a_1}\right) + a_3, \\ y_3 = a_1 \cosh\left(\frac{x_3 - a_2}{a_1}\right) + a_3. \end{cases}$$

que em Octave reescreve-se como

```
function f=sistema2(x1,y1,x2,y2,x3,y3,a)
  f(1) = y1 - cata(x1,a);
  f(2) = y2 - cata(x2,a);
  f(3) = y3 - cata(x3,a);
endfunction
```

Com isto podemos, por exemplo, encontrar a única catenária que passa pelos pontos $(0,0)$, $(1,1)$ e $(2,4)$ escrevendo em Octave o seguinte

```
a0=[1; 1; 1];
fsolve(@(a) sistema2(0,0,1,1,2,4,a),a0)
```

O resultado é

```
ans =
   1.07724
  -0.42254
  -1.16118
```

Na figura 6 comparámos esta catenária com a parábola $y = x^2$.

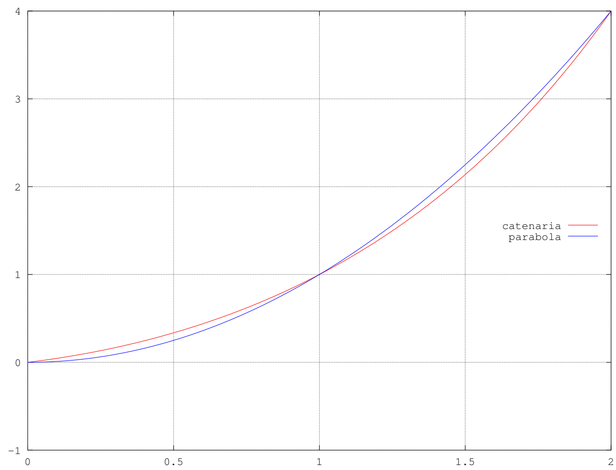


Figura 6: A única catenária e a única parábola que passam pelos pontos $(0,0)$, $(1,1)$ e $(2,4)$.

5 Fin

A primeira pessoa que deu conta que a curva formada por uma corrente não é parábola, era um jovem holandês, Christiaan Huygens. Sobre a história deste descobrimento e a sua demonstração, pode ler-se em [1]. Nós apresentámos uma demonstração moderna que se pode encontrar em vários livros.

Referências

[1] John F. Bukowski. Christian huygens and the problem of the hanging chain. *College Math Journal*, 39(1):2–11, 2008.

[2] Galileo Galilei. *Discourses and Mathematical Demonstrations Relating to Two New Sciences*. Macmillan, 1914. Translated from the Italian and Latin into English by Henry Crew and Alfonso de Salvio.