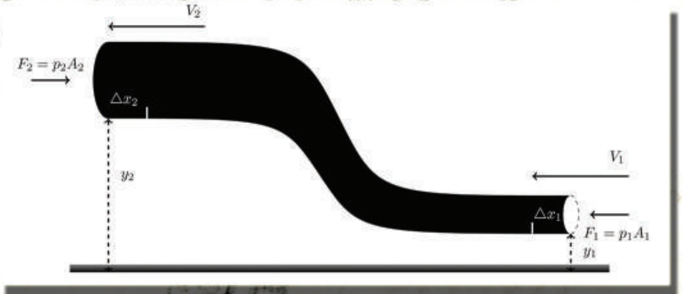
Soluções

Vol. I, No. 2

Matemática em engenharia: Princípio de Bernoulli



Informática en ingeniería: Matrices

```
octave:17> det(C)
ans =  1
octave:18> inv(C)
ans =

   5  -2
  -2   1
```

17 Março 2014

© Publicaciones Saema, Projectos na Área Eléctrica e Médica, lda
C/ Deolinda Rodrigues S/N – Luanda – Angola
(+244) 222 32 78 42
`revista@revistasolucoes.com`
`www.revistasolucoes.com`

Nada é impossível

Enrique Luis Ibáñez Conde

Comecei a trabalhar a 24 de abril do 2007 para Soluciones de Gestión y Apoyo a Empresas s.l. a empresa em que desenvolvo as minhas funções laborais. Desde esse dia, até este presente ano 2014, tenho desempenhado diferentes cargos na mesma. Em cada um destes postos de trabalho, a minha grande prioridade tem sido sempre poder oferecer a Angola, uma vez que trabalhamos para ela, o melhor serviço possível e ao mesmo tempo sermos capazes de aplicar, tanto os meus conhecimentos de origem – a engenharia industrial – como outros tipos de conhecimentos e experiências adquiridos nos diferentes postos profissionais a nível nacional e internacional em anteriores empresas.

Os fundadores da SAEMA começaram a prestar os seus serviços em Angola há mais de 23 anos. Isso significa que conviveram desde os tempos do conflito armado, passando pelo restabelecimento da paz e pelo processo das eleições democráticas até à atualidade. Nesses períodos, a SAEMA foi crescendo e fortalecendo-se com as suas prioridades focadas sempre no desenvolvimento de Angola.

Enrique Luis Ibáñez Conde
Diretor executivo
Soluciones de Gestión y Apoyo a Empresas s.l.

Isso dá a oportunidade de ver, no dia de hoje, que a República de Angola é um país com vontade de crescer e, em e para este crescimento, a SAEMA tem disponibilizado todos os seus melhores recursos e desejos. Desde então, a SAEMA tem participado na construção e no início do funcionamento de serviços médicos como hospitais, centros de atenção, etc.; centrais de geração elétrica; linhas de transporte de Alta, Média e Baixa Tensão; sistemas de geração elétrica mediante equipamentos de captação fotovoltaica e instalações de captação, potabilização e distribuição de água para consumo humano. Tudo isso destinado, com a inestimável e imprescindível preocupação, promoção e financiamento do governo da República de Angola, a dar à população angolana um muito importante impulso ao seu desenvolvimento para conseguir uma alta melhoria na qualidade das suas vidas e do seu futuro.

O governo angolano tem tido a consideração de depositar a confiança na SAEMA para participar e cooperar nesta reestruturação e melhoria do país mediante os diferentes projetos e obras que anteriormente foram mencionadas nos campos sanitários, de energias e águas. Dentro do campo das energias, queremos salientar que energias renováveis como a fotovoltaica, deram a possibilidade de dispor de energia elétrica a núcleos povoados que não podem dispor dela, uma vez que ficam muito distantes das redes de distribuição elétrica do país.

É difícil pôr em números ou percentagens o quanto aumentou a qualidade de vida do povo angolano graças a toda a criação destes serviços e infraestruturas, mas sim podemos dizer que tem afetado a centenas de milhares deles e que nós, a SAEMA, estamos orgulhosos de ter podido contribuir nessa nossa parte.

E igual que o governo angolano continua a disponibilizar recursos, tanto económicos como humanos, para fomentar e acelerar o crescimento do seu país, nós queremos cooperar nesses fins mediante as publicações periódicas desta revista. A citada revista, que para além de ser distribuída em formato papel, podem encontrá-la eletronicamente em www.revistasolucoes.com. Esperamos que com ela tenham acesso a temas científicos, bem como a tudo o relacionado com a engenharia, a informática e, ainda, possam passar um bocado agradável com os conteúdos que oferecemos.

Particularmente sinto-me satisfeito de que se tenha criado esta revista, e desejo que termine por participar nela, toda a comunidade angolana, e que sirva para que tenham uma outra via optativa destinada a incrementar a sua formação.

Em que é consiste o seu trabalho?

O meu trabalho é … faço carregamento de material de uma obra para outra, e com a máquina faço terraplanagem do recinto onde se vai fazer o trabalho, faço valas, e outros trabalhos por aí, que consistem em fazer com a máquina.

Miguel Francisco Miguel
Operador de máquina e camionista

Há quanto tempo que se dedica a isto?

Já estou desde 2006, desde 2006 até hoje já são oito anos já nessa empresa, na empresa Saema, a fazer este tipo de trabalho.

Do que é que mais gosta do seu trabalho?

Do meu trabalho, basicamente, gosto de quase tudo, gosto de fazer as coisas bem, gosto de fazer as coisas que saem perfeitas, e de vez em quando tenho feito alguns papéis de encarregado.

O que é que destacaria sobre a importância do seu trabalho?

O mais importante do meu trabalho é quando termina uma obra. Quando terminamos uma obra, sim, é o mais importante do meu trabalho.

Relacionado com isto, que experiência tem quando termina uma obra, que experiência sente?

Para mim, uma satisfação, para mim uma satisfação, alegria, é uma obra que terminou, assim a empresa vai subindo de patamar, uma obra que terminou, quando todo o mundo se sente satisfeito, não é? Mas para mim, é uma satisfação muito grande.

E quais são as reações das pessoas?

Ficam satisfeitos, como veteranos que já estamos há mais anos na empresa, continuamos sempre na empresa, já vemos a empresa como o nosso filho, a nossa mãe, e já estamos há muitos anos.

1 Fluidos e fluxo de fluidos

O que é um fluido? Um fluido é uma substância que se deforma continuamente quando é submetida a um esforço cortante, sem importar o pequeno que seja o esforço aplicado. Este conceito engloba tanto a,

- os *líquidos*, os quais tomam a forma do recipiente que os aloja e mantêm o seu volume
- os *gases*, os quais carecem de volume como de forma própria

(a) Película de sabão iluminada (b) Deslocamento de viscosidade (c) Bolhas em detergente puro

Figura 1: Imagens de comportamento de fluidos extraídas de [1]

O estudo do movimento de um fluido é o que chamamos mecânica de fluidos. O fluxo é definido como o movimento de um fluido. O estudo do fluxo é muito complexo, e não é o mesmo estudar o fluido da água, o fluido do mel, o fluido o sangue ou o comportamento do fumo de um cigarro. Nós, neste artigo, vamos centrar-nos em fluidos que se denominam *fluidos ideais*. Consideramos o comportamento de um fluido ideal cujas características são as seguintes:

- *Não viscoso:* isso significa que se despreza a fricção interna entre as diferentes partes do fluido. Pense: O que é que é mais viscoso, o mel ou a água?
- *Estado estacionário:* isso é que a velocidade do fluido num ponto é constante com o tempo. Estes caracterizam-se pelas seguintes propriedades:
- *Incompressível* a densidade do fluido permanece constante com o tempo.
- *Irrotacional:* não apresenta turbilhões, isto é, não há momento angular do fluido relativamente a qualquer ponto. Ou seja, cada partícula do fluido segue uma trajetória uniforme e estas não se cruzam. Pense: o fumo de um cigarro é um fluido irrotacional?

Fluidos ideais puros na realidade não existem, mas sim podemos desprezar essas diferenças e poder tomar alguns líquidos e gases como fluidos ideais. O exemplo mais próximo de fluido ideal é a água. Em particular, vamos estudar alguns detalhes do estudo de fluxos pelo interior de canos, como sejam o conhecimento do caudal e a velocidade do fluido que circula através de um cano.

Algumas curiosidades da complexidade que apresentam os fluidos e o fluxo de fluidos são:

- Revelaram que, na ausência de gravidade, os líquidos tornam-se em algo mais viscoso que tende para se unir numa única bola com uma grande tensão superficial. E que se colocarmos ao lado uma bolha de água mais pequena, a bola grande absorve-a rapidamente, como se fosse um íman.
- O estudo de fluidos é algo complexo, mas também podemos vê-lo como algo artístico. Ver a Figura 1.

2 Equação de Continuidade

Quando deitamos água por um lado de um tubo oco e aberto por ambos os lados, sabemos que alguma coisa se vai passar, não sabemos? A água vai sair pelo outro lado. Tanto faz se o tubo tem diâmetro constante ou se muda, o caudal que entra por um lado vai sair pelo outro. Isto é o que se chama em mecânica de fluidos a Equação de Continuidade. Esta equação é apenas um caso particular do princípio de conservação da massa (ver [2]). Vamos vê-la.

Vamos referir-nos à Figura 2 para entender melhor o raciocínio que vamos levar a cabo.

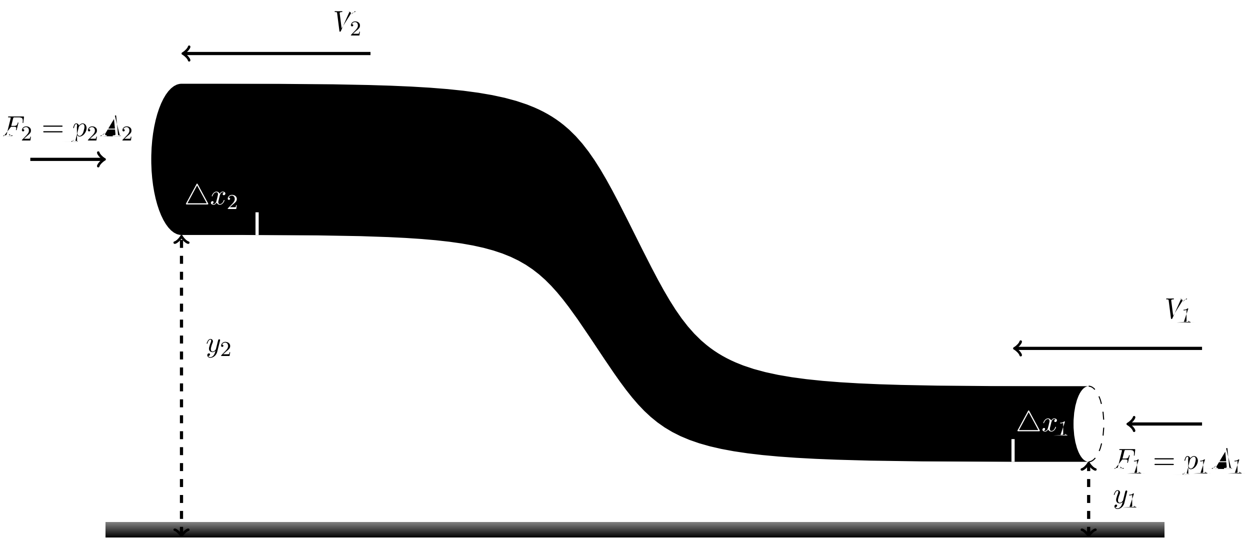


Figura 2: fluido em movimento num tubo

Consideramos um fluido que se movimenta ao longo de um tubo, cuja secção transversal aumenta em direção do fluxo, como na Figura 2. Num intervalo de tempo que vamos chamar $\triangle t$, na secção mais estreita do tubo de área A_1, o fluido desloca-se uma distância $\triangle_1 = V_1 \cdot \triangle t$ sendo V_1 a velocidade do fluido. A massa contida no volume $A_1 \cdot \triangle_1$ é $m_1 = \rho_1 \cdot A_1 \cdot \triangle x_1$ sendo ρ_1 a densidade do fluido nesse intervalo de tempo. De forma similar, na secção larga do tubo de área A_2, obtêm-se expressões equivalentes no mesmo intervalo de tempo $\triangle t$, substituindo o subíndice 1 por 2. Mas a massa conserva-se no fluxo estacionário, isto é, a massa que atravessa por A_1 é igual à massa que passa por A_2 no intervalo de tempo $\triangle t$. Deste modo, temos a equação de Continuidade como se segue:

$$\rho_1 \cdot A_1 \cdot V_1 = \rho_1 \cdot A_2 \cdot V_2 \tag{2.1}$$

Se estamos num fluido incompreensível, esta equação reduz-se a:

$$A_1 \cdot V_1 = A_2 \cdot V_2 = constante. \tag{2.2}$$

A quantidade $A \cdot V$ chama-se fluxo de volume ou caudal. E, o que é que podemos deduzir desta equação ? Que à maior secção, menor velocidade.Ou seja, olhando para a Figura 2, por onde irá a água mais depressa, na parte estreita ou na parte mais larga?

Com esta simples equação podemos fazer um simples exercício. Se reparar, o que é que lhe acontece à água quando sai da torneira? O fio de água parece que é mais fino quanto mais longe da torneira, não é? Imaginemos que a boca da torneira é circular com um raio r_0, Podemos ver como diminui essa gota usando a equação de continuidade. À saída da torneira podemos supor que a velocidade da água é V_0. Portanto o caudal à saída da torneira é $V_0 \cdot \pi \cdot r_o^2$. A pergunta que nos colocamos é, qual é o caudal a uma distância h da saída da torneira?

A velocidade da água a essa distância h é V_f e o seu valor é calculado como

$$V_f^2 = V_0 + \frac{1}{2}hg,$$

sendo g a aceleração gravitatória e portanto o caudal a distância h da torneira é $\sqrt{V_0^2 + \frac{1}{2}hg} \cdot \pi \cdot r^2$ sendo r o raio da superfície da água a essa altura. E usando a equação de continuidade sabemos que o caudal é constante e portanto, temos que

$$V_0 \pi r_o^2 = (V_0 + \frac{1}{2}hg)\pi r^2,$$

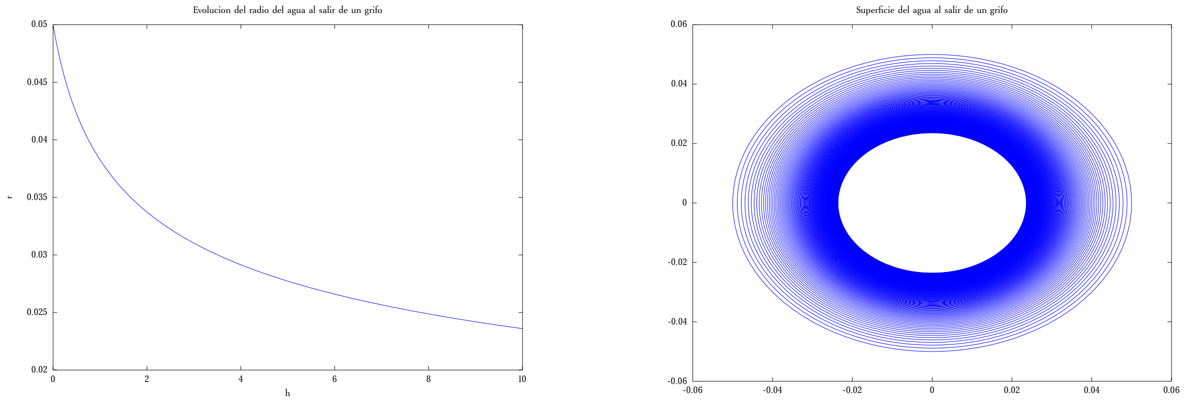
e despejando a incógnita r, temos que

$$r = r_o \sqrt[4]{\frac{V_0^2}{V_0^2 + \frac{1}{2}hg}}. \tag{2.3}$$

Usando octave podemos ver melhor a interpretação da fórmula dada na equação 2.3. Partindo de dados iniciais, a velocidade inicial (por exemplo $V_0 = 3.2$ m/s), o raio da torneira (por exemplo $r_0 = 0.05$ m), vamos ver como vai a secção da gota de água segundo a distância h a partir da torneira.

```
g=9.81;V_0=3.2;r_0=0.05;
h=0:0.05:10;
r=r_0.*(V^2./(V^2+2*g*h)).^(1/4);
plot(h,rh)
title("Evolução do raio da água ao sair de uma torneira")
xlabel("h")
ylabel("r")
```

E desta maneira obtemos a gráfica na Figura 3 em (a). Usando este raio, também podemos desenhar as superfícies da gota de água a diferentes alturas obtendo a figura (b) de Figura 3. Quer tentar desenhá-lo em octave?



(a) (b)

Figura 3: A evolução da superfície da água a sair da torneira.

3 Equação de Bernoulli

A equação de Bernoulli ou Teorema de Bernoulli é uma lei que se deduz a partir da lei de conservação da energia para um fluido em movimento (ver [2]). É em honra a Daniel Bernoulli, matemático suíço do século XVIII (1700-1782), quem, a partir de medidas de pressão e velocidade em condutos, conseguiu relacionar as alterações havidas entre ambas as variáveis. Os seus estudos foram incluídos no livro Hidrodynamica, um dos primeiros tratados publicados sobre o fluxo de fluidos, que data de 1738.

Seguindo com a Figura 2 vamos utilizá-la para deduzir a equação de Bernoulli de uma forma simples. É intuitivo dizer que quando um fluido se desloca por uma região em que a sua velocidade ou a sua altura se modificam, a pressão também muda. A força relacionada com a pressão p_1 no extremo inferior do tubo é $F_1 = p_1 \cdot A_1$ e o trabalho realizado por essa força sobre o fluido é $W_1 = F_1 \cdot \triangle x_1 = p_1 \cdot A_1 \cdot \triangle x_1 = p_1 \cdot V$ em que V é o volume do fluido considerado. De forma equivalente, se considerar um mesmo intervalo de tempo, o volume V de fluido que atravessa a secção superior de área A_2 é o mesmo. Desta forma, o trabalho é $W_2 = -p_2 \cdot A_2 \cdot \triangle x_2 = -p_2 \cdot V$. O trabalho total W pode escrever-se como,

$$W = W_1 + W_2 = (p_1 - p_2) \cdot V. \tag{3.1}$$

Aplicando o princípio da conservação da energia mecânica, temos que o trabalho das forças exteriores que atuam sobre um sistema de partículas modifica a energia do sistema de partículas, isto é, a soma das variações da energia cinética ($\triangle E_c$) e a energia potencial ($\triangle E_p$) do sistema de partículas é igual a W. Se denotarmos por $\triangle m$ a massa que passa pelo tubo no tempo $\triangle t$, temos que:

$$\triangle E_c = \frac{1}{2}\triangle m \cdot v_1^2 - \frac{1}{2}\triangle m \cdot v_2^2, \tag{3.2}$$

e se denotamos por g à constante de gravitação universal e a y_1 e y_2 a altura a que se encontram as secções A_1 e A_2 respetivamente, tem-se que,

$$\triangle E_p = \triangle m \cdot g \cdot y_2 - \triangle m \cdot g \cdot y_1. \tag{3.3}$$

Assim, usando as equações (3.1), (3.2) e (3.3), temos o seguinte resultado:

$$(p_1 - p_2)V = \frac{1}{2}\triangle m \cdot v_1^2 - \frac{1}{2}\triangle m \cdot v_2^2 + \triangle m \cdot g \cdot y_2 - \triangle m \cdot g \cdot y_1. \tag{3.4}$$

E, a partir daqui, é muito fácil deduzir a famosa equação de Bernoulli usando que a densidade $\rho = \frac{\triangle m}{V}$ e portanto,

$$p_1 + \frac{1}{2}v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2}v_2^2 + \rho g y_2. \tag{3.5}$$

Ou analogamente que $p_1 + \frac{1}{2}v_1^2 + \rho g y_1 = constante.$

Reparemos que em todo o momento os cálculos anteriores supuseram que o fluido é ideal. Já deduzimos de uma forma simples a equação de Bernoulli, mas agora a pergunta é, o que é que tem de especial esta equação ? Vamos ver algumas das suas utilidades.

3.1 Canos

Já se perguntou alguma vez porque é que se transporta a água em canos? O método mais comum para transportar fluidos de um ponto para outro é impulsioná-lo através de um sistema de canos. Os canos de secção circular são os mais frequentes, uma vez que esta forma oferece não só maior resistência estrutural, mas também maior secção transversal para o mesmo perímetro exterior que qualquer outra forma. Vamos ver alguns simples e gráficos exemplos de que é que serve o que foi aprendido neste artigo.

3.1.1 Canos horizontais

Se o cano for horizontal observemos que a equação de Bernoulli (3.5) fica reduzida a,

$$p_1 + \frac{1}{2}v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}v_2^2. \tag{3.6}$$

Usando esta equação (3.6) e a Equação de continuidade (2.2) pode concluir-se que se reduzirmos a área transversal de um cano para que aumente a velocidade do fluido que passa por ela, a pressão reduzir-se-á. Por exemplo, imagine que está a regar o jardim da sua avó com uma mangueira e aperta a ponta, o que é que se passa? O que se passa é que ao apertar a ponta, o diâmetro da mangueira torna-se mais pequeno e portanto usando a equação de continuidade (2.2) então a velocidade aumenta e agora a água sai com maior velocidade. Ao sair com maior velocidade o termo $p_2 + \frac{1}{2}v_2^2$ de (3.6) deve ter o mesmo valor, portanto necessariamente a pressão no ponto de saída da mangueira deve ser menor. Daqui a conclusão "à maior velocidade menor pressão".

3.1.2 Porque é que no último piso não "chega tão forte"a água ao duche?

Imaginemos o seguinte problema:

Problema: Faz-se fluir água com uma pressão manométrica de $4,0$ atm desde a rua até a um edifício de 7 pisos com uma velocidade de $0,80\ m/s$ através de um cano de $0,10\ m$ de diâmetro. O cano reduz-se a $0,05\ m$ de diâmetro no sétimo piso que se encontra a uma altura de 20 metros acima do chão onde se deixou uma torneira aberta. Calcular velocidade e pressão manométrica da água à saída da torneira.

Solução :

Vamos denotar a posição 1 o cano do chão e a posição 2 a torneira situada no sétima piso. Se seguirmos a notação do artigo teríamos os seguintes dados:

$$P_1 = 4\text{atm} = 10,4 \cdot 10^4\text{Pa},\ V_1 = 0.80m/\text{s},$$

$$d_1 = 0.1m,\ y_1 = 0,$$

$$d_2 = 0.05m,\ y_2 = 20.$$

Queremos que resolva o problema. As diretrizes são: utilizando a equação de continuidade é muito fácil ver que a velocidade da água à saída da torneira é de 3.2 m/s e utilizando esta velocidade e a equação de Bernoulli a pressão da água à saída da torneira é de $2,01$ atm.

Agora imaginemos o mesmo problema, mas vamos abrir a torneira no primeiro piso, isto é, a 3 metros do chão, qual seria a velocidade e a pressão manométrica? A velocidade a que pode explicar aos seus filhos com todo o pormenor porque é que a água tem mais pressão na casa dos vizinhos do que na sua!

A experiência mais longa do mundo (Record Guinnes), o efeito da viscosidade num fluido: Em 1927 o Professor Thomas Parnell da Universidade de Queensland na Austrália quis demonstrar aos seus estudantes que há substâncias que, embora pareçam sólidas, na realidade são fluidos com viscosidade muito alta. O professor pôs um pouco de breu num funil e deixou que descansasse durante três anos. Ao longo de uma década formou-se uma gota que caiu em dezembro de 1938. Desde então mais 8 gotas têm caído.

Referências

[1] Efluids image gallery. *http://www.efluids.com/efluids/pages/gallery.htm.*

[2] Frank M. White. *Mecánica de fluidos.* Mc Graw Hill, 2000.

Introducción

Una razón por la que Octave es un lenguaje muy potente es que se caracteriza por ser un programa funcional. Esto quiere decir que tiene múltiples funciones que pueden ser aplicadas a objetos más complejos que un número, por ejemplo una matriz. Una matriz es una herramienta matemáticas que permite tratar mucha información de una manera muy eficiente y flexible. Por ejemplo, una matriz de pixeles puede ser una imagen, o una película; o una matriz de fluctuaciones puede ser un sonido o una voz humana. De este modo vamos a ver en este número como se tratan las matrices en Octave y algunas funciones asociadas a ellas.

1 Matrices

Una matriz de números es un objeto matemático que contiene números colocados por filas y columnas. En octave estas matrices irán entre corchetes([ ] y dentro escribiremos las filas separados por espacio o comas y las columnas por punto y coma. Veamos algunos ejemplos,

```
octave:1> A=[1 2 3;4 5 6]
A =

   1   2   3
   4   5   6
```

```
octave:2> b=[1 10 100]
b =

     1    10    100
```

De este modo hemos creado dos matrices: A con 2 filas y 3 columnas, y la matriz b con una fila y 3 columnas (esta matriz más propiamente es llamada *vector* fila). Basado en la posición en la que se encuentran los elementos de las matrices podemos extraer sus elementos o bien trozos de la matriz, lo que se denominan submatrices.

```
octave:3> A(2,3)
ans =  6
octave:4> A(:,[1 3])
ans =

   1   3
   4   6
```

Cuando escribimos dos puntos(esto es, :) significa que tomamos o bien todas las filas o bien todas las columnas según corresponda.

1.1 Operaciones con matrices

Pues las matrices si son del mismo tamaño se pueden sumar, restar o multiplicar por un escalar.

```
octave:5> A+A
ans =

    2    4    6
    8   10   12

octave:6> 2*A
ans =

    2    4    6
    8   10   12
```

Lo que no podemos es multiplicar dos matrices cualesquiera, sino que el número de columnas de la de la izquierda debe coincidir con el número de filas de la de la derecha. ¿Recuerdas eso?

```
octave:7> A*b
error: operator *: nonconformant arguments (op1 is 2x3, op2 is 1x3)
octave:7> A*b'
ans =

   321
   654

octave:8> A'*A
ans =

   17   22   27
   22   29   36
   27   36   45
```

Observa que la prima $'$ lo que hace es transponer y conjugar la matriz, esto es cambiar las filas por columnas y viceversa y si los números de las matrices fuesen complejos los pasaría a sus conjugados.

Como hemos dicho antes *Octave* es funcional. Fíjate que de una vez podemos calcular el cuadrado, o el cubo, o el seno trigonométrico, o la tangente, o la raíz cuadrada de todos los elementos de la matriz A, por ejemplo:

```
octave:9> A.^2
ans =

    1    4    9
   16   25   36

octave:10> A.^3
ans =

     1     8    27
    64   125   216

octave:11> sin(A)
ans =

   0.84147   0.90930   0.14112
  -0.75680  -0.95892  -0.27942

octave:12> tan(A)
ans =

   1.55741  -2.18504  -0.14255
   1.15782  -3.38052  -0.29101

octave:13> sqrt(A)
ans =

   1.0000   1.4142   1.7321
   2.0000   2.2361   2.4495.
```

La última operación usual en matrices es la inversa de una matriz. No todas las matrices tienen inversa; estas tienen que ser cuadradas (mismo número de filas que de columnas) y además su determinante debe ser distinto de cero. En este caso podemos calcular la inversa y se calcula con el comando inv.

```
octave:15> C=[1 2;2 5]
C =

   1   2
   2   5

octave:16> det(A)
error: det: argument must be a square matrix
octave:16> C=[1 2;2 5]
C =

   1   2
   2   5

octave:17> det(C)
ans =   1
octave:18> inv(C)
ans =

   5  -2
  -2   1

octave:19> ans*C
ans =

   1   0
   0   1
```

1.2 Generando algunas matrices

Tenemos muchos tipos de matrices:

- Caracterizadas por su forma: cuadradas, rectangulares, triangulares superiores, triangulares inferiores, escalonadas, etc.
- Caracterizadas por su contenido: diagonales, tridiagonales, huecas o sparse, aleatorias,etc.
- Caracterizadas por propiedades intrìnsecas: Pascal, Vandermonde, Hilbert, Toeplitzs, Hankel, etc.

Os animamos a que investiguéis los siguientes instrucciones con nuevos comandos en octave: $rand(2,3)$, $diag([1\ 2\ 3\ 4])$, $tril(A)$, $triu(A)$, $ones(2,3)$, $zeros(2,3)$, $eye(3)$, $vander([1\ 2\ 3\ 4])$ y $pascal(3)$. ALguna pista de lo que va a salir puedes mirarlo en lo que sigue.

```
octave:21> A1=rand(2,3);A2=diag([100 200]);A3=tril(A);
A4=triu(A);A5=ones(2,3);A6=zeros(2,3);A7=eye(2);
octave:22> %¿Las ponemos todas en una sola?
octave:22> [A1 A2 A3 A4 A5 A6 A7]
ans =

 Columns 1 through 7:

     0.66373     0.80437     0.18190   100.00000     0.00000     1.00000     0.00000
     0.08936     0.00524     0.91602     0.00000   200.00000     4.00000     5.00000

Columns 8 through 14:

     0.00000     1.00000      2.00000     3.00000     1.00000     1.00000     1.00000
     0.00000     0.00000      5.00000     6.00000     1.00000     1.00000     1.00000

 Columns 15 through 19:

     0.00000     0.00000     0.00000     1.00000     0.00000
     0.00000     0.00000     0.00000     0.00000     1.00000
```

1.3 Algunos comandos interesantes

La aplicabilidad de las matrices es enorme y en la ingeniería una matriz aparece en múltiples aplicaciones, desde la resolución de sistemas de ecuaciones, la resolución de ecuaciones diferenciales, el procesamiento de señales, simulaciones, etc. En futuros números estudiaremos algunos problemas en ingeniería donde podamos ver la importancia de las matrices y el uso de *Octave* en ella. Por el momento, os animamos a que vayáis investigando algunos comandos como son *eig* que calcula los autovalores de una matriz, *svd* que calcula la descomposiciòn en valores singulares o *lu* que calcula la factorización de una matriz basada en la eliminaciòn gaussiana.

¿Quieres ir al supermercado a comprar gratis algunas matrices?

Esta es la dirección:
`math.nist.gov/MatrixMarket`

2 Procesando una foto

¿Qué es una foto? Es una colección ordenada de cuadraditos del mismo tamaño, cada uno de ellos coloreado de un color determinado. Cuanto más pequeño es el cuadrado mayor resolución de la foto y cuanto más grande, menor resolución y la calidad de la foto no será tan buena. Entonces podríamos pensar en una foto como un rectángulo lleno de cuadraditos del mismo tamaño y que cada cuadrado tiene la información del color del cuadrado, ¿verdad? Es decir una foto es una matriz de colores. Vamos a tomar una foto, ver esa matriz que está escondida en ella y jugaremos un poco con la imagen. Para ello en vez de trabajar como hasta ahora, que hemos ido escribiendo en la pantalla de ejecución de octave cada instrucción por separado, ahora vamos a juntar muchas instrucciones juntas en un archivo, que se llama *script*, que tiene extensión *.m* y llamaremos en la pantalla de ejecución de octave a este archivo por su nombre. En windows te recomendamos que utilices como editor *notepad++* (¡Cuidado no se pueden usar editores estilo word ya que estos guardan formatos además del texto!); y en linux, por ejemplo os recomendamos utilizar el editor emacs. EL programa que hemos generado es el siguiente:

```
% El % lo usamos para hacer comentarios, esto no afecta a octave, no
% lee ni interpretalo que haya en las lìneas que comienzan con %

clear all
% Vamos a crear la matriz A que representa la foto "fotoNena.jpg"
A=imread("fotoNena.jpg");

%El ; lo colocamos para que no saque por pantalla la matriz A

%Veamos cuantas filas y columnas tiene la matriz A
disp("La foto està presentada en la matriz A de tamaño:")
size(A)
% Vamos a crear una figura con una fila y tres columnas
subplot(1,3,1)
% en la primera ponemos la foto "fotoNena.jpg"
imshow(A)

% en la segunda vamos a mostrarla rotada 45º

b=imrotate(A,45,'bilinear','crop');
subplot(1,3,2)
imshow(b)

% la pasamos a blanco y negro

c=rgb2gray(A);
subplot(1,3,3)
imshow(c)
```

Ahora mostramos en la Figura 1 la salida que genera el programa anterior.

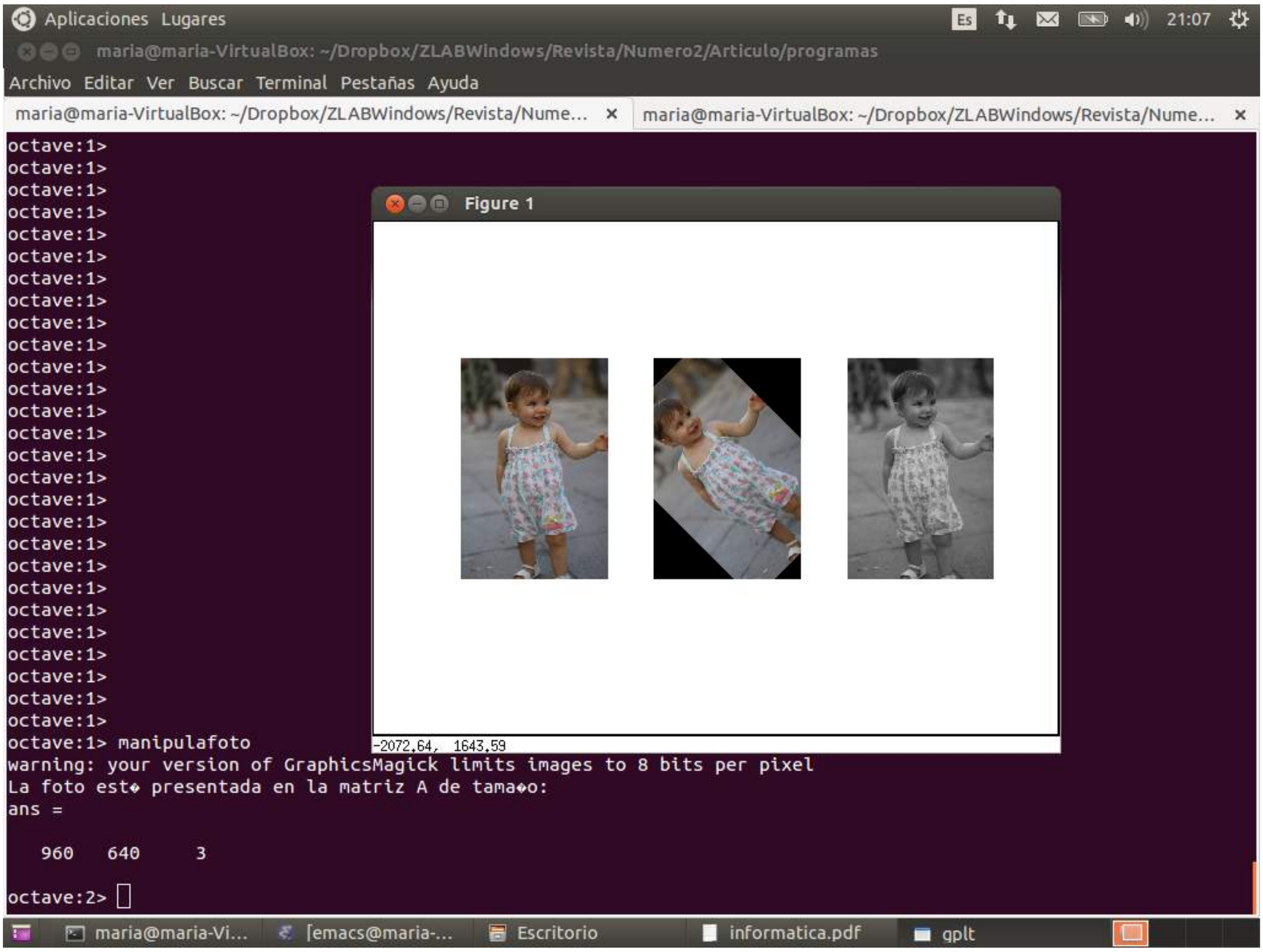


Figura 1: Pantallazo de la salida al ejecutar el programa

Peña Pérez Bendicho

1 Introducción

En esta ocasión os presentamos una nueva generación de tuberías, estás son las tuberías TOM© PVC-0 de Molecor (veáse Fígura 1). Estas tubeías son utilizadas para el transporte del agua, principalmente en abastecimiento, irrigación y saneamiento. Hasta el momento de la aparición de estas, los procesos de fabricación de canalizaciones de PVC Orientado (PVC-O) presentaban dificultades y en algunos casos imposibilidad para fabricar tuberías de grandes diámetros y alta presión. La mejora tecnológica que presenta el nuevo sistema de fabricación permite una mejora de la calidad de la tubería fabricada. Además, las tuberías TOM©fabricadas por Molecor conservan totalmente inalterada la calidad del agua que circula por su interior. Esto se debe a que su material es químicamente inerte y resistente a la corrosión, por lo que no se producen degradaciones ni migraciones del material hacia el agua que transportan.

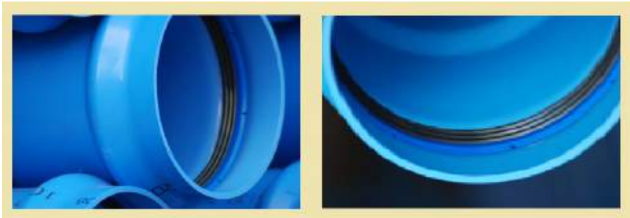


Figura 1: Tuberías TOM© PVC-0 de Molecor.

Molecor (`www.molecor.com`) es una empresa veterana con tecnología al servicio del agua y la cuál mantiene acuerdos con los más reputados centros públicos de investigación y desarrollo en España, como el Centro para el Desarrollo Tecnológico e Industrial y la Empresa Nacional de Innovación. La aparición de esta nueva tecnología que os presentamos está patentada nivel mundial por Molecor.

2 Propiedades

Podemos destacar las siguientes especificaciones de esta nueva generación de tuberías:

- Material: policloruro de vinilo
- El límite inferior de Confianza de la Resistencia Hidrostática prevista (σ_{LPL}) es el valor con la unidad de esfuerzo, el cual representa el 97,5% del límite inferior de confianza de la resistencia hidrostática prevista para un valor de temperatura T y durante un tiempo t.
- Máxima flexibilidad: permite soportar deformaciones de hasta el 100% del diámetro interior. Veáse Figura 2.
- El PVC-O es un material significativamente más fuerte y resistente que el PVC-U y por tanto proporciona mejor comportamiento final. Es casi el *doble de resistente a tensión* y *casi diez veces más resistente al impacto que el PVC-U.*
- El PVC-O se fabricó por primera vez a finales de 1970. Desde entonces se han llevado a cabo numerosos desarrollos que han mejorado la productividad y aumentando por tanto la rentabilidad.
- Esta nueva tecnología, le permite fabricar tubería de diámetros nominales de 500 y 630 mm, convirtiéndose así en el primer fabricante a nivel mundial de estas canalizaciones, ya que hasta ahora la gama disponible en el mercado sólo llegaba a diámetro 400mm. Las ventajas que ofrece este material, como su menor coste, tanto del producto como de su instalación, o su mayor rendimiento de instalación, lo convierten en la mejor opción para la realización de obras de este tipo.

σ_{LPL} es un parámetro/propiedad que se emplea para la fabricación de tuberías, que más o menos viene a decir que si esa tubería lleva agua a 20º, te asegura que a los 50 años de uso, su resistencia hidrostática como mínimo estará al 97,5% del valor marcado inicialmente

3 Las ventajas del PVC TOM©Orientado

Figura 2: Flexibilidad.

Las ventajas que ofrece el material se deben por una parte a su naturaleza química y por otra a la mejora de propiedades que se producen durante su fabricación gracias a la orientación molecular.

El proceso de orientación molecular, además de mejorar de forma importante las propiedades mecánicas del tubo, produce una disminución del espesor de la pared del mismo. De esta forma, las tuberías tienen un menor peso y esto hace que puedan ser manipuladas e instaladas más fácilmente y de forma manual hasta diámetro DN250mm. Para diámetros mayores, aunque es necesario un elemento mecánico para facilitar este proceso, no es necesario disponer de una grúa de gran tonelaje como por ejemplo es necesario utilizar en el caso de la fundición dúctil.

Por otra parte, también hay que destacar, que el tubo de PVC-O es muy resistente al impacto por golpes y a la propagación de grietas, esto hace que se minimicen de forma significativa las roturas durante su manipulación e instalación en obra.

De igual forma, el eficaz diseño de la copa realizado por Molecor, hace que la junta de estanqueidad quede perfectamente instalada y que la conexión entre los tubos se realice de forma más rápida. La conexión de los tubos se realiza por enchufe tipo campana. Esta facilidad de conexión, hace que no sea necesaria la utilización de mano de obra especializada ni maquinaria específica para la instalación, como por ejemplo es el caso del polietileno en el que se necesita una máquina de soldadura y operarios especializados. Influyendo mucho también en ese caso, las condiciones climatológicas, en concreto la humedad.

Figura 3: PVC-Orientado, PVC-Orientado TOM©y PVU.

El PVC es un material químicamente inerte frente a los productos presentes en la naturaleza, de forma que no se produce corrosión durante su larga vida útil, por lo que no es necesaria la utilización de recubrimientos protectores. Así, no hay que preocuparse especialmente por la calidad del suelo donde vayan a ir enterradas las tuberías, ni por la calidad del agua que circula por su interior, por lo que son perfectamente válidas para el transporte de agua tanto de consumo humano como agua residual. De esta forma, se asegura que nunca se van a producir puntos de corrosión que pueden alterar la calidad del agua.

Por otra parte, hay que tener en cuenta que la reducción del espesor de la pared del tubo, hace que aumente de forma considerable la capacidad hidráulica de la conducción que varía entre el 15% y el 40% dependiendo del material y el diámetro que se compare. Por otra parte, también se da el hecho de que las pérdidas de carga producidas son mucho menores y por tanto podemos realizar el transporte a mayor velocidad, con lo que también se aumenta la capacidad de la red.

Una ventaja a destacar, sobre todo al comparar con la fundición dúctil, es el mejor comportamiento que tiene el PVC-O frente al golpe de ariete, que llega a ser hasta 3 veces inferiores, con lo que la seguridad de todos los elementos de la red aumenta de forma considerable en los cierres y aperturas de válvulas.

Figura 4: Acopio y Acoplo de las tuberías

De igual manera, es perfectamente válido para transportar agua de consumo humano, en su gama de tubería azul, como para agua de riego y agua reutilizada en su gama de tubería morado.

Por otra parte la completa estanqueidad de las uniones, debido tanto a la gran calidad de la junta elástica utilizada, como al eficaz diseño de las copas, también contribuye a evitar fugas del agua canalizada.

De esta forma, la vida útil de la tubería se mantiene intacta, pudiendo decirse que son la herramienta perfecta para la gestión de los recursos hídricos disponibles, con lo que se contribuye de forma importante a la sostenibilidad del planeta.

4 Instalación

Podemos ver la instalación de estas tuberías en tan sólo cinco minutos en este vídeo:
`http://www.youtube.com/watch?v=p85ZXqo81tU&feature=c4-overview&list=UUPjpqyZ_56RKVBsc-_hWHVg`.

5 Las tuberías TOM© PVC-0 de Molecor en Ángola

SAEMA ya ha llevado este tipo de tuberías para diferentes instalaciones de tratamiento y abastecimiento de aguas: en las localidades de Fazil, Tchimbambo y Santa Ana (Proyecto ETAPS Benguela-Sea), en la localidad Lombe (Proyecto ETAP Lombe-Sea), en provincia de Cabinda (Proyecto de rehabilitación y ampliación optimizada, ETA I y II).

En estos momentos Saema está llevando a cabo proyectos basados en estas tecnologías: el PROYECTO ETAPS UIGE-SEA para el tratamiento y abastecimiento de las localidades de Masseque, Sole y Casamanda.Kiwenbo-Kimbengui.

6 Un par de conceptos técnicos

- **Resistencia a la tensión:** Es el resultado obtenido cuando a un material se le somete a esfuerzos de tracción para ver cuál es su límite antes de romperse y las deformaciones que sufre en función de la tensión aplicada pero sin llegar a romperse. por ejemplo si curvamos un tramo de tubería de PVC-O y otra de PVC normal, cuando la del normal se rompa, la de PVC-O aún podrá seguir doblándose el doble. Y esto nos beneficia, en que nos podemos ahorrar dinero, es decir, si tenemos que llevar una tubería por una zanja con una cierta inclinación ascendente, si la tubería es muy rígida hay que instalar tramos planos y unirlos con codos a 11º o así para ir absorbiendo la curva porque si la forzáramos a doblarse se rompería, sin embargo, si permite esa curvatura sin romperse ni perder propiedades nos ahorramos ese codo.

- **Resistencia al impacto:** Es la propiedad de las tuberías (y de cualquier material) a absorber los golpes que puedan recibir sin romperse (en nuestro caso, caída de piedras o herramienta, caída de la tubería al suelo, etc.). Depende de muchos factores como la temperatura, la forma del material y por lo tanto el punto dónde se golpee, etc., en este caso vendría a decir que para una misma tubería, por ejemplo de diámetro 90 mm, hecha en PVC, la de PVC-O aguanta valores 10 veces más altos que la convencional. Pero además es que si la comparamos con otros materiales también obtiene mejores datos.

Para este número os planteamos un desafío que pueden encontrar en el libro de Matemagia de Adrián Paenza y un reto ajedrecista. ¡Esperamos que se diviertan!

La balanza

Suponga que usted tiene una balanza con dos platillos y no tiene marcador de este modo usted puede decidir si un objeto pesa más que otro poniendo uno de cada lado y viendo si la balanza se inclina hacia un lado o hacia el otro. Dicho esto, suponga además que yo le doy cuatro pesas. Cada una de ellas tiene, justamente, un peso diferente:

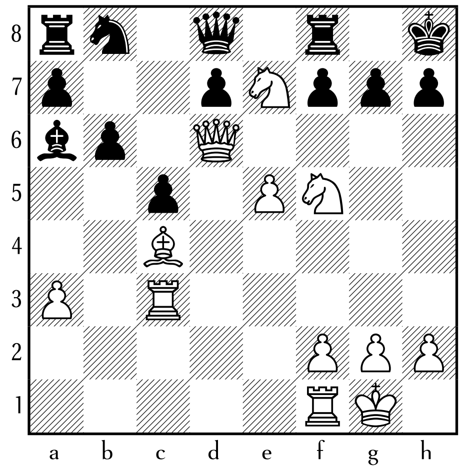
- 1 kg.
- 3 kgs.
- 9 kgs.
- 27 kgs.

Ahora, yo le alcanzo 40 cajas iguales (en apariencia), pero todas con diferente peso, de manera tal que haya una caja que pesa 1 kilo, otra 2, una tercera que pesa 3 kilos... y así siguiendo hasta llegar a una que pesa exactamente 40 kilos. Si no hay ninguna manera de distinguir las cajas entre sí, y usted cuenta con los elementos que yo describí anteriormente (la balanza de dos platillos y las cuatro pesas), ¿cómo hacer para poder decidir el peso de cada caja?

Ajedrez

Te ofrecemos un reto ajedrecístico. En esta famosa partida, que te desvelaremos en el siguiente número, las blancas juegan y ganan. ¿Podrías encontrar la espectacular jugada ganadora?

1 e4 e5 2 d4 e×d4 3 c3 d×c3 4 ♘×c3 ♗b4 5 ♗c4 ♕e7 6 ♘e2 ♘f6 7 O-O O-O 8 ♗g5 ♕e5 9 ♗×f6 ♕×f6 10 ♘d5 ♕d6 11 e5 ♕c5 12 ♖c1 ♕a5 13 a3 ♗×a3 14 b×a3 c6 15 ♘e7 ♔h8 16 ♕d6 ♕d8 17 ♘d4 b6 18 ♖c3 c5 19 ♘df5 ♗a6



Las soluciones en el próximo número.

Soluciones del número anterior

El desafío: la cadena de 23 eslaboles

¿Qué tal te fue con este desafío? Seguro llegaste a una solución. ¿Era la óptima? Pues ahí va una de las respuestas óptimas. El número mínimo de cortes es cuatro. Imaginemos que nuestra cadena la representamos como una lista de 23 números (esto es 1 − 2 − 3 − 4 − 5 − 6 − 7 − 8 − 9 − · · · − 20 − 21 − 22 − 23). Los siguientes cuatros cortes nos permiten tener todos los números posibles del 1 al 23,

- ✂ **Trozo 1:** 1 − 2 − 3
- ✂ **Trozo 2:** 4
- ✂ **Trozo 3:** 5 − 6 − 7 − 8 − 9 − 10
- ✂ **Trozo 4:** 11
- ✂ **Trozo 5:** 12 − 13 − 14 − 15 − 16 − 17 − 18 − 19 − 20 − 21 − 22 − 23

Tenemos dos segmentos de logitud 1, un segmento de longitud tres, un segmento de longitud 6 y otro de longitud 12.

Veamos que con esta partición podemos cumplir con la señora todos los días.

- ☛ **Día 1:** 4
- ☛ **Día 2:** 4 y 11

- **Día 3:** $1-2-3$
- **Día 4:** $1-2-3$ y 4
- **Día 5:** $1-2-3$, 4 y 11
- **Día 6:** $5-6-7-8-9-10$
- **Dia 7:** $5-6-7-8-9-10$ y 4
- **Día 8:** $5-6-7-8-9-10$, 4 y 11
- **Día 9:** $5-6-7-8-9-10$ y $1-2-3$
- **Día 10:** $5-6-7-8-9-10$, $1-2-3$ y 4
- **Día 11:** $5-6-7-8-9-10$, $1-2-3$, 4 y 11
- **Día 12:** $12-13-14-15-16-17-18-19-20-21-22-23$
- ..., el resto los dejamos para que los compruebes

Con esto tendríamos demostrado que la solución propuesta es válida, pero ¿es la óptima? Esto hay que demostrarlo y para ello tenemos que ver que con tres cortes, es decir cuatro trozos no es posible generar todos los números del 1 al 23. Vamos a ver que con cuatro trozos se pueden generar 15 números y no más. Imaginemos que las longitudes de las cuatro cadenas son l_1, l_2, l_3 y l_4. Las cantidades que el estudiante podría pagar a la señora serían las siguientes: l_1, l_2, l_3, l_4, l_1+l_2, l_1+l_3, l_1+l_4, l_2+l_3, l_2+l_4, l_3+l_4, $l_1+l_2+l_3$, $l_1+l_2+l_4$, $l_1+l_3+l_4$, $l_2+l_3+l_4$ y $l_1+l_2+l_3+l_4$. Esto es un total de 15 números y no 23.

Ahora sí queda demostrado que nuestra solución es válida y óptima.

Sudoku

4	2	*6*	5	*7*	1	*3*	9	*8*
8	*5*	*7*	2	*9*	3	*1*	*4*	6
1	3	*9*	*4*	6	*8*	*2*	7	*5*
9	*7*	1	*3*	*8*	*5*	6	*2*	*4*
5	4	*3*	*7*	*2*	*6*	*8*	1	9
6	*8*	2	*1*	*4*	*9*	7	*5*	*3*
7	9	*4*	*6*	3	*2*	*5*	8	*1*
2	*6*	*5*	8	*1*	4	*9*	*3*	7
3	1	*8*	9	*5*	7	*4*	6	*2*

Sudoku resuelto

Indice

Soluções

Vol. I, No. 2