1. Introducción

A construção de uma linha de transporte de eletricidade requer bastante preocupação. É muito importante construi-la de forma a reduzir ao mínimo o risco de danificar pessoas. Tem que se assegurar que a linha está a uma distância suficiente do solo e dos edifícios, e que a construção é estável. Além disso, certos fatores devem ser considerados, por exemplo a longitude do cabo elétrico produzido pelo tempo, a temperatura do ambiente ou as velocidades máximas de ventos que se registam e que possam produzir deterioração ou rotura do cabo.

Imagens de uma instalação elétrica em Angola

E eis onde a Matemática e a Física entram em ação. Com a sua ajuda podemos construir uma linha elétrica que não só é segura, mas também pode ser otimizado o valor do custo da construção. Anos de experiência de engenheiros de todo o mundo mostram claramente que a matemática e a física não se enganam, e existem diferentes modelos que cumprem distintas normativas que garantem segurança. Em Angola existe um regulamento de segurança de construção de linhas elétricas de alta tensão e que pode encontrar no nosso formato online da revista no separador de *Documentação*, e será o que consideramos neste artigo para realizar alguns cálculos mecânicos.

Na prática, existem diferentes softwares que permitem projetar as linhas elétricas e que têm as normativas do local específico onde se quer construir já pré-programadas. Mesmo quando existirem estes programas, o engenheiro que realiza o projeto com eles deve conhecer o funcionamento interno e ser capaz de interpretar os resultados do programa e ver se são consistentes. Ainda, o engenheiro deve ser consciente da normativa do local onde vai construir e ver as compatibilidades ou incompatibilidades da normativa que internamente tem o programa a utilizar.

Neste artigo vamos ver como a longitude do cabo elétrico de uma instalação elétrica varia pela tensão do seu próprio peso, pelo vento e pela temperatura atmosférica.

2. O conceito seta da catenária

No número de janeiro deste ano, estudámos em profundidade a curva da catenária e vimos que é a curva que descreve, por exemplo, um cabo elétrico suspenso em dois postes. Nesta secção vamos apresentar o que é a seta associada a uma catenária e apresentar as suas fórmulas. Este conceito é muito importante a ter em conta na construção de linhas energéticas e a chave para a segurança das pessoas.

A seta de uma catenária é a máxima distância a partir da linha que conecta os pontos de suspensão do cabo para o cabo. Vamos dar forma matemática à seta associada à catenária. A fórmula geral da catenária é a seguinte:

$$y = a\cosh\left(\frac{x - C_1}{a}\right) + C_2. \tag{2.1}$$

Observe que as constantes C_1 e C_2 são constantes de translação no eixo x e no eixo y respetivamente, e por isso podemos considerar o caso quando $C_1 = C_2 = 0$. Assim, a Equação 2.1 reduzimo-lo à seguinte,

$$y = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right), \tag{2.2}$$

que depende do parâmetro a que é igual $\frac{T_0}{g \cdot \lambda}$ em que:

- T_0 é o valor da componente horizontal da tensão (é constante em cada ponto do cabo, as suas unidades são Newtons [N]),
- g é a aceleração devida à gravitação,
- λ é o valor do peso do cabo dividido pela sua longitude.

Substituindo o valor de a, temos que a catenária se escreve como

$$y = \frac{T_0}{g\lambda}\cosh\left(\frac{x \cdot g\lambda}{T_0}\right). \tag{2.5}$$

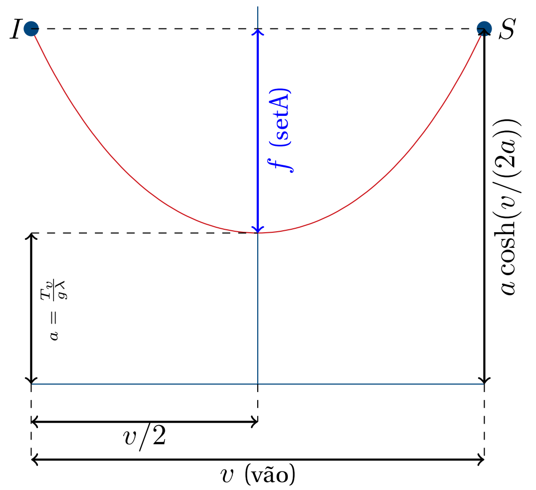

Figura 1: O gráfico da função $y = a\cosh(x/a)$.

Séries de Taylor de cossenos e senos hiperbólicos.

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots, \tag{2.3}$$

$$\operatorname{senh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots. \tag{2.4}$$

Vamos representar a equação da catenária escrita como na Equação (2.5) na Figura 1 a vermelho. Nesta figura podemos marcar em azul a distância seta e chamamos vão à distância entre os postes de fixação da catenária e que representamos com v. Deste modo, e observando o gráfico, é muito fácil dar fórmula à seta que denotaremos por f:

$$f = a\cosh\left(\frac{v}{2a}\right) - a = \frac{T_0}{g\lambda}\Big(\cosh\left(\frac{g\lambda v}{2T_0}\right) - 1\Big). \tag{2.6}$$

Se quisermos trabalhar com calculadora, podemos aproximar a seta por expressões polinómicas usando aproximações de Taylor (ver (2.3)) de ordem quadrático por exemplo, da função cosseno hiperbólica. De este modo f pode-se aproximar pela seguinte expressão:

$$f \approx \frac{v^2}{8a} = \frac{g\lambda v^2}{8T_0}. \tag{2.7}$$

Desta forma, conhecer a seta permite-nos ter distâncias seguras controladas. O problema coloca-se quando introduzimos alterações de temperatura, vento ou o aumento de elasticidade do cabo produzido pelo tempo. Nas próximas secções vamos ocupar-nos das modificações de longitude do cabo pelas anteriores razões, e que devem ser tidas em consideração na altura de realizar uma instalação elétrica segura. Finalmente, nesta secção vamos calcular a longitude de um segmento de catenária medido do ponto mais baixo para o ponto do lado da direita que corresponde à coordenada digamos x e que denotamos por $l(x)$. Esta longitude pode ser calculada usando a fórmula que se demonstrou no artigo da catenária de janeiro deste ano dado pela Equação (3.3) ficando,

$$l(x) = a\,\mathrm{senh}(x/a) = \frac{T_0}{g\cdot\lambda}\,\mathrm{senh}\left(\frac{g\cdot\lambda}{T_0}x\right). \tag{2.8}$$

Outra vez, aproximando pela Série de Taylor (ver (2.4)), temos que

$$l(x) \approx x + \frac{x^3}{6a^2} = x + \frac{(g\cdot\lambda)^2}{6T_0^2}x^3. \tag{2.9}$$

Portanto, a longitude do cabo é

$$L = 2a\,\mathrm{senh}\left(\frac{v}{2a}\right) \approx v + \frac{v^3}{24a^2} = v + \frac{v^3(g\cdot\lambda)^2}{24T_0^2}. \tag{2.10}$$

3. Longitude do cabo pela tensão

Um problema que aparece quando se colocamos cabos elétricos, é que estes se prolongam se lhes for aplicada uma tensão. O parâmetro que corresponde à elongação do cabo é o módulo da elasticidade. Este parâmetro, por exemplo para um cabo tipo LA-56 é igual a 8100 quilogramas de força por um milímetro quadrado, isto é, que um metro de cabo prolonga-se $1/(8100\cdot 54.6)\approx 0.002$ milímetros se aplicarmos um quilo de força (um quilo de força ´é igual aproximadamente a $9.81\,\mathrm{N}$). Na Tabela é apresentado um exemplo dos dados mecânicos do cabo tipo LA-56, que é um tipo de cabo que se usa comummente nas instalações elétricas. A fórmula do prolongamento unitário ε é $\varepsilon = F/(A\cdot E)$, em que E é o módulo elasticidade também chamado o modulo de Young, F a força, e A a secção do cabo.

Dados mecânicos do cabo LA-56

	Valor	Unidades
Diâmetro	9,5	[mm]
Peso	0,189	[kgf]
Secção	54,60	[mm^2]
Coeficiente de dilatação	0,00001910	
Modulo elasticidade	8100,00	[kgf/mm^2]
Carga rotura	1670,00	[kgf]

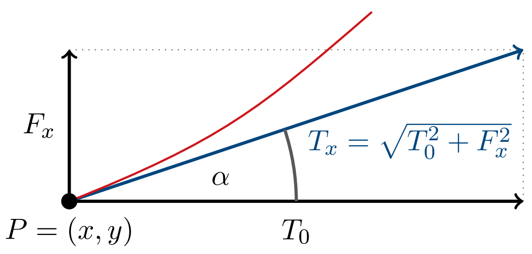

Figura 2: A tensão no ponto x

.

Então, quando colocamos o cabo nos postes, este começa a sentir tensão. Qual é esta tensão? Mostramos uma ilustração desta tensão num ponto (x, y) do cabo na Figura 2. Esta tensão, que chamamos T_x está quantificada como se segue:

$$T_x = \sqrt{T_0^2 + F_x^2}$$

e na prática pode-se aproximar simplesmente à sua componente horizontal T_0.

Desta forma, se supormos que temos um cabo tipo LA-56 que vamos pendurar entre dois postes e a sua longitude antes de pendurar era L e a tensão medida depois de pendurar for T_1, então a sua longitude L_1 depois de pendurar o cabo é

$$L_1 = L(1+\varepsilon) = L\left(1+\frac{T_1}{AE}\right),$$

cujas unidades são kgf/mm^2. Então, se depois, uma força exterior como o vento alterar a tensão de cabo para T_2, a mudança de longitude pode ser expressa como se segue

$$L_2 - L_1 = L\frac{T_2 - T_1}{A \cdot E}. \tag{3.1}$$

4. Longitude do cabo pela temperatura

A temperatura atmosférica é uma outra condição climática que pode modificar a longitude do cabo. Se o cabo na temperatura de 20 °C tiver uma longitude L, na temperatura θ sua longitude denotada por L_θ é

$$L_\theta = L \cdot \alpha \cdot \theta,$$

em que α é coeficiente de dilatação. Então, a diferença de longitude devido à mudança de temperatura entre uma temperatura θ_1 e θ_2 é:

$$L_{\theta_2} - L_{\theta_1} = L \cdot \alpha \cdot (\theta_2 - \theta_1).$$

Se acrescentarmos esta modificação de longitude de temperatura à mudança pela tensão do cabo da Equação (3.1) temos que,

$$L_2 - L_1 = L \cdot \alpha \cdot (\theta_2 - \theta_1) - L\frac{T_2 - T_1}{AE}.$$

Utilizando (2.10) or outro lado obtemos que

$$L_2 - L_1 = \frac{v^3 g^2}{24}\Big(\frac{\lambda_2^2}{T_2^2} - \frac{\lambda_1^2}{T_1^2}\Big). \tag{4.1}$$

Então,

$$L \cdot \alpha \cdot (\theta_2 - \theta_1) - L\frac{T_2 - T_1}{AE} = \frac{v^3 g^2}{24}\Big(\frac{\lambda_2^2}{T_2^2} - \frac{\lambda_1^2}{T_1^2}\Big),$$

e se supomos que $L \approx v$ então temos

$$\alpha(\theta_2 - \theta_1) - \frac{T_2 - T_1}{AE} = \frac{v^2 g^2}{24}\Big(\frac{\lambda_2^2}{T_2^2} - \frac{\lambda_1^2}{T_1^2}\Big). \tag{4.2}$$

Um forte vento pode causar rotura do cabo. Por isso, no cálculo mecânico de uma linha elétrica tem que se considerar este fator e podemos ver isto refletido no "Regulamento de segurança de linhas eléctricas de alta tensão" que impõe as condições que a linha tem que aguentar. Por exemplo, vamos ver os dois seguintes fragmentos de dois artigos:

Artigo 20º Hipóteses de cálculo: "Os condutores nus das linhas devem ser calculados para a mais desfavorável das hipóteses seguintes:"

a) na Zona Litoral Norte:
   - Temperatura de + 25° C e vento máximo habitual;

- Temperatura de +10° C e vento reduzido;

b) na Zona Litoral Sul:
- Temperatura de + 25° C e vento máximo habitual;
- Temperatura de +5° C e vento reduzido;

c) na Zona Interior:
- Temperatura de + 20° C e vento máximo habitual;
- Temperatura de 0° C e vento reduzido;

Artigo 23º Tensões máximas de tracção: "As tensões máximas de tracção admissíveis para os condutores nus e para os tensores das linhas não devem, para a hipótese de cálculo mais desfavorável considerada no artigo 20º, ser superiores ao quociente das suas tensões de rotura por 2,5."

Em outros países, como por exemplo Estados Unidos ou Espanha, existe um outro fator que se deve considerar como o gelo, que durante o inverno se acumula acima do cabo. Mas este tipo de situação não se verifica habitualmente em Angola, e não a estudamos neste artigo.

5. Sobrecarga de vento

Agora vamos estudar como o vento influi na tensão do cabo. O regulamento considera que o vento atua na direção horizontal. Então se F_1 for a força devida ao peso do cabo e F_2 for a força do vento, a força total F'' é

$$F' = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}. \tag{5.1}$$

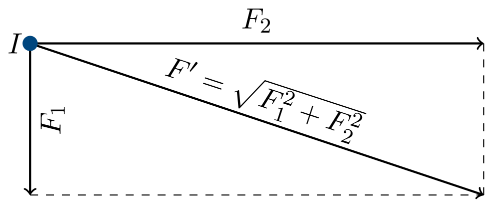

Figura 3: Peso aparente do cabo com sobrecarga de vento.

Mas, como podemos saber qual é a força máxima do vento? Isso está explicitamente indicado no regulamento no seguinte artigo:

Artigo 13º Pressão dinâmica do vento: "Os valores da pressão dinâmica do vento, em função da altura acima do solo a que se encontra o elemento da linha sobre o qual se pretende calcular a acção do vento, devem ser, para os escalões de altura que se consideram, os indicados no quadro seguinte:"

Altura acima do solo [m]	Pressão dinâmica, q [Pa]	
	Vento máximo habitual	Vento reduzido
Até 30 m	750	300
De 30 m a 50 m	900	360
Acima de 50 m	1050	420

Tabela 1: Artigo 13º Pressão dinâmica do vento

Os valores da pressão estão estimados utilizando medidas de velocidade do vento: regulamento. "Os valores da pressão dinâmica do vento, constantes do quadro anterior, foram calculados pela expressão:

$$q = \frac{v^2}{16} 9,81 \tag{5.2}$$

em que v, em metros por segundo, é a velocidade do vento, considerada para os diferentes escalões de altura acima do solo."

Desta forma, a Tabela 1 apresenta a parte relevante do regulamento que indica os valores da pressão dinâmica do vento. Conhecendo o valor da pressão, podemos calcular a força utilizando a seguinte fórmula do **Artigo 10º Ação do vento** do regulamento. "No cálculo das linhas aéreas, o vento deve considerar-se actuando numa direcção horizontal e a força proveniente da sua acção considerar-se-á paralela àquela direcção, determinada pela expressão:"

(5.3) $$F = \alpha c q S, \text{ em que:}$$

F em newtons [N], é a força proveniente da acção do vento;
α é o coeficiente de redução;
c é o coeficiente de forma;
q em pascals [Pa], é a pressão dinâmica do vento;
S em metros quadrados, é a área da superfície batida pelo vento.

O **Artigo 14º Coeficiente de redução** indica o seguinte: "Os valores do coeficiente de redução a usar nos cálculos da acção do vento devem ser os seguintes:

a) 0,6, nos condutores e nos cabos de guarda;
b) 1, nos apoios, nas travessas e nos isoladores."

Además, **Artigo 15º Coeficiente de forma**:

"Os valores dos coeficientes de forma a usar nos cálculos da acção do vento devem ser os seguintes:"

a) para condutores , cabos de guarda e isoladores:

	Diâmetro do condutor [mm]	Coeficiente de forma c
Condutores nus e cabos de guarda	Até 12,5	1,2
	Acima de 12,5 e até 15,8	1,1
	Acima de 15,8	1,0
Cabos isolados em torçada		Até 12,5
Cabos auto-suportados e cabos tipo 8		1,8
Isoladores		1,0

Equipado com estas informações e fórmulas apresentadas, estamos em posição de calcular as setas e tensões máximas que pode ter uma catenária, e portanto ter as medidas de segurança controladas na construção de uma linha energética.

Anexo: Lei de Elasticidade de Hook

Esta lei diz que o prolongamento δ que experimenta um material elástico é proporcional à força F aplicada ao material. Isto é

(5.4) $$F = k \cdot \delta.$$

em que k é uma constante chamada a constante de rigidez com unidades com unidades $[N/m]$.

A forma mais comum de representar esta lei para um material elástico como um cabo ou uma corda é utilizando o módulo de Young. Nesta representação é considerado o prolongamento unitário, isto é

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L},$$

em que L é a longitude do cabo antes do prolongamento. Então (5.4) podemos reescrever como

$$\varepsilon = \frac{F}{kL}.$$

É bastante claro, que se um cabo for duas vezes mais grosso, a força tem que ser dupla. Por isso, é introduzido um parâmetro de um material que é independente da secção transversal do cabo. Por isso, reescrevemos esta equação como

$$\varepsilon = \frac{F/A}{kL/A} = \frac{F}{AE}.$$

em que $E = kL/A$ é o módulo de Young e as suas unidades são então $[N/m^2]$ ou equivalente $[kg/(s^2m)]$. Isto também se pode simplesmente denotar $[Pa]$.