

Introducción

En este artículo de final de año vamos a dar cierre al curso de Octave que os hemos dado a lo largo de este primer volumen de la revista con una serie de problemas que podemos resolver con *Octave*. Espero leáis los problemas y antes de mirar la solución os déis un tiempo para hacerlo por vosotros mismos. Es maravilloso encontrar la solución por uno mismo.

Durante el año hemos dado unas nociones básicas de *Octave* y puedes aumentar los conocimientos usando, por ejemplo, el siguiente tutorial http://en.wikibooks.org/wiki/Octave_Programming_Tutorial.

1. Esperanza de vida de Angola

Según la organización mundial de la salud la definición de esperanza de vida es como sigue: años que un recién nacido puede esperar vivir si los patrones de mortalidad por edades imperantes en el momento de su nacimiento siguieran siendo los mismos a lo largo de toda su vida. Hacer un cálculo de esta cantidad es muy complicado y se tiene en cuenta factores como por ejemplo la medicina, la higiene, las guerras, etc.

Lo que os proponemos es lo siguiente: dado la esperanza de vida de Angola proporcionada por el banco mundial de datos (<http://datos.bancomundial.org/>) que tenemos datos desde 1980 a 2012, os proponemos resolváis el desafío A.



: ¿En qué año tiene previsto el pueblo angolano tener una esperanza de vida de 80 años?

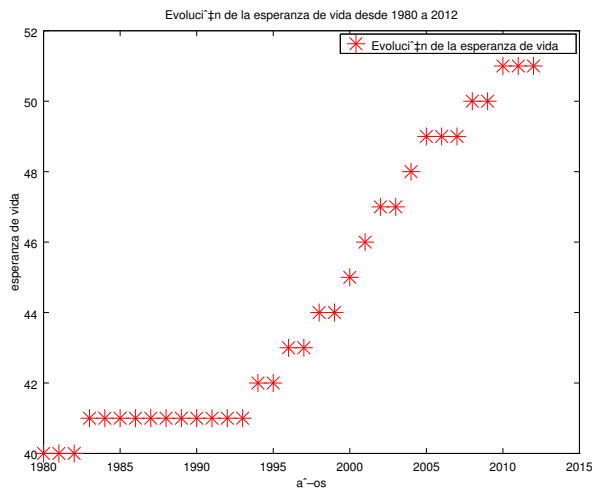
Nuestra Solución

Hemos coleccionado los datos en un archivo *Hopelife.csv*. Los vamos a cargar a Octave y vamos a echarle un vistazo a estos. El código lo podrás visualizar en la sección de códigos de la revista en www.revistasolucoes.com.

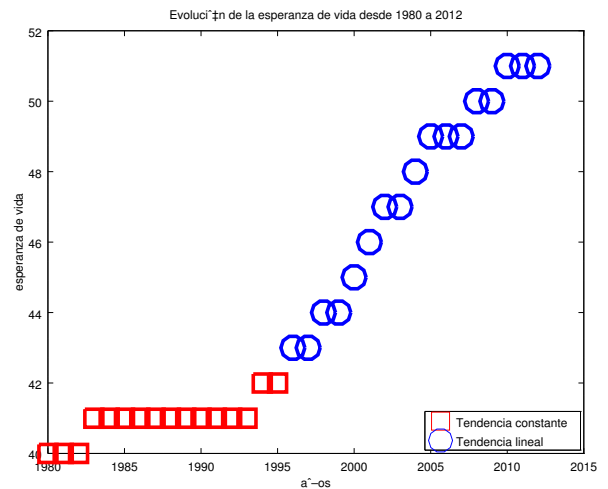
Si observamos la Tabla 1, gráfico (A) tenemos claramente dos tendencias en los datos. Una tendencia constante y una tendencia lineal. Ambas las mostramos en el gráfico:

Y si vamos a la historia de Angola, la tendencia constante corresponde con años de la guerra civil. Esta terminó en 2002 pero vamos a quedarnos con los datos desde el año 1996 ya que parece están en la misma tendencia que de los años posteriores.

La idea de lo que vamos a hacer es lo siguiente: nuestro objetivo es buscar una función $f(n)$ que nos da la esperanza de vida en el año n . Como hemos dicho antes la tendencia que parecen tener los datos (recuerda que nos hemos quedado con los datos azules en la Tabla 1, gráfico (B)) es una tendencia lineal. Existe un concepto en estadística que nos asegura que nuestra intuición está en lo correcto y es el *coeficiente de correlación* o *coeficiente de correlación lineal de Pearson*. Este coeficiente que denotaremos por ρ mide el grado de covariación entre dos distintas variables relacionadas linealmente, denotémoslas x e y . El cálculo del coeficiente de correlación entre dos variables x e y es sencillo y viene dado por la fórmula $\rho = \frac{\sigma_x \sigma_y}{\sigma_{xy}}$ donde σ_x o σ_y son las desviaciones típicas de las variables x e y respectivamente y σ_{xy} la covarianza entre las dos variables. El parámetro ρ cumple que su rango de valores está entre -1 y 1 y lo podemos interpretar como sigue:



(A)



(B)

Cuadro 1: (A): Evolución esperanza de vida desde 1980 a 2012, (B):Clusterización de los datos

- Si $\rho \sim 1$ significa correlación lineal positiva.
- Si $\rho \sim -1$ significa correlación lineal negativa.
- Si $\rho \sim 0$ significa que las variables no tienen correlación lineal.

En *Octave* existe el comando *cor* que calcula la correlación entre dos variables:

```
x=datos(17:end,1);
y=datos(17:end,2);
disp('El coeficiente de correlación')
cor(x,y)
```

Y el resultado que se obtiene es de 0,98473 por tanto nuestra intuición queda apoyada por este concepto matemático y tiene mucho sentido realizar una regresión lineal. Esto es buscar una función $f(n) = \theta_1 + \theta_2 \cdot n$ para la previsión de la esperanza de vida en el año n . Existen varios métodos para calcular las constantes θ_1 y θ_2 del modelo. No vamos a dar muchos detalles de ello, puedes buscarlo en cualquier libro de estadística pero te diremos que un método rápido que se puede usar para bases de datos pequeñas es el método de las ecuaciones normales que nos dan la solución directamente de la siguiente fórmula:

$$(1.1) \quad \theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = inv(X^t \cdot X) \cdot X^t \cdot y$$

$$\text{donde } X = \begin{bmatrix} 1 & \vdots \\ \vdots & x \\ 1 & \vdots \end{bmatrix}.$$

Año	Esperanza de vida
2030	62
2050	73
2063	80

Cuadro 2: Algunas previsiones futuras sobre la esperanza de vida angolana

Si sigues las instrucciones puedes ver que la función resultante y que predice la esperanza de vida en el año n es $f(n) = -1067,5 + 0,55 \cdot n$. Usando esta gráfica podemos augurar que si el crecimiento de Angola va en la dirección que marca el pueblo angolano tendrá una esperanza de vida de 80 años para el año 2063. Damos algunos resultados en la Tabla 1.

2. Efecto Mariposa

¿Habéis escuchado hablar del efecto mariposa? ¿Habéis visto la película *The butterfly effect* que habla de este efecto? Vamos a contarte como nació este concepto y te pondremos como desafío lo programes en Octave para que saques tus propias conclusiones.

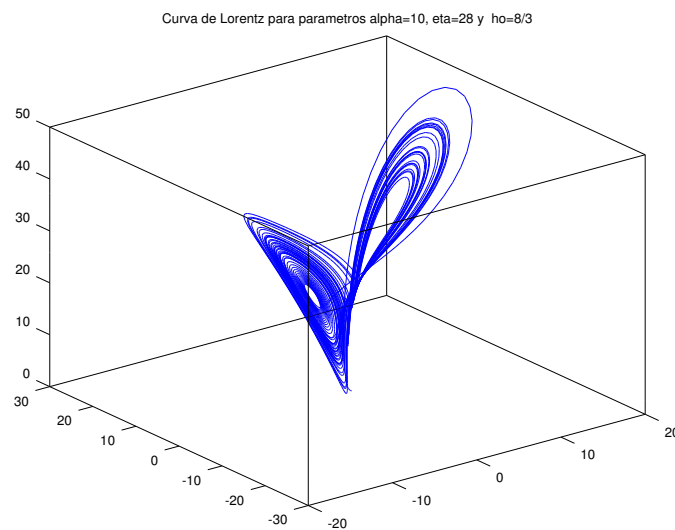


Figura 1: Atractor de Lorentz

Hacia 1960, el meteorólogo Edward Lorenz se dedicaba a estudiar el comportamiento de la atmósfera, tratando de encontrar un modelo matemático, un conjunto de ecuaciones, que permitiera predecir a partir de variables sencillas, mediante simulaciones de ordenador, el comportamiento de grandes masas de aire, en definitiva, que permitiera hacer predicciones climatológicas.

Lorenz realizó distintas aproximaciones hasta que consiguió ajustar el modelo a la influencia de tres variables que expresan como cambian a lo largo del tiempo, la velocidad y la temperatura del aire. El modelo se concretó en

tres ecuaciones matemáticas, bastante simples, conocidas, hoy en día, como modelo de Lorenz y que mostramos a continuación:

$$(2.1) \quad \left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} &= \alpha \cdot (y - x) \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= x \cdot (\beta - z) - y \\ \frac{\partial z}{\partial t} &= x \cdot y - \rho \cdot z \end{aligned} \right\},$$

donde $(x(t), y(t), z(t))$ representa la situación de la corriente en el espacio y α, β y ρ son los parámetros del modelo y presenta condiciones iniciales en tiempo t_0 de (x_0, y_0, z_0) . Puedes experimentar como es la Curva de Lorentz variando los parámetros y las condiciones iniciales. Nosotros te vamos a mostrar el caso donde Lorentz descubrió que pequeñas diferencias en los datos de partida (algo aparentemente tan simple como utilizar 3 ó 6 decimales) llevaban a grandes diferencias en las predicciones del modelo. Los valores de los parámetros son $\alpha = 10$, $\beta = 28$ y $\rho = \frac{8}{3}$ y las condiciones iniciales $(1, 1, 1)$. La curva de Lorentz presentada para estos parámetros puede ser observada en la Figura ??

El nombre de efecto mariposa viene dado por dos razones. Una de ellas porque la forma de la curva de Lorentz parece sugerir una mariposa y la otra razón es que cuando Lorenz intentó explicar esta idea mediante un ejemplo hipotético. Sugirió que imaginásemos a un meteorólogo que hubiera conseguido hacer una predicción muy exacta del comportamiento de la atmósfera, mediante cálculos muy precisos y a partir de datos muy exactos. Podría encontrarse una predicción totalmente errónea por no haber tenido en cuenta el aleteo de una mariposa en el otro lado del planeta. Ese simple aleteo podría introducir perturbaciones en el sistema que llevaran a la predicción de una tormenta.

Veamos las proyecciones en diferentes planos en la Figura (??)

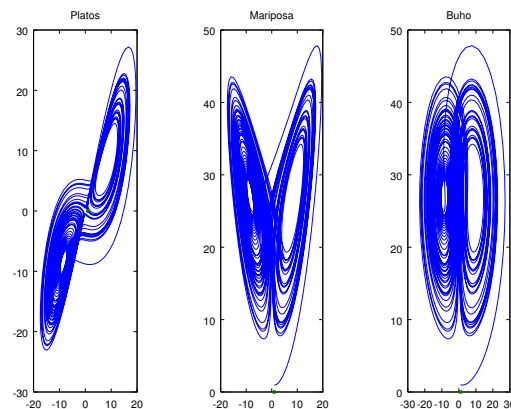


Figura 2: Proyecciones sobre los planos

hay muchas teorías relacionadas a la Teoría del Caos y al comportamiento fractal. Sugerimos te informes de ello porque las teorías no tienen desperdicio.

3. Una matriz curiosa

En esta sección te proponemos que programes la siguiente matriz:



: Dada la secuencia de n enteros $0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots, n - 1$ construye una matriz que cumple que en cada posición es el mínimo de la secuencia dentro de la fila y columna en la que se encuentra según vamos construyéndola.

Por ejemplo para $n = 8$ la matriz resultante sería la siguiente:

0	1	2	3	4	5	6	7
1	0	3	2	5	4	7	6
2	3	0	1	6	7	4	5
3	2	1	0	7	6	5	4
4	5	6	7	0	1	2	3
5	4	7	6	1	0	3	2
6	7	4	5	2	3	0	1
7	6	5	4	3	2	1	0

. Te animamos a que

programes construir esta matriz para cualquier tamaño n y ver si observas algo especial en ella y podemos redefinirla de otro modo. Te mostramos en la Figura ?? para $n = 64$ la estructura de la matriz por colores. ¿Qué observas? ¿Parece un comportamiento que se repite? ¿Un comportamiento fractal?

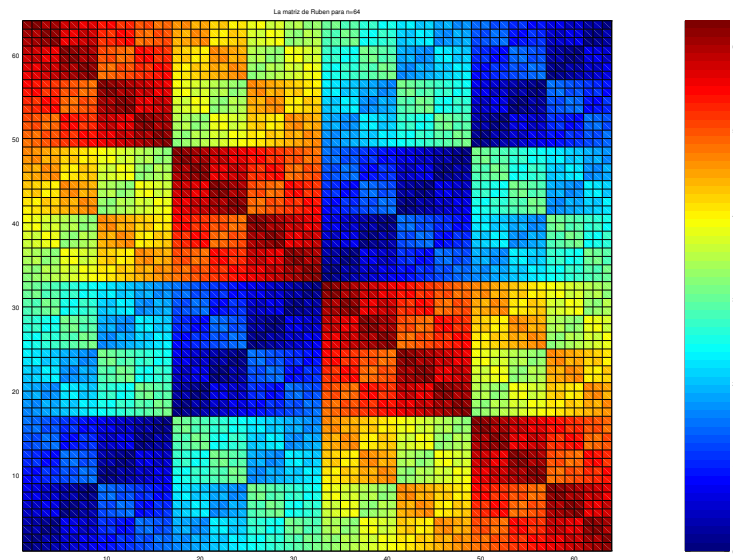
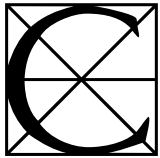


Figura 3: Matriz curiosa para $n = 64$.

3.1. Matriz suma binaria

En esta subsección vamos a animarte a que realices un programa en Octave que programe la siguiente matriz.



: Construir una matriz cuadrada de tamaño n cuyas entradas es la suma de la fila i -ésima en la que se encuentra en binario más la columna j -ésima en la que se encuentra pasado a decimal. Esto es, por ejemplo, ¿qué entrada va a tener la posición (5,7)? Para ello escribimos 5 y 7 en binario que es respectivamente 111 y realizamos la suma en binario y nos da 010 que corresponde con 2.

Te animamos a que la programes y refutes con nuestros progrmas que colgaremos en la sección de códigos de la web de nuestra revista. Mostramos a contuinuación la estructura de algunas de estas matrices creadas en la Figura ??.

¿Te suena a algo? parece coincide con la matriz curiosa anterior dada no pero vista desde otro punto de vista. matemáticamente esta matriz puede ser estudiada con profundidad y observas preciosas propiedades. Dejamps al lector hacerse adicto a ella.

4. Haciendo arte con Octave

¿Te proponemos que intentes dibujar algo con Octave?