

1. Introdução

No anterior artigo desta série vimos como representar uma função periódica como soma de harmônicos, ideia que foi desenvolvida por Fourier quando quis explicar como se propagava o calor. No entanto, essa técnica resultou ser facilmente extrapolável a problemas de outros ramos da física e da engenharia, como a teoria de circuitos elétricos.

Ao longo deste artigo, vamos aplicar a estratégia que desenvolveu Fourier a um clássico problema de eletromagnetismo, o circuito RLC (resistor-indutor-capacitor circuito). De facto, após uma primeira aproximação utilizando senos e cossenos, voltaremos a olhar para o problema sob o prisma da análise complexa, vendo como o problema se simplifica ainda mais.

Se quiserem ampliar, recomendamos que consultem [2], uma vez que é o livro que vamos seguir neste artigo.

2. O circuito RLC

Vamos começar a colocar detalhadamente o problema que queremos resolver. Temos o circuito mostrado na Figura 1, formado por uma resistência que denotamos por R , uma bobina com indução L e um condensador com capacidade C , com todos os elementos dispostos em série.

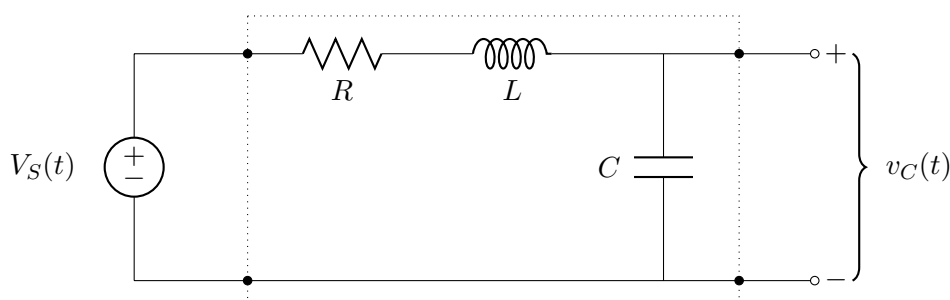


Figura 1: Circuito RLC

O circuito é excitado com um sinal V_S que supomos conhecido, e o objetivo é determinar o potencial entre as placas do condensador, ao qual chamaremos v_C .

Em geral, a resolução de um circuito elétrico está associada à resolução de uma equação diferencial que temos que deduzir aplicando alguma lei física. Neste caso utilizamos as **relações constitutivas** de cada elemento, que são as equações que descrevem como se comportam as resistências, as autoinduições ou os condensadores. Neste caso, se $i(t)$ representa a intensidade de corrente no nosso circuito, deduzirá que:

- A queda de tensão ao longo da resistência é $v_R(t) = i(t) \cdot R$ pela lei de Ohm.
- A queda de tensão ao longo da indução é $v_L(t) = L \cdot \frac{di}{dt}(t)$.
- A queda de tensão ao longo do condensador vem determinada por $i(t) = C \cdot \frac{dv_C}{dt}(t)$.

Ainda, a lei de Kirchhoff diz que a soma de todas essas diferenças de tensão deve ser precisamente igual à excitação, isto é:

$$(2.1) \quad V_S(t) = v_R(t) + v_L(t) + v_C(t) = i(t) \cdot R + L \cdot \frac{di}{dt}(t) + v_C(t).$$

Para simplificar a equação temos que deixar todas as incógnitas em função de $v_C(t)$, para isso, notemos que:

$$(2.2) \quad \frac{di(t)}{dt} = C \cdot \frac{d^2 v_C}{dt^2}(t),$$

de modo que podemos substituir (2.2) em (2.1) para encontrar

$$(2.3) \quad L \cdot C \cdot v_C''(t) + R \cdot C \cdot v_C'(t) + v_C(t) = V_S(t)$$

que é a equação que vamos tentar resolver. Notemos que já aparecem os produtos $L \cdot C$ e $R \cdot C$, extremamente comuns neste tipo de problemas, razão pela qual é útil habitualmente vê-los como coeficientes que caracterizam o circuito.

3. Resolução do problema

Tal e como lhe aconteceu a Fourier quando enfrentou o problema da propagação do calor, nós apenas sabemos resolver a equação (2.3) quando a excitação V_S é uma função simples, como um harmónico. Nesse caso particular, podemos encontrar uma solução que chamaremos função própria ou **modo normal**. Portanto, quando tivermos uma superposição de harmónicos, a solução será uma superposição de modos normais.

Na altura de aplicar o processo anterior, podemos estar bastante tempo com contas e perder a perspetiva do que estamos a fazer, de modo que é conveniente dividir a resolução em três passos, que essencialmente são:

[R1] Dividir o problema complicado por vários problemas simples.

[R2] Resolver por separado cada um dos problemas simples.

[R3] Juntar as soluções para obter a solução do problema complicado.

Ora bem, antes de começar a utilizar séries de Fourier, notemos que (2.3) é uma equação diferencial linear de segunda ordem. Como não é homogénea, sabemos que a solução geral é da forma:

$$v_C(t) = y_h(t) + y_p(t),$$

em que y_h é a solução geral da correspondente equação homogénea:

$$(3.1) \quad L \cdot C \cdot v_C''(t) + R \cdot C \cdot v_C'(t) + v_C(t) = 0,$$

entretanto y_p é uma solução particular da não homogénea (2.3).

3.1. Solução de la homogénea

Como a equação (3.1) é de coeficientes constantes, as soluções são combinações lineares de funções da forma:

$$y_h(t) = e^{r \cdot t},$$

em que r é uma constante que pode ser complexa¹. Ao substituir y_h em (3.1) deduzimos que r deve ser solução da equação característica

$$(3.2) \quad L \cdot C \cdot r^2 + R \cdot C \cdot r + 1 = 0$$

¹Para uma análise detalhada das equações diferenciais de coeficientes constantes, consultar [1, p. 226]

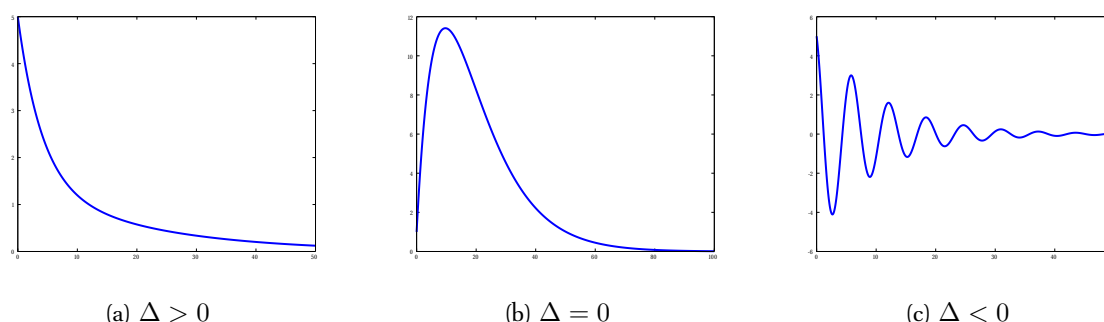


Figura 2: Tipo de soluções da equação homogénea (y_h) a depender do signo de Δ .

de modo que o problema passa por analisar esta equação de segundo grau. Despejando r de (3.2) obtemos:

$$r_{\pm} = -\frac{R}{2 \cdot L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2 \cdot L}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}} \equiv \alpha \pm \sqrt{\Delta},$$

a depender do signo de

$$\Delta = \left(\frac{R}{2 \cdot L}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C},$$

podemos obter valores de r reais ou complexos, e em cada caso vamos obter uma solução ligeiramente diferente.

- Se $\Delta > 0$, então temos dois valores reais $r_{\pm} = \alpha \pm \beta$, de modo que podemos pôr:

$$y_h(t) = C_+ e^{r_+ t} + C_- e^{r_- t} = e^{\alpha t} (C_1 \sinh(\beta t) + C_2 \cosh(\beta t)).$$

Dizemos que neste caso temos **amortecimento supercrítico**, uma vez que a solução tende para zero sem oscilar conforme o tempo aumenta.

- Se $\Delta = 0$, então temos uma solução real dupla r , portanto:

$$y_h(t) = (C_1 t + C_2) \cdot e^{rt}.$$

Neste caso temos **amortecimento crítico**, situação em que a solução converge a zero mais rapidamente.

- Se $\Delta < 0$, então temos dois valores complexos conjugados $r_{\pm} = \alpha \pm i\beta$, e podemos escrever:

$$y_h(t) = C_+ \cdot e^{r_+ t} + C_- \cdot e^{r_- t} = e^{\alpha t} \cdot (C_1 \cdot \sin(\beta t) + C_2 \cdot \cos(\beta t)).$$

Este caso é conhecido como **amortecimento subcrítico**, uma vez que o amortecimento não é suficiente para evitar que a solução fique oscilando.

Para terminar de concretizar a solução, apenas é necessário dar determinados valores às constantes. Estes valores devem ser escolhidos de forma a se cumprirem as condições iniciais que impõe o circuito. Para isso, devem ter-se em conta as exigências físicas dos elementos que temos, como a indução e o condensador. Em qualquer caso, não nos interessa fazer essa análise agora.

3.2. Solução da não homogénea

É o momento de resolver a equação (2.3), de modo que procuramos uma função que satisfaça a equação (2.3), portanto tem que ser:

$$L \cdot C \cdot y_p''(t) + R \cdot C \cdot y_p'(t) + y_p(t) = V_S(t).$$

Como antecipávamos, não podemos tentar resolver a equação se não nos disserem mais nada sobre V_S , portanto vamos ter que recorrer às séries de Fourier, seguindo os três passos que estabelecemos anteriormente.

[1] *Dividir o problema complicado por vários problemas simples.*

Em primeiro lugar, o sinal de excitação **real** vai ser sempre finita, de modo que apenas me interessa $V_S(t)$ num determinado intervalo de tempo. Ora bem, a função matemática que utilizamos para representar o sinal pode-se *estender* a uma função periódica (a ideia para o conseguir é ir repetindo a gráfica para os lados).

Com este esclarecimento estamos em condições de aplicar o teorema de Fourier. Se V_S tem período $2p$ podemos escrevê-lo como soma de harmónicos:

$$V_S(t) = a_0 + \sum_{k=0}^{\infty} [a_k \cdot \cos(\omega_k t) + b_k \cdot \sin(\omega_k t)] \quad \text{donde} \quad \omega_k = \frac{k \cdot \pi}{p}.$$

[2] *Resolver por separado cada um dos problemas simples.*

Colocamos por separado o caso em que V_S é uma constante, ou uma soma de cosenos e senos.

♣ Vamos encontrar y_0 , solução de:

$$L \cdot C y_0''(t) + R \cdot C y_0'(t) + y_0(t) = a_0.$$

Neste caso, é fácil ver que

$$y_0(t) = a_0$$

cumpra os requisitos.

♣ Agora vamos encontrar y_k , solução de:

$$L \cdot C y_k''(t) + R \cdot C y_k'(t) + y_k(t) = a_k \cdot \cos(\omega_k t) + b_k \cdot \sin(\omega_k t).$$

Nestes casos, a literatura sugere experimentar uma solução da forma:

$$y_k(t) = \alpha_k \cdot \cos(\omega_k t) + \beta_k \cdot \sin(\omega_k t),$$

em que α_k y β_k são coeficientes por determinar. Definimos agora:

$$A_k = 1 - L \cdot C \omega_k^2, \quad \text{y} \quad B_k = R \cdot C \omega_k.$$

Estes coeficientes são úteis porque se derivamos y_k e substituimos na equação diferencial, obtemos:

$$[A_k \cdot \alpha_k + B_k \cdot \beta_k] \cos(\omega_k t) + [-B_k \cdot \alpha_k + A_k \cdot \beta_k] \sin(\omega_k t) = a_k \cdot \cos(\omega_k t) + b_k \cdot \sin(\omega_k t),$$

de modo que a função proposta será solução precisamente quando os coeficientes cumprirem o seguinte sistema de equações que podemos escrever e resolver matricialmente

$$\begin{pmatrix} A_k & B_k \\ -B_k & A_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \end{pmatrix} = \frac{1}{A_k^2 + B_k^2} \begin{pmatrix} a_k \cdot A_k - b_k \cdot B_k \\ a_k \cdot B_k + b_k \cdot A_k \end{pmatrix}.$$

Portanto, a solução fica:

$$(3.3) \quad y_k(t) = \frac{a_k \cdot A_k - b_k \cdot B_k}{A_k^2 + B_k^2} \cos(\omega_k t) + \frac{a_k \cdot B_k + b_k \cdot A_k}{A_k^2 + B_k^2} \sin(\omega_k t).$$

Cada uma destas soluções recebe o nome de **modo normal de ordem k**.

[3] Juntar as soluções para obter a solução do problema complicado.

Basta considerar

$$y_p(t) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k(t),$$

que por construção, é a solução particular que procurávamos.

3.3. Interpretação das soluções

Como já foi mencionado antes, a solução de (2.3) é soma de duas contribuições:

$$v_C(t) = y_h(t) + y_p(t),$$

que podemos analisar por separado:

- $y_h(t)$ conhece-se como **resposta natural ou transitória** (agora veremos porquê). É a contribuição inerente ao próprio circuito e aos elementos que o compõem, uma vez que não depende em absoluto de V_S .
- $y_p(t)$ conhece-se como **resposta forçada**. É a resposta que provocamos no circuito por causa da excitação introduzida.

De um ponto de vista prático, podemos pensar que temos um *input* V_S ao qual queremos aplicar uma transformação para obter y_p . No entanto, o simples facto de utilizar o circuito faz com que o *output* v_C tenha uma contribuição extra y_h . Ora bem, resulta que y_h se torna desprezível à medida que passa o tempo, mais explicitamente:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_h(t) = 0,$$

como se pode comprovar fazendo os correspondentes limites ou vendo os exemplos da Figura 2. Em consequência

$$(3.4) \quad v_C(t) \approx y_p(t) \quad \text{si } t \text{ é suficientemente grande.}$$

Como temos que esperar até alcançar uma solução que se estabilize no tempo, dizemos que estamos perante um **fenómeno transitório**. A Figura 3 ilustra esta situação, em que o sinal triangular à saída vê-se alterado nos primeiros instantes.

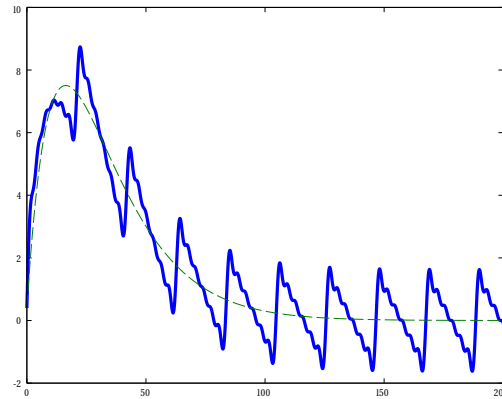


Figura 3: Fenómeno transitório

3.4. Solução final

Depois de todo o trabalho, já podemos dar uma fórmula fechada para a solução de (2.3).

$$(3.5) \quad v_C(t) = y_h(t) + \sum_{k=0}^{\infty} y_k(t) = y_h(t) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k \cdot A_k - b_k \cdot B_k}{A_k^2 + B_k^2} \cos(\omega_k t) + \frac{a_k \cdot B_k + b_k \cdot A_k}{A_k^2 + B_k^2} \sin(\omega_k t),$$

em que $y_h(t)$ é uma das três opções descritas na secção 3.1.

Notemos que pusemos a mesma fórmula para o caso $k = 0$, dado que nesse caso a excitação é constante, isso equivale a tomar certo $\omega_0 = 0$ e recupera-se precisamente $y_0 = a_0$.

Já precisámos que $y_h(t)$ se torna desprezível à medida que passa o tempo, portanto também vamos deixar escrita a solução *estável no tempo*.

$$(3.6) \quad v_C(t) \approx \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k \cdot A_k - b_k \cdot B_k}{A_k^2 + B_k^2} \cos(\omega_k t) + \frac{a_k \cdot B_k + b_k \cdot A_k}{A_k^2 + B_k^2} \sin(\omega_k t).$$

4. Enfoque complexo

No anterior artigo descobrimos a relação entre exponenciais complexas e harmónicos. Agora vamos explorar como levar a cabo a resolução do circuito tirando proveito desta ideia, chegando ao extremo de não ter que resolver nenhuma equação diferencial. Ora bem, este método apenas nos permite obter uma solução particular e não tem em consideração as condições iniciais.

Antes de começar, é necessário fazer uma precisão. Quando se trabalha com circuitos elétricos, é comum representar a unidade imaginária com a letra j para evitar uma possível confusão com a intensidade $i(t)$. Desta forma, escreveremos um número complexo arbitrário como $a + jb \in \mathbb{C}$.

O que é que acontece se, por um momento, imaginamos que temos um sinal complexo da forma $e^{i\omega t}$? Evidentemente, este não será nunca o caso dado que os sinais são reais, mas já sabemos que um sinal real se pode pôr como soma de exponenciais complexas, portanto a nossa pergunta faz sentido. Sob esta premissa, nasce a ideia de fasor, que analisamos a seguir.

4.1. Fasores

Como já vimos, é muito comum trabalhar com harmónicos na altura de analisar circuitos eléctricos. Ora bem, uma tensão da forma $v(t) = V \cos(\omega t + \phi)$ pode relacionar-se com exponenciais complexas através de

$$v(t) = \frac{V \cdot e^{j(\omega t + \phi)} + V \cdot e^{-j(\omega t + \phi)}}{2}.$$

Mas por enquanto vamos utilizar uma outra relação completamente equivalente que servirá melhor para o nosso propósito:

$$v(t) = \operatorname{Re} [V \cdot e^{j(\omega t + \phi)}] = \operatorname{Re} [V \cdot e^{j\phi} e^{j\omega t}] = \operatorname{Re} [\mathbf{V} \cdot e^{j\omega t}],$$

em que $\mathbf{V} = V \cdot e^{j\phi}$ recebe o nome de **fasor**, e é uma quantidade complexa que representa o sinal. Como vemos, o fasor apenas nos diz a amplitude e a fase de um harmónico. A dependência temporária mantém-se separada mediante o termo $e^{j\omega t}$.

Para a intensidade que circula pelo circuito podemos utilizar o mesmo critério² e representá-la por meio do fasor \mathbf{I} , sabendo que podemos recuperar o valor real como $i(t) = \operatorname{Re} [\mathbf{I} \cdot e^{j\omega t}]$.

Que vantagens apresenta isto? Vamos ver como expressar as relações constitutivas de cada elemento neste contexto.

- Quando há uma resistência, tem-se uma queda de tensão v_R dada por:

$$v_R(t) = i(t) \cdot R = \operatorname{Re} [\mathbf{I} \cdot e^{j\omega t}] \cdot R = \operatorname{Re} [R \cdot \mathbf{I} \cdot e^{j\omega t}],$$

de modo que à tensão v_R lhe podemos associar um fasor relacionado com o da intensidade por meio de

$$(4.1) \quad \mathbf{V}_R = R \cdot \mathbf{I}.$$

- Quando há uma indução no circuito, a queda de tensão que apresenta v_L vem dada por:

$$v_L(t) = L \cdot \frac{di}{dt}(t) = L \cdot \operatorname{Re} \left[\frac{d(\mathbf{I} \cdot e^{j\omega t})}{dt} \right] = L \cdot \operatorname{Re} [j \cdot \omega \cdot \mathbf{I} \cdot e^{j\omega t}] = \operatorname{Re} [j \cdot \omega L \cdot \mathbf{I} \cdot e^{j\omega t}],$$

de modo que à tensão v_L lhe podemos associar um fasor relacionado com o da intensidade por meio de

$$(4.2) \quad \mathbf{V}_L = j \cdot \omega \cdot L \cdot \mathbf{I}.$$

- Quando há um condensador no circuito, a queda de tensão que apresenta v_C vem dada por:

$$v_C(t) = \frac{q(t)}{C} \implies \frac{dv}{dt}(t) = \frac{i(t)}{C} \implies \operatorname{Re} [j \cdot \omega \cdot \mathbf{V}_C \cdot e^{j\omega t}] = \operatorname{Re} \left[\frac{\mathbf{I} \cdot e^{j\omega t}}{C} \right],$$

de forma que à tensão v_C lhe podemos associar um fasor relacionado com o da intensidade por meio de

$$(4.3) \quad \mathbf{V}_C = \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} \mathbf{I}.$$

²Se a tensão é um harmónico, também o é a intensidade, consequência das relações constitutivas de cada elemento (ver [3]).

4.2. Impedância

Agora que temos os fasores como nova ferramenta, podemos utilizá-la para expressar de novo a lei de Kirchoff:

$$(4.4) \quad \mathbf{V}_R + \mathbf{V}_L + \mathbf{V}_C = \mathbf{V}_S,$$

e substituindo as relações (4.1)–(4.3) em (4.4) encontramos

$$\left(R + j \cdot \omega \cdot L + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} \right) \mathbf{I} = \mathbf{V}_S.$$

O que nos sugere definir o número complexo

$$(4.5) \quad \mathbf{Z} = \frac{\mathbf{V}_S}{\mathbf{I}} = R + j \cdot \omega \cdot L + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C},$$

conhecido como **impedância**. Em geral, define-se a impedância \mathbf{Z} de um circuito ou um elemento como o número (geralmente complexo) que satisfaz:

$$(4.6) \quad \mathbf{V} = \mathbf{I} \cdot \mathbf{Z}.$$

Desta forma, podemos entender a impedância como uma generalização do conceito de resistência, mas englobando também condensadores e indutores. Portanto, podemos ver também (4.6) como uma extensão da lei de Ohm.

Aqui é onde estão a começar a aparecer as diferenças essenciais. Ao passar-nos para o campo complexo, estamos a enfrentar um problema em que todos os elementos se comportam essencialmente como resistências, o que faz com que a sua resolução seja trivial. Ainda, o potencial deste método radica na sua generalidade, uma vez que podemos repeti-lo **para qualquer circuito**.

4.3. Resolução

Recordemos que o nosso objetivo era encontrar a tensão entre as placas do condensador, para isso substituímos (4.5) em (4.3), obtendo:

$$(4.7) \quad \mathbf{V}_C = \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} \frac{\mathbf{V}_S}{\mathbf{Z}} = \frac{\frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}}{R + j \cdot \omega \cdot L + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}} \mathbf{V}_S = \frac{1}{(1 - \omega^2 \cdot L \cdot C) + j(\omega \cdot R \cdot C)} \mathbf{V}_S.$$

Donde deduziríamos $v_C(t) = \text{Re} [\mathbf{V}_C \cdot e^{j\omega t}]$. Como isto é válido apenas se a tensão de excitação é uma exponencial complexa, em caso real necessitamos aplicar de novo a nossa estratégia.

[I] *Dividir o problema complicado por vários problemas simples.*

Para uma excitação genérica, encontramos a sua série de Fourier complexa:

$$V_S(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{j\omega_k t},$$

e já temos a excitação como soma de exponenciais complexas. Cada uma delas pode ser representada mediante o fasor c_k .

[2] *Resolver por separado cada um dos problemas simples.*

Para cada contribuição, tomamos o seu fasor e com (4.7) obtemos o fasor da solução, donde:

$$\tilde{y}_k(t) = \operatorname{Re} \left[\frac{1}{(1 - \omega_k^2 \cdot L \cdot C) + j(\omega_k R \cdot C)} c_k \cdot e^{j\omega_k t} \right].$$

[3] *Juntar as soluções para obter a solução do problema complicado.*

Simplesmente é suficiente fazer

$$v_C(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{y}_k(t) = \operatorname{Re} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1 - \omega_k^2 \cdot L \cdot C) + j(\omega_k \cdot R \cdot C)} \cdot c_k \cdot e^{j\omega_k t} \right].$$

Finalmente, os termos com índices k e $-k$ são conjugados³, portanto a soma é um número real e é suficiente pôr

$$(4.8) \quad v_C(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1 - \omega_k^2 \cdot L \cdot C) + j(\omega_k \cdot R \cdot C)} \cdot c_k \cdot e^{j\omega_k t}.$$

4.4. Solução final

O que nos permitiu resolver o problema com rapidez foi trabalhar no **domínio fasorial** ou **domínio da frequência**. Após ter feito isso, é trivial encontrar (4.7), e a partir daí construir a solução (4.8), que ganha em simplicidade dado que nos desprendemos de ter que considerar partes reais. Simplesmente é suficiente multiplicar cada exponencial por uma impedância e somá-las.

Como dizíamos, este método apenas nos proporciona uma solução particular, para a qual podemos dar a seguinte fórmula fechada:

$$(4.9) \quad v_C(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1 - \omega_k^2 \cdot L \cdot C) + j(\omega_k \cdot R \cdot C)} \cdot c_k \cdot e^{j\omega_k t}.$$

Este pode ser um bom momento para comprovar que as soluções (3.6) e (4.9), obtidas com dois métodos diferentes, são iguais. Para isso, vejamos que $\tilde{y}_k + \tilde{y}_{-k} = y_k$ sendo y_k o que definimos em (3.3) como modo normal.

$$\begin{aligned} \tilde{y}_k(t) + \tilde{y}_{-k}(t) &= 2\tilde{y}_k(t) = 2 \operatorname{Re} \left[\frac{1}{A_k + jB_k} \cdot \left(\frac{a_k - jb_k}{2} \right) \cdot e^{j\omega_k t} \right] = \operatorname{Re} \left[\frac{A_k - jB_k}{A_k^2 + B_k^2} \cdot (a_k - jb_k) \cdot e^{j\omega_k t} \right] \\ &= \frac{1}{A_k^2 + B_k^2} \cdot \operatorname{Re} \left[((A_k \cdot a_k - B_k \cdot b_k) - j(A_k \cdot b_k + B_k \cdot a_k)) \cdot e^{j\omega_k t} \right] \\ &= \frac{1}{A_k^2 + B_k^2} \cdot [(A_k \cdot a_k - B_k \cdot b_k) \cos(\omega_k t) + (A_k \cdot b_k + B_k \cdot a_k) \sin(\omega_k t)] \\ &= y_k(t), \end{aligned}$$

³Com efeito, é suficiente recordar que $c_{-k} = \overline{c_k}$, $\omega_{-k} = -\omega_k$ e que $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$

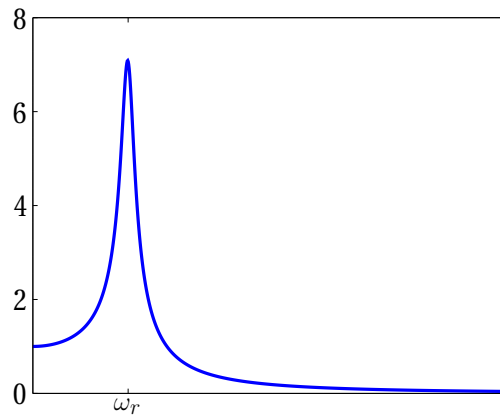


Figura 4: Fenómeno de ressonância.

donde se deduz imediatamente que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{y}_k(t) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k(t),$$

e que, portanto, as soluções coincidem.

5. Ressonância

Para analisar o circuito RLC tivemos que recorrer, por dois caminhos diferentes, às séries de Fourier. Em ambos os casos, a consequência é que a solução se expressa como uma soma infinita de pequenas contribuições, cada uma associada a uma frequência ω_k diferente.

Existe alguma frequência que contribua mais do que as outras? Para responder a esta pergunta temos que analisar a **resposta frequencial**. Da equação (4.7) deduz-se que cada frequência vê multiplicada a sua amplitude pelo termo

$$(5.1) \quad H(\omega) = \frac{1}{(1 - \omega^2 \cdot L \cdot C) + j(\omega \cdot R \cdot C)}.$$

A função $H(\omega)$ recebe o nome de **função de transferência** e indica quanto aumenta cada exponencial após passar pelo circuito. De facto, como $H(\omega)$ é um número complexo, a informação relativa ao tamanho está contida no módulo:

$$(5.2) \quad |H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2 \cdot L \cdot C)^2 + (\omega \cdot R \cdot C)^2}}.$$

Na Figura 4 podemos observar a representação gráfica de (5.2). Como vemos, há uma banda de frequências para as quais $H(\omega)$ é especialmente grande, o que produz o fenómeno conhecido como **ressonância**. Para caracterizar este fenómeno, define-se a **frequência de ressonância** como

$$(5.3) \quad \omega_r = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}.$$

Resulta que quando $\omega = \omega_r$ a impedância é um número real e o seu módulo alcança o seu valor mínimo (como se pode comprovar em (4.5)), de modo que a intensidade que circula pelo circuito é máxima (consequência imediata de (4.6)). Ainda, na prática o coeficiente $R \cdot C$ é muito pequeno, de modo que (5.2) alcança o seu valor máximo para uma frequência muito próxima a ω_r .

Por esta e outras razões, a frequência de ressonância é um parâmetro essencial na altura de caracterizar um circuito. A seguir vamos ver uma das suas aplicações mais imediatas.

5.1. Filtros passabanda

Quando se trabalha em telecomunicações, é comum encontrar-nos com sinais que apresentam um nível de **ruído** que nos impede receber o sinal com clareza. Perante esta situação, seria ideal ter alguma forma de eliminar o ruído, fazendo passar o sinal por um **filtro**.

Para ilustrar esta situação, devemos observar a Figura 5, em que representamos o sinal com que começamos e o sinal a que queremos chegar.

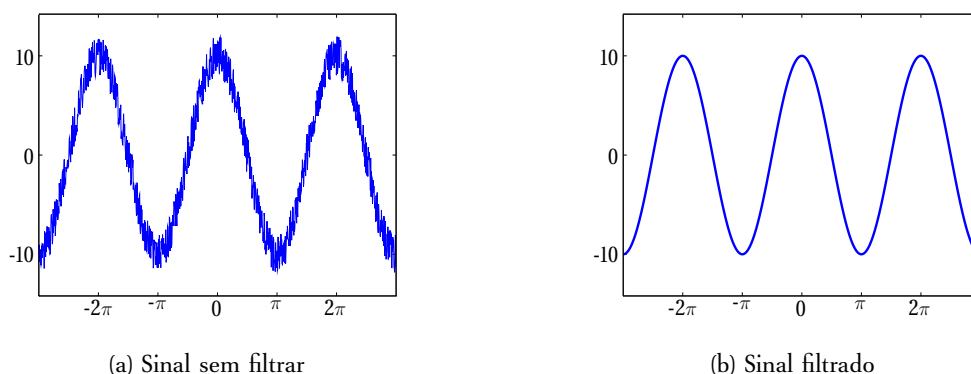


Figura 5: Efeito do filtro sobre um sinal com ruído

Agora vamos fazer uma suposição essencial: *as frequências que aparecem ao fazer o desenvolvimento de Fourier do ruído não coincidem com as frequências do sinal*. Na prática, nem sempre será legítimo supor isto⁴, uma vez que depende da natureza do sinal e do tipo de ruído (mais sobre tipos de ruído em [4]). Desta maneira, vamos ter uma função à qual podemos fazer o desenvolvimento em série de Fourier, que escrevemos distinguindo explicitamente as frequências que compõem o ruído.

$$(5.4) \quad f(t) = \sum_{\omega_k \text{ de la señal}} c_k \cdot e^{j\omega_k t} + \sum_{\omega_k \text{ del ruido}} c_k \cdot e^{j\omega_k t}.$$

Por simplicidade, podemos supor ainda que o primeiro somatório de (5.5) está composto por um único termo de frequência ω_r , de modo que o desenvolvimento de Fourier fica

$$(5.5) \quad f(t) = c_r \cdot e^{j\omega_r t} + \sum_{\omega_k \text{ del ruido}} c_k \cdot e^{j\omega_k t}.$$

⁴ Em cujo caso, deveria enfrentar-se o problema com uma perspetiva diferente.

Agora é suficiente que façamos passar o sinal por um circuito RLC. Desta forma, o sinal à saída vem dado por (4.9), e em nesse caso fica:

$$(5.6) \quad v_C(t) = H(\omega_r) \cdot c_r \cdot e^{j\omega_r t} + \sum_{\omega_k \text{ del ruido}} H(\omega_k) \cdot c_k \cdot e^{j\omega_k t}.$$

Ora bem, se escolhermos os valores de L e de C de forma que a frequência ω_r seja precisamente a frequência de ressonância do circuito (isto é, $\omega_r = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$), teremos que:

- $H(\omega_r)$ será relativamente alto (por exemplo, na Figura 4, seria $H(\omega_r) \approx 7$).
- $H(\omega_k)$ será quase nulo, uma vez que as frequências do ruído estão longe de ω_r . Assim $H(\omega_k) \approx 0$.

Em consequência temos que o sinal após passar pelo circuito é aproximadamente:

$$(5.7) \quad v_C(t) \approx H(\omega_r) \cdot c_r \cdot e^{j\omega_r t}.$$

Por esta razão, dizemos que o circuito funciona como **filtro**. Em particular, diz-se filtro passabanda porque apenas mantém as frequências que estão numa banda centrada em ω_r (fora da banda, $H(\omega) \approx 0$). Se o nosso sinal é um pouco mais complicado, seguramente exista um filtro mais complicado que se adapte às nossas necessidades. Alguns exemplos típicos são os filtros passa-baixa, que mantêm todas as frequências abaixo de uma frequência limiar, filtros passa-alta, filtros recusa-banda, bem como combinações dos anteriores.

Referencias

- [1] William E. Boyce. *Elementary Differential Equations*. Wiley, 2008.
- [2] Matthew Sadiku Charles Alexander. *Fundamentals of Electric Circuits*. McGraw-Hill Science, 2012.
- [3] Martin Hackworth. *AC RLC Circuits*.
- [4] Wikipedia. *Colors of noise*.